

# Вычисление суммы ряда

по АНДРЕЙ В. ЗОРИН

zoav1@uic.nnov.ru

Пусть случайная величина  $X$  имеет закон распределения  $P(X = \frac{1}{2n}) = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ . Найти  $EX$ .

По определению математического ожидания дискретной случайной величины,  $EX = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)2n(2n+1)}$ . Вычислим сумму этого ряда, используя СКА Maxima.

GCL (GNU Common Lisp) (2.5.2) Fri May 2 13:54:35 UTC 2003

Licensed under GNU Library General Public License

Dedicated to the memory of W. Schelter

Use (help) to get some basic information on how to use GCL.

Maxima 5.9.0 <http://maxima.sourceforge.net>

Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.

Dedicated to the memory of William Schelter.

This is a development version of Maxima. The function bug\_report() provides bug reporting information.

(C1) (logabs:true,assume(0<z,z<1))\$

Прежде всего убедимся, что стандартная процедура суммирования не решает задачи:

(C2) sum(2/(2\*n-1)/(2\*n)/(2\*n+1),n,1,inf),simpsum;

(D2) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^3 - n}$$

Поэтому вычислим сумму как значение ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n-1)(2n+1)}$  при  $z = 1$ .

(C3) f(z)=sum(2\*z^(2\*n+1)/(2\*n-1)/(2\*n)/(2\*n+1),n,1,inf);

(D3) 
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n-1)(2n+1)}$$

(C4) diff(%,z,3);

(D4) 
$$\frac{d^3}{dz^3} f(z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-2}$$

(C5) %,simpsum;

(D5) 
$$\frac{d^3}{dz^3} f(z) = \frac{2}{1-z^2}$$

(C6) block([eq:%],for i thru 3 do(eq:integrate(eq,z),  
eq:subst(solve(subst(0,z,rhs(eq))),eq)), logcontract(eq));

(D6) 
$$f(z) = -\frac{z^2 \log\left(-\frac{z-1}{z+1}\right) + \log\left(-\frac{z-1}{z+1}\right) + z(2 - \log(z^4 - 2z^2 + 1))}{2}$$

(C7) limit(rhs(%),z,1,minus),ratsimp;

(D7) 
$$\frac{\log 16 - 2}{2}$$

(C8)

Таким образом, искомое математическое ожидание есть  $\ln(4) - 1$ .