Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Материалы XVI Международной конференции

(*Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.*)

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2011

УДК 519.7
ББК 22.18
П 78

Под общей редакцией
Ю. И. Журавлева

П 78 **Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции** (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю. И. Журавлева. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. — 586 с.

ISBN 978-5-91326-161-8

Сборник содержит доклады, представленные на XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.), организованной при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-06036-г).

Для научных работников и специалистов в области математической кибернетики, дискретной математики, информатики и их приложений.

УДК 519.7
ББК 22.18

Редакционная группа:
В. Б. Алексеев, О. М. Касим-Заде, В. Н. Шевченко

Ответственный за выпуск: Н. Ю. Золотых

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 11-01-06036-г

ISBN 978-5-91326-161-8

Содержание

М. Б. Абросимов
Об одной гипотезе, связанной с вершинными расширениями соединений графов 16
Я. В. Акулов
О классах булевых функций, замкнутых относительно операции расширенной суперпозиции 20
В. Б. Алексеев, Р. Р. Омаров
О расстояниях от максимально-нелинейных булевых функций до почти аффинных функций 24
В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова
Полиномиальные алгоритмы решения задачи о независимом множестве для некоторых классов графов 28
М. А. Алехина, С. М. Грабовская
О методах повышения надежности схем и неветвящихся программ 30
М. А. Алехина, Д. М. Клянчина
Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в базисах, содержащих существенную линейную функцию и функцию вида $x_1^a \mathbin{\&} x_2^b$ 33
О. Г. Антоновская, В. И. Горюнов
К проблеме оптимизации процесса управления в системах с переменной структурой 38
Л. Г. Афраймович
Приближенный алгоритм решения многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой 42
А. В. Баркалов, Н. В. Шестакова
Оценка скорости сходимости одной итеративной процедуры решения биматричной игры 2×2 46
О. Ю. Барсукова
О надежности и сложности сумматора порядка n 50
С. Р. Беджанова
Полные проверяющие тесты для схем, реализующих дизъюнкцию 54

П. П. Бондаренко
Минимальные вершинные расширения цепей с вершинами двух типов 55
В. А. Бондаренко, А. В. Николаев
О связи между классом гиперграфов специального вида и свойствами вершин релаксаций разрезного многогранника . 58
Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова
Интерполяционные взаимно обратные соотношения и обобщение формулы Ворпицкого 62
Ю. В. Бородина
Синтез легкотестируемых схем для систем булевых функций из некоторых классов 67
Д. Б. Буй, Ю. А. Богатырёва
Теория мультимножеств: операции, структура, вычислимость 69
Д. Б. Буй, И. Н. Глушко
Обобщенная табличная алгебра, обобщенные исчисления строк и доменов и их эквивалентность 73
Д. Б. Буй, С. В. Компан
Формализация наследования в объектно-ориентированных базах данных. Простое и множественное наследование . . . 77
Д. Б. Буй, С. В. Компан
Формализация объектов, классов, методов в объектно-ориентированных базах данных 81
Д. Б. Буй, А. В. Пузикова
Полнота аксиоматики Армстронга 85
А. В. Бухман
Полиномиальные алгоритмы для распознавания сохранения некоторых множеств функциями, представленными полиномами 88
С. И. Веселов
О фасетах бимодулярного полиэдра 91
В. Ю. Винник, Т. С. Парфирова
Суперпозиции ациклических программ 92
Н. В. Власов
О сложности мультиплексорной функции в классе формул . 96

А. В. Власова
Об эволюционных параметрах конечных динамических систем, ассоциированных с графами 98

В. А. Воблый
Аналог формулы Моллоуса–Риордана для помеченных эйлеровых графов 102

А. А. Вороненко, Д. В. Чистиков
Расшифровка бесповторных функций запросами тождественности 105

М. Н. Вялый, С. П. Тарасов
О сложности задач регулярной реализуемости 109

А. В. Гавриков
О минимальных эйлеровых реконструкциях ориентированных графов 113

С. Б. Гашков, И. С. Сергеев
О сложности монотонных вычислений действительных многочленов 114

С. Ю. Городецкий
Учет ограничений в триангуляционных методах многоэкстремальной оптимизации 117

С. М. Грабовская
О надежности неветвящихся программ в базисах, содержащих нелинейную функцию двух переменных 122

Д. В. Груздев
О разбиении множества всех триангуляций точечных конфигураций на 64 подкласса 125

В. И. Грунская, М. Ю. Тихончев
Автоматное распознавание отмеченных орграфов 129

Е. В. Гуревич, Л. Б. Тяпаев
Анализ геометрических образов асинхронных автоматов . . 133

Д. А. Дагаев
Реализация формулами функций из некоторых классов трехзначной логики 136

А. Б. Дайняк
О графах с заданным числом независимых множеств 139

Г. А. Донец
Задачи комбинаторного распознавания 142

О. С. Дудакова
О порождающих системах специального вида для предполных классов монотонных функций k-значной логики 145

А. Г. Дьяконов
Задачи теории интерполяции, возникающие в алгебраическом подходе к распознаванию 147

А. А. Евдокимов, С. Е. Кочемазов, И. В. Отпущенников, А. А. Семенов
Символьные алгоритмы решения булевых уравнений в применении к исследованию дискретных моделей генных сетей . 151

А. А. Евдокимов, А. Л. Пережогин
Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети 154

В. А. Емеличев, В. В. Коротков
Анализ чувствительности векторной инвестиционной булевой задачи с упорядоченными критериями рисков Сэвиджа 159

А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин
Применение оптимизационных алгоритмов для одного класса обратных задач атмосферного электричества 162

Л. П. Жильцова, И. М. Мартынов
О свойствах деревьев вывода для стохастической КС-грамматики, имеющей вид «цепочки» 166

И. Я. Заботин, О. Н. Шульгина
О некоторых алгоритмах минимизации, основанных на отсечении множеств 169

В. А. Замараев
Оценка числа графов в наследственных классах с запрещенными графами маленького порядка 173

Н. Ю. Золотых, А. Ю. Чирков
О верхней оценке мощности минимального разрешающего множества пороговой функции 176

А. В. Зорин
Кибернетический подход к построению и анализу математической модели тандема двух перекрестков 179

М. А. Иорданский
Функциональные построения в теории графов 183
А. Н. Исаченко, Я. А. Исаченко
Полиэдральные аспекты оптимизационной задачи на циклических перестановках 187
А. В. Калинин, М. И. Сумин, А. А. Тюхтина
Оптимизационные методы решения прямых и обратных задач для квазистационарных электромагнитных процессов . . 191
Е. О. Карманова
О конгруэнциях графов 195
К. Д. Кириченко
Свойства шаблонов минимизации полиномиальных форм булевых функций 198
Д. И. Коган, Ю. С. Федосенко, Н. А. Дуничкина
Бикритериальные задачи обслуживания mobile-процессором рассредоточенных в одномерной рабочей зоне объектов . . . 202
Л. М. Коганов
Проверка методом передаточной функции одной перечислительной теоремы А. М. Каменецкого 205
И. Б. Кожухов, Ю. И. Кожухова
О продолжениях частичных полигонов 207
С. С. Коляда
О единичных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов 209
Д. Д. Комаров
Реберные 1-расширения некоторых деревьев 211
Ю. А. Комбаров
О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в некотором базисе . 215
Е. В. Константинова, А. Н. Медведев
Циклы длины девять в Pancake-графе 218
О. М. Копытова
Неисправности автоматов, сохраняющие их поведение 222
Е. В. Коротков
Поиск вставок в бактериальных генах 226

В. В. Костерин
Фрактальные методы оценки пробега автомобиля в системах спутникового мониторинга 230

В. В. Кочергин
Некоторые оценки сложности вентильных схем с кратными путями для недоопределенных матриц 235

А. А. Кочкаров, Л. И. Сенникова
Модели и задачи структурного распознавания в исследованиях социальных сетей 239

В. М. Краснов
Оценки сложности 1-самокорректирующихся схем для одной последовательности булевых функций 242

Т. И. Краснова
О конъюнкторной сложности самокорректирующихся схем для одной последовательности булевых функций 246

Н. Н. Кузюрин
Онлайновая упаковка прямоугольников в полосы 250

Е. А. Куликова
Сведение двух подклассов систем линейных неравенств к задачам распределения ресурсов 252

А. Н. Курганский
Связь вычислительных и динамических свойств коллективов автоматов в дискретной среде 255

С. А. Лавренченко
Построение квадрангуляций поверхностей с заданными свойствами 259

В. Б. Ларионов
О надструктуре некоторых классов функций k-значной логики 263

В. К. Леонтьев
Параметры Чоу 266

И. В. Лисаченко, В. И. Сумин
Нелинейная управляемая задача Гурса–Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости и их применения 268

О. А. Логачев, С. В. Смышляев, В. В. Ященко
ρ-уравновешенные булевы функции и их свойства 272

С. А. Ложкин, Б. Р. Данилов
Поведение функции Шеннона для задержки в одной модели схем из функциональных элементов 277
С. А. Ложкин, В. А. Коноводов
О синтезе и сложности формул с ограниченной глубиной альтернирования 281
А. М. Магомедов
Условия непрерывной реберной раскрашиваемости ассоциированных графов 284
А. А. Мазуров
О стационарных классах функций трехзначной логики . . . 286
А. И. Майсурадзе
Исследование метода главных компонент с дополнительными метрическими ограничениями 290
А. Н. Максименко
Об универсальных свойствах многогранника разрезов 294
Д. С. Малышев
Конечно определенные минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании 297
Н. К. Маркелов
О сложности периодических функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов 301
Д. О. Матов
Аффинные преобразования геометрических образов конечных автоматов 303
Г. А. Махина
Оценка обобщающей способности для монотонных алгоритмов классификации 307
Б. Ф. Мельников
Итерации конечных языков и недетерминированные конечные автоматы 311
Ю. В. Мерекин
О вычислении сложности по Арнольду двоичных слов 315
А. В. Михайлович
О замкнутых классах функций трехзначной логики, порожденных периодическими симметрическими функциями . . . 319

О. А. Мишулина, И. А. Круглов
Метод принятия решения комитетом нейронных сетей при решении плохо обусловленных задач восстановления функциональных зависимостей 323

Д. Б. Мокеев
Упаковки и покрытия 3-путей 327

Е. В. Морозов, Д. С. Романов
О тестах относительно локальных линейных слипаний входов схем 330

Р. Г. Мубаракзянов
О сложности некоторых функций для вероятностных вычислений 334

А. С. Нагорный
О свойствах теоретико-множественных операций над предполными классами трехзначной логики 336

Т. А. Новикова, В. А. Захаров
О применении антиунификации подстановок для проверки эквивалентности программ 340

А. Р. Нурутдинова, С. В. Шалагин
Распознавание подклассов марковских автоматов на основе последовательностей состояний конечной длины 344

Д. Ю. Панин
О некоторых свойствах одноместных монотонных функций многозначной логики 349

В. И. Пантелеев
Об одной последовательности мультиклонов 352

А. В. Панюков, Т. А. Панюкова
Применение дополнений паросочетаниями для задачи коммивояжера 355

Н. А. Перязев
Теория Галуа для клонов и суперклонов 359

В. И. Петренюк
Построение графов-обструкций ограниченного ориентируемого рода 363

Р. И. Подловченко
Конечные автоматы и алгебраические модели программ с позиции разрешимости проблемы эквивалентности 368

В. В. Подымов, В. А. Захаров
О двухленточных машинах, описывающих полугруппы с левым сокращением 372

В. Н. Потапов
О мощности компонент корреляционно-иммунных функций, совершенных раскрасок и кодов 376

Е. А. Пряничникова
Алгебры языков, представимых в размеченных графах . . . 380

А. М. Ревякин
Структурные свойства комбинаторных систем, описываемых субмодулярными функциями 384

М. Б. Резников, А. И. Цветков
Синтез стратегий выбора объектов в линейной зоне обслуживания двух mobile-процессоров 388

А. М. Романов
О гамильтоновых циклах в графах минимальных расстояний совершенных кодов 392

Д. С. Романов
О проверяющих тестах относительно перестановок переменных в булевых функциях 396

Д. С. Романов
О синтезе схем, допускающих проверяющие тесты константной длины 400

В. С. Рублев, А. В. Смирнов
NP-полнота задачи о наибольшем кратном потоке 403

В. С. Рублев, Е. А. Смирнова
Оптимизация вычислений объектных запросов системы управления данными DIM 408

О. А. Садовников
Уточненные оценки функции Шеннона в некоторых базисах схем из функциональных элементов, вложенных в единичный куб 412

А. А. Сапоженко
К вопросу о числе совершенных кодов 416

С. В. Сапунов
О взаимодействии мобильных агентов с топологической средой 419

В. Г. Саргсян
Максимальная мощность (k, l)-множества свободного от сумм в циклической группе 422

Я. Ю. Сафонова
Использование графовых моделей при распараллеливании метода Холецкого для решения разреженных симметричных СЛАУ 426

С. Н. Селезнева
О сложности k-значных функций в одном классе полиномов 430

С. В. Сидоров
О подобии некоторых верхнетреугольных матриц над кольцом целых чисел 434

В. В. Слободской
Моделирование работы ациклического алгоритма на многопроцессорной вычислительной системе 437

А. В. Смирнов
Потоки в кратных сетях специального вида 441

Т. Г. Смирнова
О структуре матриц оптимального локально-префиксного кодирования языков 445

П. И. Стецюк
Релаксационный субградиентный метод минимизации овражных выпуклых функций 449

Ю. М. Суворова, Е. В. Коротков
Граница смены триплетной периодичности в гене как область потенциальной склейки 454

В. И. Сумин
Метод вольтерровых функционально-операторных уравнений в теории оптимального управления распределенными системами 457

М. И. Сумин
О регуляризованной теореме Куна–Таккера и ее применении в оптимальном управлении и некорректных задачах 461
В. П. Тарасова
Оптимальный поиск экстремальной области функции 465
Е. А. Татаринов
Восстановление графа агентом с ограниченными ресурсами 469
В. А. Твердохлебов
Диагностика управляющих автоматов со счетно-бесконечными множествами состояний 473
Е. Е. Трифонова
О построении восстановлений баз данных для некоторых классов формул-ограничений 477
М. А. Трушников
Об одной задаче теории расписаний 481
Д. В. Трущин
Об оценках глубины α-пополнений систем функций трехзначной логики 484
А. Ю. Улесова
О сложности односторонних клеточных схем фиксированной высоты с кратными входами 487
Т. И. Федоряева
Разнообразие шаров в графах с фиксированными числом вершин и диаметром 491
Ю. С. Федосенко, А. С. Куимова, Д. В. Минаев
Задача синтеза стратегий обслуживания потока объектов в системе с накопительным компонентом 495
А. М. Федоткин
Управляющие конфликтные системы и аппроксимация потока Гнеденко–Коваленко 499
М. А. Федоткин, Е. В. Кудрявцев
Управляющие системы и механизм образования транспортных пачек на магистралях с интенсивным движением 503
М. А. Федоткин, М. А. Рачинская
Исследование математической модели трафика автомобилей на основе подхода Ляпунова–Яблонского 508

М. А. Федоткин, А. А. Федоткин
Кибернетический подход к изучению выходных процессов управления потоками Бартлетта 512

О. В. Хамисов
Построение глубоких отсечений в булевом программировании 516

В. Е. Хачатрян, Я. Г. Великая
Решение проблемы обобщенной минимизации для многоленточных автоматов с одной существенной лентой 520

Р. В. Хелемендик
О сведении задачи распознавания выполнимости формул логики линейного времени к распознаванию выполнимости формул логики высказываний 523

А. Н. Черепов
Свойства непрерывных детерминированных функций с задержкой 527

А. В. Чернов
О равномерной поточечной оценке приращения решения управляемого функционально-операторного уравнения 530

Б. В. Чокаев
О сложности распознавания предикатов в трехзначной логике 534

С. В. Шалагин
Сложность обобщенной распределенной полиномиальной модели на базе системы многочленов над конечными полями 539

И. К. Шаранхаев
О сравнении базисов при формульном представлении булевых функций 543

Я. А. Шарифов
Задача оптимального управления для систем с нелокальными условиями 545

Н. К. Шатохина
Восстановление графа мозаичной структуры агентами 548

В. И. Шевченко
О диагностике отождествления переменных в формулах булевых функций 552

В. Н. Шевченко
О сложности задач целочисленного линейного программирования с ограниченными минорами 554
В. Н. Шевченко, М. Е. Сморкалов
Численное нахождение количественных характеристик некоторых $\{0,1\}$-матриц 556
Г. В. Шевченко
О достаточности принципа максимума Понтрягина для одной нелинейной задачи оптимального управления 560
Д. С. Шелухин
Свойства минимальных нумераций корневых ордеревьев с выделенной вершиной 564
А. Е. Шиганов
Некоторые оценки сложности двоичных решающих диаграмм 568
Л. А. Шоломов
Декомпозиция недоопределенных данных 570
М. С. Шуплецов
О сложности реализации предикатов из некоторых классов предикатными схемами 573
А. Д. Яшунский
О скорости сходимости квазигрупповых свёрток распределений вероятностей 577

Об одной гипотезе, связанной с вершинными расширениями соединений графов

М. Б. Абросимов

mic@rambler.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Неориентированным графом называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное множество (множество вершин), а α — симметричное и антирефлексивное бинарное отношение на V(множество ребер).

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (k — натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) G^* является вершинным k-расширением G, то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;
2) G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Соединением двух графов $G_1 = (V_1,\ \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2,\ \alpha_2)$, не имеющих общих вершин, называется граф

$$G_1 + G_2 := (V_1 \cup V_2,\ \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1).$$

Граф $G_t = (V_t, \alpha_t)$ называется *тривиальным k-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G_t получается из графа G добавлением k вершин, соединением их со всеми вершинами графа G и друг с другом, то есть граф G_t есть соединение графа G и полного графа $K_k = (V_k, V_k \times V_k)$:

$$G_t = (V_t, \alpha_t) = (V \cup V_k, \alpha \cup V_k \times V_k \cup V \times V_k \cup V_k \times V).$$

Очевидно, что тривиальное k-расширение графа является и его вершинным k-расширением, причем $|V_t| = |V| + k$.

Понятие минимального вершинного k-расширения введено на основе понятия оптимальной k-отказоустойчивой реализации, которое было предложено Хейзом в работе [1] при построении модели отказоустойчивости, основанной на графах. Введем частичную операцию получения минимального 1-расширения графа, считая ее неопределенной для графов, которые имеют более одного минимального 1-расширения.

Пусть G — некоторый граф, а G^* — его минимальное вершинное 1-расширение. Обозначим через $(G)^*$ результат операции получения минимального вершинного 1-расширения графа G. Тогда если граф G имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение, то $(G)^* = G^*$. В противном случае результат операции получения минимального вершинного 1-расширения считается неопределенным для графа G. Далее нас будут интересовать графы вида $G + G^*$.

Вершина называется *полной*, если она смежна со всеми остальными вершинами графа. У полного графа K_n все вершины полные. Граф называется *предполным*, если у него есть хотя бы одна полная вершина. Предполный граф можно записать в виде: $K_1 + G$. Класс предполных графов является достаточно большим (см. [2]): n-вершинных предполных графов столько же, сколько всего неизоморфных $(n-1)$-вершинных графов.

Очевидно, что единственным минимальным вершинным 1-расширением графа K_n является граф K_{n+1}. Легко доказать три следующих результата.

Теорема 1. *Единственное минимальное вершинное 1-расширение графа $K_n + K_n^*$ имеет вид $K_n^* + K_n^*$, причем справедлива запись:*

$$(K_n + K_n^*)^* = (K_n + K_{n+1})^* = K_{2n+1}^* = \\ = K_{2n+2} = K_{n+1} + K_{n+1} = K_n^* + K_n^*.$$

Вполне несвязным n-вершинным графом O_n называется граф с пустым отношением смежности. Очевидно, что единственным минимальным вершинным 1-расширением графа O_n является граф O_{n+1}.

Теорема 2. *Единственное минимальное вершинное 1-расширение графа $O_n + O_n^*$ имеет вид $O_n^* + O_n^*$, причем справедлива запись:*

$$(O_n + O_n^*)^* = (O_n + O_{n+1})^* = O_{n+1} + O_{n+1} = O_n^* + O_n^*.$$

Цепью P_n называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = v_1, v_2, \ldots, v_n$ и $\alpha = (v_i, v_j) : |i - j| = 1$, а *циклом* C_n — граф $G = (V, \alpha)$, где $V = v_1, v_2, \ldots, v_n$ и $\alpha = (v_i, v_j) : |i - j| = 1 \cup (v_1, v_n), (v_n, v_1)$. Легко убедиться (см. [1]), что цикл C_{n+1} является минимальным вершинным 1-расширением цепи P_n.

Теорема 3. *Единственное минимальное вершинное* 1*-расширение графа* $P_n + P_n^*$ *имеет вид* $P_n^* + P_n^*$*, причем справедлива запись:*

$$(P_n + P_n^*)^* = (P_n + C_{n+1})^* = C_{n+1} + C_{n+1} = P_n^* + P_n^*.$$

На основании предыдущих результатов представляется разумным высказать более общее предположение (см. [4]).

Гипотеза 1. Пусть G — произвольный граф, а G^* — некоторое его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда граф вида $G+G^*$ всегда имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение и оно может быть представлено в виде G^*+G^*, то есть справедлива запись:

$$(G + G^*)^* = G^* + G^*.$$

Однако оказалось, что ситуация является более сложной, и удалось найти два контрпримера к этой гипотезе. Обозначим однородный n-вершинный граф порядка p через $R_{n,p}$. В работе [2] доказывается, что при четном n существует единственный с точностью до изоморфизма однородный граф $R_{n,n-2}$, причем он имеет вид $O_2 + \cdots + O_2$, а его единственным минимальным вершинным 1-расширением является тривиальное 1-расширение: $K_1+O_2+\cdots+O_2$.

Теорема 4. *Пусть* G *— граф вида* $R_{n,n-2}$*, а* G^* *— его минимальное вершинное* 1*-расширение. Тогда минимальное вершинное* 1*-расширение графа* $G+G^*$ *единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид* $R_{2n+2,2n}$*.*

Обозначим через G_{np2} граф, который получается из графа $K_1 + O_2 + \cdots + O_2$ удалением любого ребра, соединяющего две вершины степени $n-2$. В работе [2] доказывается, что при нечетном n существует единственный с точностью до изоморфизма граф вида G_{np2}, причем такой граф имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения: вида $O_2+O_2+\cdots+O_2$ и тривиальное K_1+G_{np2}.

Теорема 5. *Пусть* G *— предполный граф вида* G_{np2}*, а* G^* *— его минимальное вершинное* 1*-расширение вида* $O_2 + \cdots + O_2$*. Тогда граф* $G + G^*$ *имеет два неизоморфных минимальных вершинных* 1*-расширения, одно из которых имеет вид* $G^* + G^*$*, а второе имеет вид* $O_2 + \cdots + O_2$*.*

Таким образом, в общем виде гипотеза 1 является ошибочной. Однако для большого числа графов ее утверждение справедливо, что в дополнение к предыдущим теоремам 1–3 показывает и следующая

Теорема 6. *Пусть G — граф, неизоморфный графу вида $R_{n,n-2}$, а его тривиальное 1-расширение G^* является и его минимальным вершинным 1-расширением. Тогда минимальное вершинное 1-расширение графа единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид $G^* + G^*$, то есть справедлива запись:*

$$(G + G^*)^* = G^* + G^*.$$

Много ли графов попадает под действие этой теоремы? Как показывает следующее утверждение, это почти все предполные графы, но и кроме них многие графы имеют минимальное вершинное 1-расширение, которым является их тривиальное 1-расширение. Так, например, по материалам работы [3] для 7-вершинных графов: 405 графов из 1043 графов имеют минимальным вершинным 1-расширением тривиальное 1-расширение; для 6-вершинных: 65 из 155; для 5-вершинных: 10 из 33.

Следствие. *Пусть G — произвольный предполный граф не вида G_{np2}, а G^* — его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда граф вида $G + G^*$ имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение и оно может быть представлено в виде $G^* + G^*$, т. е. справедлива запись: $(G + G^*)^* = G^* + G^*$.*

Список литературы

[1] *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. — 1976. — V. C.25, № 9. — P. 875–884.

[2] *Абросимов М. Б.* Минимальные k-расширения предполных графов // Известия вузов. Математика. — 2003. — № 6 (493). — С. 3–11.

[3] *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения 4-, 5-, 6- и 7-вершинных графов. Саратов: СГУ, 2000. 26 с. Деп. в ВИНИТИ 06.09.2000, № 2352 В00.

[4] *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения графов: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 2001.

О классах булевых функций, замкнутых относительно операции расширенной суперпозиции

Я. В. Акулов

smileyarik@yandex.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Механико-математический факультет

В работе рассматривается задача о реализации булевых функций формулами специального вида. Вводится понятие пополнения систем булевых функций. Получено описание всех классов булевых функций, замкнутых относительно введенной операции.

Э. Пост получил полное описание семейства замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов функций двузначной логики [1, 2]. Как показал Пост, мощность этого множества является счетной. Напротив, известно [3], что множество всех замкнутых классов k-значной логики при $k \geqslant 3$ имеет континуальную мощность. В связи с этим исследование множества замкнутых классов многозначной логики сопряжено со значительными трудностями. В ряде работ рассматриваются другие операции замыкания, позволяющие получить более просто устроенное множество замкнутых классов. Обзор некоторых результатов, полученных в этом направлении, см., например, в [4]. Данная работа относится к этому направлению исследований. Вводится понятие операции расширенной суперпозиции, и рассматриваются системы булевых функций, получаемые путем пополнения замкнутых классов с помощью этой операции. Необходимые определения можно найти в [5]. Обозначения для замкнутых классов взяты согласно работам [6, 7]. Более развернутое описание свойств расширенной суперпозиции можно найти в [8].

Пусть F — множество булевых функций, содержащее все селекторные функции и замкнутое относительно операций введения несущественных переменных и переименования переменных (включая отождествление). Будем называть такие множества *инвариантными классами*. Равенство функций будем понимать с точностью до несущественных переменных. Поэтому операцию введения несущественных переменных в определении инвариантного класса можно опустить. Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех инвариантных классов булевых функций. Очевидно, что всякий замкнутый класс булевых функций, отличный от классов C, C_0 и C_1, является инвариантным.

Пусть $F \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{A} \subseteq P_2$. Пару таких множеств $(F, \mathfrak{A})$ будем называть *типом* булевых функций. Определим понятие *формулы над типом* $U = (F, \mathfrak{A})$ индуктивно.

1. Выражение $g(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, где $g \in F$; $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — символы переменных, $n \geqslant 1$, является формулой над U. Такие формулы будем называть *тривиальными* формулами над U.
2. Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ — формулы над U, $n \geqslant 1$, а $f \in \mathfrak{A}$. Выражение Φ вида $f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над U. Будем называть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ подформулами формулы Φ. Формулу Φ и все подформулы формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ будем также называть подформулами формулы Φ.

Заметим, что всякая формула над типом $(F, \mathfrak{A})$ является формулой над множеством $F \cup \mathfrak{A}$ и поэтому реализует некоторую булеву функцию. Способ реализации булевых функций формулами указанного вида будем называть операцией расширенной суперпозиции.

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_2$, $F \in \mathcal{F}$. *Пополнением* системы $\mathfrak{A}$ относительно класса F назовем множество всех булевых функций, реализуемых нетривиальными формулами над типом $(F, \mathfrak{A})$ (обозначение $[\mathfrak{A}]_F$). Отметим, что если F состоит только из селекторных функций, то $[\mathfrak{A}]_F = [\mathfrak{A}]$. Несложно доказать, что $[\mathfrak{A}]_F = [[\mathfrak{A}]]_F$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только пополнения замкнутых классов. Будем называть тип (F, A) *полным* (в P_2), если $[A]_F = P_2$. В работе [8] получен критерий полноты для произвольного типа булевых функций.

Будем называть типы булевых функций (A, F') и (A, F'') эквивалентными, если $[A]_{F'} = [A]_{F''}$. Будем называть тип (A, F) булевых функций *замкнутым*, если $[[A]_F]_F = [A]_F$. Здесь A — замкнутый класс, а F — инвариантный класс булевых функций.

Лемма. *Тип (A, F) замкнут тогда и только тогда, когда он эквивалентен типу $(A, [F])$.*

Заметим, что, вообще говоря, пополнение $[A]_F$ не всегда обладает свойствами замыкания. Пополнение $[A]_F$ обладает свойствами замыкания тогда и только тогда, когда тип (A, F) замкнут. Из леммы следует, что всякий замкнутый тип булевых функций эквивалентен некоторому типу (A, F), где A и F — замкнутые классы булевых функций. Будем называть класс B булевых функций R-замкнутым, если существуют такие два замкнутых класса булевых функций A и F, что $B = [A]_F$. Данная работа посвящена описанию всех R-замкнутых классов булевых функций.

Обозначим через $\overline{T}_{01}$ множество всех булевых функций, принимающих нулевое значение на единичном наборе и единичное значение на нулевом наборе. Пусть $\overline{L}_{01} = L \cap \overline{T}_{01}$. Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество, состоящее из классов булевых функций $T_{01} \cup \overline{T_{01}}$, $L_{01} \cup \overline{L_{01}}$, а также классов, получающихся из них добавлением констант.

Пусть A — замкнутый класс булевых функций. Будем обозначать через $l(A)$ множество всех булевых функций $h(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что существует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in A$, такая, что $h \leqslant g$. Положим $\mathfrak{S} = \{l(S), l(S_{01}), l(SM)\}$.

Обозначим через AS множество всех функций, принимающих одинаковые значения на любых двух противоположных наборах. Положим $AS_0 = AS \cap T_0$, $AS_1 = AS \cap T_1$. Положим $\mathfrak{Z} = \{S \cup AS, S \cup AS_0, S \cup AS_1\}$.

Пусть F — некоторый замкнутый класс булевых функций. Обозначим через G_F^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ множество всех булевых функций $g(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, удовлетворяющих следующему условию: для любых m наборов, на которых функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ принимает нулевое значение, существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, также принимающая на этих наборах нулевое значение. Обозначим через $\mathfrak{G}$ множество, состоящее из всевозможных классов вида G_F^m, классов, получающихся из них пересечением с классами $[T_0]_F$, $[M]_F$, а также классов, двойственных перечисленным.

Пусть NK — множество всех булевых функций, состоящее из константы 0 и таких функций, что их можно представить в виде $x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, $n \geqslant 1$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество, состоящее из классов NK, $NK \cup \{1\}$, а также двойственных к ним.

Пусть A — замкнутый класс. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция и она представима в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n) \& \ \ldots \ \& g_k(x_1, \ldots, x_n), \quad k \geqslant 1,$$

где $g_i(x_1, \ldots, x_n) \in A$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Обозначим через $K(A)$ множество всех функций, представимых в таком виде. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество, состоящее из классов $K(L)$, $K(L_0)$, $K(L_1)$, $K(L_{01})$, $K(SL)$, классов, получающихся из них добавлением констант, а также классов, двойственных к перечисленным.

Обозначим через $\mathfrak{P}_2$ множество всех замкнутых классов булевых функций. Несложно показать, что множества $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{P}_2$ не пересекаются. Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Множество F булевых функций является R-замкнутым классом тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$F \in \mathfrak{T} \cup \mathfrak{S} \cup \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{G} \cup \mathfrak{K} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{P}_2.$$

Автор выражает благодарность профессору А.Б. Угольникову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. — 1921. — V. 43, № 3. — P. 163–185.

[2] *Post E. L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton-London: Princeton Univ. Press, 1941. — V. 5. — P. 122.

[3] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.

[4] *Тарасова О. С.* Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановок // Математические вопросы кибернетики. — 2004. — Вып. 13. — С. 59–112.

[5] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2006.

[6] *Угольников А. Б.* Классы Поста. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, 2008.

[7] *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Математика. — 1988. — № 7 (314). — С. 79–88.

[8] *Акулов Я. В.* О полноте систем функций для классов расширенной суперпозиции // Вестник МГУ. Математика. Механика.— 2011. — № 1.

О расстояниях от максимально-нелинейных булевых функций до почти аффинных функций

В. Б. Алексеев, Р. Р. Омаров

vbalekseev@rambler.ru, rustamomarov@ya.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики

Булевы функции широко применяются в криптографии, в частности при построении различных систем шифрования. При атаках на эти системы часто пользуются «слабостями» этих функций. Одной из слабостей булевой функции является ее «близость» к классу аффинных функций. Мерой «удаленности» функции от этого класса является ее *нелинейность*. Обзор имеющихся результатов о нелинейности можно найти в книге [1].

Пусть n — произвольное натуральное число. Через V_n будем обозначать векторное пространство наборов длины n с компонентами из $\{0, 1\}$ с операцией $\oplus$ покоординатного сложения векторов по модулю 2.

Определение 1. Пусть f — булева функция от n переменных, то есть $f : V_n \to \{0, 1\}$. *Весом* $wt(f)$ булевой функции f называется количество наборов, на которых функция f равна 1.

Определение 2. Пусть f, g — булевы функции от n переменных. *Расстоянием* от булевой функции f до булевой функции g называется величина $dist(f, g) = wt(f \oplus g)$. *Расстоянием от f до множества M булевых функций от n переменных* называется величина $dist(f, M) = \min\limits_{g \in M} dist(f, g)$.

Определение 3. Пусть $x \in V_n$, $y \in V_n$. Через $\langle x, y\rangle$ будем обозначать *скалярное произведение* x и y: $\langle x, y\rangle = x_1y_1 \oplus \ldots \oplus x_ny_n$ (здесь $\oplus$ — это сложение по модулю 2).

Определение 4. Булева функция f от n переменных называется *аффинной*, если существуют $a = (a_1, \ldots, a_n) \in V_n$ и $c \in \{0, 1\}$, такие, что $f(x) = \langle a, x\rangle \oplus c = a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus c$. Множество всех аффинных булевых функций от n переменных будем обозначать A_n. Отметим, что для любой аффинной булевой функции $f(x)$ от n переменных, отличной от константы, $wt(f(x)) = 2^{n-1}$.

Определение 5. Расстояние $dist(f, A_n)$ от булевой функции $f(x)$ от n переменных до множества A_n аффинных булевых функций называется *нелинейностью* функции $f(x)$ и обозначается через N_f.

Лемма 1 [1]. *Для любой булевой функции $f(x)$ от n переменных справедливо неравенство $N_f \leqslant 2^{n-1} - 2^{n/2-1}$. Для четных n эта оценка достижима.*

Определение 6. Булевы функции $f(x)$ от $2n$ переменных, для которых $N_f = 2^{n-1} - 2^{n/2-1}$, называют *максимально-нелинейными* функциями (этот класс называют также классом *бент-функций*).

Определение 7. Через AE_n будем обозначать класс всех почти аффинных функций $g(x)$ от n переменных, а именно функций вида $g(x) = \langle a, x\rangle \oplus c \oplus x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$, где $a \in V_n$, $c \in \{0, 1\}$ и $\{i_1, \ldots, i_k\}$ — произвольное подмножество (возможно, пустое) множества $\{1, \ldots, n\}$.

Определение 8. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. *Класс Мэйорана–Мак-Фарланда* определяется как класс всех булевых функций $f(x, y)$ от $2n$ переменных вида $f(x, y) = \langle \pi(y), x\rangle \oplus \Phi(y)$, где π — произвольная подстановка на множестве V_n, а $\Phi(y)$ – произвольная булева функция от n переменных.

Известно, что все функции из класса Мэйорана–Мак-Фарланда являются максимально-нелинейными [1]. В статье [2] доказана следующая теорема.

Теорема 2 [2]. *Для всех функций $f(x, y)$ из класса Мэйорана–Мак-Фарланда от $2n$ переменных при всех $n \geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \leqslant dist(f, AE_{2n}) \leqslant 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}, \qquad (1)$$

причем обе границы достижимы. (*При $n = 1$ $dist(f, AE_{2n}) = 0$ для всех f.*)

Оценка (1) сохраняется, если к классу приближающих функций AE_{2n} добавить все функции, аффинно эквивалентные им [3].

В данной работе мы будем рассматривать в качестве приближающего класс функций, у которых в полиноме Жегалкина присутствует не более двух нелинейных слагаемых произвольной степени.

Определение 9. Обозначим через AE_n^2 класс функций от n переменных вида $g(x) = \langle a, x\rangle \oplus c \oplus x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} \oplus x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_m}$, где $a \in V_n$, $c \in \{0,1\}$, $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, \ldots, j_m\}$ — произвольные подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$.

Теорема 3. *Расстояние от функций из класса Мэйорана–Мак-Фарланда от $2n$ переменных до класса AE_{2n}^2 не меньше чем*

$$dist(f, AE_{2n}^2) \geqslant 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1}.$$

Доказательство. Пусть f — некоторая функция из класса Мэйорана–Мак-Фарланда от $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_{2n}$, а $g(x) = \langle a, x\rangle \oplus c \oplus X_A \oplus X_B$ — произвольная функция из класса AE_{2n}^2, где $X_A = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$и $X_B = x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_m}$, $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $B = \{j_1, \ldots, j_m\}$. Обозначим $f'(x) = f(x) \oplus \langle a, x\rangle \oplus c$. Тогда

$$wt(f(x) \oplus g(x)) = wt(f'(x)) + \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A \oplus X_B = 1}} (-1)^{f'(x)};$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A \oplus X_B = 1}} (-1)^{f'(x)} &= \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A = 1 \\ X_B = 0}} (-1)^{f'(x)} + \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A = 0 \\ X_B = 1}} (-1)^{f'(x)} = \\ &= \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A = 1}} (-1)^{f'(x)} + \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_B = 1}} (-1)^{f'(x)} - 2 \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_{A \cup B} = 1}} (-1)^{f'(x)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что $\{x : x \in V_{2n}, X_A = 1\} = \{x \oplus \xi^A : x \in L_A\} = \xi^A + L_A$, где $L_A = \{x : x_i = 0, i \in A\}$, а $\xi^A \in V_{2n} : \xi_i^A = 1, i \in A, \xi_i^A = 0, i \notin A$.

Тогда для некоторой функции $\tilde{f}(y)$ [1, с. 240] верно

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A = 1}} (-1)^{f'(x)} &= \sum_{x \in \xi^A + L_A} (-1)^{f'(x)} = \\ &\qquad 2^{\dim L_A - n} \sum_{y \in L_A^{\perp}} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \langle \xi^A, y\rangle} = \\ &\qquad\qquad = 2^{n - |A|} \sum_{y \in L_A^{\perp}} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \langle \xi^A, y\rangle}. \end{aligned} \tag{3}$$

Запишем (2) с учетом (3)

$$\sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ X_A \oplus X_B = 1}} (-1)^{f'(x)} =$$

$$= 2^{n-|A|} \sum_{y \in L_A^{\perp}} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \left\langle \xi^A, y \right\rangle} + 2^{n-|B|} \sum_{y \in L_B^{\perp}} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \left\langle \xi^B, y \right\rangle} -$$

$$- 2^{n-|A \cup B|+1} \sum_{y \in L_{A \cup B}^{\perp}} (-1)^{\tilde{f}(y) \oplus \left\langle \xi^{A \cup B}, y \right\rangle}.$$

Заметим, что функция $f(x)$ содержится в классе Мэйорана–Мак-Фарланда, следовательно, $wt(f'(x)) \geqslant 2^{2n-1} - 2^{n-1}$. Тогда

$$wt(f(x) \oplus g(x)) \geqslant 2^{2n-1} - 2^{n-1} - 2^{n-|A|} \cdot 2^{|A|} - 2^{n-|B|} \cdot 2^{|B|} - $$
$$- 2^{n-|A \cup B|+1} \cdot 2^{|A \cup B|} = 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1}.$$

В силу произвольности выбора $g(x)$ теперь получаем $dist(f, AE_{2n}^2) \geqslant 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1}$. ∎

При более детальном разборе с рассмотрением многих случаев можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Минимальное расстояние от функций из класса Мэйорана–Мак-Фарланда от $2n$ переменных до класса AE_{2n}^2 равно*

$$dist(f, AE_{2n}^2) = 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1} + 6 \left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right) - 8$$

при $n \geqslant 6$. При $n = 1, 2, 3, 4, 5$ оно равно $0, 0, 16, 88, 416$ соответственно.

При этом в классе Мэйорана–Мак-Фарланда существуют более устойчивые функции.

Теорема 5. *Для функции $f(x, y) = \langle x, y \rangle$ от $2n$ переменных верно равенство*

$$dist(\langle x, y \rangle, AE_{2n}^2) = 2^{2n-1} - 4 \cdot 2^{n-1}.$$

Список литературы

[1] *Логачёв О. А, Сальников А. А., Ященко В. В.* Булевы функции в теории кодирования и криптологии. — М.: Изд-во МЦНМО, 2004.

[2] *Алексеев В. Б., Омаров Р. Р.* Исследование одного параметра булевых функций, близкого к нелинейности // Научные ведомости Белгородского государственного университета. — 2009. — Т. 15 (70), № 12/1. — С. 81–87.

[3] *Алексеев В. Б., Омаров Р. Р.* О приближении одного класса максимально-нелинейных булевых функций почти линейными функциями // Тр. 8 Межд. Колмогоровских чтений. — Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. — С. 98–104.

Полиномиальные алгоритмы решения задачи о независимом множестве для некоторых классов графов

В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова

ave@uic.nnov.ru, DVZakh@rambler.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Через $\mathbf{FT}_k$ обозначаем класс всех графов, не содержащих поддеревьев с k листьями. Одним из основных результатов настоящей работы является

Теорема 1. *При любом k задача о наибольшем независимом множестве для графов из класса $\mathbf{FT}_k$ разрешима за полиномиальное время.*

Доказательство основано на следующем факте.

Лемма. *Если связный граф содержит не менее p вершин степени, большей 2, то в нем имеется поддерево с не менее чем $\sqrt{\frac{p}{3}}$ листьями.*

Доказательство. Вершину степени, большей или равной трем, будем называть перекрестком. Пусть G — связный граф с p перекрестками. Выберем какую-нибудь вершину a степени, большей 1, и построим для графа G дерево кратчайших путей T с корнем в вершине a. Это дерево можно построить с помощью стандартной процедуры поиска в ширину, в нем расстояние $d(x)$ от любой вершины x до корня равно расстоянию между этими вершинами в графе G. Допустим, дерево T имеет l листьев и $l < \sqrt{\frac{p}{3}}$. Тогда в дереве имеется l путей, соединяющих листья с корнем, эти пути покрывают все вершины графа. Среди них найдется путь P, содержащий не менее $\frac{p}{l}$ перекрестков графа. Каждый из этих перекрестков смежен хотя бы с одной вершиной вне пути P. Выберем для каждого перекрестка x на пути P одну из смежных с ним вершин $f(x)$ вне пути P. Так как T — дерево кратчайших путей, то разность $d(x) - d(f(x))$ может принимать только три значения: $-1, 0, 1$. Хотя бы одно из этих значений σ принимается не менее чем $\frac{p}{3l}$ раз. Пусть M — множество тех перекрестков пути P, для которых $d(x) - d(f(x)) = \sigma$. На множестве M функция f инъективна. Поэтому путь P вместе с вершинами из M и ребрами графа, соединяющими их с вершинами пути, образуют дерево с не менее чем $\frac{p}{3l} > \sqrt{\frac{p}{3}}$ листьями. ∎

Для класса графов $\mathbf{X}$ его k-расширением назовем множество всех графов, из которых удалением не более k вершин можно получить графы из $\mathbf{X}$. Известно [1], что если задача о независимом множестве для графов из класса $\mathbf{X}$ решается за полиномиальное время, то это верно и для его k-расширения при любом фиксированном k. Из леммы следует, что класс $\mathbf{FT}_k$ содержится в $3k^2$-расширении класса всех графов, у которых степени вершин не превосходят 2. Для таких графов задача о независимом множестве решается, очевидно, за линейное время. Отсюда следует справедливость теоремы 1.

Нам не удалось усилить теорему 1 до случая, когда запрещаются только порожденные деревья с большим числом листьев. Для промежуточного случая вписанных поддеревьев получены частные результаты, формулировки которых приводятся ниже.

Поддерево некоторого графа называется вписанным, если никакие три вершины этого поддерева не порождают треугольника в графе. Класс всех графов, не содержащих вписанных поддеревьев с k листьями, обозначаем через $\mathbf{FT}^*_k$.

Теорема 2. *При любом k задача о наибольшем независимом множестве для графов из класса $\mathbf{FT}^*_k$, не содержащих треугольников, разрешима за полиномиальное время.*

Теорема 3. *При любом k задача о наибольшем независимом множестве для субкубических графов из класса $\mathbf{FT}^*_k$ разрешима за полиномиальное время.*

Заметим, что из существования полиномиального алгоритма, решающего задачу о независимом множестве для всего класса $\mathbf{FT}^*_k$, следовала бы справедливость одного из бинарных вариантов гипотезы Шевченко [2], утверждающей, что задача целочисленного линейного программирования разрешима за полиномиальное время, если абсолютные величины миноров (расширенной) матрицы задачи ограничены сверху константой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00357.

Список литературы

[1] *Алексеев В. Е., Коробицын Д. В.* О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, № 4. — С. 34–40.

[2] *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Наука, 1995.

О методах повышения надежности схем и неветвящихся программ

М. А. Алехина, С. М. Грабовская

ama@sura.ru, swetazin@mail.ru

Пензенский государственный университет

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов (ФЭ) рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0; 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. При этом в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию φ, а в неисправном — функцию $\bar{\varphi}$. Для повышения надежности исходных схем Дж. фон Нейман использовал дублирование исходной схемы (3 экземпляра) и схему, реализующую функцию голосования (медиану) $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Позднее для повышения надежности использовались схемы, реализующие функции $x_1^{a_1}x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1}x_3^{a_3} \vee x_2^{a_2}x_3^{a_3}$, $a_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

В этой работе будем рассматривать реализацию булевых функций неветвящимися программами с оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе B. Неветвящиеся программы с оператором условной остановки [2] отличаются от схем из ФЭ наличием управляющей команды — команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы при выполнении определенного условия. Считаем, что оператор условной остановки срабатывает, когда на его вход поступает единица.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что схемы из ФЭ являются частным случаем неветвящихся программ с оператором условной остановки, точнее, схема из ФЭ является программой, в которой нет ни одного оператора условной остановки.

Предположим, что оператор условной остановки абсолютно надежен, а все функциональные операторы программы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах элементов.

Далее покажем (теорема 2), что для повышения надежности исходных программ, так же как в случае схем из ФЭ, можно использовать программы, реализующие функции $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1} x_3^{a_3} \vee x_2^{a_2} x_3^{a_3}$, $a_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}$.

Ненадежностью $N(Pr)$ программы Pr назовем максимальную вероятность ошибки на выходе программы Pr при всевозможных входных наборах.

Теорема 1 [3]. *В произвольном полном конечном базисе любую булеву функцию f можно реализовать схемой S, ненадежность которой $P(S) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$.*

Теорема 2. *Допустим, что в полном конечном базисе B любую булеву функцию f можно реализовать программой R_f с ненадежностью $N(R_f) \leqslant P(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$. Пусть программа Pr_g реализует некоторую функцию вида $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1} x_3^{a_3} \vee x_2^{a_2} x_3^{a_3}$ ($a_i \in \{0, 1\},\ i \in \{1,\ 2,\ 3\}$), а $N(Pr_g)$ — ненадежность программы Pr_g. Тогда программа*

$$\begin{array}{l} Pr_f : \\ y_1 = f^{a_1}[R_1] \\ y_2 = f^{a_2}[R_2] \\ y_3 = f^{a_3}[R_3] \\ Pr_g(y_1, y_2, y_3) \end{array}$$

реализует функцию f и при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$ выполняются неравенства

$$N(Pr_f) \leqslant N(Pr_g) + 3P^2(\varepsilon), \qquad (1)$$

$$N(Pr_f) \leqslant N(Pr_g) + 81\varepsilon^2. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть B — полный конечный базис, а f – произвольная булева функция. Обозначим через f^a функцию f, если $a=1$, и функцию $\bar{f}$, если $a=0$. Согласно условию функцию f^{a_i} $(i \in \{1,\ 2,\ 3\})$ можно реализовать программой R_i, функционирующей с ненадежностью $N(R_i) \leqslant P(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$. Пусть программа Pr_g реализует некоторую функцию g вида $g = x_1^{a_1}x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1}x_3^{a_3} \vee x_2^{a_2}x_3^{a_3}$ $(a_i \in \{0,1\},\ \ i \in \{1,\ 2,\ 3\})$. Используя по одному экземпляру программ R_1, R_2 и R_3 и подпрограмму $Pr_g(x_1,\ x_2,\ x_3)$, построим для функции f неветвящуюся программу Pr_f.

Пусть $\tilde{\beta}$ — произвольный входной набор программы Pr_f, а $P(R_i,\tilde{\beta})$ — вероятности ошибок на выходах программ R_i $(i \in \{1,2,3\})$ соответственно при входном наборе $\tilde{\beta}$. Обозначим $P_i = P(R_i,\tilde{\beta}),\ i \in \{1,2,3\}$. Ясно, что $\max\{P_1,P_2,P_3\} \leqslant \max\{N(R_1),N(R_2), N(R_3)\} \leqslant P(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$. Оценим вероятность ошибки $P(Pr_f,\tilde{\beta})$ программы Pr_f на наборе $\tilde{\beta}$:

$$
\begin{aligned}
&P(Pr_f,\tilde{\beta}) \leqslant (1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)\cdot N(Pr_g)+\\
&+[P_1(1-P_2)(1-P_3)+(1-P_1)P_2(1-P_3)+(1-P_1)(1-P_2)P_3]\cdot N(Pr_g)+\\
&+[P_1P_2(1-P_3)+(1-P_1)P_2P_3+P_1(1-P_2)P_3]\cdot 1+P_1P_2P_3\cdot 1 \leqslant\\
&\leqslant [(1-P_1)(1-P_2)+(1-P_1)P_2(1-P_3)+(1-P_1)(1-P_2)P_3]\cdot N(Pr_g)+\\
&+[P_1P_2+(1-P_1)P_2P_3+P_1(1-P_2)P_3] \leqslant\\
&\leqslant [(1-P_3)(1-P_1P_2)+(1-P_1)(1-P_2)P_3]N(Pr_g)+[P_1P_2+P_2P_3+P_1P_3] \leqslant\\
&\leqslant [1\underbrace{-P_1P_2}_{<0}+P_3\underbrace{(2P_1P_2-P_1-P_2)}_{<0}]\cdot N(Pr_g)+3P^2 \leqslant N(Pr_g)+3P^2(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Тогда $N(Pr_f) = \max\limits_{\tilde{\beta}} P(Pr_f,\tilde{\beta}) \leqslant \max\limits_{\tilde{\beta}}(N(Pr_g)+3P^2(\varepsilon)) = N(Pr_g)+3P^2(\varepsilon)$, т. е. $N(Pr_f) \leqslant N(Pr_g)+3P^2(\varepsilon)$. Таким образом, неравенство (1) доказано.

По теореме 1 функцию f^{a_i} $(i \in \{1,\ 2,\ 3\})$ можно реализовать схемой A_i (см. замечание 1), которая при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$ функционирует с ненадежностью $N(A_i) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$. Пусть $M = \max\{N(A_1),\ N(A_2),\ N(A_3)\}$. Тогда $M \leqslant 5\varepsilon+182\varepsilon^2$. Подставляя эту оценку для M в соотношение (1) вместо $P(\varepsilon)$ и учитывая условие $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$, получим неравенство $N(Pr_f) \leqslant N(Pr_g)+81\varepsilon^2$. ∎

Таким образом, соотношение (1), доказанное ранее [4] для схем из ФЭ, выполняется для неветвящихся программ с оператором условной остановки. А для повышения надежности неветвящихся программ удобно использовать соотношение (2), которое следует из соотношения (1) и теоремы 1.

Список литературы

[1] *Von Neuman J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata Studies / Eds. C. Shannon, J. Mc. Carthy. — Princeton University Press, 1956 (Русский перевод: Автоматы. — М.: ИЛ, 1956. — С. 68–139).

[2] *Чашкин А. В.* О среднем времени вычисления значений булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1997. — Т. 4, № 1. — С. 60–78.

[3] *Алехина М. А., Васин А. В.* О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. — 2009. — Т. 151, кн. 5. — С. 25–35.

[4] *Алехина М. А.* Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов. — Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2006.

Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в базисах, содержащих существенную линейную функцию и функцию вида $x_1^a \,\&\, x_2^b$

М. А. Алехина, Д. М. Клянчина

ama@sura.ru, davyda@bk.ru

Пензенский государственный университет

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе B, содержащем линейную функцию $l(x_1, \ldots, x_k)$ $(k \geqslant 2)$, существенно зависящую не менее чем от двух переменных, и некоторую функцию вида $x_1^a \& x_2^b$ $a, b \in \{0, 1\}$. Считаем, что схема реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы двоичного набора $\tilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Допустим, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε $(0 < \varepsilon < 1/2)$ переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном – константу 0.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ — вероятность появления $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$, при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где S — схема, реализующая $f(\tilde{x})$. Схему A, реализующую f, назовем *асимптотически оптимальной по надежности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Далее докажем, что в рассматриваемых базисах B для почти всех булевых функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$.

В работе [3] введено множество функций G_1, имеющих вид $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}, \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}$. Нетрудно проверить, что $|G_1| = 8$.

Обозначим через f^σ функцию f, если $\sigma = 1$, и функцию $\bar{f}$, если $\sigma = 0$, а схему, реализующую функцию f^σ $(\sigma \in \{0,1\})$, будем обозначать S^σ.

Пусть функция $g \in G_1$ (т. е. функция g имеет вид $g = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}, \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}$), а схема S_g реализует функцию g. Возьмем схемы S^{σ_i}, реализующие соответственно функции f^{σ_i}, $i \in \{1,2,3\}$. Соединим выход схемы S^{σ_i} с i-м входом схемы S_g $(i \in \{1,2,3\})$, построенную схему обозначим $\Phi(S^1, S^0)$. Нетрудно проверить, что схема $\Phi(S^1, S^0)$ реализует функцию f. Далее схему S^1 будем обозначать S.

Операция Φ по схемам S и S^0, реализующим булевы функции f и $\bar{f}$ соответственно, строит схему $\Phi(S, S^0)$, реализующую функцию f. Результат n-кратного применения $(n \in \mathbf{N})$ операции Φ к схемам S и S^0 будем обозначать $\Phi^n(S, S^0)$. Применение операции Φ к некоторым схемам S и S^0 при некоторых условиях на их ненадежности $P(S)$ и $P(S^0)$ приводит к схемам, имеющим более высокую надежность, чем исходная схема S. В том случае когда операция Φ применяется только к схемам S (т. е. когда все числа $\sigma_i = 1$), результат ее применения будем обозначать $\Phi(S)$. Если же операция Φ применяется только к схемам S^0 (т.е. когда все числа $\sigma_i = 0$), результат ее применения будем обозначать $\Phi(S^0)$.

В произвольном полном базисе справедливы леммы 1–3.

Лемма 1 [1]. *Допустим, что произвольную функцию f можно реализовать схемой S с ненадежностью не больше p ($p \leqslant 1/2$). Пусть S_g — схема, реализующая функцию $g \in G_1$ с ненадежностью $P(S_g)(P(S_g) \leqslant 1/2)$, причем v_0 и v_1 – вероятности ошибок схемы S_g на наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ соответственно. Тогда схема $\Phi(S, S^0)$ реализует функцию f с ненадежностью $P(\Phi(S, S^0)) \leqslant max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2$.*

Лемма 2 [2]. *Любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ верно неравенство $P(S) \leqslant 5,2\varepsilon$.*

Лемма 3 [3]. *Пусть схема S_φ реализует функцию $\varphi = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3}, \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}$ с ненадежностью $P(S_\varphi)$, причем w_0, w_1 — вероятности ошибок схемы S_φ на наборах $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 0), (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 1)$. Тогда можно построить такую схему S_g, реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)^{\sigma_3}$, что $P(S_g) \leqslant P(S_\varphi) + 2p_\oplus$ ($p_\oplus = max\{P(S_1), P(S_2)\}$, S_1 – любая схема, реализующая функцию $x_1 \oplus x_2$, S_2 — любая схема, реализующая функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ в рассматриваемом базисе), а для вероятностей ошибок v_1 и v_0 схемы S_g на наборах $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$ выполняются неравенства: $v_1, v_0 \leqslant max\{w_0, w_1\} + 2p_\oplus^2$.*

Замечание. Нетрудно проверить, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов любая схема, содержащая хотя бы один функциональный элемент и реализующая отличную от константы 0 функцию, имеет ненадежность не меньше ε при всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Теорема. *Пусть полный конечный базис B содержит линейную функцию $l(x_1, \ldots, x_k)$ ($k \geqslant 2$), существенно зависящую не менее чем от двух переменных, и некоторую функцию вида $x_1^a \& x_2^b$, $a, b \in \{0, 1\}$. Тогда в базисе B любую функцию f можно реализовать такой схемой C, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ верно неравенство $P(C) \leqslant \varepsilon + 100\varepsilon^2$.*

Доказательство. Поскольку базис B содержит линейную функцию $l(x_1, \ldots, x_k)$ ($k \geqslant 2$), существенно зависящую не менее чем от двух переменных, подстановкой переменных из нее можно получить либо линейную функцию двух переменных $l_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus c, c \in$

$\{0,1\}$, либо линейную функцию трех переменных $l_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus c, c \in \{0,1\}$. Тогда, используя базисный элемент с функцией $x_1^a x_2^b$ $(a,b \in \{0,1\})$, некоторую функцию вида $\varphi(x_1,x_2,x_3) = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \oplus x_3^{b_3}$ $(b_1,b_2,b_3 \in \{0,1\})$ реализуем схемой S_φ из двух элементов. Покажем, как строится схема S_φ.

1. Допустим, что из функции $l(x_1,\dots,x_k)$ $(k \geqslant 2)$ подстановкой переменных можно получить функцию вида $l_2(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus c$, $c \in \{0,1\}$. Моделируя формулу $l_2(x_1^a x_2^b, x_3)$, строим схему S_φ из двух элементов. Нетрудно видеть, что $l_2(x_1^a x_2^b, x_3) = x_1^a x_2^b \oplus x_3 \oplus c = x_1^a x_2^b \oplus x_3^{\bar{c}}$, т. е. $b_1 = a, b_2 = b, b_3 = \bar{c}$. Вычислим вероятности ошибок w_0 на наборе $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, 1)$ и w_1 на наборе $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, 0)$ на выходе схемы S_φ и получим $w_0 = \varepsilon$ и $w_1 = 0$.

2. Допустим, что из функции $l(x_1,\dots,x_k)$ $(k \geqslant 2)$ подстановкой переменных можно получить функцию вида $l_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus c$, $c \in \{0,1\}$. Моделируя формулу $l_3(x_1^a x_2^b, x_2, x_3)$, строим схему S_φ из двух элементов. Нетрудно видеть, что $l_3(x_1^a x_2^b, x_2, x_3) = x_1^{\bar{a}} x_2^b \oplus x_3 \oplus (c \oplus \bar{b}) = x_1^{\bar{a}} x_2^b \oplus x_3^{c \oplus b}$, т. е. $b_1 = \bar{a}, b_2 = b, b_3 = c \oplus b$. Вычислим вероятности ошибок w_0 на наборе $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, 1)$ и w_1 на наборе $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, 0)$ на выходе схемы S_φ и получим $w_0 = \varepsilon$ и $w_1 = 0$.

Таким образом, в каждом из двух случаев построена схема S_φ, для которой $max\{w_0, w_1\} = \varepsilon$.

По условию B — полный базис, следовательно, функции $(x_1 \oplus x_2)^{b_1}$, $(x_1 \oplus x_3)^{b_2} \in [B]$. По лемме 2 реализуем их такими схемами S_1 и S_2 соответственно, что $P(S_1) \leqslant 5,2\varepsilon$ и $P(S_2) \leqslant 5,2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Нетрудно видеть, что $\varphi((x_1 \oplus x_2)^{b_1}, (x_1 \oplus x_3)^{b_2}, x_1) = (x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)^{b_3} = g \in G_1$. Моделируя формулу $\varphi((x_1 \oplus x_2)^{b_1}, (x_1 \oplus x_3)^{b_2}, x_1)$, построим схему S_g, реализующую функцию $g \in G_1$. Нетрудно видеть, что $P(S_g) \leqslant 2\varepsilon + 2 \cdot 5,2\varepsilon = 12,4\varepsilon$. С помощью леммы 3 оценим вероятности ошибок v_0 и v_1 схемы S_g на наборах $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$ соответственно: $v_0, v_1 \leqslant max\{w_0, w_1\} + 2p_\oplus^2 \leqslant \varepsilon + 2(5,2\varepsilon)^2 \leqslant \varepsilon + 54,1\varepsilon^2$.

По лемме 2 произвольную булеву функцию f можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leqslant 5,2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Если $b_3 = 1$, то возьмем три экземпляра схемы S, реализующей функцию f. Используя три экземпляра схемы S и схему S_g, построим схему $\Phi(S)$, которая реализует функцию f. Оценим ненадежность схемы $\Phi(S)$, используя лемму 1. Получим неравенство $P(\Phi(S)) \leqslant max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2 \leqslant \varepsilon + 54,1\varepsilon^2 + 3(5,2\varepsilon) \cdot 12,4\varepsilon + 3(5,2\varepsilon)^2 \leqslant$

$\varepsilon + 167\varepsilon^2 \leqslant 1,35\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi^2(S)$. По лемме 1 оценим ненадежность схемы $\Phi^2(S)$. Получим $P(\Phi^2(S)) \leqslant \varepsilon + 54,1\varepsilon^2 + 3(1,35\varepsilon) \cdot 12,4\varepsilon + 3(1,35\varepsilon)^2 \leqslant \varepsilon + 110\varepsilon^2 \leqslant 1,12\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. По схеме $\Phi^2(S)$ построим схему $\Phi^3(S)$. По лемме 1 оценим ненадежность схемы $\Phi^3(S)$. Получим $P(\Phi^3(S)) \leqslant \varepsilon + 54,1\varepsilon^2 + 3(1,12\varepsilon) \cdot 12,4\varepsilon + 3(1,12\varepsilon)^2 \leqslant \varepsilon + 100\varepsilon^2$. Схема $\Phi^3(S) = C$ — искомая.

Если $b_3 = 0$, то возьмем три экземпляра схемы S^0, реализующей функцию $\bar{f}$, и повторим рассуждения предыдущего абзаца. ∎

Таким образом, из теоремы и замечания следует, что в рассматриваемых базисах все функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (кроме функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые можно реализовать абсолютно надежно, и, быть может, константы 0) можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$.

Список литературы

[1] *Алехина М. А.* Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем. — Пенза: Информац.-издат. центр ПГУ, 2006.

[2] *Алехина М. А.* О надежности схем в базисах, содержащих медиану // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. — С. 13–17.

[3] *Алехина М. А., Васин А. В.* О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия «Физико-математические науки». Казань: Изд-во Казанского университета. — 2009. — Т. 151, № 2. — С. 25–35.

К проблеме оптимизации процесса управления в системах с переменной структурой

О. Г. Антоновская, В. И. Горюнов

olga.antonovsckaja@yandex.ru, pmk@unn.ac.ru

НИИ прикладной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Известно, что проблема выбора оптимальных значений параметров в таких нелинейных динамических системах, как синтезаторы частоты [1] при работе в заданном диапазоне частот, является центральной [2] и, в том числе, при синтезе комбинированного управления [3].

Настоящий доклад связан с практически важной прикладной задачей реализации надежной радиосвязи, в основе которой лежит использование управляемых синтезаторов частот (СЧ) [1], построенных на базе импульсных систем фазовой синхронизации. В таких системах используется широтно-импульсная модуляция (ШИМ) управляющего сигнала, и поэтому их математические модели (ММ) являются частным случаем систем с переменной структурой (СПС), порядок смены дифференциальных уравнений в которых определяется динамическими свойствами фазовых траекторий движения и реализуется в моменты переключения управляющих импульсов. Именно в силу этого обстоятельства изучение динамики ММ таких СЧ осуществляется на основе применения метода точечных отображений.

В настоящем докладе отмечаются основные моменты решения проблемы синтеза оптимального управления в системах управления указанного класса с помощью применения корневого критерия и метода функций Ляпунова. В отличие от обычного подхода к использованию корневого критерия и, в том числе, при выборе оптимальных значений параметров, в случае работы синтезатора в заданном (широком) диапазоне параметры характеристического уравнения, определяющего не только устойчивость, но и скорость переходных процессов, являются интервальными. Для исследования устойчивости при этом можно воспользоваться рекомендациями и приемами исследования робастных систем [4].

Анализ точечных отображений различных сечений подпространств, соответствующих постоянству величины управляющего воздействия, в зависимости от параметров СЧ [5] показал, что в зависимости от параметров системы основному синхронному режиму соответствует устойчивая неподвижная точка одного из двух точечных отображений, для которых можно получить аналитические выражения функций последования. Но тогда, в общеметодологическом плане, исходное характеристическое уравнение принимает вид полинома

$$P_n(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^{n-k} \qquad (\underline{a}_k \leqslant a_k \leqslant \bar{a}_k), \tag{1}$$

в котором коэффициенты, вследствие зависимости от интервальных параметров, также интервальны. При замене $p_{\text{НОВ}} = rp_{\text{СТ}}$,

$$P_n(p) \to H(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^{n-k} \qquad (\underline{b}_k \leqslant b_k \leqslant \bar{b}_k), \tag{2}$$

на плоскости корней при нахождении $r = r_{opt}$ контур, относительно которого производится исследование (единичная окружность — для дискретных систем и мнимая ось — для непрерывных систем), не зависит от r, причем r выступает в роли параметра, по которому производится оптимизация, при этом

$$\underline{b}_k = \underline{a}_k r^{n-k}, \qquad \bar{b}_k = \bar{a}_k r^{n-k}, \tag{3}$$

т. е. параметр r входит в коэффициенты $H(p)$ существенно нелинейно, что и составляет основную сложность задачи [6].

Поскольку синтезатор частоты в современном физическом исполнении — дискретная система управления, то в общем случае при определении значения $r = r_{opt}$ такого, что при $r_{opt} \leqslant r \leqslant 1$ $H(p)$ устойчив, можно в соответствии с критерием Корсакова [6] ограничиться анализом условий невыхода в пространстве r, a_k за границы области устойчивости, если известно, что при $r = 1$ $H(p)$ устойчив. В этом случае условие расположения в сторону устойчивости от границ N_+, N_- и N_φ соответствует выполнению неравенств $H(+1) > 0$, $(-1)^n H(-1) > 0$ и $\det(A_k - B_k) > 0$, где A_k и B_k — матрицы Корсакова полинома $H(p)$ [7].

При рассмотрении выполнимости условия $\det(A_k - B_k) > 0$ после замены в (3) $b_k \to a_k r^{n-k}$ основная сложность состоит в нахождении выражения для $\min\limits_{a_k} \det(A_k - B_k) > 0$ и в общем случае сводится к использованию приемов нелинейного программирования. В этой ситуации трудно переоценить примеры конкретного анализа определения $r = r_{opt}$, как это оказалось, в частности, в случае синтезатора частот с пропорционально-интегрирующим фильтром. В этом примере, несмотря на существенно нелинейное вхождение параметров в характеристическое уравнение, удалось получить аналитическое выражение не только для $r = r_{opt}$, но и для остальных выбираемых параметров, и, в том числе, для параметров фильтра. Последнее позволило получить фундаментальный результат, заключающийся в том, что в линейном приближении введение инерционности в цепи обратной связи, в отличие от безынтервального изменения параметров, может привести к ускорению переходных процессов. А в связи с тем, что увеличение диапазона интервальности приводит к расширению области фазового пространства, в которой реализуются переходные движения, принципиально существенной становится необходимость учета нелинейности исследуемой динамической системы.

В настоящем докладе предлагается использование для этой цели концепции применения функций Ляпунова к интервально-неопределенным системам [7]. Учет интервальности параметров с оценкой сверху размеров соответствующей области фазового пространства позволяет трансформировать постановку вопроса в задачу построения функции Ляпунова, удовлетворяющей заданному ограничению [7]. Так, положительно определенная квадратичная форма будет функцией Ляпунова дискретной динамической системы в том и только том случае, когда

$$\max_{i=1,\dots,n}\{|z_i|^2-1\} \leqslant \max_{V=V_0}\frac{\Delta V}{V} < 0, \tag{4}$$

где z_i — корни характеристического уравнения, определяющего устойчивость системы $|z_i| < 1, i = 1, 2, ..., n$. При этом всегда существует такая квадратичная функция Ляпунова, для которой обеспечивается максимальный запас знакоотрицательности первой разности в силу уравнений системы [7]. Использование этой квадратичной функции Ляпунова позволило получить такие интервальные оценки параметров системы, при которых построенная функция является функцией Ляпунова системы с интервально изменяющимися коэффициентами. Оценки содержат абсолютные величины корней характеристического уравнения при одном конкретном значении параметров системы из области устойчивости и зависят от элементов матрицы перехода к каноническим координатам.

Список литературы

[1] *Левин В. А., Малиновский В. И., Романов С. К.* Синтезаторы частот с импульсно-фазовой автоподстройкой. — М.: Радио и связь, 1989.

[2] *Goryunov V. I.* On the feedback parameter optimization for the robust stable frequency synthesizer // Progress of nonlinear science: Proceedings of International Conference, dedicated to the 100-th Anniversary of A.A. Andronov. V. 3. — Nizhny Novgorod, 2002. — P. 159–163.

[3] *Antonovskaya O. G., Goryunov V.Í., Palochkin Yu.Ṕ.* On the synthesis of combined control by nonlinear phenomena analysis for frequency synthesizer working in wide band // 2-nd IEEE International Conference on Circuits and Systems of Communications: Proceedings, — Moscow, 2004.

[4] *Джури Э. И.* Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 5. — С. 3–28.

[5] *Антоновская О. Г., Горюнов В. И.* О влиянии диссипации энергии на динамику астатической системы с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала // Вестник ННГУ, Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. — № 4. — С. 141–145.

[6] *Корсаков Г. Ф.* О количестве корней полинома вне круга // Математические заметки. — 1973.— Т. 13, № 1. — С. 3–12.

[7] *Антоновская О. Г., Горюнов В. И.* К оптимизации алгоритма использования прямого метода Ляпунова при исследовании процессов в интервально-неопределенных системах // VIII Международный семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления»: Тезисы докладов. — М., 2004.— С. 12–13.

Приближенный алгоритм решения многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой

Л. Г. Афраймович

levafraimovich@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Рассматриваются вопросы решения многоиндексных задач (целочисленного) линейного программирования транспортного типа [1]. В качестве метода решения предлагается подход, основанный на сводимости многоиндексных транспортных задач к потоковым алгоритмам [2, 3, 4]. Для класса многоиндексных задач с декомпозиционной структурой строится схема сведения, позволяющая определить решение исходной многоиндексной задачи через циклическую декомпозицию потока минимальной стоимости вспомогательной потоковой задачи. На основании разработанного метода предлагается эвристический алгоритм поиска приближенного решения NP-трудных многоиндексных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и матрицей стоимостей общего вида.

Многоиндексные транспортные задачи

При постановке многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа воспользуемся формализацией, предложенной в [1]. Пусть $s \in N$ и $N(s) = \{1, 2, \ldots, s\}$. Каждому числу l поставим в соответствие параметр j_l, называемый индексом, который принимает значения из множества $J_l = \{1, 2, \ldots, n_l\}$, где $n_l \geqslant 2$, $l \in N(s)$. Пусть $f = \{k_1, k_2, \ldots, k_t\} \subseteq N(s)$. Набор значений индексов $F_f = (j_{k_1}, j_{k_2}, \ldots, j_{k_t})$ будем называть t-индексом, а множество всех t-индексов обозначим через E_f.

Пусть $f' \subseteq f'' \subseteq N(s)$, где $f' = \{k'_1, k'_2, \ldots, k'_{t'}\}$, $f'' = \{k''_1, k''_2, \ldots, k''_{t''}\}$, тогда обозначим $F_{f'} = (F_{f''})_{f'}$, если $F'_f = (j_{k'_1}, j_{k'_2}, \ldots, j_{k'_{t'}})$, $F''_f = (j_{k''_1}, j_{k''_2}, \ldots, j_{k''_{t''}})$ и $j'_{k'_i} = j''_{k'_i}$, $i = \overline{1, t'}$. Если $F_{f'} \in E_{f'}$, $F_{f''} \in E_{f''}$, где $f', f'' \subseteq N(s)$ и $f' \cap f'' = \varnothing$, то через $F_{f'}F_{f''}$ обозначим такой набор, что $F_{f'}F_{f''} \in E_{f' \cup f''}$ и $(F_{f'}F_{f''})_{f'} = F_{f'}$, $(F_{f'}F_{f''})_{f''} = F_{f''}$. Далее определим $\overline{f} = N(s) \setminus f$, тогда согласно введенному обозначению $F_{N(s)} = F_f F_{\overline{f}}$, если $F_f = (F_{N(s)})_f$ и $F_{\overline{f}} = (F_{N(s)})_{\overline{f}}$.

Каждому набору F_f поставим в соответствие действительное число z_{F_f}, $F_f \in E_f$. Данное отображение множества t-индексов E_f в множество действительных чисел является t-индексной матрицей и обозначается $\{z_{F_f}\}$.

Пусть M — заданное множество, $M \subseteq 2^{N(s)}$; $a_{F_{\overline{f}}}$, $b_{F_{\overline{f}}}$ — заданные $|\overline{f}|$-индексные матрицы свободных коэффициентов, $0 \leqslant a_{F_{\overline{f}}} \leqslant b_{F_{\overline{f}}}$, $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$, $f \in M$; $\{c_{F_{N(s)}}\}$ — заданная s-индексная матрица коэффициентов целевой функции; $\{x_{F_{N(s)}}\}$ — s-индексная матрица неизвестных. Тогда многоиндексная транспортная задача линейного программирования формализуется как:

$$a_{F_{\overline{f}}} \leqslant \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\overline{f}}} \leqslant b_{F_{\overline{f}}}, \quad F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}, \quad f \in M; \tag{1}$$

$$x_{F_{N(s)}} \geqslant 0, \quad F_{N(s)} \in E_{N(s)}; \tag{2}$$

$$\sum_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}} \to \min\,. \tag{3}$$

Задачу (1)–(3) будем обозначать $w(s; M; n_1, \ldots, n_s; \{a_{F_{\overline{f}}}\}, \{b_{F_{\overline{f}}}\}, f \in M; \{c_{F_{N(s)}}\})$. Класс всех задач вида (1)–(3) при фиксированном множестве M обозначим $W(M)$.

Многоиндексные задачи с декомпозиционной структурой

Нас будет интересовать построение подклассов многоиндексных задач, которые могут быть сведены согласно концепции, введенной в [3], к потоковым задачам. Оказывается, что одним из таких подклассов является класс многоиндексных транспортных задач со специальной декомпозиционной структурой. Приведем формализацию данного класса.

Определение 1. *Пусть* $M \subseteq 2^{N(s)}$ *и* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *— разбиение множества* $N(s)$. *Будем говорить, что* M *является* $f_1, f_2, \ldots, f_k$*-декомпозиционным, если* $M \subseteq \{\overline{f_i} | i = \overline{1,k}\} \cup \{\overline{f_i \cup f_{i+1}} | i = \overline{1, k-1}\}$.

Определение 2. *Пусть* $c_{F_{N(s)}}$ *—* s*-индексная матрица и* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *— разбиение множества* $N(s)$. *Будем говорить, что многоиндексная матрица* $\{c_{F_{N(s)}}\}$ *является* $f_1, f_2, \ldots, f_k$*-декомпозиционной, если найдутся такие многоиндексные матрицы* $\{d_{F_f}\}$, $f \in B$, *что* $c_{F_{N(s)}} = \sum_{f \in B} d_{(F_{N(s)})_f}$, где $B = \{f_i | i = \overline{1,k}\} \cup \{f_i \cup f_{i+1} | i = \overline{1, k-1}\}$.

Определение 3. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *— разбиение множества* $N(s)$*, тогда через* $W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ *обозначим следующий класс многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой*

$$\begin{aligned} &W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k) = \\ &\quad = \{w(s; M; n_1, n_2, \ldots, n_s; \{a_{F_{\overline{f}}}\}, \{b_{F_{\overline{f}}}\}, f \in M; \{c_{F_{N(s)}}\}) \mid \\ &\qquad M \text{ и } c_{F_{N(s)}} \text{ являются } f_1, f_2, \ldots, f_k\text{-декомпозиционными}\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *— разбиение множества* $N(s)$*. Тогда существует алгоритм решения задач класса* $W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$*, требующий* $O(|E_{N(s)}|^3 \log^2 |E_{N(s)}|)$ *вычислительных операций.*

Далее, если w — задача линейного программирования, то через w_Z обозначим соответствующую задачу целочисленного линейного программирования. Пусть W — произвольный класс задач линейного программирования. Соответствующий класс задач целочисленного линейного программирования определим как $W_Z = \{w_z | w \in W\}$.

Теорема 2. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *— разбиение множества* $N(s)$*. Тогда класс* $W_Z^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ *разрешим за полиномиальное время.*

Приближенное решение целочисленных многоиндексных задач

В общем случае многоиндексные задачи целочисленного линейного программирования являются NP-трудными [5]. Также известно, что в общем случае для многоиндексных задач целочисленного линейного программирования не существует полиномиальных ε-приближенных алгоритмов для любых $\varepsilon \geqslant 0$, иначе P=NP [6]. Более того, можно показать отсутствие эффективных приближенных алгоритмов даже в классе целочисленных многоиндексных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и матрицей стоимостей общего вида.

Теорема 3. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *— разбиение множества* $N(s)$*. Тогда существует такое* $f_1, f_2, \ldots, f_k$*-декомпозиционное множество* M*, что для задач класса* $W_Z(M)$ *не существует полиномиального* ε*-приближенного алгоритма для любых* $\varepsilon \geqslant 0$*, иначе* P=NP.

Для поиска приближенного решения NP-трудных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и матрицей стоимостей общего вида предлагается следующий подход.

Будем искать многоиндексную матрицу стоимостей, обладающую требуемыми декомпозиционными свойствами и являющуюся наиболее «близкой» к матрице стоимостей общего вида исходной задачи. Далее находим решение вспомогательной задачи с исходной системой ограничений и найденной матрицей стоимостей. Для поиска решения вспомогательной задачи можно воспользоваться полиномиальным алгоритмом решения задач класса $W_Z^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ (см. теорему 2). Найденное решение будет являться приближенным решением исходной многоиндексной задачи целочисленного линейного программирования. Полученное приближенное решение может быть использовано, например, как достижимая оценка при решении NP-трудных многоиндексных задач методом ветвей и границ.

Работе выполнена при частичной поддержки гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-3473.2010.1).

Список литературы

[1] *Раскин Л. Г., Кириченко И. О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. — М.: Радио и связь, 1982.

[2] *Афраймович Л. Г., Прилуцкий М. Х.* Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. — 2006. № 6. — С. 194–205.

[3] *Афраймович Л. Г.* Циклическая сводимость многоиндексных систем линейных неравенств транспортного типа // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. № 4. — С. 83–90.

[4] *Афраймович Л. Г.* Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой // Автоматика и телемеханика. — 2011. № 5 (принято к печати).

[5] *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.

[6] *Crama Y., Spieksma F. C. R.* Approximation algorithms for three-dimensional assignment problems with triangle inequalities // European Journal of Operational Research. — 1992. V. 60. — P. 273–279.

Оценка скорости сходимости одной итеративной процедуры решения биматричной игры 2×2

А. В. Баркалов, Н. В. Шестакова

4nvsh@mail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Биматричная 2×2 игра задается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

в которых строки соответствуют стратегиям первого игрока, столбцы — стратегиям второго, а элементы матриц представляют собой выигрыши первого и второго игроков соответственно [1].

Пусть $P = (p, 1-p)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, $Q = (q, 1-q), 0 \leqslant q \leqslant 1$, — смешанные стратегии игроков в игре (1). Тогда решением игры (1) является решение (P^0, Q^0) системы неравенств (ситуация равновесия по Нэшу)

$$(\forall p \in [0,1]) \quad E_1\left(P^0, Q^0\right) \geqslant E_1\left(P, Q^0\right),$$

$$(\forall q \in [0,1]) \quad E_2\left(P^0, Q^0\right) \geqslant E_2\left(P^0, Q\right),$$

где символами E_1, E_2 обозначены математические ожидания выигрышей первого и второго игроков соответственно. Введем для игры (1) стратегии

$$i \in \mathrm{BR}(Q) = \mathrm{Arg} \max_{1 \leqslant k \leqslant 2} E_1(k, Q), \quad j \in \mathrm{BR}(P) = \mathrm{Arg} \max_{1 \leqslant k \leqslant 2} E_2(P, k), \tag{2}$$

где

$$E_1(k, Q) = a_{k1}q + a_{k2}(1-q), \quad E_2(P, k) = b_{1k}p + b_{2k}(1-p).$$

Чистая стратегия i (j) из (2) является наилучшим ответом первого (второго) игрока на известную смешанную стратегию партнера.

Для биматричной игры итеративный процесс Брауна можно определить следующим образом. Пусть игра (1) повторяется в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2 \ldots$, причем в каждый момент времени $t > 0$ игроки выбирают текущие чистые стратегии в соответствии с (2), т. е.

$$i(t+1) \in \mathrm{BR}(Q(t)), \quad j(t+1) \in \mathrm{BR}(P(t)), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $P(0)$, $Q(0)$ — произвольные стратегии игроков,

$$P(t{+}1) = \frac{t}{t+1}P(t) + \frac{1}{t+1}P_{i(t+1)}, \quad Q(t{+}1) = \frac{t}{t+1}Q(t) + \frac{1}{t+1}Q_{j(t+1)} \tag{4}$$

P_i, Q_j — смешанные стратегии, соответствующие чистым стратегиям i, j из (3).

Предельные точки последовательности $\{(P(t),\, Q(t)),\ t = 1, 2, \ldots\}$, построенной по правилам (3), (4), являются ситуациями равновесия игры (1) (см., например, [2]).

Пусть в игре (1) имеется единственная вполне смешанная ситуация равновесия $(P^0,\, Q^0)$ и $a_{11} > a_{21}$. Тогда множества BR из (2) будут определяться отношениями

$$\mathrm{BR}(Q) = \begin{cases} 1, & q \geqslant q^0, \\ 2, & q < q^0, \end{cases} \qquad \mathrm{BR}(P) = \begin{cases} 2, & p \geqslant p^0, \\ 1, & p < p^0. \end{cases} \tag{5}$$

Примем, что в методе Брауна при выборе очередной чистой стратегии в моменты времени $t > 1$ вместо (5) используются соотношения

$$\mathrm{BR}(Q(t)) = \begin{cases} 1, & q(t) \geqslant q^0 + \delta(t), \\ 2, & q(t) \leqslant q^0 + \delta(t), \end{cases} \quad \mathrm{BR}(P(t)) = \begin{cases} 2, & p(t) \geqslant p^0 + \varepsilon(t), \\ 1, & p(t) \leqslant p^0 + \varepsilon(t), \end{cases} \tag{6}$$

где $\delta(t) = \frac{q^0}{t} + \frac{j(t)-2}{t}$, а $\varepsilon(t) = \frac{p^0}{t} + \frac{i(t)-2}{t}$.

Использование (6) для выбора чистой стратегии соответствует подстановке в (3) вместо точки $(P(t),\, Q(t))$ той точки последовательности, которая получилась бы на следующем шаге итерационного процесса Брауна при сохранении текущей чистой стратегии — точки $(\overline{P}(t+1),\, \overline{Q}(t+1))$, которая получается из $(P(t),\, Q(t))$ при $\overline{i}(t+1) = i(t)$, $\overline{j}(t+1) = j(t)$ («прогнозный шаг» [3]).

Теорема. *В 2×2 биматричной игре скорость сходимости к единственной ситуации равновесия итеративной процедуры* (3), (4) *с использованием соотношений* (6) *оценивается величиной $O(t^{-1})$, где t — количество шагов метода.*

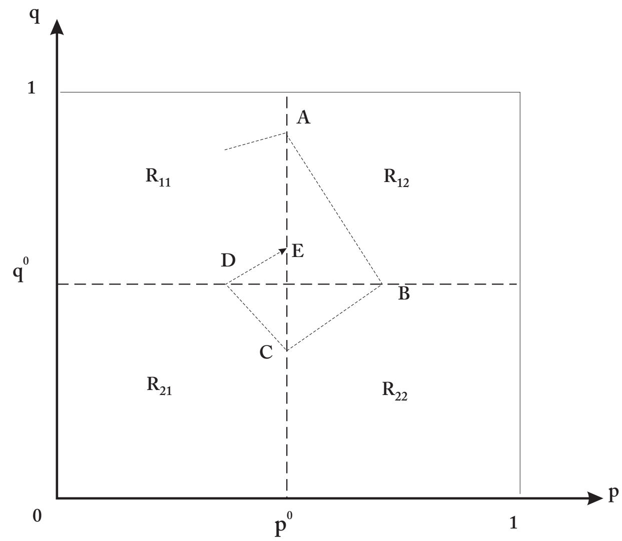


Рис. 1

Доказательство. Ограничимся случаем $p^0 = \frac{1}{2}$, $q^0 = \frac{1}{2}$.

Предположим, что в случае нестрогого выполнения неравенств в (6) сохраняется та чистая стратегия, которая выбиралась на предыдущем шаге.

Последовательность $\{(P(t),\, Q(t)),\ t = 1, 2, \ldots\}$, порождаемая соотношениями (3), (4), может быть изображена в единичном квадрате $0 \leqslant p \leqslant 1$, $0 \leqslant q \leqslant 1$ [2].

Обозначим R_{21} прямоугольную область единичного квадрата $p < p^0$, $q < q^0$ и введем аналогичные обозначения для остальных прямоугольных областей единичного квадрата (рис. 1). Отметим, что в рассматриваемом случае точки последовательности $\{(P(t),\, Q(t)),\ t = 1, 2, \ldots\}$, в которых происходит изменение направления движения, принадлежат внутренним границам областей R_{ij}. Отнесем к области R_{ij} ту границу, через которую траектория попадает в область. Тогда для точек (p, q) области R_{ij} выполняется $i = \mathrm{BR}(Q)$, $j = \mathrm{BR}(P)$.

Предположим, что в момент времени $t = 2n$ $p(t) = \frac{1}{2}$, $q(t) = \frac{m}{2n} > \frac{1}{2}$, (точка A на рис. 1), причем $(p(2n-1),\, q(2n-1)) \in R_{11}$. Так как $(p(2n),\, q(2n)) \in R_{12}$, то далее через $2(m-n)$ шагов, в момент времени $t = 2m$ $p(t) = \frac{2m-n}{2m}$, $q(t) = \frac{1}{2}$ — траектория достигнет границы, разделяющей области R_{12} и R_{22} (точка B на рис. 1), причем $(p(2m),\, q(2m)) \in R_{22}$. Проводя аналогичные вычисления, получим, что длина квазицикла, начинающегося из точки $(\frac{1}{2},\, \frac{m}{2n})$, $m > n$, соответствующей моменту времени $t = 2n$, равна $T(2n) = 8(m-n)$ и на этом квазицикле первая стратегия вторым игроком выбиралась $l(2n) = 4(m-n)$ раз.

Оценим разность $q(t) - \frac{1}{2}$ в моменты времени, соответствующие последовательным пересечениям отрезка $p = p^0$, $1 \geqslant q \geqslant q^0$, траекторией движения точки $(p(t), q(t))$:

$$
\begin{array}{l}
t_0 = 2n, \quad t_0 q(t_0) = m,\\
t_1 = t_0 + T(t_0) = 2n + 8(m-n), \quad t_1 q(t_1) = m + 4(m-n),\\
t_2 = t_1 + T(t_1) = 2n + 16(m-n), \quad t_2 q(t_2) = m + 8(m-n),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
t_k = t_{k-1} + T(t_{k-1}) = 2n + 8k(m-n), \quad t_k q(t_k) = m + 4k(m-n).
\end{array}
$$

Положим $t = 8k(m-n)$. Тогда

$$
q(t_k) - \frac{1}{2} = \frac{4k(m-n) + m}{8k(m-n) + 2n} - \frac{1}{2} = \frac{m-n}{t + 2n},
$$

откуда следует справедливость утверждения теоремы в рассматриваемом случае. ∎

Список литературы

[1] *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984.

[2] *Metric A., Polak B.* Fictitious play in 2×2 games: a geometric proof of convergence // Econ. Theory. — 1994. — № 4. — P. 923–933.

[3] *Антипин А. С., Попова О. А.* Игра двух лиц в смешанных стратегиях как модель обучения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2005. — Т. 45, № 9. — С. 1566–1574.

О надежности и сложности сумматора порядка n

О. Ю. Барсукова

`kuzya_7@mail.ru`

Пензенский государственный университет

Рассмотрим задачу синтеза асимптотически оптимального по надежности сумматора n-го порядка в предположении, что схема строится в базисе $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$, а все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε $(0 < \varepsilon < 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию φ, а в неисправном — $\bar{\varphi}$. Считаем, что схема реализует упорядоченную систему булевых функций (вектор-функцию) $F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, если она реализует ее при отсутствии неисправностей. Ненадежностью такой схемы назовем максимальную вероятность ошибки на всех входных наборах схемы и на всех выходах схемы. Пусть $P_\varepsilon(F) = \inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим вектор-функцию $F(\tilde{x}) = (f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x}))$, где $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Схему A из ненадежных элементов, реализующую вектор-функцию $F(\tilde{x})$, будем называть асимптотически оптимальной по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(F)$ при $\varepsilon \to 0$.

Сложность $L(S)$ схемы S есть число функциональных элементов в ней.

Задача построения асимптотически оптимальных по надежности схем, имеющих один выход (и соответственно реализующих одну булеву функцию), для почти всех функций решена в работе [4]. Доказано, что любую функцию $f \in K$, где $K = \bigcup_{n=3}^{\infty} K(n)$, $K(n)$ — множество булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, не представимых в виде $(x_i^a \& g(\tilde{x}))^b$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 3$, $a, b \in \{0, 1\})$, $g(\tilde{x})$ — произвольная функция, можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности, которая функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \to 0$, причем сложность этой схемы отличается от сложности минимальной схемы, построенной из абсолютно надежных элементов, асимптотически не более чем в $3(1 + b)$ раз, где b — любое сколь угодно малое положительное число.

Цель этой работы — построить асимптотически оптимальную по надежности схему, реализующую сложение двух чисел $x = x_n x_{n-1} \ldots x_1$ и $y = y_n y_{n-1} \ldots y_1$, заданных в двоичной системе счисления (т.е. построить асимптотически оптимальный по надежности n-разрядный сумматор).

Рассмотрим известный алгоритм сложения чисел x и y «столбиком»:

$$\begin{array}{cccc} (q_{n+1} & q_n & \ldots & q_1) \\ & x_n & \ldots & x_1 \\ & +\, y_n & \ldots & y_1 \\ \hline z_{n+1} & z_n & \ldots & z_1 \end{array}$$

Числа $q_{n+1}, q_n, \ldots, q_1$ обозначают результаты переносов из предыдущих разрядов ($q_1 = 0$). Используя тождество [1]

$$x_i + y_i + q_i = \overline{(x_i y_i \vee x_i q_i \vee y_i q_i)} \& (x_i \vee y_i \vee q_i) \vee x_i y_i q_i, \ i \in \{2, \ldots, n\},$$

построим схемы B_1 (рис. 1) и B_i (рис. 2), реализующие соответствующие преобразования величин x_i, y_i, q_i в z_i, q_{i+1}. Тогда искомая схема Σ_n — сумматор n-го порядка — получается путем последовательного соединения блоков B_1 и B_i (рис. 3). Здесь $z_{n+1} = q_{n+1}$, и блок B_1 осуществляет преобразование $z_1 = x_1 + y_1 = \overline{x_1 y_1}(x_1 \vee y_1), q_2 = x_1 y_1$. Очевидно, что $L(B_1) = 4$ и $L(B_i) = 9$. Таким образом, сложность и ненадежность сумматора n-го порядка удовлетворяют неравенствам $L(\Sigma_n) \leqslant 9n - 5$, $P(\Sigma_n) \leqslant (9n-5)\varepsilon \leqslant 9n\varepsilon$.

Докажем (теорема 1), что сумматор n-го порядка можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой со сложностью, превышающей сложность минимальной схемы из абсолютно надежных элементов, асимптотически не больше чем в $3,5$ раза.

Для повышения надежности схем будем использовать схему S_g (рис. 4), реализующую функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$.

Лемма 1 [3]. *Вероятности ошибок на выходе схемы S_g (рис. 4) на наборах (000) и (111) равны соответственно $v_1 = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ и $v_0 = \varepsilon + 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + 4\varepsilon^4$.*

Теорема 1. *Можно построить такую схему A, реализующую сложение двух n-разрядных чисел, что ее сложность $L(A) \leqslant 31n - 11$, а ненадежность $P(A) \leqslant 3\varepsilon + 486\varepsilon^{1,5}$ при $\varepsilon \leqslant 1/n^4$.*

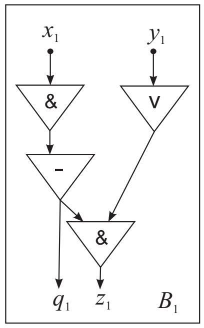


Рис.1

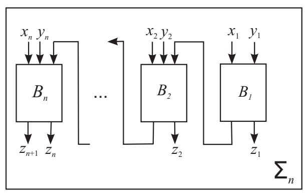


Рис.3

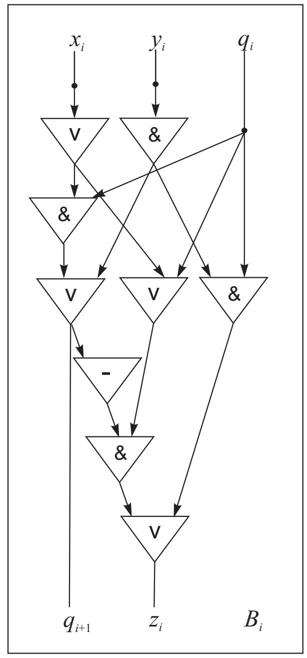


Рис.2

Доказательство. Используем схему Σ_n (рис. 3), реализующую сложение двух n-разрядных чисел $x = x_n x_{n-1} \ldots x_1$ и $y = y_n y_{n-1} \ldots y_1$, со сложностью $L(\Sigma_n) \leqslant 9n - 5$ и ненадежностью $P(\Sigma_n) \leqslant 9n\varepsilon$. Возьмем три экземпляра схемы Σ_n (рис. 3) и $(n+1)$ экземпляр схемы S_g (рис. 4), соединим выходы схем Σ_n с входами схем S_g, реализующих функции $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$, как показано на рис. 5. Построенную таким образом схему обозначим $\psi(\Sigma_n)$ (рис. 5). Оценим ненадежность схемы $\psi(\Sigma_n)$. Из леммы 1 имеем $v_0 \leqslant 3\varepsilon$, $v_1 \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon^2$. Известно [3], что $P(\psi(S)) \leqslant \max\{v_0, v_1\} + 6P^2(S)$. Тогда, применяя последнюю формулу, получим: $P(\psi(\Sigma_n)) \leqslant 3\varepsilon + 6 \cdot 9^2\varepsilon^2 n^2 \leqslant 3\varepsilon + 486\varepsilon^2 n^2$. Поскольку $\varepsilon \leqslant 1/n^4$, получаем неравенство $P(\psi(\Sigma_n)) \leqslant 3\varepsilon + 486\varepsilon^{1,5}$.

При этом сложность построенной схемы равна $L(\varphi(\Sigma_n)) \leqslant 3L(\Sigma_n) + (n+1) \cdot L(S_g) \leqslant 27n - 15 + 4n + 4 = 31n - 11$. Схема $\varphi(\Sigma_n)$ — искомая схема А. ∎

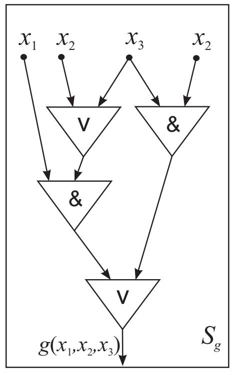


Рис.4

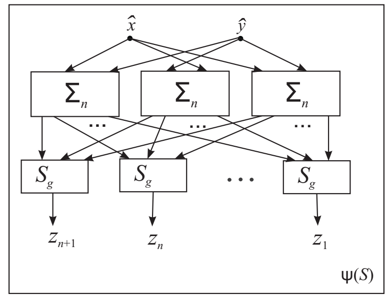


Рис.5

Отметим, что на выходах схемы A из теоремы 1 при всех $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ функции $z_i \in K$. Следовательно, для каждой из функций z_i построена асимптотически оптимальная по надежности схема, функционирующая с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \leqslant 1/n^4$. Сложность этой схемы отличается от сложности схемы, построенной из абсолютно надежных элементов, асимптотически не больше чем в 3,5 раза. Заметим, что в отличие от работы [4] параметр ε зависит от n ($\varepsilon \leqslant 1/n^4$), а в [4] $\varepsilon \in (0, 1/960]$ и от числа n разрядов двоичных чисел не зависит.

Следует отметить, что вероятность p появления на выходах построенной схемы набора $(z'_{n+1}, z'_n, \ldots, z'_1)$, отличного от набора $(z_{n+1}, z_n, \ldots, z_1)$, не больше $(3\varepsilon + 486\varepsilon^{1,5})(n+1)$ при $\varepsilon \leqslant 1/n^4$.

Список литературы

[1] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

[2] *Алехина М. А., Черепанова О. Ю.* О сложности асимптотически оптимальных по надежности схем для некоторых классов булевых функций // Труды международного симпозиума «Надёжность и качество, 2010». Т. 1. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2010. — С. 232–235.

[3] *Алехина М. А.* Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006.

[4] *Васин А. В.* Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x \,\&\, y, x \vee y, \bar{x}\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов // Из-

вестия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2008. — № 4. — С. 3–17.

Полные проверяющие тесты для схем, реализующих дизъюнкцию

С. Р. Беджанова

azjunja@mail.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет

Рассматриваются схемы из функциональных элементов в произвольном функционально полном конечном базисе [1, 2], реализующие дизъюнкцию n переменных, где $n \geqslant 3$. В схемах допускаются инверсные неисправности произвольного количества элементов. Если элемент в исправном состоянии реализует функцию φ, то при его поломке на выходе элемента реализуется функция $\overline{\varphi}$. Среди всех схем, реализующих $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$, будем выделять те, которые допускают тесты наименьшей возможной длины.

Функция, реализуемая на выходе схемы при наличии в схеме неисправных элементов, называется функцией неисправности [3, 4]. Пусть $g_1, \dots, g_k$ — все возможные попарно различные функции неисправности схемы S, отличные от функции f. Множество T наборов длины n называется полным проверяющим тестом схемы S, если для любой функции из множества $\{g_1, \dots, g_k\}$ в нем найдется набор, на котором значение этой функции отличается от значения функции f.

Теорема. *При любом натуральном $n \geqslant 3$ функция $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$ может быть реализована схемой, допускающей полный проверяющий тест длины $n+1$.*

Обозначим через $\tilde{e}_i$ набор длины n, в котором в i-м разряде стоит единица, а во всех остальных разрядах — нули. Рассмотрим множество наборов $T = \{\tilde{0}, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$. С использованием классификации базисов из [5] конструктивно доказано, что в любом базисе можно построить реализующую функцию $f(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$ схему, для которой T является полным проверяющим тестом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН

«Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[2] *Редькин Н. П.* Дискретная математика. — М.: Физматлит, 2009.

[3] *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — 1998. — С. 5–25.

[4] *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

[5] *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — 2003. — С. 217–230.

Минимальные вершинные расширения цепей с вершинами двух типов

П. П. Бондаренко

PolinaBond@gmail.com

Саратовский государственный университет

Введение

Неориентированным графом называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — отношение смежности на множестве вершин V. Здесь и далее основные определения даются по работе [1].

Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершины u и v смежны и эти вершины соединены ребром (u, v). При этом (u, v) и (v, u) одно и то же ребро.

Степенью вершины v в неориентированном графе G будем называть количество вершин в G, смежных с данной.

Мы будем рассматривать неориентированные графы, в которых вершины имеют разные типы.

Цепью P_n называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\}$.

Циклом C_n называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\} \bigcup \{(v_1, v_n), (v_n, v_1)\}$.

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, что $\forall u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: если $(u, v) \in \alpha_1$, то $(\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$, при этом считается, что сохраняются типы вершин.

Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha 2)$ называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности: $(u, v) \in \alpha_1 \leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$, $\forall u, v \in V_1$, при этом считается, что сохраняются типы вершин.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$ с вершинами p-типов*, если выполняются следующие условия:

1) G^* является k-расширением G, то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;
2) G^* содержит $n + k * p$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k * p$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Будем называть минимальное k-расширение графа при $k = 1$ *минимальным расширением.*

Отказоустойчивость — способность системы противостоять ошибке и возможность продолжать работу в присутствии этой ошибки. Впервые определение отказоустойчивости ввел Хейз в работе [2]. Он рассматривал минимальные вершинные k-расширения цепей, циклов и деревьев с метками.

Результаты

Будем рассматривать цепи с вершинами двух типов: одной вершиной одного типа, а остальными другого. Были сгенерированны и проанализированны все неизоморфные минимальные вершинные расширения таких цепей с количеством вершин до 8 и некоторых девятивершинных цепей.

Поставим в соответствие каждой n-вершинной цепи число в двоичном представлении. Вершины одного типа обозначим 0, а другого — 1.

Теорема 1. *Для цепей P_n вида 10...00 при $n \geqslant 9$, в минимальном вершинном расширении $3k-1$ ребер при $n=2k$ и $3k+1$ ребер при $n=2k+1$.*

Теорема 2. *Для циклов C_n с одной вершиной одного типа, а остальными другого, при $n \geqslant 8$, в минимальном вершинном расширении $3k+2$ ребер при $n=2k$ и $3k+5$ ребер при $n=2k+1$.*

Теорема 3. *Количество ребер в минимальных вершинных расширениях цепей с одной вершиной одного типа, а остальными другого, лежит в границах от $3k-1$ до $3k+2$ для $n=2k$ и от $3k+1$ до $3k+5$ для $n=2k+1$, где n — это количество вершин в цепи.*

Доказательство. Верхняя оценка очевидна. Так как любая цепь P_n с одной вершиной одного типа, а остальными другого является подграфом цикла C_n с одной вершиной одного типа, а остальными другого, с тем же количеством вершин.

Рассмотрим произвольную цепь пусть вешины $v_1 ... v_{k_1}$ типа 0, v_{k_1+1} типа 1 и вершины $v_{k_1+2} ... v_{k_1+k_2}$ типа 0. Т.е. сначала k_1 вершин типа 0, потом вершина типа 1 и k_2 вершин типа 0.

Будем рассматривать 2 цепи с количеством вершин k_1+1 и k_2+1, каждая из которых цепь с одной вершиной типа 1, а остальными типа 0, причем вершина типа 1 имеет степень 1.

Возьмем минимальные вершинные расширения этих цепей и совместим вершины типа 1 так, чтобы в графе осталось только 2 вершины типа 1, вместо 4. Причем при удалении всех вешин типа 0 из минимального расширения одной из цепей должно остаться минимальное расширение другой.

Очевидно, что полученный граф является расширением исходной цепи, но в нем k_1+k_2+4 вершины, то есть на 1 больше, чем в минимальном вершинном расширении. Очевидно, что количество ребер в минимальном вершинном расширении будет никак не меньше, чем в данном графе.

Посчитаем количество ребер m в полученном графе. Это сумма количеств ребер в минимальных вершинных расширениях обеих цепей.

По предыдущей теореме:

$k_1 = 2a$ и $k_2 = 2b$, $n = k_1 + k_2 + 1 = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1 = 2k + 1$,

$$m = 3a + 1 + 3b + 1 = 3(a + b) + 2 = 3k + 2. \quad (1)$$

$k_1 = 2a+1$ и $k_2 = 2b$, $n = k_1+k_2+1 = 2a+1+2b+1 = 2(a+b+1) = 2k$,

$$m = 3(a + 1) - 1 + 3b + 1 = 3(a + b + 1) = 3k. \quad (2)$$

$k_1 = 2a + 1$ и $k_2 = 2b + 1$, $n = k_1 + k_2 + 1 = 2a + 1 + 2b + 1 + 1 = 2(a + b + 1) + 1 = 2k + 1$,

$$m = 3(a + 1) - 1 + 3(b + 1) - 1 = 3(a + b + 1) + 1 = 3k + 1. \quad (3)$$

Из (1)–(3) следует, что нижняя оценка верна и достигается, если вершина типа 1 имеет степень 1. ∎

Список литературы

[1] *Абросимов М. Б.* Минимальные k-расширения предполных графов // Известия ВУЗов: Математика. — 2003. — № 6 (493). — С. 3–11.

[2] *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. — 1976. — V. 25, № 9. — P. 875–884.

О связи между классом гиперграфов специального вида и свойствами вершин релаксаций разрезного многогранника

В. А. Бондаренко, А. В. Николаев

bond@bond.edu.yar.ru, awern@yandex.ru

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Рассмотрим множество 3-однородных смешанных гиперграфов [1] вида $G = (V, E, A)$, где

1. V — множество вершин, $V = N_n = \{1, \ldots, n\}$;
2. E — множество неориентированных ребер,

$$E = \{(i, j, k)\} \subseteq N_n \times N_n \times N_n;$$

3. A — множество ориентированных ребер,

$$A = \{((i, j), k)\} \subseteq N_n \times N_n \times N_n,$$

где пара вершин (i, j) — начало ребра, вершина k — конец ребра.

Введем операцию *инвертирования i-й вершины* гиперграфа G, которая преобразует все ребра, инцидентные этой вершине, следующим образом:

$$(i,j,k) \to ((j,k),i), \quad ((j,k),i) \to (i,j,k), \quad ((i,j),k) \to ((i,k),j).$$

Результатом операции инвертирования является новый 3-однородный смешанный гиперграф $G^{'} = Inv_i G = (V, E^{'}, A^{'})$.

Введем класс G_I гиперграфов G, для которых множество неориентированных ребер не пусто и остается непустым при всех возможных инверсиях.

Рассмотрим сужение задачи 3-выполнимость (3-SAT) — задачу *монотонная 3-выполнимость при различных литералах* (MNAE 3-SAT) [2], а именно: существует ли для набора трехместных дизъюнкций логических переменных такой выполняющий набор истинностных значений, что в каждой дизъюнкции найдется хотя бы один истинный и хотя бы один ложный литерал?

К этой задаче сводится [3] (см. также [2]) задача 3-SAT, следовательно, задача MNAE 3-SAT является NP-полной.

С индивидуальной задачей $Z \in$ MNAE 3-SAT свяжем гиперграф $G(Z)$ рассматриваемого вида, который назовем гиперграфом задачи Z, по следующим правилам:

1. $|V| = |U| = n$;
2. Три вершины i, j, k гиперграфа $G(Z)$ образуют неориентированное ребро $(i,j,k) \in E$ тогда и только тогда, когда логические переменные u_i, u_j и u_k входят в общую дизъюнкцию;
3. $A = \oslash$.

Легко проверяется, что индивидуальная задача $Z \in$ MNAE 3-SAT предполагает ответ «нет» тогда и только тогда, когда связанный с ней гиперграф $G(Z)$ принадлежит классу G_I, поэтому справедлива

Теорема 1. *Задача распознавания вида: «Верно ли, что гиперграф G не принадлежит классу G_I?» — является NP-полной.*

Далее гиперграфы приведенного вида используются для описания свойств точек релаксаций разрезного многогранника.

В работе [4] определен класс многогранников $M_n \subseteq R^{4n^2}$, $n \in N$, позже названных *корневыми полуметрическими* [5]. Задающие M_n

линейные ограничения имеют вид:

$$x_{i,j} + y_{i,j} + z_{i,j} + t_{i,j} = 1, \tag{1}$$

$$x_{i,j} + y_{i,j} = x_{k,j} + y_{k,j}, \tag{2}$$

$$x_{i,j} + z_{i,j} = x_{i,l} + z_{i,l}, \tag{3}$$

$$x_{i,j} = x_{j,i},\ t_{i,j} = t_{j,i},\ y_{i,j} = z_{j,i}, \tag{4}$$

$$y_{i,i} = z_{i,i} = 0, \tag{5}$$

$$x_{i,j} \geqslant 0,\ y_{i,j} \geqslant 0,\ z_{i,j} \geqslant 0,\ t_{i,j} \geqslant 0, \tag{6}$$

где i, j, k, l независимо пробегают значения $1, \ldots, n$.

Многогранники этого класса обладают рядом особенностей, обусловливающих значительный интерес к ним (см. [5, 6, 7]). В частности, в работе [8] установлена полиномиальная разрешимость задачи следующего вида: для заданной линейной целевой функции f требуется выяснить, достигается ли $\max\{f(u) :\ u \in M_n\}$ в целой вершине многогранника M_n (задача распознавания целочисленности).

Многогранник M_n^Z, порождаемый целыми вершинами из M_n, называется разрезным многогранником, так как известная NP-полная задача о максимальном разрезе (как, впрочем, и ряд других) сводится к оптимизации линейной функции на M_n^Z. Поэтому M_n является релаксационным многогранником задачи о разрезе, или релаксацией разрезного многогранника.

Определим, следуя [5], релаксации более высоких уровней. С этой целью выберем натуральное k ($k < n$) и рассмотрим систему неравенств S, задающую многогранник M_k^Z; обозначим через Θ число этих неравенств. Для каждого k-элементного подмножества $\nu = \{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ множества N_n рассмотрим систему S_ν, получающуюся из системы неравенств S заменой переменных $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$ и $t_{i,j}$, соответственно, на x_{ν_i,ν_j}, y_{ν_i,ν_j}, z_{ν_i,ν_j} и t_{ν_i,ν_j}. Дополним систему (1)–(6) совокупностью всех $\Theta \cdot C_n^k$ указанных неравенств, а многогранник, который задается расширенной системой ограничений, обозначим через $M_{n,k}$.

Известно, что $M_{n,3}$ — первая, отличная от M_n, релаксация разрезного многогранника. $M_{n,3}$ задается системой (1)–(6) и дополнительными ограничениями:

$$x_{i,j} + t_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \leqslant 2,$$

$$x_{i,j} + t_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \leqslant 2,$$
$$y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \leqslant 2,$$
$$y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \leqslant 2$$

для каждой тройки $i, j, k \in N_n$, где $i < j < k$ [7, 8].

Рассмотрим индивидуальную задачу $Z \in$ MNAE 3-SAT с n логическими переменными и p дизъюнкциями, а также многогранник $M_{n,3}$. Построим целевую функцию следующего вида:

$$\forall x \in R^{4n^2}: \ f(x) = \sum_{i,j,k} (y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k})$$

по всем тройкам i, j, k, для которых логические переменные u_i, u_j и u_k входят в общую дизъюнкцию.

Очевидно, что на многограннике $M_{n,3}: \ \max\{f(x) : x \in M_{n,3}\} = 2p$, и если этот максимум достигается в целой вершине $M_{n,3}$, то соответствующий задаче набор дизъюнкций выполним, в противном случае набор невыполним.

Таким образом, задача MNAE 3-SAT сводится к задаче распознавания целочисленности на $M_{n,3}$.

В основе упомянутого выше результата о полиномиальной разрешимости задачи распознавания целочисленности на M_n [8] лежит следующее

Утверждение. *Каждая точка многогранника $M_{n,3}$ является выпуклой комбинацией вершин многогранника M_n, среди которых есть хотя бы одна целая.*

Ниже устанавливается, что ситуация оказывается принципиально иной при переходе к последующим релаксациям.

Отметим, что каждой точке $u \in M_{n,3}$ можно также сопоставить 3-однородный смешанный гиперграф рассматриваемого вида, который назовем гиперграфом точки $G(u)$, по следующим правилам:

1. $|V| = n$;
2. $(i, j, k) \in E(u) \Leftrightarrow y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} = 2$;
3. $((i, j), k) \in A(u) \Leftrightarrow y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} = 2$.

Теорема 2. *Если для некоторой точки $u \in M_{n,3}$ ее гиперграф $G(u)$ принадлежит классу G_I, то в любом разложении u в виде выпуклой комбинации вершин $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины.*

Теорема 3. *При любых $n \geqslant 5$ и $q \geqslant 195$ найдутся точки u из многогранника $M_{n,4}$ и v из многогранника $M_{q,5}$, гиперграфы которых $G(u)$ и $G(v)$ принадлежат классу G_I.*

Список литературы

[1] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.

[2] *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.

[3] *Schaefer T. J.* The complexity of satisfiability problems // Proc. 10-th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing. — New York: Association for Computing Machinery, 1978. — P. 216–226.

[4] *Бондаренко В. А.* Об одном комбинаторном многограннике // Моделирование и анализ вычислительных систем. Сб. науч. тр. — Ярославл: Яросл. гос. ун-т., 1987. — С. 133–134.

[5] *Деза М., Лоран М.* Геометрия разрезов и метрик. — М.: МЦНМО, 2001. — 736 с.

[6] *Padberg M. V.* The Boolean quadratic polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical Program. — 1989. — V. 45. — P. 139–172.

[7] *Бондаренко В. А., Максименко А. Н.* Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. — М.: ЛКИ, 2008.

[8] *Бондаренко В. А., Урываев Б. В.* Об одной задаче целочисленной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 6. — С. 18–23.

Интерполяционные взаимно обратные соотношения и обобщение формулы Ворпицкого

Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова

bond@tl.ru, msharapova@list.ru

Пензенский государственный университет;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Механико-математический факультет

При получении комбинаторных тождеств важную роль играют взаимно обратные соотношения. Рассмотрим выражения $B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} A_n(k)X_{n,k}(t)$, $A_n(z) = \sum_{j=0}^{n} B_n(j)Y_{n,j}(z)$. Подстановка $B_n(t)$

в формулу для $A_n(z)$ дает равенство $l_{n,j}(t) = \sum_{k=0}^n X_{n,k}(t)Y_{n,j}(k)$, которое доопределим на узлах $m = 0, 1, \ldots, n$ соотношением ортогональности $l_{n,j}(m) = \delta_{mj}$, где δ_{mj} — символ Кронекера. Аналогичный результат дает подстановка $A_n(z)$ в $B_n(t)$.

Вводя в рассматриваемые функции параметр α, положим

$$X_{n,k}(t;\alpha) = \alpha^{t-k}\binom{n+1/\alpha+t-k-1}{n+1/\alpha},\ Y_{n,j}(z;\alpha) = (-\alpha)^{z-j}\binom{n+1/\alpha}{z-j}, \tag{1}$$

где биномиальные коэффициенты в общем случае выражаются через гамма-функцию. Тогда равенство $l_{n,j}(m;\alpha) = \delta_{mj}$ при $m = 0, 1, \ldots, n$ проверяется непосредственно, а $l_{n,j}(t;1)$ — фундаментальный интерполяционный многочлен Лагранжа. Поэтому назовем формулы для $B_n(t;\alpha)$ и $A_n(z;\alpha)$ интерполяционными взаимно обратными соотношениями.

Теорема 1. *Пусть* $z = k = 0, 1, \ldots, n$, $\alpha = r = 1, 2, \ldots$, $A_n(k;r) = A^*_{n,r,k}$, $B_n(t;r) = t^n r^t \binom{t+1/r-1}{t}$ *и* $t \geqslant 0$. *Тогда справедливы тождества*

$$B_n(t;r) = \sum_{k=0}^n A^*_{n,r,k} X_{n,k}(t;r), \quad A^*_{n,r,k} = \sum_{j=0}^n B_n(j;r) Y_{n,j}(k;r). \tag{2}$$

Доказательство. Формулы (2) определяют коэффициенты связи между двумя полиномиальными базисами и вытекают из соотношения ортогональности для функций (1). При $r = 1$ первое равенство в (2) — формула Ворпицкого [1], задающая числа Эйлера $A_{n,k} = A^*_{n,1,k}$, второе — ее обращение в смысле Мебиуса, а при $r \to 0$ имеем $S_{n,k} = A^*_{n,0,k}$ — числа Стирлинга второго рода. ∎

Теорема 2. *Пусть* $A^*_{n,r}(t) = \sum_{k=0}^n A^*_{n,r,k} t^k$ *— производящий многочлен для чисел* $A^*_{n,r,k}$, $r = 0, 1, \ldots$, *а* $D = d/dt$. *Тогда имеют место соотношения*

$$A^*_{0,r,k} = \delta_{0k},\ A^*_{n,r,k} = kA^*_{n-1,r,k} + (r(n-k)+1)A^*_{n-1,r,k-1},\ k \in \mathbf{Z},\ n \geqslant 1; \tag{3}$$

$$A^*_{0,r}(t)=1,\ A^*_{n,r}(t)=(r(n-1)+1)tA^*_{n-1,r}(t)+t(1-rt)DA^*_{n-1,r}(t),\ n \geqslant 1; \tag{4}$$

$$A^*_{n,r}(t) = (1-rt)^{n+1/r}(tD)^n(1-rt)^{-1/r},\ n \geqslant 0,\ \lim_{r\to 0}(1-rt)^{-1/r} = e^t. \tag{5}$$

Доказательство. Рекуррентная формула (3) проверяется с помощью (2) и равенства $k(t+n-k+1/r)+(n-k+1/r)(t-k) = (n+1/r)t$. Она влечет рекуррентное соотношение (4), а (5) находится с использованием (4). ∎

Теорема 3. *Производящие функции для* $\{A^*_{n,r}(t)\}_{n=0}^{\infty}$, $r = 0, 1, \ldots$ *имеют вид*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^*_{n,r}(t)\frac{z^n}{n!} = \left(\frac{1-rt}{1-rte^{z(1-rt)}}\right)^{1/r}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} A^*_{n,r}(t)z^n = J_z[\varkappa_k, \lambda_k : (0,\infty)], \tag{6}$$

где правая часть первой формулы при $r = 0$ *понимается как предел, равный* $e^{t(e^z-1)}$, *а* $J_z[\varkappa_k, \lambda_k : (0,\infty)] = \frac{1}{1-\varkappa_0 z} - \frac{\lambda_0 z^2}{1-\varkappa_1 z} - \frac{\lambda_1 z^2}{1-\varkappa_2 z} - \ldots$ *является* J*-дробью (непрерывной дробью Якоби), параметры которой определены равенствами* $\varkappa_k = (rk+1)t+k$, $\lambda_k = (k+1)(rk+1)t$.

Доказательство. Подстановка формулы (5) в экспоненциальную производящую функцию $\sum_{n=0}^{\infty} A^*_{n,r}(t)z^n/n!$, а также применение разложения $(1-rt)^{-1/r}$ в ряд по степеням t и тождества $(tD)^n t^k = k^n t^k$ позволяют получить первое равенство (6). Это равенство и применение теоремы Стилтьеса–Роджерса о J-дробях [2] приводит ко второму равенству (6). Отметим, что непосредственное разложение производящей функции $\sum_{n=0}^{\infty} A^*_{n,r}(t)z^n$ в J-дробь находится с помощью дифференциального уравнения Риккати, которое можно получить, используя соотношение (5) и ряд замен переменных. ∎

Следствие 1. *Переход к пределу при* $r \to t^{-1}$ *в первой формуле* (6) *дает* $\sum_{n=0}^{\infty} t(t+1)\ldots(t+n-1)z^n/n! = (1-z)^{-t}$, *т. е. в этом случае производящие функции* (6) *связаны с числами Стирлинга первого рода без знака.*

Следствие 2. *Замена* t *на* t/r *и* z *на* rz *в* (6) *приводит к многочленам* $A^{**}_{n,r}(t)$, *коэффициенты которых* $A^{**}_{n,r,k}$ *удовлетворяют соотношению*

$$A^{**}_{0,r,k} = \delta_{0k},\ A^{**}_{n,r,k} = rkA^{**}_{n-1,r,k} + (r(n-k)+1)A^{**}_{n-1,r,k-1},\ k \in \mathbf{Z},\ n \geqslant 1. \tag{7}$$

Для комбинаторной интерпретации чисел $A^{**}_{n,r,k}$, $r \geqslant 1$, введем множество $GS_{n,r}$ r-перестановок мультимножества $\{1^r, \ldots, n^r\}$, обобщающее понятие множества 2-перестановок Гесселя–Стенли [1], и множество корневых помеченных r-угольных кактусов $H_{n,r}$.

Определение 1. r-перестановка $\sigma \in GS_{n,r}$ — это слово $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_{rn}$, у которого все буквы, стоящие между любыми двумя вхождениями символа $i \in \{1, \dots, n\}$, не меньше этого i [3]. Рекурсивный алгоритм генерации $GS_{n+1,r}$ основан на построении $(rn+1)$-й перестановки из $GS_{n+1,r}$ путем вставки слова $(n+1)^r$ в выбранное слово $\pi \in GS_{n,r}$, а $|GS_{n+1,r}| = 1 \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (rn+1)$.

Определение 2. Корневой помеченный r-угольный кактус $\gamma \in H_{n,r}$ — связный граф с вершиной (корнем) с меткой 0, который состоит из помеченных различными числами $1, \dots, n$ r-угольников, не имеющих общих ребер. Рекурсивный алгоритм получения $H_{n+1,r}$ основан на построении $(rn+1)$-го кактуса из $H_{n+1,r}$ путем соединения нижней вершины r-угольника с меткой $n+1$ (остальные его вершины считаются верхними) с каждой из $(rn+1)$-й вершин (включая корень) выбранного кактуса $\gamma \in H_{n,r}$.

Добавим, что $\sigma \in GS_{n,0}$ — разбиение множества $\{1, \dots, n\}$, а $\gamma \in H_{n,0}$ — точечный граф (аналог слоистой диаграммы [2]). Считая, что в определениях 1, 2 вставка слова $(n+1)^r$ и соединение r-угольника с меткой $n+1$ проводятся последовательно слева направо и, соответственно, по часовой стрелке, находим биекцию $\varphi : GS_{n,r} \to H_{n,r}$, причем $H_{n,1}$ — множество корневых деревьев с $(n+1)$-й помеченной вершиной, а $H_{n,2}$ — с n помеченными ребрами.

Если $\mathrm{rise}(\sigma)$ — число подъемов $\sigma \in GS_{n,r}$, то для $\gamma \in H_{n,r}$ $\varphi : \sigma \mapsto \gamma$ дает $\mathrm{rise}(\gamma) = \mathrm{rise}(\sigma)$. Коэффициенты $A_{n,r,k} = \#\{\sigma : \sigma \in GS_{n,r},\ \mathrm{rise}(\sigma) = k\}$ r-многочлена Эйлера $A_{n,r}(t)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению [3]

$$A_{0,r,k} = \delta_{0k}, \quad A_{n,r,k} = kA_{n-1,r,k} + (r(n-1) - k + 2)A_{n-1,r,k-1}, \tag{8}$$

$k \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 1$.

Теорема 4. *Пусть $l(\gamma)$ — число листьев (свободных левых верхних вершин всех r-угольников) кактуса $\gamma \in H_{n,r}$. Тогда $A_{n,r,k} = \#\{\gamma : \gamma \in H_{n,r},\ l(\gamma) = k\}$.*

Доказательство. При $r = 1$ имеем $l(\gamma) = n+1-\mathrm{rise}(\gamma)$, $\varphi : \sigma \mapsto \gamma$ при $r \geqslant 2$ дает $l(\gamma) = l(\sigma) = \#\{\sigma_i : \sigma_i = \sigma_{i+1},\ \sigma_i \neq \sigma_j,\ j < i,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$, $\sigma \in GS_{n,r}$, а формула (8) проверяется с помощью математической индукции. ∎

Удаление всех меток в множестве $H_{n,r}$ приводит к разбиению его на классы эквивалентности (аналогично $GS_{n,r}$ разбивается на классы эквивалентности соответствующей расстановкой скобок и отождествлением всех букв). Для полученных в результате фактор-множеств при $r \geqslant 2$ можно показать, что $|\overline{H}_{n,r}| = |\overline{GS}_{n,r}| = \frac{1}{(r-1)n+1}\binom{rn}{n}$ — числа Фусса–Каталана [1].

Пусть $h(\gamma) = n + 1 - l(\gamma)$ — высота кактуса $\gamma \in H_{n,r}$, а биекция $\varphi : \sigma \mapsto \gamma$ задает $h(\sigma) = h(\gamma)$, $\sigma \in GS_{n,r}$. Тогда с помощью рекуррентного соотношения (7) и рекурсивного алгоритма генерации $GS_{n,r}$ можно определить веса $h(\sigma) \leqslant \mathrm{cl}(\sigma) \leqslant n$, $\sigma \in GS_{n,r}$ так, что $A^{**}_{n,r,k} = \#\{\sigma : \sigma \in GS_{n,r},\ \mathrm{cl}(\sigma) = k\}$. Отметим также, что нормированное распределение $\{A^{**}_{n,r,k}/A^{**}_{n,r}(1)\}_{k=0}^{n}$ при всех $r \geqslant 1$ является асимптотически нормальным с математическим ожиданием и дисперсией, асимптотически равными, соответственно, $n/2$ и $n/12$.

В [4] на фактор-множестве $\overline{H}_{n,2}$ рассматривается 12 весов $w_i(n)$, причем $w_{11}(n) = A_{n,2}(1) = A^{**}_{n,2}(1) = |H_{n,2}| = (2n-1)!!$, $w_{12}(n) = A^{*}_{n,2}(1)$, а также используется аналог первой формулы (6) при $r = 2$.

Из второй формулы (6) следует, что $A^{*}_{n,r}(t)$ — многочлены Якоби–Роджерса при определенных значениях $\varkappa_k$ и λ_k, связанные с перечислением взвешенных путей с n шагами, начало и конец которых находятся на высоте 0. Представления Франсона–Вьенно и Флажоле позволяют кодировать перестановки и, соответственно, разбиения множества $\{1, \ldots, n\}$ как пути указанного типа, а для получения этих представлений используются бинарные деревья и, соответственно, слоистые диаграммы [2].

Список литературы

[1] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998.

[2] *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.

[3] *Бондаренко Л. Н., Шарапова М. Л.* Два типа r–перестановок и r–многочлены Эйлера // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). — М.: Изд-во механико–математического факультета МГУ, 2010. — С. 217–220.

[4] *Klazar M.* Twelve countings with rooted plane trees // European Journal of Combinatorics. — 1997. — V. 18, № 2. — P. 195–210.

Синтез легкотестируемых схем для систем булевых функций из некоторых классов

Ю. В. Бородина

jborodina@inbox.ru

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Пусть S — некоторая схема из функциональных элементов [1, 2], реализующая систему (упорядоченный набор) из m булевых функций $f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функции, реализуемые на выходах схемы при наличии в схеме неисправных элементов, называются функциями неисправности. Набор $(g_1(\tilde{x}), \ldots, g_m(\tilde{x}))$ функций неисправности будем считать нетривиальным, если хотя бы одна какая-нибудь функция $g_i(\tilde{x})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, отлична от соответствующей ей функции $f_i(\tilde{x})$, т. е. $g_i(\tilde{x}) \not\equiv f_i(\tilde{x})$. Множество T входных наборов схемы S называется полным проверяющим тестом для этой схемы, если для любого нетривиального набора функций неисправности $(g_1(\tilde{x}), \ldots, g_m(\tilde{x}))$ в T найдется хотя бы один такой набор $\tilde{\sigma}$, что $(f_1(\tilde{\sigma}), \ldots, f_m(\tilde{\sigma})) \neq (g_1(\tilde{\sigma}), \ldots, g_m(\tilde{\sigma}))$ (здесь равенство булевых наборов, как обычно, покомпонентное, т. е. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ означает $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_m = \beta_m$). Число наборов, составляющих этот тест, называется длиной теста. В качестве тривиального теста всегда можно взять тест, содержащий все 2^n наборов значений переменных булевой функции от n переменных [3].

В данной работе рассматривается задача построения легкотестируемых схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$ для систем булевых функций из некоторых классов. В качестве неисправностей предполагаются константные неисправности типа «1» на выходах элементов (при переходе в неисправное состояние элемент выдает единицу независимо от подаваемых на его входы значений).

Пусть $\mathcal{F}_{n,m}$ — система из m булевых функций $f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; у функций из $\mathcal{F}_{n,m}$ могут быть фиктивные переменные из числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}_{n,m}$ — система из m булевых функций, отличных от констант, каждая из которых монотонна по каждой из l переменных $x_1, x_2, \ldots, x_l$, $0 \leqslant l \leqslant n$, и антимонотонна по каждой из $n - l$ переменных $x_{l+1}, \ldots, x_n$. Тогда систему $\mathcal{F}_{n,m}$ можно реализо-*

вать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины 1.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{F}_{n,m}$ — *система из* m *булевых функций, отличных от констант, каждая из которых монотонна по каждой из* l *переменных* $x_2, x_3, \ldots, x_{l+1}$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, *и антимонотонна по каждой из* $n-l-1$ *переменных* $x_{l+2}, \ldots, x_n$. *Тогда систему* $\mathcal{F}_{n,m}$ *можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины* 1.

Замечание 1. Теоремы 1, 2 для систем, состоящих из одной функции, были доказаны в работе [4]. Кроме того, в условиях теоремы 1 легкотестируемые схемы с неточными оценками длин тестов строились в [5].

Замечание 2. В силу самодвойственности рассматриваемого базиса аналоги теорем 1, 2 справедливы и при константных неисправностях типа «0» на выходах элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: МГУ, 1984.

[2] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2002.

[3] *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. — М.: МГУ, 1992.

[4] *Бородина Ю. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. — 2008. — Т. 17, № 1. — С. 129–140.

[5] *Бородина Ю. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$ для систем функций из некоторых классов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2007. — № 4. — С. 68–72.

Теория мультимножеств: операции, структура, вычислимость

Д. Б. Буй, Ю. А. Богатырёва

buy@unicyb.kiev.ua, jbogatyreva@gmail.com

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко

Мультимножество — это совокупность элементов произвольной природы, которые могут дублироваться.

Несмотря на наличие обширной библиографии по теории мультимножеств и ее применениям в различных областях (см., например, [1]), говорить о наличии целостной теории мультимножеств пока еще рано. Настоящий доклад посвящен вопросам развития теории мультимножеств применительно к соотношениям между операциями, устройству семейства мультимножеств, упорядоченного естественным отношением включения, вычислимости на мультимножествах.

Формально говоря, *мультимножество* α *с основой* U_α — это функция вида $\alpha\colon U_\alpha \to N^+$, где U_α — некоторое множество, $N^+ = \{1, 2, ...\}$ — множество натуральных чисел без нуля.

Характеристической функцией мультимножества α называется функция вида $\chi_\alpha\colon D \to N$, значение которой задается следующей кусочной схемой:

$$\chi_\alpha(d) = \begin{cases} \alpha(d), & \text{если } d \in dom\,\alpha; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для всех $d \in D$, где D — универсум элементов основ мультимножеств [2].

Введем также понятие включения мультимножеств. *Мультимножество* β *включается в мультимножество* α ($\beta \preccurlyeq \alpha$), если

$$\beta \preccurlyeq \alpha \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} U_\beta \subseteq U_\alpha \& \forall d(d \in U_\beta \Rightarrow \beta(d) \leqslant \alpha(d)).$$

Непосредственно из определения следует, что бинарное отношение включения мультимножеств является отношением частичного порядка.

Для мультимножеств определены аналоги стандартных теоретико-множественных операций и операции, использующие специфику мультимножеств и потому не применимые к абстрактным множествам.

В работе рассмотрены свойства введенных операций: характеристика отношения включения в терминах операций пересечения и объединения; идемпотентность, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, законы поглощения, аналоги законов двойного отрицания и де Моргана.

Дадим определения операциям объединения и пересечения. Операция $\alpha \cup_{All} \beta$ (соответственно $\alpha \cap_{All} \beta$) мультимножествам α и β сопоставляет мультимножество, характеристическая функция которого на произвольном аргументе d равна

$$\max\{\chi_\alpha(d),\ \chi_\beta(d)\} \qquad (\text{соответственно } \min\{\chi_\alpha(d),\ \chi_\beta(d)\}).$$

Лемма 1. *Операции $\cup_{All}$ и $\cap_{All}$ идемпотентны, коммутативны, ассоциативны.*

Лемма 2. *Для произвольных мультимножеств α и β выполняются законы поглощения: $\alpha \cup_{All} (\alpha \cap_{All} \beta) = \alpha$, $\alpha \cap_{All} (\alpha \cup_{All} \beta) = \alpha$.*

Теорема 3. *Частично упорядоченное множество $\langle M, \preccurlyeq\rangle$ является решеткой, причем $\sup_{\preccurlyeq}\{\alpha, \beta\} = \alpha \cup_{All} \beta$, $\inf_{\preccurlyeq}\{\alpha, \beta\} = \alpha \cap_{All} \beta$.*

Приведем более информативные результаты о структуре частично упорядоченного множества мультимножеств (ч.у.м.) [3].

Утверждение 4. *Выполняются следующие утверждения:*

1) *пустое мультимножество $\varnothing_m$ (характеристической функцией которого является константная функция, всегда равная нулю) — наименьший элемент в $\langle M, \preccurlyeq\rangle$;*
2) $\inf\ \mu = \alpha$ *для произвольного непустого множества мультимножеств $\mu \subseteq M$; характеристическая функция точной нижней грани (инфимума) α задается выражением $\chi_\alpha(d) = \min\limits_{\beta\in\mu}\ \chi_\beta(d)$;*
3) *для произвольного, в частности пустого, семейства мультимножеств μ точная верхняя грань (супремум) μ существует тогда и только тогда, когда μ ограничено сверху;*
4) $\sup\ \mu = \alpha$, *где μ — произвольное семейство мультимножеств, имеющее точную верхнюю грань, а характеристическая функция мультимножества α задается выражением $\chi_\alpha(d) = \max\limits_{\beta\in\mu}\ \chi_\beta(d)$.*

Теорема 5. *Ч.у.м. $\langle M, \preccurlyeq \rangle$ является условно полным множеством и полной полурешеткой, при этом точные грани находятся по формулам утверждения 4.*

Пополним частично упорядоченное множество $\langle M, \preccurlyeq \rangle$ наибольшим элементом T. Полученное ч.у.м. обозначим как $\langle M \cup \{T\}, \preccurlyeq \rangle$.

Следствие 1. *Ч.у.м. $\langle M \cup \{T\}, \preccurlyeq \rangle$ является полной решеткой с наименьшим элементом $\varnothing_m$ и наибольшим элементом T.*

Ч.у.м. $\langle M, \preccurlyeq \rangle$ можно вложить в другую полную решетку. Для этого расширим понятие мультимножества. С этой целью пополним множество N^+ со стандартным порядком наибольшим элементом ∞ и положим $N^+_\infty = N^+ \cup \{\infty\}$. Под мультимножеством будем понимать функцию вида $\alpha_\infty : U \to N^+_\infty$. Семейство всех таких мультимножеств обозначим через M_∞. Порядок на множестве N^+_∞ обозначим как $\leqslant_\infty$, тогда порядок на мультимножествах $\preccurlyeq_\infty$ расширим таким образом: $\alpha \preccurlyeq_\infty \beta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} U_\alpha \subseteq U_\beta \& \forall d (d \in U_\alpha \Rightarrow \alpha(d) \leqslant_\infty \beta(d))$.

Теорема 6. *Частично упорядоченное множество $\langle M_\infty, \preccurlyeq_\infty \rangle$ является полной решеткой с наименьшим элементом $\varnothing_m$ и наибольшим элементом T_∞, где $T_\infty : D \to \{\infty\}$, $T_\infty(d) = \infty$ для всех d. Точные нижние грани находятся по формулам утверждения 4. Для точных верхних граней выполняется формула $\sup \mu = \alpha$, где характеристическая функция мультимножества α имеет вид $\chi_\alpha(d) = \sup\limits_{\leqslant_\infty, \beta \in \mu} \chi_\beta(d)$.*

Рассмотрим вычислимость на конечных множествах и мультимножествах, которая вводится как нумерационная вычислимость. Аппаратом для задания класса вычислимых функций выступают примитивные программные алгебры (ППА), введенные В. Н. Редько в [4].

В работе [5] построены системы порождающих мультимножественной и множественной ППА.

В систему порождающих множественной ППА Σ входят предикат равенства $X = Y$, функции объединения $X \cup Y$ множеств, сложения $X \oplus Y$ и разности $X \div Y$ конечных множеств натуральных чисел, селекторные функции I^n_m, константные функции $\{1\}(X)$ и $\varnothing(X)$, фиксирующие синглетон $\{1\}$ и пустое множество $\varnothing$:

$$\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{X = Y,\, X \cup Y,\, X \oplus Y,\, X \div Y,\, I^n_m,\, \{1\}(X),\, \varnothing(X)\}^{n=1,2,\ldots}_{i=1,\ldots,n}.$$

Теорема 7. *Система Σ является системой порождающих множественной ППА.*

Система порождающих мультимножественной ППА Σ_M состоит из предиката равенства $\alpha = \beta$, функций объединения $\alpha \cup_{All} \beta$ мультимножеств, сложения $\alpha \oplus \beta$ и разности $\alpha \dot{-} \beta$ конечных мультимножеств (их основы — множества натуральных чисел), константных функций $\{1^1\}(\alpha)$ и $\varnothing_m(\alpha)$, фиксирующих мультимножества вида $\{1^1\}$ и $\varnothing_m$, специальной бинарной функции на мультимножествах $\varphi(\alpha, \beta)$ и селекторных функций I_m^n:

$$\Sigma_M \overset{\mathrm{def}}{=} \{\alpha = \beta, \alpha \cup_{All} \beta, \alpha \oplus \beta, \alpha \dot{-} \beta, \{1^1\}(\alpha), \varnothing_m(\alpha), \varphi(\alpha, \beta), I_m^n\}_{i=1,\ldots,n}^{n=1,2,\ldots},$$

где функция φ определяется как $\{n_1^1\}, \{k_1^1\} \overset{\varphi}{\mapsto} \{n_1^{k_1}\}$. Положим, что для $k_1 = 0$, $\varphi(\{n_1^1\}, \{k_1^1\}) = \varnothing_m$.

Теорема 8. *Система Σ_M является системой порождающих мультимножественной ППА.*

Список литературы

[1] *Буй Д. Б., Богатырёва Ю. А.* Теория мультимножеств: библиография, применение в табличных базах данных // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. — 2010. — № 7(48). — С. 56–62.

[2] *Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б., Поляков С. А.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001.

[3] *Buy D., Bogatyreva J.* Structure of Partially Ordered Family of Multisets // Proc. CSE 2010 Int. Scientific Conf. on Computer Science and Engineering, September 20–22, 2010, Kosice – Stara Lubovna, Slovakia. — P. 40–43.

[4] *Редько В. Н.* Универсальные программные логики и их применение // Труды Всесоюзного симпозиума по теоретическому и системному программированию. — Кишинев: Штиинца, 1983. — С. 310–326.

[5] *Богатирьова Ю. О.* Обчислюваність на скінченних множинах та мультимножинах // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. — 2010. — № 4. — С. 88–96.

Обобщенная табличная алгебра, обобщенные исчисления строк и доменов и их эквивалентность

Д. Б. Буй, И. Н. Глушко

buy@unicyb.kiev.ua, glushkoim@gmail.com

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко

В [1] была построена табличная алгебра, уточняющая хорошо известную реляционную алгебру Кодда. В данной работе строится обобщенная табличная алгебра путем явного внесения в определение таблицы схемы. Классическое исчисление строк (кортежей) и исчисление доменов пополнено произвольными предикатными и функциональными сигнатурами. Доказано, что при этом обогащении обобщенная табличная алгебра, исчисление строк и исчисление доменов являются одинаково выразительными.

Основные понятия и определения

Пусть $\boldsymbol{A}$ — множество атрибутов (имен), а $\boldsymbol{D}$ — универсальный домен (множество денотатов). Произвольное (конечное) множество атрибутов R назовём схемой. Под строкой схемы R понимаем именное множество на паре $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{D}$, проекция которого за первой компонентой совпадает с R, т. е. строка схемы R — это функция вида $s\colon R \to \boldsymbol{D}$.

Под (обобщенной) таблицей понимаем пару $\langle t,\ R\rangle$, где $t \in T(R)$ — таблица фиксированной схемы R (в смысле [1]). Тогда $\boldsymbol{T}(R) = \{\langle t, R\rangle \mid t \in T(R)\}$ — множество всех (обобщенных) таблиц схемы R, а $\boldsymbol{T} = \bigcup\limits_{R} \boldsymbol{T}(R)$ — множество всех таблиц. Это определение таблицы отличается от определения таблицы в смысле [1] тем, что каждой таблице приписывается ее схема. По сути это влияет только на случай пустой таблицы $t_{\varnothing}$, поскольку по непустой таблице схема восстанавливается однозначно. Запись $\langle t_{\varnothing}, R\rangle$ обозначает пустую таблицу схемы R.

Обобщение табличной алгебры

Под (обобщенной) табличной алгеброй будем понимать алгебру $\langle \boldsymbol{T},\ \Omega_{P,\Xi} \rangle$, где $\boldsymbol{T}$ — множество всех таблиц,

$$\Omega_{P,\Xi} = \left\{ \bigcup_R,\ \bigcap_R,\ \backslash_R,\ \sigma_{p,R},\ \pi_{X,R},\ \bigotimes_{R_1,R_2},\ \div^{R_1}_{R_2},\ Rt_{\xi,R},\ \sim_R \right\}$$

— сигнатура, $p \in P$, $\xi \in \Xi$, $X, R, R_1, R_2 \subseteq \boldsymbol{A}$, P, Ξ — множества параметров. Операции сигнатуры $\Omega_{P,\Xi}$ заданы в [2]. Выражением табличной алгебры называется любое выражение, построенное из таблиц множества $\boldsymbol{T}$ при использовании операций множества $\Omega_{P,\Xi}$.

Лемма. *Произвольное выражение табличной алгебры можно заменить эквивалентным ему выражением, которое использует постоянные таблицы с одним атрибутом и одной строкой, операции селекции, соединения, проекции, объединения, разности и переименования.*

Обобщенное исчисление строк и доменов

В основе большинства реляционных языков запросов лежит реляционное исчисление, поскольку, в отличие от реляционной алгебры, исчисление выражает лишь то, каким должен быть результат, и не предусматривает определение того, как его получить. Есть две формы реляционного исчисления: исчисление с переменными строками (по другой терминологии — кортежами) и исчисление с переменными на доменах. Эти формы предложены Е. Коддом (E. Codd) [3] и М. Лакруа (M. Lacroix) с А. Пиротте (A. Pirotte) [4] соответственно.

Обобщенное исчисление строк. В классическом исчислении строк обычно рассматривают лишь бинарные предикаты, а функциональная сигнатура вообще пуста [5, 6]. В представленной работе исчисление строк пополнено произвольными предикатными и функциональными сигнатурами. Определен синтаксис термов, атомов и формул исчисления строк; выделен класс разрешенных формул, используя понятие свободных и связанных переменных строк, введено понятие схемы $scheme\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P})$ и множества атрибутов $attr\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P})$, с которыми переменная строка встречается в формулах.

Как известно, выражения исчисления строк строятся из строк. Областью интерпретации предметных переменных исчисления строк является множество всех строк.

Выражение исчисления строк имеет вид $\{\boldsymbol{x}(R) \mid \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\}$, где

1. Формула $\boldsymbol{P}$ — разрешена;
2. Переменная $\boldsymbol{x}$ — единственная свободно входящая в формулу $\boldsymbol{P}$ переменная;
3. Если $scheme(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P})$ определена, то $scheme(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}) = R$, иначе, $attr(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}) \subseteq R$.

Обобщенное исчисление на домене. Исчисление на домене отличается от исчисления строк в том, что вместо переменных строк рассматриваются переменные значения из домена, которые представляют компоненты строки. Также исчисления на домене поддерживает условие принадлежности (membership condition) [6]: $\langle t(\langle A_1, d_1\rangle, \langle A_2, d_2\rangle, \ldots), R\rangle$, где R — схема, A_i — атрибут таблицы t, а d_i — переменная домена или литерал (предметная константа). Это условие истинно тогда и только тогда, когда в таблице t существует строка, которая имеет указанные значения с универсального домена $\boldsymbol{D}$ для указанных атрибутов.

Классическое исчисление на домене также пополнено произвольными предикатными и функциональными сигнатурами на универсальном домене. Определен синтаксис термов, атомов и формул исчисления на домене; выделен класс разрешенных формул. Выражение исчисления с переменными на домене имеет вид $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \mid \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)\}$, где

1. Формула $\boldsymbol{P}$ — разрешена, а $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ — все свободные переменные (переменные из универсального домена $\boldsymbol{D}$), входящие в формулу $\boldsymbol{P}$;
2. $R = \{A_1, \ldots, A_n\}$, R — схема, порядок атрибутов фиксированный;
3. $scheme(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{D}$, $i = 1, \ldots, n$.

Эквивалентности обобщенной табличной алгебры, обобщенного исчисления строк и обобщенного исчисления на домене

Теорема 1. *Для каждого выражения табличной алгебры можно эффективно построить эквивалентное ему выражение исчисления строк.*

Теорема 1 устанавливает, что обобщенное исчисление строк не менее выразительно, чем обобщенная табличная алгебра (используя терминологию [5]).

Проведена редукция исчисления строк к исчислению на домене. Для этого задано отображение, которое каждому выражению исчисления строк ставит в соответствие эквивалентное выражение исчисления на домене. Следовательно, имеет место

Теорема 2. *Для каждого выражения исчисления строк можно эффективно построить эквивалентное ему выражение исчисления на домене.*

Таким образом, обобщенное исчисление на домене не менее выразительно, чем обобщенное исчисление строк.

Кроме того, доказано, что обобщенная табличная алгебра является не менее выразительной, чем исчисление на домене.

Теорема 3. *Для каждого выражения исчисления на домене можно эффективно построить эквивалентное ему выражение табличной алгебры.*

Учитывая представленные выше теоремы, можно сделать вывод, что обобщенная табличная алгебра, обобщенное исчисление строк и обобщенное исчисление на домене одинаково выразительны. Следовательно, установлен основной результат:

Теорема 4. *Обобщенная табличная алгебра, обобщенное исчисление строк и обобщенное исчисление на домене эквивалентны.*

Список литературы

[1] *Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б., Поляков С. А.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001.

[2] *Buy D., Glushko I.* Generalized table algebra, generalized tuple calculus and theirs equivalence // Proc. of the CSE'2010 International Scientific Conference on Computer Science and Engineering. — Kosice–Stara Lubovna, Slovakia, 2010. — P. 231–238.

[3] *Codd E. F.* Relational Completeness of Data Base Sublanguages // Data Base Systems. — New York: Prentice–Hall,1972. — P. 65–93.

[4] *Lacroix M., Pirotte A.* Domain-oriented relational languages // Proc. 3rd Int. Conf. on Very Large Data Bases. — Tokyo, 1977. — P. 370–378.

[5] *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. — М.: Мир, 1987.

[6] *Дейт К. Дж.* Введение в системы баз данных. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2005.

Формализация наследования в объектно-ориентированных базах данных. Простое и множественное наследование

Д. Б. Буй, С. В. Компан

buy@unicyb.kiev.ua, robin_2005@mail.ru

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко;
Кировоградский государственный педагогический
университет им. В. Винниченко

В статье рассматривается наследование классов как одно из основных свойств объектно-ориентированных баз данных. Выполнена формализация производных классов.

Введение

Рассмотрим такое свойство объектно-ориентированного программирования (ООП), как наследование (inheritance) классов, которое может использоваться при создании объектов баз данных. Идея наследования состоит в том, что сначала создается базовая схема в пределах базового класса, которая определяет общие свойства производных классов. В производном классе базовая схема наследуется в пределах производного класса и расширяется за счет добавления новых атрибутов, которые уточняют производный класс. Схемы производного класса будем называть производными. Схема R', которая наследуется с базовой, расширяет базовую схему, т. е. $\mathsf{R} \subset \mathsf{R}'$.

Формализация наследования

Рассмотрим случай, когда производная схема R' наследует только одну базовую схему R и производный класс не имеет методов, имена которых совпадают с именами методов базового класса. Пусть имеем схему $\mathsf{R} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Обозначим через $\mathsf{O}_1^{\mathsf{R}}$ объект класса $\mathsf{K}_1 =< \mathsf{R}, \mathsf{G}_{\mathsf{R}} >$. Будем считать класс K_1 базовым, а производным от него класс $\mathsf{K}_2 =< \overline{\mathsf{R}}, \mathsf{G}_{\overline{\mathsf{R}}} >$. В классе K_2 схема $\overline{\mathsf{R}} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ состоит из атрибутов, присущих только производному классу. Как правило $\mathsf{R} \cap \overline{\mathsf{R}'} = \varnothing$, но это необязательно. Мы также требуем, что $\mathsf{G}_{\mathsf{R}} \cap \mathsf{G}_{\overline{\mathsf{R}}} = \varnothing$, где G_{R} и $\mathsf{G}_{\overline{\mathsf{R}}}$ — множества методов. Объект производного класса K_2 будет объектом вида $O^{R \cup \overline{R}}$, т. е. этот объект будет содержать атрибуты схем R и $\overline{\mathsf{R}}$ ($\mathsf{R}' = \mathsf{R} \cup \overline{R}$). Функции f_i для инициализации объекта $O^{\mathsf{R}\cup\overline{R}}$ имеют вид: $\{f_1, \dots, f_s \mid f_i \colon \mathsf{R}\cup\overline{R} \to D, i = \overline{1, s}\}$. В результате ограничения объекта $\mathsf{O}^{\mathsf{R}\cup\overline{\mathsf{R}}}$ по схеме R получаем объект $\mathsf{O}_1^{\mathsf{R}}$. Формально это можно записать так: $\mathsf{O}^{\mathsf{R}\cup\overline{\mathsf{R}}} \mid \mathsf{R} = \mathsf{O}_1^{\mathsf{R}}$, где $\mid$ — операция ограничения [1, 2].

Для уточнения наследования будем считать, что элементы G суть имена методов. Введем функцию интерпретации $\alpha\colon \mathsf{G} \to F$, которая именам методов сопоставляет их семантику[1]. Тогда F есть множество конечноместных операций над состояниями объектов. Пусть $K_1 = \langle \mathsf{R}_1, \mathsf{G}_1\rangle$ родительский класс, а $K_2 = \langle \mathsf{R}_2, \mathsf{G}_2\rangle$ его производный класс. Обозначим $\alpha\colon \mathsf{G}_1 \to F$ — функцию для родительского класса, а $\beta\colon \mathsf{G}_2 \to F$ — функцию для производного класса, который наследует атрибуты и методы родительского класса. Тогда вид простого наследования, которое мы рассматриваем, будет описываться функцией $\gamma\colon \mathsf{G}_1 \cup \mathsf{G}_2 \to F$.

Рассмотрим случай, когда производный класс наследует только один родительский класс и производный класс имеет методы, имена (и параметры функций) которых совпадают с именами (и параметрами функций) методов родительского класса. В этом случае в производном классе методы, которые принадлежат ему, переопределяют (overriding) методы с такими же именами родительского класса. Для формализации такого наследования введем операцию наложения $\triangledown$: $\alpha\triangledown\beta = \beta \cup \alpha \mid \mathsf{G}_1 \setminus \mathsf{G}_2 = \beta \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\beta)$, где, как и ранее, $\mid$ — операция ограничения, а $dom\,\alpha$ и $dom\,\beta$ — области определения соответственно функций α и β. Свойства операции наложения $\triangledown$:

1. $\alpha\triangledown\alpha = \alpha\cup\alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\alpha) = \alpha\cup\alpha \mid \varnothing = \alpha \cup f_\varnothing = \alpha$, где $f_\varnothing$ — всюду неопределенная функция (идемпотентность);
2. $\alpha\triangledown\beta \neq \beta\triangledown\alpha$;
3. $dom(\alpha\triangledown\beta) = dom\,\alpha \cup dom\,\beta$.

В следующей лемме $\approx$ — отношение совместности: $\alpha \approx \beta \overset{\text{def}}{\iff} \alpha \mid X = \beta \mid X$, где $X = dom\,\alpha \cap dom\,\beta$.

Утверждение 1 (критерий коммутативности операции наложения). *Для любых функций α и β выполняются следующие утверждения:* $\alpha\triangledown\beta = \beta\triangledown\alpha \iff \alpha \approx \beta$.

[1]Семантика метода — конечноместная операция над состояниями объектов.

Доказательство. Необходимость.

$$\alpha\nabla\beta = \beta \cup \alpha \mid dom\,\alpha \setminus dom\,\beta =$$
$$= \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\alpha) \cup \beta \mid (dom\,\alpha \cap dom\,\beta) \cup \alpha \mid dom\,\alpha \setminus dom\,\beta. \ (*)$$

$$\beta\nabla\alpha = \alpha \cup \beta \mid dom\,\beta \setminus dom\,\alpha =$$
$$= \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\beta) \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \cap dom\,\beta) \cup \beta \mid dom\,\beta \setminus dom\,\alpha. \ (**)$$

Необходимость следует из $(*)$, $(**)$ и общезначимой теоретико-множественной импликации: $A \cup B = A' \cup B \Rightarrow A = A'$ при условии, что $A \cap B = A' \cap B = \varnothing$. Достаточность следует из $(*)$, $(**)$ и определения отношения совместности. ∎

Рассмотрим наследование, при котором один производный класс наследует атрибуты и методы от нескольких родительских классов [3]. Напомним, такое наследование принято называть множественным (кратным, multiple inheritance). Может возникнуть ситуация, когда в двух и более родительских классах находятся методы с одинаковыми именами и параметрами. В результате, в производном классе такой метод будет наследоваться путем его переопределения. Возникает вопрос: какой именно метод должен наследоваться в конечном итоге в производном классе? Должно существовать правило, позволяющее однозначно ответить на вышеприведенный вопрос. Такое правило существует в постреляционной СУБД Cache [4, 5]. Правило: при наследовании в первую очередь наследуются ключевые слова, свойства, методы и параметры первого родительского класса (системного)[2] класса в списке. Потом для каждого последующего по списку родительского класса наследуются свойства, методы и параметры класса, при этом, если находятся ранее определенные элементы с таким же именем, они перекрываются новыми элементами. Ключевые слова наследуются исключительно из первого родительского класса и не переопределяются. Операция наложения дает возможность использовать left-to-right и right-to-left наследование. Формально такие виды наследования можно описать с помощью операции наложения ∇: $\overrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \alpha_3\nabla\alpha_2\nabla\alpha_1$ и

[2]Поскольку изменить семантику системных классов мы не можем, в дальнейшем их не рассматриваем.

$\overleftarrow{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = \alpha_1 \nabla \alpha_2 \nabla \alpha_3$. В последних выражениях мы не расставляли скобки, так как следующая лемма утверждает ассоциативность наложения.

Утверждение 2 (ассоциативность операции наложения). *Для любых функций α, β и γ выполняется следующее утверждение:* $(\alpha\nabla\beta)\nabla\gamma = \alpha\nabla(\beta\nabla\gamma)$.

Доказательство. На основании определения операции наложения и свойств ограничения [2] получаем такие равенства: $(\alpha\nabla\beta)\nabla\gamma = (\beta \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\beta))\nabla\gamma = \gamma \cup (\beta \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\beta)) \mid (dom\,\alpha \cup dom\,\beta) \setminus dom\,\gamma = \gamma \cup (\beta \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\beta)) \mid ((dom\,\alpha \setminus dom\,\gamma) \cup (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma)) = \gamma \cup \beta \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\gamma) \cup \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\beta) \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\gamma) \cup (\alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\beta)) \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) = \gamma \cup \beta \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\gamma) \cup \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\beta) \cap (dom\,\alpha \setminus dom\,\gamma) \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\beta) \cap (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) = \gamma \cup \beta \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\gamma) \cup \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) \cup \alpha \mid dom\,\alpha \setminus (dom\,\beta \cup dom\,\gamma) \cup \varnothing = \gamma \cup \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus (dom\,\beta \cup dom\,\gamma)) \cup \beta \mid (dom\,\alpha \setminus dom\,\gamma) = \gamma \cup \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus (dom\,\beta \cup dom\,\gamma)) \cup \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) = \gamma \cup \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus (dom\,\beta \cup dom\,\gamma))$.

Перейдем к правой части равенства, которое доказывается: $\alpha\nabla(\beta\nabla\gamma) = \alpha\nabla(\gamma \cup \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma)) = \gamma \cup \beta \mid (dom\,\beta \setminus dom\,\gamma) \cup \alpha \mid (dom\,\alpha \setminus (dom\,\beta \cup dom\,\gamma))$. ∎

Выводы

С помощью операции наложения ∇ математически описано простое и множественное наследование. Приведены свойства операции наложения.

Список литературы

[1] *Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001.

[2] *Буй Д. Б., Кахута Н. Д.* Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження // Вісник Київського університету ім. Т. Г. Шевченка. — 2005. — Вип. 2. — С. 157–170.

[3] *Харрингтон Дж.* Разработка баз данных: Пер. с англ. — М.: ДМК Пресс, 2005.

[4] *Кирстен В., Ирингер М.* Постреляционная СУБД Cache 5. Объектно-ориентированная разработка приложений. — М.: Бином, 2008.

[5] http://docs.intersystems.com/cache20102/csp/docbook/DocBook.UI.Page.cls\?KEY=GOBJ_model#GOBJ_model_inheritance.

Формализация объектов, классов, методов в объектно-ориентированных базах данных

Д. Б. Буй, С. В. Компан

buy@unicyb.kiev.ua, robin_2005@mail.ru

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко;
Кировоградский государственный педагогический
университет им. В. Винниченко

В статье рассматривается математическое описание объекта, класса, методов класса. Формально описывается жизненный цикл объекта.

Введение. Существуют различные реализации языка структурированных запросов табличных баз данных (БД) SQL (Structured Query Language). Создатели СУБД, как правило, учитывают одну из реализаций языка SQL, которая на данный момент является актуальной. В результате появилась необходимость построить формальную модель табличных (реляционных) структур, которая даст возможность поддерживать различные стандарты. На данном этапе развития объектно-ориентированных баз данных (ООБД) не существует адекватных формальных моделей объектно-ориентированных БД, идеология работы которых базируется на объектно-ориентированном подходе к программированию. По аналогии с языком SQL каждый создатель устанавливает свои подходы к разработке ООБД. Следует отметить, что общим для различных ООБД является использование объектно-ориентированных языков программирования, основными свойствами которых являются инкапсуляция, полиморфизм и наследование. Для табличных (реляционных) баз данных такая формализация была сделана с помощью теории табличных алгебр [1], которые существенно обобщают реляционные алгебры Кодда. Цель статьи — дать математическое описание основных элементов ООБД.

Существуют различные формы представления информации. Один из подходов состоит в том, что любую сущность реального мира можно описать в виде объекта, который содержит в себе набор свойств (атрибутов), идентифицирующих эту сущность. Каждый объект характеризуется [2]:

— состоянием, которое определяется перечислением всех свойств объекта и текущими значениями каждого из этих свойств;
— поведением, которое описывает реакции объекта на действия извне.

В ООБД используется понятие класса, в котором описываются свойства объекта и методы, которые определяют поведение объекта. Описание такого класса, на самом деле, содержит в себе схему БД. Схема — это семантическая единица, которая описывает свойства объектов, с другой стороны, схема является шаблоном, на основании которого создаются объекты [3, с. 30]. Объект, созданный на основе такого шаблона, является экземпляром схемы.

Формализация основных элементов ООБД. В ООБД информация представляется в виде объектов. Формализуем это понятие. Для этого зафиксируем следующие три множества: A, элементы которого назовем атрибутами, D – универсальный домен (множество всех возможных значений атрибутов) и $\mathsf{M} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ — множество функций (методов). Множества A и D представляют собой множества имен и денотатов соответственно [1, с. 31]. По аналогии со схемой таблицы схемой R объекта будем называть конечное множество атрибутов $\mathsf{R} \subseteq \mathsf{A}$, $\mathsf{R} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ [1, с. 31]. В дальнейшем нам придется расширять понятие схемы БД до класса, включая в нее методы. Объекты будем обозначать через $O, O_1, O_2, \ldots$. Существуют разные классы атрибутов: простые (simple) и составные (composite) атрибуты (attributes), однозначные (single-valued) и многозначные (multivalued) атрибуты, базовые (stored) и производные (derived) атрибуты, ключи (keys). Простой атрибут состоит из одного компонента с независимым существованием. Составной атрибут состоит из нескольких компонентов, каждый из которых характеризуется независимым существованием. Будем рассматривать простые атрибуты [4, 5].

При создании объекта мы должны присвоить значения его атрибутам (инициализировать). В общем случае инициализацию объекта можно представить таким образом:

$$O = \{\langle A_1, d_1\rangle, \langle A_2, d_2\rangle, \ldots, \langle A_n, d_n\rangle\} = f, \tag{1}$$

где $f\colon \mathsf{R} \to \mathsf{D}$ и $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\} \in \mathsf{D}$. Выражение (1) описывает строку таблицы, которая содержит значения соответствующих атрибутов объекта.

В общем виде объектов, имеющих одинаковую схему R, может существовать несколько, поэтому таблица, описывающая такую ситуацию, будет многомерной. Такую таблицу формально можно описать в виде

$$\{f_1, \ldots, f_m\}, \quad f_i\colon \mathsf{R} \to \mathsf{D}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

где f_i — функция, в качестве аргументов которой выступают атрибуты схемы R, а значения берутся из универсального домена D. Данная функция определяет состояние объекта в определенный момент времени. Выражение (2) можно записать в таком виде:

$$\{\{\langle A_1, d_1^i\rangle, \ldots, \langle A_n, d_n^i\rangle\} \mid i = \overline{1, m}\}.$$

В ООБД схема есть часть более широкого понятия, которое принято называть классом. Класс инкапсулирует в себе схему R и методы. Поэтому класс уместно описать парой $\mathsf{K} = \langle \mathsf{R}, \mathsf{G}\rangle$, где R — схема, G — множество методов. В какой-то момент времени объект будет иметь состояние, при котором атрибуты объекта вообще не будут иметь значений (не будут инициализированными), поэтому можно считать, что в этот момент времени атрибуты будут иметь специальное, так называемое, неопределенное значение Λ. Выражение (2) будет иметь вид

$$\{f_1, \ldots, f_m \mid f_i\colon \mathsf{R} \to \overline{\mathsf{D}}, i = \overline{1, m}\}, \text{ где } \overline{\mathsf{D}} = \mathsf{D} \cup \{\Lambda\}. \tag{3}$$

Случай, при котором все атрибуты инициализированного объекта O схемы R неопределены, описывается равенством: $f(A_i) = \Lambda, i = \overline{1, n}$. Конструктор можно формально представить функцией $g\colon \mathsf{D}^{\mathsf{k}} \to \mathrm{OM}$, где OM — множество инициализированных объектов. Точнее, эту функцию можно записать равенством $g(d_1, \ldots, d_k) = O$, где $d_1, \ldots, d_k$ — значения атрибутов, которым присвоены значения. Учитывая равенства (1) и (3), получим

$$g_{\langle A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\rangle}(d_1, \ldots, d_k) = \{\langle A_{i_1}, d_1\rangle, \ldots, \langle A_{i_k}, d_k\rangle\}.$$

Таким образом, по функции вида g мы можем получить функции вида f: $f(A_{i_s}) = d_s, s = 1, 2, \ldots, k$, и для любого атрибута $A \in \mathsf{R} \backslash \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ $f(A) = \Lambda$.

Жизненный цикл объекта. Каждый объект имеет свой жизненный цикл — последовательность состояний, которые сменяют друг друга от образования объекта и до его удаления или же до перехода объекта в состояние, при котором он не будет изменяться. Под формализацией жизненного цикла будем подразумевать построение множества состояний и определение логики переходов из одного состояния в другое. На протяжении жизненного цикла объект изменяет свое состояние с помощью такой характеристики, как поведение, которая определяется методами (функциями) $\mathsf{G} = \{g_1, g_2, \ldots, g_p\}$, описанными в классе K. Обозначим множество всех состояний объекта схемы R через $F(\mathsf{R}) = \{f \mid f\colon \mathsf{R} \to \overline{D}\}$. Метод (функция) класса является алгебраической операцией: $f^m\colon \underbrace{F(\mathsf{R}) \times \ldots \times F(\mathsf{R})}_{m \text{ раз}} \to F(\mathsf{R})$. При действии метода на текущие состояния $f_1, \ldots, f_m$ объектов мы получаем новое состояние объекта: $g(f_1, \ldots, f_m) \in F(\mathsf{R})$ (исходя из того, что новое состояние объекта может зависеть от его предыдущего состояния и текущего состояния других объектов, с которыми он взаимодействует).

Выводы

Формально описаны понятия объекта, схемы, класса и жизненного цикла объекта. В отличии от реляционных БД, где таблица определяется схемой, в ООБД каждый объект определяется классом, на основании которого он был построен. Объект БД можно представить в виде строки таблицы, в которой находятся значения соответствующих атрибутов объекта, а экземпляры класса — в виде множества строк такой же таблицы.

Список литературы

[1] *Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001.

[2] *Буч Г.* Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на C++. — СПб.: Бином: Невский Диалект, 1998. `http://www.helloworld.ru/texts/comp/other/oop/ch03.htm`

[3] *Харрингтон Дж.* Разработка баз данных: Пер. с англ. — М.: ДМК Пресс, 2005.

[4] *Atkinson M., DeWitt D., Maier D., Dittrich K.* The Object-Oriented Database System Manifesto. http://www.cl.cam.ac.uk/teaching/2003/Databases/oo-manifesto.pdf

[5] *Грошев А. С.* Основы работы с базами данных. http://www.intuit.ru/department/database/basedbw/2/3.html

Полнота аксиоматики Армстронга

Д. Б. Буй, А. В. Пузикова

anna_inf@mail.ru

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко;
Кировоградский государственный педагогический
университет им. В. Винниченко

В статье рассматривается математическое доказательство полноты аксиоматики Армстронга теории функциональных зависимостей в реляционных базах данных.

Пусть A — множество атрибутов (имен), t — таблица, R — схема таблицы t (произвольное конечное множество атрибутов), X, Y, Z — подмножества схемы R, s, s_1, s_2 — строки таблицы t.

Скажем, что на таблице t выполняется *функциональная зависимость* (ФЗ) [1, с. 71] $X \to Y$, если для двух произвольных строк s_1, s_2 таблицы t, которые принимают равные значения на множестве атрибутов X, имеет место их равенство на множестве атрибутов Y:

$$(X \to Y)(t) = \mathrm{true} \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall s_1, s_2 \in t (s_1 \mid X = s_2 \mid X \Rightarrow s_1 \mid Y = s_2 \mid Y).$$

Скажем, что таблица t схемы R является *моделью* множества функциональных зависимостей F, если каждая функциональная зависимость $(X \to Y) \in F$ выполняется на таблице t:

$$t \text{ модель } F \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall (X \to Y)(X \to Y \in F \Rightarrow (X \to Y)(t) = \mathrm{true}).$$

Семантическое следование. Функциональная зависимость $X \to Y$ *семантически выводится* ($\models$) из множества функциональных зависимостей F, если на каждой таблице $t(R)$, которая является моделью множества ФЗ F, выполняется также функциональная зависимость $X \to Y$:

$$F \models X \to Y \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall t(R)\,(t \text{ модель } F \Rightarrow (X \to Y)(t) = \mathrm{true}).$$

Формальные доказательства следующих лемм приводятся на основе свойств ограничения функций по множеству [2].

Лемма 1 (*аксиома рефлексивности* по Вильяму Армстронгу).

$$\forall t\,(X \to Y)(t) = \mathrm{true},\ Y \subseteq X.$$

Следствие. $\varnothing \models X \to Y, \forall Y \subseteq X$ (*такая функциональная зависимость называется тривиальной*).

Лемма 2 (правило *пополнения*).

$$(X \to Y)(t) = \mathrm{true} \Rightarrow (X \cup Z \to Y \cup Z)(t) = \mathrm{true},\ \forall Z \subseteq R.$$

Следствие. $F \models X \to Y \Rightarrow F \models X \cup Z \to Y \cup Z.$

Лемма 3 (правило *транзитивности*).

$$(X \to Y)(t) = \mathrm{true} \wedge (Y \to Z)(t) = \mathrm{true} \Rightarrow (X \to Z)(t) = \mathrm{true}.$$

Следствие. $F \models X \to Y \wedge F \models Y \to Z \Rightarrow F \models X \to Z.$

Синтаксическое следование. Скажем, что функциональная зависимость *синтаксически выводится* из множества ФЗ F ($\vdash$), если существует конечная последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}, \varphi_m$, такая, что $\varphi_m = X \to Y$ и $\forall i = \overline{1, m-1}$ каждая φ_i либо является аксиомой рефлексивности, либо принадлежит F, либо получена по какому-нибудь правилу вывода из предыдущих в этой последовательности φ_j, φ_k, $j, k < 1$ [4, с. 65].

Пусть задано произвольное множество функциональных зависимостей F. *Замыкание* $[F]$ — это множество всех ФЗ, которые синтаксически выводятся из F:

$$[F] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{X \to Y \mid F \vdash X \to Y\}.$$

Лемма 4. *Выполняются соотношения* (*свойства замыкания множества ФЗ*):

1) $F \subseteq [F]$;
2) $[[F]] = [F]$ [3, с. 57].

Следствие [3, с. 56]. *Замыкание* $[F]$ *— это наименьшее содержащее* F *множество, такое, что при применении к нему аксиом Армстронга нельзя получить ни одной функциональной зависимости, которая не принадлежала бы* $[F]$.

Из описанных выше аксиомы и правил вывода для упрощения практических вычислений замыкания $[F]$ множества ФЗ F можно получить другие правила вывода.

Лемма 5 (правило *композиции*) [5, с. 275].

$$\{X_1 \to Y_1, X_2 \to Y_2\} \vdash X_1 \cup X_2 \to Y_1 \cup Y_2.$$

Следствие. $\{X \to Y_1, X \to Y_2\} \vdash X \to Y_1 \cup Y_2$.

Лемма 6 (правило *декомпозиции*) [5, с. 275].

$$X \to Y_1 \cup Y_2 \vdash X \to Y_1 \wedge X \to Y_1 \cup Y_2 \vdash X \to Y_2.$$

Замыканием $[X]$ множества атрибутов X называется объединение правых частей всех ФЗ вида $X \to Y$, которые выводятся (синтаксически) из множества F:

$$[X]_F \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{X \to Y \in [F]} Y.$$

Лемма 7. *Выполняются соотношения (свойства замыкания множества* X*):*

1) $X \subseteq [X]$;
2) $F \vdash X \to [X]$;
3) $X \to Z \notin [F] \Rightarrow Z \nsubseteq [X] \subset R$.

Утверждение 8 (корректность аксиоматики). *Если ФЗ* $X \to Y$ *синтаксически выводится из множества ФЗ* F*, то ФЗ* $X \to Y$ *выводится из* F *семантически:*

$$F \vdash X \to Y \Rightarrow F \models X \to Y.$$

Утверждение 9 (полнота аксиоматики). *Если ФЗ* $X \to Y$ *семантически выводится из множества ФЗ* F*, то ФЗ* $X \to Y$ *выводится из* F *синтаксически:*

$$F \models X \to Y \Rightarrow F \vdash X \to Y.$$

Теорема. *Отношения семантического и синтаксического следования совпадают* $F \vdash X \to Y \Leftrightarrow F \models X \to Y$.

Следствие. *Аксиоматика Армстронга является полной.*

Список литературы

[1] *Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: Видавничий дім «Академперіодика», 2001.

[2] *Буй Д. Б., Кахута Н. Д.* Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження // Вісник Київського університету ім. Т. Г. Шевченка. — 2005. — Вип. 2. — С. 157–170.

[3] *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. — М.: Мир, 1987.

[4] *Линдон Р.* Заметки по логике. — М.: Мир, 1968.

[5] *Дейт К. Дж.* Введение в системы баз данных. 8-е издание. — М.: Вильямс, 2005.

Полиномиальные алгоритмы для распознавания сохранения некоторых множеств функциями, представленными полиномами

А. В. Бухман

antvbx@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

В данной заметке описаны полиномиальные алгоритмы для распознавания свойства функций многозначных логик сохранять некоторые множества; функции задаются в виде полиномов.

Основные определения

Пусть $k \geqslant 2$ — натуральное число, $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$.

Определение 1. *Функцией k-значной логики*, зависящей от n переменных, будем называть любое отображение вида $f : E_k^n \to E_k$.

Множество всех функций k-значной логики будем обозначать P_k. Множество всех функций k-значной логики, зависящих от n переменных, будем обозначать P_k^n.

Обычным образом [1] вводится операция суперпозиции над функциями из P_k.

Определение 2. Пусть $Q \subset P_k$. Множество Q называется *замкнутым классом*, если всякая функция, полученная в результате суперпозиции любых функций из Q, принадлежит Q.

Определение 3. *Функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ *сохраняет множество* $\mathcal{E} \subseteq E_k$, если для любых $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{E}$ будет верно $f(a_m, \ldots, a_m) \in \mathcal{E}$.

Теорема 1 [1]. *Множество всех функций, сохраняющих некоторое собственное подмножество* E_k, *есть замкнутый класс.*

В данной работе рассматривается задание функции в виде полиномов. Такой способ задания делает возможной для некоторых функций подачу на вход алгоритма достаточно короткой записи.

На вход алгоритма подаётся запись функции в виде полинома, причём слагаемые с нулевыми коэффициентами опускаются.

Исполнителем алгоритма будет машина Тьюринга.

Некоторые свойства

Теорема 2. *Пусть* k *— простое число,* $l \in E_k \setminus \{0\}$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\mathcal{E} = E(lx^i)$ *и* $\psi_{\mathcal{E}}(x)$ *— некоторая функция, которая равна* 0 *на множестве* $\mathcal{E}$ *и не равна нулю вне этого множества.*

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ *сохраняет множество* $\mathcal{E}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\psi_{\mathcal{E}}(f(lx_1^i, \ldots, lx_n^i)) \equiv 0. \tag{1}$$

Теорема 3. *Пусть* k *— простое число,* $l \in E_k \setminus \{0\}$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\mathcal{E} = E(lx^i) \setminus \{0\}$ *и* $\psi_{\mathcal{E}}(x)$ *— любая функция, такая, что она принимает значение 0 тогда и только тогда, когда* $x \in \mathcal{E}$. *Функция* $f \in P_k^n$ *сохраняет множество* $\mathcal{E}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\psi_{\mathcal{E}}(x_1^{k-1} \ldots x_n^{k-1} f(lx_1^i, \ldots, lx_n^i) + l - lx_1^{k-1} \ldots x_n^{k-1}) \equiv 0. \tag{2}$$

Алгоритмы распознавания

Теорема 4. *Для любого простого числа* k, *любого* $l \in E_k \setminus \{0\}$ *и любого* $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ *можно построить полиномиальный алгоритм, который по полиному функции* $f \in P_k$ *распознает, сохраняет ли эта функция множество* $\mathcal{E} = E(lx^i)$.

Теорема 5. *Для любого простого числа k, для любого $l \in E_k \setminus \{0\}$ и для любого $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ можно построить полиномиальный алгоритм, который по полиному функции $f \in P_k$ распознаёт, сохраняет ли эта функция множество $\mathcal{E} = E(lx^i) \setminus \{0\}$.*

О количестве функций, которые можно распознать предложенными алгоритмами

Количество собственных подмножеств в E_k равно $2^k - 2$. Оценим число множеств, сохранение которых можно распознать предложенными алгоритмами. Различных множеств вида $E(lx^i)$, где $i, l = 1, \ldots, k-1$, ровно $\sum\limits_{d|k-1} d$. Различных множеств вида $E(lx^i) \setminus \{0\}$, где $i, l = 1, \ldots, k-1$, ровно $\sum\limits_{d|k-1} d$. Заметим, что среди таких множеств содержатся $\{0\}, \ldots, \{k-1\}$, они распознаются тривиально.

Для $k = 3$ предложенными алгоритмами можно распознать сохранение 6 множеств (то есть всех).

Теорема 6. *Пусть $k \geqslant 3$ — простое число. Для каждого из множеств*

$$\{1, \ldots, k-1\},$$
$$\{0, 1\}, \ldots, \{0, k-1\},$$
$$\{0, -l, l\}, \{l, -l\}, l \in E_k,$$
$$\{0, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\tfrac{k-1}{2}\right)^2\},$$
$$\{1^2, 2^2, \ldots, \left(\tfrac{k-1}{2}\right)^2\}$$

существует полиномиальный, относительно длины записи полинома функции f, алгоритм, который распознаёт по полиному функции сохранение функцией этого множества.

Доказательство. Заметим, что

$$\{1, \ldots, k-1\} = E(x) \setminus \{0\},$$
$$\{0, 1\} = E(x^{k-1}), \ldots, \{0, k-1\} = E((k-1)x^{k-1}),$$
$$\{0, l, -l\} = E(lx^{(k-1)/2}), \quad \{l, -l\} = E(lx^{(k-1/2)}) \setminus \{0\},$$
$$\left\{0, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\tfrac{k-1}{2}\right)^2\right\} = E(x^2),$$
$$\left\{1^2, 2^2, \ldots, \left(\tfrac{k-1}{2}\right)^2\right\} = E(x^2) \setminus \{0\}.$$

Далее применяем теоремы 4, 5. ∎

Работа поддержана РФФИ, грант № 10-01-00768-а.

Список литературы

[1] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.

О фасетах бимодулярного полиэдра

С. И. Веселов

veselov@vmk.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Матрица с целыми элементами называется *бимодулярной*, если модуль ее любого базисного минора не превышает 2 (см., например, [1]).

Выпуклая оболочка всех целых точек, принадлежащих полиэдру P, обозначается символом P_Z.

Бимодулярным называется полиэдр $\{x : \ Ax \leqslant b\}_Z$, где A — бимодулярная матрица.

Пусть $c \in \mathbf{Z}^n$ и гиперплоскость $c^T x = c'$, не содержащая точек из P_Z, является опорной к полиэдру P. Неравенство $c^T x \leqslant c''$ с целыми коэффициентами называется *отсечением* (ср. [2, 3]) для полиэдра P, если

$$c'' = \begin{cases} \lfloor c' \rfloor, & \text{если } c' \notin \mathbf{Z}; \\ c' - 1, & \text{если } c' \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

В докладе описывается подмножество фасет бимодулярного полиэдра P_Z, которые являются отсечениями для P.

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-01-00545-а.

Список литературы

[1] *Veselov S. I., Chirkov A. J.* Integer program with bimodular matrix // Discrete Optimization. — 2009. — T. 6, № 2. — C. 220–222.

[2] *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. — Т. 2. — М.: Мир, 1991.

[3] *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного программирования.— М.: Физматлит, 1995.

Суперпозиции ациклических программ

В. Ю. Винник, Т. С. Парфирова

vadim.vinnik@gmail.com, tetiana.parfirova@gmail.com

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко

Для класса ациклических именных функций, введённых в предыдущих работах авторов, в дополнение к уже установленным свойствам замкнутости относительно композиций умножения и наложения, установлена замкнутость относительно суперпозиции ациклической функции на место базисной функции другой ациклической функции.

Базовые определения

В формальном аппарате композиционного программирования [1, 2] данные моделируются именными множествами (ИМ), а программы — именными функциями (ИФ), их определения приведены ниже. Обозначим через V и D множество всех имен и денотатов соответственно. V-именным множеством называют конечное функциональное бинарное отношение $\alpha \in \mathsf{D}^V$, $V \subseteq \mathsf{V}$. Через $\mathcal{N}$ обозначим класс всех ИМ.

По определению, ИФ — это унарная частичная функция вида $f : \mathcal{N} \tilde{\to} \mathcal{N}$. ИФ называется V-арной, если $\mathrm{dom} f \subseteq \mathsf{D}^V$, и (V, W)-арной, если помимо этого еще и $\mathrm{rang} f \subseteq \mathsf{D}^W$. Функция, имеющая некоторую арность, называется полиарной. Везде далее рассматриваются только полиарные функции.

Бинарная операция наложения ИМ определяется следующим образом:

$$\alpha \nabla \beta = \beta \cup \{(u, d) \mid (u, d) \in \alpha, u \notin \mathrm{pr}_1(\beta)\}.$$

Композиции рассматриваем как алгебраические операции над именными функциями. Композиции умножения и наложения функций определяются следующим образом:

$$(f \circ g)(\alpha) \simeq g(f(\alpha)),$$
$$(f \nabla g)(\alpha) \simeq f(\alpha) \nabla g(\alpha).$$

Содержательно эти операции соответствуют последовательному и параллельному выполнению программ.

Ациклические программы

Напомним определение ациклической функции [3]. Будем в данном контексте отождествлять программу и моделирующую её ИФ. Пусть программа состоит из n подпрограмм $f_i\,(i = \overline{1,n})$. Вход программы рассматривается как выход ее условной 0-й подпрограммы; дуальным образом, выход ацикличной программы рассматривается как вход ее условной $(n+1)$-й подпрограммы.

Допустим, что функции f_i (при $i = \overline{1,n}$) имеют арность (U_i, V_i). Пусть даны множества имен V и U, которые обозначим V_0 и U_{n+1}. Пусть, далее, для всех i, j, где $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$, даны конечные отображения $\xi_{i,j} : \mathsf{V} \widetilde{\to} \mathsf{V}$. Совокупность этих отображений можно рассматривать как треугольную матрицу Ξ с $n+1$ строками и столбцами, причем нумерация строк начинается с 0, а столбцов — с 1. Налагаются следующие ограничения:

$$V_i \subseteq \bigcup_{j=i+1}^{n+1} \mathrm{pr}_2(\xi_{i,j}), \quad i = \overline{0,n},$$
$$U_j = \bigcup_{i=0}^{j-1} \mathrm{pr}_1(\xi_{i,j}), \quad j = \overline{1,n+1}.$$

Тогда, по определению, ациклическая ИФ в базисе Φ — это (V,U)-арная ИФ $f = \mathsf{T}^{\Xi}_{V,U}(f_1,\ldots,f_n)$, такая, что $f_1,\ldots,f_n \in \Phi$, и для любого V-именного множества α значение $\beta = f(\alpha)$ определяется по следующим рекуррентным соотношениям, где $\alpha_0 = \alpha$, $\beta = \beta_{n+1}$:

$$\beta_k = \mathop{\nabla}_{i=0}^{k-1}(\xi_{i,k} \circ \alpha_i), \quad k = \overline{1,n+1},$$
$$\alpha_k = f_k(\beta_k), \quad k = \overline{1,n}.$$

Отметим, что, содержательно, α_i (при $0 \leqslant i \leqslant n$) и β_i (при $1 \leqslant i \leqslant n+1$) — это соответственно результат работы и данные на входе i-й подпрограммы.

Ранее были доказаны следующие свойства ациклических ИФ:

— ацикличность[1] в базисе $\{f\}$ самой функции f;

[1]Здесь и далее под ацикличностью какой-либо наперед заданной функции f понимается возможность представить её в виде $f = \mathsf{T}^{\Xi}_{V,U}(f_1,\ldots,f_n)$, указав подходящую матрицу переименований Ξ.

— ацикличность в базисе $\{f_1, \ldots, f_n\}$ произведения $f_1 \circ \ldots \circ f_n$ и наложения $f_1 \nabla \ldots \nabla f_n$;
— ацикличность произведения и наложения двух ациклических ИФ (т. е. замкнутость класса ациклических функций относительно данных операций).

Ацикличность суперпозиции ациклических функций

Теорема. *Пусть $f = \mathsf{T}^{\Xi}_{U,V}(f_1, \ldots, f_m)$ и $g = \mathsf{T}^{\Psi}_{X,Y}(g_1, \ldots, g_n)$ — ациклические ИФ и k — такой номер, что $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда функция h, полученная подстановкой в f вместо базисной функции f_k функции g, то есть*

$$h = \mathsf{T}^{\Xi}_{U,V}(f_1, \ldots, f_m)[f_k \leftarrow T^{\Psi}_{X,Y}(g_1, \ldots, g_n)] =$$
$$= \mathsf{T}^{\Xi}_{U,V}(f_1, \ldots, f_{k-1}, T^{\Psi}_{X,Y}(g_1, \ldots, g_n), f_{k+1}, \ldots, f_m),$$

может быть представлена в виде $h = T^{Z}_{U,V}(h_1, \ldots, h_r)$ для некоторых r, матрицы переименований $Z[r+1 \times r+1]$, функций h_i $(0 \leqslant i \leqslant r)$.

Можно предложить несколько способов такого сведения. Сначала приведем без доказательства прямой способ, при котором $r = m + n - 1$,

$$h = \mathsf{T}^{Z}(f_1, \ldots, f_{k-1}, g_1, \ldots, g_n, f_{k+1}, \ldots, f_m),$$

а элементы матрицы переименований определяются по следующим правилам:

1. Если $0 \leqslant j < i \leqslant k-1$, то $\zeta_{j,i} = \xi_{j,i}$.
2. Если $k \leqslant i \leqslant k+n-1$ и $0 \leqslant j \leqslant k-1$, то $\zeta_{j,i} = \psi_{0,i-k+1} \circ \xi_{j,k}$.
3. Если $k \leqslant j < i \leqslant k+n-1$, то $\zeta_{j,i} = \psi_{j-k+1,i-k+1}$.
4. Если $k+n \leqslant i \leqslant m+n$ и $0 \leqslant j \leqslant k-1$, то $\zeta_{j,i} = \xi_{j,i-n+1} \nabla \xi_{k,i-n+1} \circ \psi_{0,n+1} \xi_{j,k}$.
5. Если $k+n \leqslant i \leqslant m+n$ и $k \leqslant j \leqslant k+n-1$, то $\zeta_{j,i} = \xi_{k,i-n+1} \circ \psi_{j-k+1,n+1}$.
6. Если $k+n \leqslant j < i \leqslant m+n$, то $\zeta_{j,i} = \xi_{j-n+1,i-n+1}$.

При втором способе достигается гораздо более простой вид матрицы переименований Z, однако для этого требуется расширить базис двумя вспомогательными функциями — тождественными ИФ соответствующей арности. Обозначим U-арную тождественную ИФ через $\mathrm{id}_{\mathsf{D}^U}$. Тогда $r = m + n + 1$ и

$$h = \mathsf{T}^{Z}(f_1, \ldots, f_{k-1}, \mathrm{id}_{\mathsf{D}^X}, g_1, \ldots, g_n, \mathrm{id}_{\mathsf{D}^Y}, f_{k+1}, \ldots, f_m),$$

где элементы матрицы Z определеются по следующим правилам:
1. Если $0 \leqslant j < i \leqslant k$, то $\zeta_{j,i} = \xi_{j,i}$.
2. Если $k \leqslant j < i \leqslant k+n+1$, то $\zeta_{j,i} = \psi_{j-k,i-k}$.
3. Если $k+1 \leqslant j < i \leqslant m+n+2$, то $\zeta_{j,i} = \xi_{j-n-1,i-n-1}$.
4. Если $0 \leqslant j \leqslant k-1$ и $k+n+2 \leqslant i \leqslant m+n+2$, то $\zeta_{j,i} = \xi_{j,i-n-1}$.
5. Во всех остальных случаях $\zeta_{j,i} = \varnothing$.

Иными словами, если матрицу Ξ представить в блочной форме

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{0,1} & \Xi_{0,2} \\ & \Xi_{1,2} \end{bmatrix},$$

где матрицы $\Xi_{0,1}$ и $\Xi_{0,2}$ верхнетреугольные, а $\Xi_{1,2}$ — прямоугольная, причём $\Xi_{0,1}$ содержит k строк и столбцов, то матрица Z имеет вид

$$Z = \begin{bmatrix} \Xi_{0,1} & \varnothing & \Xi_{0,2} \\ & \Psi & \varnothing \\ & & \Xi_{1,2} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, класс ациклических ИФ замкнут относительно суперпозиции. Примечательно, что из этого следуют ранее установленные свойства замкнутости данного класса относительно умножения и наложения. В самом деле, если h' и h'' — две ациклические ИФ, то для приведения их произведения $h' \circ h''$ и наложения $h' \nabla h''$ к ациклическому виду достаточно привести к ациклическому в базисе $\{f_1, f_2\}$ виду функции $f_1 \circ f_2$ и $f_1 \nabla f_2$, а затем рассмотреть суперпозицию h' вместо f_1 и h'' вместо f_2.

Список литературы

[1] *Редько В. Н.* Композиции программ и композиционное программирование // Программирование. — 1978. — № 5. — С. 3–24.

[2] *Редько В. Н.* Композиционная структура программологии // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 4. — С. 47–66.

[3] *Парфірова Т. С.* Ациклічні композиційні програми та їх властивості // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2010. — № 2. — С. 148–155.

О сложности мультиплексорной функции в классе формул

Н. В. Власов

nikita.v.vlasov@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Рассматривается задача оптимальной по сложности реализации мультиплексорной функции алгебры логики (ФАЛ) в классе формул в стандартном базисе (см., например, [1, 2]).

Мультиплексорной ФАЛ (мультиплексором) μ_n порядка n называется ФАЛ от $n+2^n$ булевых переменных (БП), где первые n переменных называются адресными, оставшиеся 2^n — информационными, а значение функции равно значению той её информационной БП, номер которой задаётся значениями адресных БП.

Задача синтеза решается в классе формул в стандартном базисе $Б_0 = \{x \,\&\, y, x \vee y, \overline{x}\}$. Сложность $L(F)$ формулы F определяется как число функциональных элементов (ФЭ) «&», «$\vee$» и «$\neg$» в ней.

Сложность мультиплексорной ФАЛ изучалась в ряде работ. Известно (см., например, [3]), что сложность реализации ФАЛ μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, как схемами из функциональных элементов (СФЭ), так и формулами в стандартном базисе $Б_0$, асимптотически равна 2^{n+1}. В работе [4] получена нижняя оценка вида $2^{n+1} + c_1 \cdot 2^{n/2} - O\left(2^{n/4}\right)$ и верхняя оценка вида $2^{n+1} + c_2 \cdot 2^{n/2} + O\left(2^{n/4}\right)$, где $c_1, c_2 = const$, для сложности реализации мультиплексора порядка n в классе СФЭ над базисом $Б_0$. Кроме того, в [3] была установлена асимптотика сложности ФАЛ μ_n в классе СФЭ в базисе $\{x\&y, x \oplus y, \overline{x}\}$, а в [5] были получены асимптотические оценки высокой степени точности вида[1] $2^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2n} \pm O\left(\frac{1}{n \log n}\right)\right)$ для сложности её реализации в классе π-схем.

В работе [6] доказано, что значение глубины мультиплексорной ФАЛ порядка n в стандартном базисе в случае, если ФЭ «&» и «$\vee$» имеют единичную глубину, а ФЭ «$\neg$» — нулевую, равно 2, если $n = 2$, и равно $n+2$, если $1 < n \leqslant 5$ или $n \geqslant 20$. Для случая $5 < n < 20$ устанавливаются нижняя оценка $(n+2)$ и верхняя оценка $(n+3)$

[1] Все логарифмы в данной работе берутся по основанию 2.

глубины ФАЛ μ_n. Аналогичные результаты справедливы также для базиса, состоящего из всех элементарных конъюнкций и дизъюнкций от двух переменных.

Теорема. *Для мультиплексорной ФАЛ μ_n справедливы неравенства*

$$2^{n+1}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}-o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\leqslant L^{\Phi}(\mu_n)\leqslant 2^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00817-а.

Список литературы

[1] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[2] *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004.

[3] *Коровин В. В.* О сложности реализации универсальной функции схемами из функциональных элементов // Дискретная математика. — 1995. — Т. 7, № 2. — С. 95–102.

[4] *Румянцев П. В.* О сложности реализации мультиплексорной функции схемами из функциональных элементов // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIV Международной конференции (Пенза, 23–28 мая 2005 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2005. — С. 133.

[5] *Ложкин С. А., Власов Н. В.* О сложности мультиплексорной функции в классе π-схем // Ученые записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151, №. 2. — С. 98–106.

[6] *Ложкин С. А., Власов Н. В.* О глубине мультиплексорной функции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2011. — № 2. — С. 40–46.

Об эволюционных параметрах конечных динамических систем, ассоциированных с графами

А. В. Власова

VAnastasiyaV@gmail.com

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. Здесь можно выделить следующую конструкцию, получившую и самостоятельное значение в теории графов, — бесконтурный граф с заданной структурой источников и стоков [1]. В модели [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных графов. Это позволяет использовать при изучении модельных графов идеи и методы теории конечных динамических систем и, в частности, динамических систем двоичных векторов (см., например, [2, 3]) — когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса.

Под *конечной динамической системой* понимается пара $(S,\, \delta)$, где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta\colon\, S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*.

Каждой конечной динамической системе сопоставляется *карта* — граф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Этот граф является функциональным, т.е. из каждой вершины выходит точно одна дуга.

Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её бассейнами. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры называются предельными циклами, или *аттракторами*. Одними из основных характеристик конечной динамической системы являются вид аттрактора и *индекс* состояния — расстояние до аттрактора того бассейна, которому принадлежит состояние. Программа [4] предназначена для исследования эволюционных параметров состояний (индекс, недостижимость, ветвление) в динамических системах, состояниями которых являются двоичные векторы, представленные такими графами, как цепи, циклы и пальмы. В настоящей работе описываются аттракторы и индексы динамической системы двоичных векторов, порожденных такими графами, как цепи (см. [5, 6, 7]).

Пусть $B = \bigcup_{n=2}^{\infty} B^n$, где через B^n, $n{>}1$, обозначим множество всех двоичных векторов размерности n. Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор $v \in B$. Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\delta(v)$, описываемом следующими правилами: I. Если первой компонентой в v является 0, то первой компонентой в $\delta(v)$ будет 1; II. Если в составе v имеются диграммы (две соседние компоненты) вида 10, то в $\delta(v)$ каждая из них заменяется на 01; III. Если последней компонентой в v является 1, то последней компонентой в $\delta(v)$ будет 0; IV. Других отличий между v и $\delta(v)$ нет. Вышеперечисленные правила применяются одновременно.

Каждое состояние размерности n при динамике переходит в состояние также размерности n. Таким образом, система B в зависимости от n разбивается на подсистемы (B^n, δ). Эта динамика для системы (B^n, δ) определена в [2].

Через $p(v)$ обозначается *плотность* вектора v, т.е. количество пар совпадающих соседних компонент в нем. Например, $p(111111) = 5$, $p(\delta(111011)) = p(110110) = 2$. Очевидно, что для $v \in B^n$ будет $0 \leqslant p(v) \leqslant n-1$.

Аттракторы динамической системы (B, δ) были описаны в работе [5], где доказываются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Для системы (B, δ) при любом v справедливо неравенство $p(\delta(v)) \leqslant p(v)$.*

Теорема 2. *Для системы (B, δ) верно*

$$(\forall v)(p(v) \neq 0 \Rightarrow (\exists k)(p(\delta^k(v)) < p(v))).$$

Теорема 3. *При любом $n \geqslant 2$ система (B^n, δ) имеет единственный бассейн и аттрактор, представляющий собой двухэлементный цикл, образуемый состояниями $(01)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}0$ и $(10)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}1$ при нечётном n и состояниями $(01)^{\frac{n}{2}}$ и $(10)^{\frac{n}{2}}$ при чётном n.*

Блок — это подряд стоящие нули (0-блоки) или единицы (1-блоки) в количестве $\geqslant 2$. *Длина блока* — число нулей (единиц), уменьшенное на 1.

Введем обозначения: r — порядковый номер последней компоненты последнего 1-блока; i — индекс рассматриваемого состояния; s — порядковый номер первой компоненты первого 0-блока; p_0, p_1 — суммы длин рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков, соответственно; УНГ — указатель начала группы; УРС — указатель рассмотрения состояния.

Алгоритм вычисления индекса состояния системы (B, δ)

Индекс состояния системы (B, δ) высчитывается исходя из его вида как вектора.

I. Если вектор v содержит в себе блоки и все они состоят из 1, то $i(v) = r - 1$;

II. Если вектор v содержит в себе блоки и все они состоят из 0, то $i(v) = n - s$;

III. Если вектор v содержит в себе 1-блоки, после которых идут 0-блоки, то $i(v) = n - s$ при $r - 1 < n - s$, иначе $i(v) = r - 1$;

IV. Если вектор v содержит в себе 0-блоки, после которых идут 1-блоки, то $i(v) = r - 1$ при $p_0 < p_1$, $i(v) = (r - s + 1)/2 - 1$ при $p_0 = p_1$, $i(v) = n - s$ при $p_0 > p_1$;

V. Если вектор v содержит в себе 0-блоки и 1-блоки в произвольном порядке, отличном от описанных в пунктах I – IV алгоритма, то, просматривая его слева направо, выполняем следующие действия:

1. УНГ и УРС ставятся в начале вектора. Если до первого 0-блока есть 1-блоки, то первой группой будет являться отрезок вектора от начальной компоненты до последней компоненты того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком, включительно; и УНГ, и УРС ставятся между последней компонентой того 1-блока, который стоит перед первым 0-блоком, и следующей компонентой.

2. Если вектор уже полностью разбит на группы или если 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте вектора и переходим в пункт 6, иначе $p_0 := 0, p_1 := 0$.

3. $p_0 := p_0 +$ сумма длин 0-блоков до первого (следующего) 1-блока от УРС; УРС ставится между последним из таких 0-блоков и следующей компонентой.

4. $p_1 := p_1 +$ сумма длин 1-блоков до первого (следующего) 0-блока от УРС; УРС ставится между последним из таких 1-блоков и следующей компонентой.

5. Если $p_0 \leqslant p_1$, то группа заканчивается на последней компоненте того 1-блока, который стоит перед УРС, и идём в пункт 2, УНГ ставится между последней компонентой этой группы и следующей компонентой; а если 0-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте состояния и идём в пункт 6. Если $p_0 > p_1$ и ещё остались 1-блоки, то идём в пункт 3, а если 1-блоков больше нет, то группа заканчивается на последней компоненте состояния и идём в пункт 6.

6. В каждой группе подсчитываем их p_0 и p_1 и помечаем группы знаками «$-$», «$=$», «$+$», если в них $p_0 > p_1, p_0 = p_1, p_0 < p_1$, соответственно. Объединяем рядом стоящие группы с одинаковыми пометками «$-$» или «$+$» в одну, при этом если между «$+$»-группами встречаются «$=$»-группы, то их также объединяем в «$+$»-группу. Пусть h — общее количество групп. Считаем групповые индексы $i_j, 1 \leqslant j \leqslant h$, согласно следующим правилам: в «$-$»-группе $i_j = n - s_j$, в «$=$»-группе $i_j = (r_j - s_j + 1)/2 - 1$, в «$+$»-группе $i_j = r_j - 1$. Тогда $i(v) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant h} i_j$.

Теорема 4. *Алгоритм вычисления индекса состояния системы (B, δ) корректен.*

Список литературы

[1] *Barbosa V. C.* An atlas of edge-reversal dynamics. — London: Chapman & Hall / CRC, 2001.

[2] *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. — 2005. — № 14. — С. 23–26.

[3] *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Annals of Combinatorics. — 2004. — V. 8. — P. 425–439.

[4] *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство Роспатента № 2009614409, зарегистрировано 20 авг. 2009.

[5] *Власова А. В.* Аттракторы в динамических системах двоичных векторов // Саратов. гос. ун-т. — Саратов, 2010. — 19 с.: ил. — Библиогр.: 5 назв. — Рус. — Деп. в ВИНИТИ 23.06.2010 № 392–В2010.

[6] *Власова А. В.* Ветвления в динамической системе n-мерных двоичных векторов // Инновационные технологии XXI века в управлении, ин-

форматике и образовании. — Нальчик: Издательство М. и В. Котляровых, 2008. — С. 109–112.

[7] *Власова А. В.* Об одной динамической системе // Саратов. гос. ун-т. — Саратов, 2007. — 17 с. — Библиогр.: 2 назв. — Рус. — Деп. в ВИНИТИ 17.12.07 № 1181–В2007.

Аналог формулы Моллоуса–Риордана для помеченных эйлеровых графов

В. А. Воблый

vitvobl@yandex.ru

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами. Риордан и Моллоус получили формулу [1, с. 19; 2]:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (2^k - 1) C_k C_{n-k}$$

как следствие тождества для функции, перечисляющей деревья с помощью числа инверсий. Дадим альтернативное доказательство этой формулы.

Обозначим через G_n число помеченных графов с n вершинами. Известно [1, с. 14], что $G_n = 2^{n(n-1)/2}$, положим $G_0 = 1$, $C_0 = 0$ и введем производящие функции

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{x^n}{n!}, \qquad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!} \ .$$

Тогда соотношение Риддела [1, с. 19] запишется в виде $C(x) = \ln G(x)$. Дифференцируя $G(x)$, получим

$$G'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(n-1)/2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(n+1)/2} \frac{x^n}{n!} = G(2x) \ .$$

Дифференцируя $C(x)$ дважды, найдем

$$C'(x) = \frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{G(2x)}{G(x)} = e^{C(2x) - C(x)} \ ,$$

$$C''(x) = C'(x)(2C'(2x) - C'(x)) \ .$$

Таким образом, имеем

$$C'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \frac{x^n}{n!} \ ,$$

$$C''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} \frac{x^n}{n!} \ ,$$

$$2C'(2x) - C'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(2^{n+1}-1)\frac{x^n}{n!}.$$

Перемножая ряды, окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2} \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(2^{n+1}-1)\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\frac{x^n}{n!}\right),$$

$$C_{n+2} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}(2^{s+1}-1)C_{s+1}C_{n-s+1},$$

$$C_n = \sum_{s=0}^{n-2} \binom{n-2}{s}(2^{s+1}-1)C_{s+1}C_{n-s-1} \ ,$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1}(2^k-1)C_kC_{n-k}.$$

Доказательство закончено.

Обозначим через W_n число помеченных четных графов с n вершинами, а через E_n — число помеченных эйлеровых графов с n вершинами.

Теорема. *При $n \geqslant 3$ верна формула*

$$E_n = \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-1}(C_k - E_k)E_{n-k} \ .$$

Доказательство. Известно [1, с. 22; 3], что $W_n = 2^{(n-1)(n-2)/2}$, положим $W_0 = 1$, $E_0 = 0$ и введем производящие функции

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{x^n}{n!}, \quad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!} .$$

Эти производящие функции связаны соотношением Риддела [1, с. 23] $E(x) = \ln W(x)$. Дифференцируя $W(x)$, получим

$$W'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(n-1)(n-2)/2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!} = G(x) .$$

Дифференцируя $E(x)$ дважды, найдем

$$E'(x) = \frac{W'(x)}{W(x)} = G(x)e^{-C(x)} = e^{C(x)-E(x)} ,$$

$$E''(x) = E'(x)(C'(x) - E'(x)) .$$

Перемножая ряды, имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} E_{m+2} \frac{x^m}{m!} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (C_{m+1} - E_{m+1}) \frac{x^m}{m!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} E_{m+1} \frac{x^m}{m!} \right),$$

$$E_{m+2} = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} (C_{s+1} - E_{s+1}) E_{m-s+1}.$$

После замен переменных $n = m + 2$, $k = s + 1$ получим

$$E_n = \sum_{s=0}^{n-2} \binom{n-2}{s} (C_{s+1} - E_{s+1}) E_{n-s-1},$$

$$E_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (C_k - E_k) E_{n-k}.$$

Учитывая, что $C_1 = E_1 = 1$, завершим доказательство теоремы. ∎

Список литературы

[1] *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. — М.: Мир, 1977.

[2] *Mallows C. L., Riordan J.* The inversion enumerator for labeled trees // Bull. Amer. Math. Soc. — 1968. — V. 74. — P. 92–94.

[3] *Read R. C.* Euler graphs on labelled nodes // Canad. J. Math. — 1962. — V. 14. — P. 482–486.

Расшифровка бесповторных функций запросами тождественности

А. А. Вороненко, Д. В. Чистиков

dm6@cs.msu.ru, dd1email@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Рассматривается следующая задача расшифровки бесповторных функций. Требуется установить, какая именно бесповторная в заранее фиксированном базисе функция находится в черном ящике, при этом разрешается использовать только *запросы тождественности*, которые определяются следующим образом. Вход (параметр) запроса тождественности — произвольный подкуб булева куба, или, что то же самое, произвольная подфункция неизвестной бесповторной функции. В случае ненулевой размерности запрашиваемого подкуба ответом на запрос является 1, если соответствующая подфункция тождественно равна постоянной, и 0, если это не так. В случае нулевой размерности ответом является значение неизвестной функции в запрашиваемой точке.

В работе [1] доказано, что в случае конечного базиса достаточным условием полиномиальной разрешимости данной задачи является полиномиальная разрешимость задачи тестирования относительно бесповторной альтернативы [2] в том же базисе. В настоящей работе показывается, что предположение о конечности базиса является существенным. Более точно, доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Задача расшифровки неизвестной бесповторной функции в базисе всевозможных монотонных пороговых функций требует в худшем случае экспоненциального (относительно числа переменных) числа запросов тождественности, однако эта же задача для произвольного конечного подмножества этого базиса допускает решение полиномиальным числом запросов.*

Доказательство теоремы. Рассмотрим для каждого натурального $n \geqslant 2$ и произвольного вещественного s следующую монотонную пороговую функцию:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow x_1 + \ldots + x_n \geqslant s.$$

Зафиксируем $k = \lfloor n/2 \rfloor$ и $s = k + 1$. Увеличивая k коэффициентов на $\frac{1}{2k}$ и выбирая новое $s = k + \frac{1}{2}$, будем получать новые монотонные пороговые функции, каждая из которых отличается от f на единственном наборе, содержащем ровно k единиц. Обозначим символом $\mathcal{C}_n$ множество из всех $\binom{n}{k}$ таких функций и f и докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Задача расшифровки неизвестной функции из множества $\mathcal{C}_n$ не может быть решена менее чем $\binom{n}{k}$ запросами тождественности в худшем случае.*

Доказательство. Заметим, что осмысленными в данном случае являются лишь запросы, обращающиеся к тем подкубам, в которых число наборов с k единицами и $n - k$ нулями равно 1. В самом деле, всякий иной подкуб либо вовсе не содержит таких наборов и, следовательно, целиком лежит строго выше или строго ниже k-го слоя n-мерного куба, либо содержит хотя бы два набора с ровно $k - 1$ и $k+1$ единицами соответственно. В первом случае запрос тождественности всегда возвращает 1, во втором — 0, вне зависимости от того, какая именно функция из $\mathcal{C}_n$ находится в черном ящике. Это означает, что всякий содержательный запрос (ответ на который заранее не известен) может обнаружить значение неизвестной функции лишь на одном наборе из числа имеющих ровно k единиц. Следовательно, если в черном ящике находится функция f, то в любой момент, когда выполнено менее $\binom{n}{k}$ запросов, найдется хотя бы одна функция, совпадающая с f на всех запрошенных подкубах. ∎

Так как $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim 2^n/\sqrt{\pi n/2}$, то сложность расшифровки неизвестной монотонной пороговой функции n переменных запросами тождественности не менее $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ в худшем случае. Поскольку всякая базисная функция по определению бесповторна, нижняя оценка теоремы 1 доказана.

Лемма 3. *Все пороговые функции обладают следующим свойством: для любого собственного подмножества X' множества X их перемен-*

ных найдется подстановка констант на места всех переменных X', не нарушающая существенности переменных $X \setminus X'$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим монотонную пороговую функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow G(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

где $G(x_1, \ldots x_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n - \alpha_0$ для некоторых неотрицательных вещественных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Достаточно показать, что если переменная x_i фиктивна для g, то фиктивны также все переменные x_j с $\alpha_j \leqslant \alpha_i$. В самом деле, из этого следует, что если все остаточные подфункции монотонной пороговой функции g переменных X, получаемые подстановками констант на места переменных множества $X' \subseteq X$, имеют хотя бы по одной фиктивной переменной, то они имеют и общую фиктивную переменную, которая, следовательно, является фиктивной и для g.

Итак, предположим, что переменная x_i фиктивна и $\alpha_j \leqslant \alpha_i$. Будем для удобства полагать, что $i = n - 1$ и $j = n$. Тогда, в силу вида функции G и соотношения $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_{n-1}$, для любого набора $\widetilde{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-2}) \in \{0,1\}^{n-2}$ справедливо двойное неравенство

$$G(\widetilde{x}', 0, 0) \leqslant G(\widetilde{x}', 0, 1) \leqslant G(\widetilde{x}', 1, 0).$$

Поскольку x_{n-1} фиктивна, левая и правая части этого неравенства либо обе отрицательны, либо обе неотрицательны, поэтому соответственно отрицательным либо неотрицательным является и выражение в центре. Те же рассуждения справедливы и для неравенства

$$G(\widetilde{x}', 0, 1) \leqslant G(\widetilde{x}', 1, 0) \leqslant G(\widetilde{x}', 1, 1).$$

Это означает, что $g(\widetilde{x}', x_{n-1}, 0)$ всегда совпадает с $g(\widetilde{x}', x_{n-1}, 1)$, вне зависимости от значений $x_{n-1} \in \{0,1\}$ и $x_1, \ldots, x_{n-2} \in \{0,1\}$. Таким образом, переменная x_n фиктивна, что и требовалось доказать. ∎

Из утверждения последней леммы и результатов работы [3] вытекает, что задача тестирования относительно бесповторной альтернативы (проверки) в произвольном конечном базисе, состоящем из монотонных пороговых функций, имеет полиномиальное решение. Как отмечено выше, это условие является достаточным для полиномиальной разрешимости задачи расшифровки (диагностического тестирования) бесповторных функций в том же базисе запросами тождественности. Теорема доказана. ∎

Заметим, что установленную экспоненциальную оценку нельзя получить из мощностных соображений. Пусть $\mathcal{R}_n$ — рассматриваемое множество всевозможных функций n переменных, бесповторных в бесконечном базисе всех монотонных пороговых функций. Справедлива следующая верхняя оценка:

Утверждение 4. $\log_2 |\mathcal{R}_n| = O(n^3)$.

Доказательство. Как известно (см., например., [4]), асимптотика логарифма числа $|T_n|$ пороговых функций n переменных равна n^2. Пусть $\log_2 |T_n| \leqslant An^2$ для всех $n \geqslant 1$. Докажем существование такого $C > 0$, что $\log_2 |\mathcal{R}_n| \leqslant Cn^3$ при $n \geqslant 1$. Пусть $\log_2 |\mathcal{R}_k| \leqslant Ck^3$ для $k \leqslant n-1$, тогда

$$|\mathcal{R}_n| \leqslant \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot |T_k| \cdot |\mathcal{R}_{n-k+1}| \leqslant n \cdot 2^{n+An^2+C(n-1)^3},$$

поэтому, как нетрудно убедиться, искомое неравенство заведомо выполняется при

$$C > \frac{4}{3} \cdot \left(A + \max \frac{\log_2 n + n}{n^2} \right).$$

∎

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МД-757.2011.9 и грантов РФФИ № 09-01-00701 и № 09-01-00817.

Список литературы

[1] *Чистиков Д. В.* О связи задач диагностического и проверяющего тестирования бесповторных функций // Дискретная математика. — Т. 23, № 1. — 2011. В печати.

[2] *Вороненко А. А.* О проверяющих тестах для бесповторных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: Физматлит, 2002. — С. 163–176.

[3] *Вороненко А. А.* Распознавание бесповторности в произвольном базисе // Прикладная математика и информатика. Вып. 23. — 2006. С. 67–84.

[4] *Зуев Ю. А.* Комбинаторно-вероятностные и геометрические методы в пороговой логике // Дискретная математика. — Т. 3, № 2. — 1991. — С. 47–57.

О сложности задач регулярной реализуемости

М. Н. Вялый, С. П. Тарасов

vyalyi@gmail.com, serge99meister@gmail.com

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Задача регулярной реализуемости состоит в проверке непустоты пересечения регулярного языка с некоторым фиксированным языком (фильтром).

Задачи регулярной реализуемости оказываются тесно связанными с моделями обобщенного недетерминизма [1, 2]. Из результатов [1, 2] следует, что полные задачи регулярной реализуемости существуют для таких классов сложности, как L, NL, NP, PSPACE, EXP, а также для класса перечислимых языков.

В работе [3] обнаружена связь между задачами регулярной реализуемости и известной проблемой Сколема о нулях в линейных рекуррентных последовательностях, алгоритмическая разрешимость которой до сих пор остается открытой. Построена задача регулярной реализуемости (для так называемого перестановочного фильтра), к которой сводится проблема Сколема и которая эквивалентна некоторому естественному обобщению проблемы Сколема на случай произвольных орбит линейных отображений. В работе [4] построены модификации перестановочного фильтра с разрешимыми и неразрешимыми задачами регулярной реализуемости.

Здесь мы рассматриваем зависимость сложности задачи регулярной реализуемости от способа задания регулярного языка.

Определения и постановка задачи

Пусть L — язык в конечном алфавите Σ, который будем называть *фильтром*. *Задача регулярной L-реализуемости* — это следующая массовая алгоритмическая задача. Дано описание некоторого регулярного языка R в алфавите Σ и требуется проверить, что $L \cap R \neq \varnothing$.

Для завершения определения нужно указать способ задания регулярного языка. В стандартной формулировке задачи регулярной L-реализуемости предполагается, что входом задачи является описание конечного детерминированного автомата (КДА) A и необходимо проверить $L \cap L(A) \neq \varnothing$, где $L(A)$ — язык, принимаемый автоматом A.

Через $\mathrm{RR}(L)$ обозначаем язык, состоящий из описаний тех регулярных языков, которые пересекаются с языком L, а также саму задачу L-реализуемости.

Аналогично можно определить задачу проверки непустоты пересечения фильтра и регулярного языка, в которой регулярный язык задается описанием конечного недетерминированного автомата (КНА) N, принимающего этот язык. Будем называть такую алгоритмическую задачу *расширенной задачей регулярной L-реализуемости* и обозначать соответствующий язык через $\mathrm{RR}^n(L)$.

Хотя разрешимости обычной и расширенной задач регулярной реализуемости для одного и того же фильтра равносильны, алгоритмические сложности этих задач могут значительно различаться. Как известно, количество состояний КДА, принимающего тот же регулярный язык, что и заданный КНА, может быть экспоненциально больше. Поэтому естественная сводимость обобщенной задачи регулярной реализуемости к стандартной требует экспоненциального времени.

В данной работе мы рассматриваем связь между сложностью стандартной и обобщенной задач регулярной реализуемости.

Примеры

Начнем с двух примеров.

Рассмотрим в качестве фильтра язык всех слов Σ^*. Как следует из [2], задача $\mathrm{RR}(\Sigma^*)$ является NL-полной, где NL — класс языков, распознаваемых недетерминированными машинами Тьюринга на логарифмической памяти. Однако обобщенная задача $\mathrm{RR}^n(\Sigma^*)$ также принадлежит NL, поскольку она сводится к задаче существования пути между двумя вершинами в ориентированном графе.

Если же в качестве фильтра рассмотреть язык $0^* = \{0^n : n \geqslant 0\}$, то стандартная задача $\mathrm{RR}(0^*)$ уже принадлежит классу L языков, распознаваемых детерминированными машинами Тьюринга на логарифмической памяти, что опять-таки следует из результатов [2]. Однако $\mathrm{RR}^n(\Sigma^*)$ по-прежнему остается NL-полной.

Заметим, что в настоящее время неизвестно точное соотношение между классами L и NL. Вопрос о связи сложности стандартной и обобщенной задач регулярной реализуемости не проще этой открытой проблемы.

Сводимости между задачами регулярной реализуемости

В этом разделе мы опишем преобразование фильтров, которое отвечает изменению формата входных данных (замене КДА на КНА).

Для этого нам потребуются две операции с языками.

Повторение. Для языка $L \subseteq \Sigma^*$ языком повторений $\mathrm{Rep}(L)$ назовем множество всех слов вида

$$\underbrace{a_1 \dots a_1}_{n\,\text{раз}}\underbrace{a_2 \dots a_2}_{n\,\text{раз}}\dots\underbrace{a_k \dots a_k}_{n\,\text{раз}}, \quad a_1a_2\dots a_k \in L,\ n \in \mathbb{N}.$$

Склейка. Рассмотрим два конечных алфавита Σ_1, Σ_2. Для слов в алфавите $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ есть две естественные проекции $(\Sigma_1 \times \Sigma_2)^*$ в Σ_1^* и в Σ_2^*:

$$\pi_1\colon (a_1,b_1)(a_2,b_2)\dots(a_n,b_n) \mapsto a_1a_2\dots a_n,$$
$$\pi_2\colon (a_1,b_1)(a_2,b_2)\dots(a_n,b_n) \mapsto b_1b_2\dots b_n.$$

Склейкой $L_1\|L_2$ языков $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ и $L_2 \subseteq \sigma_2^*$ назовем язык в алфавите $\Sigma_1 \times \Sigma_2$, состоящий из всех таких слов w, что $\pi_1 w \in L_1$, $\pi_2 w \in L_2$.

Теорема. *Для любого фильтра L выполняются соотношения*

$$\mathrm{RR}(L) \leqslant_{\mathrm{p}} \mathrm{RR}^n(L) \leqslant_{\mathrm{p}} \mathrm{RR}(\{0,1\}^*\|\mathrm{Rep}(L)) \leqslant_{\mathrm{np}} \mathrm{RR}^n(L),$$

где $\leqslant_{\mathrm{p}}$ обозначает полиномиальную сводимость, $\leqslant_{\mathrm{np}}$ — недетерминированную полиномиальную сводимость.

Под недетерминированной полиномиальной сводимостью $L_1 \leqslant_{\mathrm{np}} L_2$ мы понимаем вычислимое за полиномиальное время отображение $f : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, для которого $w \in L_1$ равносильно тому, что $f(w,y) \in L_2$ при некотором y, длина которого полиномиально ограничена длиной w.

Идея доказательства теоремы. Первая сводимость в формулировке теоремы очевидна, так как КДА является частным случаем КНА.

Для построения второй сводимости нужно закодировать недетерминированные ходы КНА двоичными словами и построить автомат, который ожидает слово из $\{0,1\}^*\|\mathrm{Rep}(L)$ в следующем формате: каждый символ из слова, принадлежащего L, повторяется во втором слое склейки такое количество раз, чтобы в первом слое склейки поместилось описание ходов КНА, принимающего данное слово.

Наконец, в третьей сводимости нужно использовать то обстоятельство, что поведение автомата на достаточно длинных словах в однобуквенном алфавите становится периодическим. Поэтому недетерминированная сводимость состоит в том, что «угадывается» подходящая длина слова и по ней строится описание соответствующего КНА для языка L. ∎

Отметим, что недетерминированные сводимости сохраняют достаточно высокие классы сложности, скажем NP, PSPACE. Поэтому для достаточно «трудных» задач регулярной реализуемости обобщенная задача L-реализуемости оказывается равносильной по сложности стандартной задаче $(\{0,1\}^*\|\mathrm{Rep}(L))$-реализуемости.

Таким образом, вопрос о соотношении сложности стандартной и обобщенной задач реализуемости сводится во многих случаях к вопросу о соотношении сложности стандартных задач регулярной реализуемости для языка и склейки его повторения с языком всех слов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-01-00398-а.

Список литературы

[1] *Vyalyi M. N.* On models of a nondeterministic computation // Proc. of CSR 2009. Lecture Notes in Computer Science. V. 5675. — Berlin: Springer, 2009. — P. 334–345.

[2] *Вялый М. Н.* О моделях недетерминизма для двусторонних автоматов // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: МаксПресс, 2009. — С. 54–60.

[3] *Вялый М. Н., Тарасов С. П.* Орбиты линейных отображений и свойства регулярных языков // Дискр. анализ и исследование операций. — 2010. — Т. 17, № 6. — С. 20–49.

[4] *Tarasov S., Vyalyi M.* Orbits of linear maps and regular languages. El. preprint. `http://arxiv.org/abs/1011.1842`

О минимальных эйлеровых реконструкциях ориентированных графов

А. В. Гавриков

gavrikovav@mail.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Пусть K — некоторый класс графов, а G — граф, не принадлежащий K. Требуется произвести те или иные изменения в структуре графа G, чтобы полученный граф G' оказался K-графом (см. [3]). В качестве допустимых реконструкций данного графа обычно рассматриваются следующие:

1. Отождествление некоторых вершин графа;
2. Ориентация ребер данного неориентированного графа;
3. Переориентация некоторых дуг;
4. Добавление новых дуг (ребер);
5. Удаление некоторых дуг (ребер).

Ориентированный граф (орграф) называется эйлеровым, если в нем существует циклический путь, содержащий все дуги. Орграф называется квазиэйлеровым, если каждая его компонента связности является эйлеровым орграфом.

Автором была решена задача об оптимальной переориентации дуг орграфа, приводящей к эйлерову орграфу [1]. Составлена программа для ЭВМ, реализующая алгоритмы оптимальных эйлеровых реконструкций орграфов [2]. В настоящем сообщении приводятся решения следующих задач об оптимальных эйлеровых реконструкциях заданного орграфа: произвольный орграф реконструируется к эйлерову орграфу путем добавления минимального числа дуг и к квазиэйлерову орграфу путем удаления минимального числа дуг. Для решения этих задач используются методы теории транспортных сетей и потоковые алгоритмы. Асимптотическая сложность всех предложенных алгоритмов является полиномиальной и составляет $O(n^4)$.

Список литературы

[1] *Гавриков А. В.* Оптимальная переориентация дуг орграфа, приводящая к эйлерову орграфу // Наука и образование: проблемы и перспективы: Материалы 11-й региональной научно-практической конфе-

ренции аспирантов, студентов и учащихся (Бийск, 15–16 мая 2009 г.). Часть 2. — Бийск: БПГУ им. В. М. Шукшина, 2009. — С. 271–273.

[2] *Гавриков А. В.* Оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов. Программа для ЭВМ. Свидетельство Роспатента РФ о регистрации № 2010616499 от 30.09.2010.

[3] *Салий В. Н.* Оптимальные реконструкции графов // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. — С. 59–65.

О сложности монотонных вычислений действительных многочленов

С. Б. Гашков, И. С. Сергеев

sbgashkov@gmail.com, isserg@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Механико-математический факультет

Рассматриваются многочлены из полукольца $\mathbb{R}_+[x_1, \ldots, x_n]$ и вычисление их схемами, состоящими из элементов сложения, умножения и положительных действительных констант. Для любого такого многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим через $L_+(f)$ наименьшее число сложений (аддитивная монотонная сложность многочлена f), а через $L_\times(f)$ — наименьшее число нескалярных умножений (мультипликативная монотонная сложность), необходимое для его вычисления. Изучается задача эффективного построения многочленов, имеющих высокую монотонную сложность.

Обозначим через $P(N^n)$ полукольцо конечных подмножеств множества N^n (где $N = \mathbb{N} \cup \{0\}$) относительно операции дизъюнкции $\vee$ и умножения $\times$: если $A, B \in P(N^n)$, то $A, B \subset N^n$, $A \vee B = A \cup B$, $A \times B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Через mon обозначим гомоморфизм полукольца $\mathbb{R}_+[x_1, \ldots, x_n]$ в полукольцо $P(N^n)$, определяемый условием $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{mon}\, f$ тогда и только тогда, когда многочлен f содержит моном $c_a x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$.

Пусть $k \leqslant l$. Подмножество H коммутативной полугруппы $(G, +)$ назовем (k, l)-*редким*, если оно не содержит подмножеств вида $A +$

$B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, где $|A| = k$ и $|B| = l$ (здесь и далее мощность конечного множества M обозначается через $|M|$).

Обозначим через $\alpha(k)$ наибольшее количество различных булевых $(k-1)$-мерных векторов, ни один из которых не равен дизъюнкции двух других. Известно, что $\alpha(2) = 2$, $\alpha(3) = 3$, $\alpha(4) = 5$, $\alpha(k) \sim C_{k-1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$.

Метод [1] основан на наблюдении: если для многочлена f множество $\operatorname{mon} f$ является (k,l)-редким в $(P(N^n), \vee)$ (при не очень больших k и l), то f имеет высокую монотонную сложность. Эта связь между редкостью и сложностью описывается следующей теоремой, доказанной в [1] в случае $k = l$.

Теорема 1. *Пусть $k > 1$ и $\operatorname{mon} f$ — (k,l)-редкое подмножество множества $(N^n, +)$. Положим $h = \max\{(k-1)^3, (l-1)^2\}$ и $H = h^{-1}|\operatorname{mon} f|$. Тогда справедливы неравенства:*

(i) $L_+(f) \geqslant H - 1$;

(ii) $L_\times(f) \geqslant 2\sqrt{H} - n - 2$;

(iii) Если $H > (2\alpha(k)-3)^{2\alpha(k)-1}(\alpha(l)-\alpha(k)+1)^{\frac{2}{\alpha(k)}-2}$, *то* $L_\times(f) \geqslant 2C\left(H - C^{2-\frac{2}{\alpha(k)}}(\alpha(k)-1)H^{\frac{2\alpha(k)-2}{2\alpha(k)-1}} - C(\alpha(k)-2)H^{\frac{\alpha(k)}{2\alpha(k)-1}}\right)^{\frac{\alpha(k)}{2\alpha(k)-1}} - n - 2$, *где* $C = (\alpha(l)-\alpha(k)+1)^{\frac{-1}{2\alpha(k)-1}}$.

Заметим, что оценки теоремы 1 существенно улучшить, вообще говоря, нельзя. Действительно, для любого многочлена f справедливо $L_+(f) \leqslant |\operatorname{mon} f| - 1$, поэтому при небольших k и l оценка (i) является точной по порядку, а в случае $k = l = 2$ — просто точной. Оценки (ii) и (iii) также близки к наилучшим возможным, что вытекает из следующей теоремы из работы [1].

Теорема 2. *Пусть $E_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Для любого n при $k = 2$ и любого $n > 1$ при $k > 2$ существует (k,k)-редкое множество $\operatorname{mon} f \subset E_m^n$, такое, что $|\operatorname{mon} f| \geqslant m^{c_k n^{\log_2 3 - 1}}$ и*

$$L_\times(\operatorname{mon} f) \lesssim \begin{cases} \Theta\left(|\operatorname{mon} f|^{\frac{k+1}{2k}}\right), & k > 3 \\ 3|\operatorname{mon} f|^{3/5}, & k = 3 \\ 3|\operatorname{mon} f|^{2/3}, & k = 2 \end{cases}.$$

Используя теорему 1 и конструкцию редкого множества из работы [2], можно установить следующий результат:

Теорема 3.

(i) Пусть p — простое число. Тогда можно эффективно указать монотонный многочлен f от n переменных степени не выше $p-1$ по каждой из переменных, такой, что при $n \to \infty$:

$$L_+(f) = \Omega\left(p^{n-o(n)}\right), \qquad L_\times(f) = \Omega\left(p^{0{,}5n-o(n)}\right).$$

(ii) При любом $\varepsilon > 0$ существует m_ε, такое, что для любого $m > m_\varepsilon$ можно эффективно указать монотонный многочлен f от n переменных степени не выше $m-1$ по каждой из переменных, такой, что при $n \to \infty$:

$$L_+(f) = \Omega_\varepsilon\left(m^{n(1-\varepsilon)}\right), \qquad L_\times(f) = \Omega_\varepsilon\left(m^{0{,}5n(1-\varepsilon)}\right).$$

Известно, что если степень многочлена f по каждой из переменных не превосходит $m-1$, то $L_+(f) < m^n$ и $L_\times(f) \leqslant \Theta\left(m^{n/2}\right)$ при $n \to \infty$. Таким образом, оценки теоремы 2 в том виде, в котором они приведены, являются неулучшаемыми.

В важном частном случае $p = 2$ теорема 3 дает пример мультилинейного (линейного по каждой переменной) многочлена n переменных с коэффициентами 0 и 1, имеющего аддитивную монотонную сложность $2^{(1-o(1))n}$ и мультипликативную монотонную сложность $2^{(0{,}5-o(1))n}$.

Ранее мультилинейный многочлен с коэффициентами 0 и 1, имеющий монотонную аддитивную сложность $2^{\lceil n/2 \rceil} - 1$, был построен О. М. Касим-Заде [3] (первая эффективная экспоненциальная нижняя оценка). В работе [1] был построен мультилинейный многочлен с коэффициентами 0 и 1 с аддитивной монотонной сложностью, по порядку не меньшей $2^{2n/3}$, и с мультипликативной монотонной сложностью, по порядку не меньшей 2^{cn}, где $c > 1/3$.

Несколько модифицировав конструкцию из теоремы 3, можно получить пример многочлена с высоким отношением монотонной сложности и сложности вычисления в полном арифметическом базисе, включающем дополнительно отрицательные действительные константы.

Теорема 4. *Можно эффективно указать мультилинейный многочлен n переменных, для которого отношение сложности реализации в монотонном базисе $\{x+y,\, xy\} \cup \mathbb{R}_+$ к сложности реализации в полном базисе $\{x+y,\, xy\} \cup \mathbb{R}$ не меньше, чем $2^{(0{,}5-o(1))n}$.*

Ранее Вэльянт [4] для подобного отношения получил оценку $2^{\Omega(\sqrt{n})}$ (используя всего один элемент умножения на отрицательную константу).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 08-01-00863, 08-01-00632, и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Гашков С. Б.* Об одном методе получения нижних оценок сложности монотонных вычислений многочленов // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1987. — № 5. — С. 7–13.

[2] *Kóllar J., Rónyai L., Szabó T.* Norm-graphs and bipartite Turán numbers // Combinatorica. — 1996. — V. 16, № 3. — P. 399–406.

[3] *Касим-Заде О. М.* Об арифметической сложности монотонных многочленов // Тезисы Всесоюзной конференции 1983 г. «Теоретические проблемы кибернетики». Ч. 1. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986. — С. 68–69.

[4] *Valiant L. G.* Negation can be exponenially powerful // Th. Comput. Sci. — 1980. — V. 12. — P. 303–314.

Учет ограничений в триангуляционных методах многоэкстремальной оптимизации

С. Ю. Городецкий

gorosyu@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Предложен метод решения многоэкстремальных задач с невыпуклыми ограничениями для класса функций с липшицевыми производными по направлениям. Применена адаптивная триангуляция области поиска нерегулярными симплексами [1, 2]. Метод редуцирует задачу с ограничениями к задаче на гиперинтервале с перестраиваемой целевой функцией. Получены условия сходимости процесса редуцирования. Приведены иллюстративные примеры.

Класс задач и общая структура SMP-методов. Задача многомерной глобальной оптимизации рассматривается в виде:

$$f_0(x) \to \min,\ x \in X, \tag{1}$$

$$X = \left\{ x \in D : f_i(x) \leqslant 0\, (i = \overline{1, m}) \right\},\ D = \{x \in R^n : a \leqslant x \leqslant b\}. \tag{2}$$

Предполагается, что функции f_i $(i = \overline{0, m})$ обладают липшицевыми производными по направлениям с константами Липшица M_i. В точках испытаний x^k вычисляются значения всех функций $f_0^k, f_1^k, \ldots, f_m^k$, где $f_i^k = f_i(x^k)$.

Для построения рассматриваемого SMP-метода (симплексного метода параболоидов) применен компонентный подход [3, 4] с использованием предложенной в [1] нетрадиционной структуры разбиения области поиска на компоненты-симплексы (позднее симплексы применялись в [5]). В рамках триангуляционного подхода исходный гиперинтервал D последовательно адаптивно разбивается на многогранники-симплексы S с $n+1$ вершинами, размещаемыми в точках проведенных испытаний. Начальные испытания включают измерения $f_i(x)$ в вершинах гиперинтервала D.

Доказано, что при известных значениях M_i для $x \in S$, с учетом результатов измерений функций в вершинах S, поточечные нижние оценки для $f_i(x)$ имеют вид параболоидов $f_i^-(x, M_i) = 0.5\, M_i \left\| x - y^i \right\|^2 + c_i$, где y^i однозначно находятся из линейных систем порядка n, после чего вычисляются c_i.

Точка следующего испытания x^{k+1} размещается в центре наибольшего ребра d^* «лучшего» симплекса S^*, который определяется на основе приоритетов симплексов $H(S)$ по правилу $H(S^*) = \min\{H(S) : \ S \in \{S\}\}$. Если $\operatorname{diam}(S^*) < \varepsilon$, происходит останов. Функция $H(S)$ должна оценивать наименьшие значения целевой функции f_0, возможные в симплексе S с учетом прогнозов о выполнении ограничений (2) на основе минорант $f_i^-(x, M_i)$. Вычисление $H(S)$ сводится к решению вспомогательных экстремальных задач, допускающих конечные методы решения.

Редукция к задаче безусловной оптимизации. В [3] рассмотрен способ учета ограничений в SMP-методах, используемый при достаточно большой относительной мере допустимого множества Y в D. В данной работе исследуется более общий подход, применимый для задач с относительно малым или пустым допустимым множеством. В последнем случае в качестве решения определяется минимум невязки $G(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$.

Редуцированная задача с перестраиваемой целевой функцией имеет вид:

$$P_{\eta(k)}(x) \to \min,\ x \in D,\ \ P_{\eta(k)}(x) = \{f_0(x) - \eta(k);\, G(x)\}\,, \qquad (3)$$

где $\eta(k) = +\infty$, если среди $x^1, \ldots, x^k$ нет допустимых точек, в противном случае $\eta(k) = \min\{f_0(x^s)\colon\ \forall j = \overline{1,m}\colon\ f_j(x^s) \leqslant 0\ (s = \overline{1,k})\}$. Если в (2) допустимое множество $X = \varnothing$, всегда $P_{\eta(k)}(x) = G(x)$, что при решении (3) приводит к поиску минимума невязки в ограничениях.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия сходимости процесса редуцирования при $X \neq \varnothing$. Основные требования фактически накладываются на процедуру, порождающую выбор новых точек испытаний x^{k+1}.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1), (2) *при* $Y \neq \varnothing$ $\operatorname{cov}(\operatorname{int} X) = X$ *и* $\forall x \in \operatorname{int} X : G(x) < 0$, *функции* $f_0(x)$ *и* $G(x)$ *непрерывны, а выбор* x^{k+1} *удовлетворяет следующим условиям:*

$$P_{\eta(k)}(x^{k+1}) < P_{\eta(k)}(x^k),\ \ P_{\eta(k)}(x^{k+1}) \leqslant \min\left\{P_{\eta(k)}(x):\ x \in D\right\} + \varepsilon_k,$$

при $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, *при* $k \to \infty$, $\eta(k+1) = f(x^{k+1})$. *Тогда предельными точками последовательности* x^k *будут являться только точки глобальных минимумов* $x^* \in X^*$ *задачи* (1), (2).

Заметим, что в формулировке для более компактной записи использован иной способ нумерации испытаний, чем в предыдущем тексте. Нумеруются только моменты строгого улучшения оценки решения.

Задача вычисления приоритетов и метод ее решения. Реализация триангуляционного метода, основанного на правиле выбора S^*, требует определения видов приоритетов симплексов S применительно к редуцированной задаче (3). С использованием вида минорант и с учетом структуры целевой функции в (3) предложена следующая функция приоритета:

$$H(S) = \min\Big\{\max\Big\{\ f_0^-(x, \widetilde{M}_0) - \eta(k);\ f_j^-(x, \widetilde{M}_j)\,(j = \overline{1,m})\Big\} : x \in S\ \Big\}. \qquad (4)$$

Вычисление $H(S)$ в (4) с использованием искусственной переменной $Z \in R^1$ сводится к решению задачи сепарабельного программирования вида:

$$H(S) = \min\Big\{Z : f_0^-(x, \widetilde{M}_0) - \eta(k) \leqslant Z; \\ f_j^-(x, \widetilde{M}_j) \leqslant Z\,(j = \overline{1,m});\ x \in S\Big\}. \quad (5)$$

Для вычисления $H(S)$ квадратичные функции в (5) заменяются их кусочно-линейными аппроксимациями по сеткам из N^n точек, покрывающих S. После этого вычисление в (5) сводится к решению задачи линейного программирования в канонической форме с вектором переменных размерности $nN + m + n + 4$ и количеством ограничений-равенств, равным $m+2n+2$. Во вспомогательных задачах (5) вместо неизвестных значений M_i используются их локализованные оценки $\widetilde{M}_i$ $(i = \overline{0,m})$, получаемые смешиванием завышенных с коэффициентом надежности $\gamma > 1$ общих (глобальных) оценок для всей области и локальных оценок, вычисляемых для каждого симплекса [3].

Точка нового испытания разбивает симплекс S^* на два новых по большему ребру d^*. Вместе с ним делятся все симплексы-соседи, содержащие это ребро. Поиск «соседей» организован без полного перебора симплексов. Реализация метода основана на динамических структурах данных типа левосторонних куч [6]. Они обеспечивают непосредственный доступ к «лучшему» симплексу и быструю реорганизацию данных при изменениях приоритетов симплексов.

Вычислительные иллюстрации. На рис. 1 приведены пример размещения испытаний и возникшая триангуляция при использовании построенного SMP-метода применительно к известной тестовой задаче при $\gamma = 1.8$ и точности $\varepsilon = 10^{-4}$. Допустимая область выделена серым. Заданная точность достигнута, выполнено 247 испытаний, образовано 469 симплексов.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт № 02.740.11.5018.

Список литературы

[1] *Городецкий С. Ю.* Многоэкстремальная оптимизация на основе триангуляции области // Математическое моделирование и оптимальное

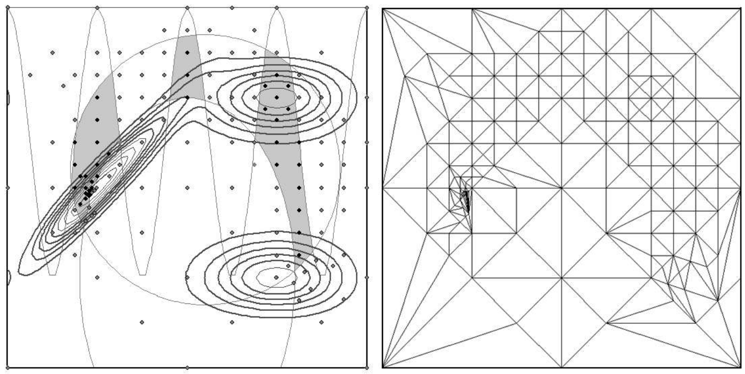


Рис. 1

управление. Вестник ННГУ. Вып. 2 (21). — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. — С. 249–269.

[2] *Городецкий С. Ю.* Методы многоэкстремальной оптимизации на основе триангуляции области поиска // Первая Вероссийская научно-практическая конференция по вопросам решения научно-практических задач в промышленности ОПТИМ-2001. Сборник докладов. — СПб.: ЦНИИТС, 2001. — С. 191–196.

[3] *Городецкий С. Ю., Гришагин В. А.* Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.

[4] *Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е.* Диагональные методы глобальной оптимизации. — М.: Физматлит, 2008.

[5] *Clausen J., Zilinskas A.* Subdivision, Sampling, and Initialization Strategies for Simplical Branch and Bound in Global Optimization // Computers and Mathematics with Applications. — 2002. — № 44. — P. 957–967.

[6] *Алексеев В. Е., Таланов В. А.* Графы. Модели вычислений. Структуры данных. — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2005.

О надежности неветвящихся программ в базисах, содержащих нелинейную функцию двух переменных

С. М. Грабовская

swetazin@mail.ru

Пензенский государственный университет

Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с оператором условной остановки в полном конечном базисе B, содержащем некоторую функцию вида $(x_1^a \mathbin{\&} x_2^b)^c$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$.

Программы с оператором условной остановки [1] характеризуются наличием управляющей команды — команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы при выполнении определенного условия. Предполагается, что оператор условной остановки абсолютно надежен, а все функциональные операторы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах элементов. Поскольку оператор условной остановки абсолютно надежен, он срабатывает, когда на его вход поступает единица. Инверсные неисправности на выходах вычислительных операторов характеризуются тем, что в исправном состоянии вычислительный оператор реализует приписанную ему функцию φ, а в неисправном — функцию $\overline{\varphi}$.

Заметим, что схема из функциональных элементов является частным случаем неветвящихся программ.

Ненадежностью $N(Pr)$ программы Pr назовем максимальную вероятность ошибки на выходе программы Pr при всевозможных входных наборах.

Обозначим $N_\varepsilon(f) = \inf N(Pr)$, где инфимум берется по всем программам Pr, реализующим булеву функцию $f(\tilde{x})$. Программа A, реализующая функцию f, называется асимптотически оптимальной по надежности, если $N_\varepsilon(A) \sim N_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{N_\varepsilon(f)}{N_\varepsilon(A)} = 1$.

Известно [2], что в произвольном полном конечном базисе любую булеву функцию f можно реализовать схемой S, ненадежность которой $N(S) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$. Константа 5 в оценке ненадежности в некоторых базисах, например $B = \{x_1 \mathbin{\&} x_2,\ \bar{x}_1\}$ и $B = \{x_1 \vee x_2,\ \bar{x}_1\}$, не может быть понижена [3].

Теорема 1. *В базисе B любую булеву функцию можно реализовать неветвящейся программой с ненадежностью не больше $\varepsilon + 81\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.*

Пусть f — произвольная булева функция, а S — схема, которая ее реализует. Обозначим S' схему, реализующую функцию $\bar{f}$.

Для доказательства теоремы 1 необходимо построить, используя схемы S и S', неветвящиеся программы, реализующие произвольную булеву функцию f, в базисах, содержащих функцию вида $(x_1^a \,\&\, x_2^b)^c$ при различных значениях параметров a, b, c, и оценить их ненадежность. Затем из полученных значений для ненадежности нужно выбрать максимальное.

Рассмотрим два случая:

1. Полный конечный базис B содержит функцию вида $x_1^a \vee x_2^b$, где $a, b \in \{0, 1\}$.
2. Полный конечный базис B содержит функцию вида $x_1^a \,\&\, x_2^b$, где $a, b \in \{0, 1\}$.

$Pr_f^*:$	$Pr_f^{**}:$	$Pr_f^{***}:$
$y_1 = f[S]$	$y_1 = \overline{f}[S']$	$y_1 = \overline{f}[S']$
$y_2 = f[S]$	$y_2 = f[S]$	$y_2 = f[S]$
$y_3 = f[S]$	$y_3 = f[S]$	$y_3 = \overline{f}[S']$
$z = y_2 \vee y_3$	$z = \overline{y}_1 \vee y_3$	$z = \overline{y}_1 \vee \overline{y}_3$
$\mathrm{stop}(y_1)$	$\mathrm{stop}(y_2)$	$\mathrm{stop}(y_2)$
$z = y_2$	$z = y_2$	$z = y_2$
$\mathrm{stop}(y_3)$	$\mathrm{stop}(y_1)$	$\mathrm{stop}(y_1)$
$z = y_3$	$z = y_3$	$z = \overline{y}_3 \vee \overline{y}_3$
а)	б)	в)

Рис. 1

Для определенности положим, что базис B содержит функцию $x_1 \vee x_2$.

Как известно, произвольную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in N$, можно реализовать схемой S, которая при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ функционирует с ненадежностью $N(S) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$. Используя 3 экземпляра схемы S, построим для f неветвящуюся программу Pr_f^* с абсолютно надежными операторами условной остановки (рис. 1, а).

Pr'_f :	Pr''_f :	Pr'''_f :
$y_1 = f[S]$	$y_1 = \overline{f}[S']$	$y_1 = \overline{f}[S']$
$y_2 = f[S]$	$y_2 = f[S]$	$y_2 = \overline{f}[S']$
$z = y_1 \,\&\, y_2$	$z = \overline{y}_1 \,\&\, y_2$	$z = \overline{y}_1 \,\&\, \overline{y}_2$
$\mathrm{stop}(z)$	$\mathrm{stop}(z)$	$\mathrm{stop}(z)$
$y_3 = f[S]$	$y_3 = \overline{f}[S']$	$y_3 = \overline{f}[S']$
$y_4 = f[S]$	$\mathrm{stop}(y_3)$	$\mathrm{stop}(y_3)$
$z = y_3$	$y_4 = f[S]$	$y_4 = \overline{f}[S']$
$\mathrm{stop}(y_4)$	$z = y_4$	$z = \overline{y}_4 \,\&\, \overline{y}_4$
$z = y_4$		
а)	б)	в)

Рис. 2

Далее вычислим и оценим вероятности ошибок программы Pr^*_f при различных входных наборах. В первом случае набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha) = 0$, а во втором — набор α такой, что $f(\alpha) = 1$.

Из полученных значений вероятности ошибок следует выбрать максимальное.

Отметим, что произвольную булеву функцию f в базисе B, содержащем функцию $\bar{x}_1 \vee x_2$ или $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$, можно реализовать неветвящимися программами Pr^{**}_f и Pr^{***}_f соответственно (рис. 1, б, в). Произвольную булеву функцию f в базисе B, содержащем функцию $x_1 \,\&\, x_2$, $\bar{x}_1 \,\&\, x_2$ или $\bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2$, можно реализовать неветвящимися программами Pr'_f, Pr''_f и Pr'''_f соответственно (рис. 2).

Далее в каждом из этих случаев действуем аналогично, т. е. вычисляем и оцениваем вероятности ошибок построенных программ при различных входных наборах и выбираем среди них максимальное значение.

Так будут получены оценки ненадежности неветвящихся программ, реализующих произвольную булеву функцию f, в базисах, содержащих функцию вида $(x_1^a \,\&\, x_2^b)^c$, при различных значениях параметров a, b, c.

Таким образом, в полном конечном базисе, содержащем нелинейную функцию двух переменных, любую булеву функцию можно реализовать неветвящейся программой с ненадежностью не больше

$\varepsilon + 81\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$. В то время как в различных полных базисах из двухвходовых элементов [4] почти все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами из функциональных элементов с ненадежностью, асимптотически равной $k_B \cdot \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Константа k_B зависит от базиса и $k_B \in \{2, 3, 4, 5\}$. Например, $k_B = 5$ в базисе $B = \{\bar{x}_1 \,\&\, x_2,\ 1\}$, $k_B = 4$ в базисе $B = \{\bar{x}_1 \,\&\, x_2,\ \bar{x}_1\}$, $k_B = 3$ в базисе $B = \{\bar{x}_1 \& \bar{x}_2\}$, $k_B = 2$ в базисе $B = \{x_1 \& x_2,\ x_1 \oplus x_2,\ 1\}$.

Список литературы

[1] *Чашкин А. В.* О среднем времени вычисления значений булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1997. — Т. 4, № 1. — С. 60–78.

[2] *Алехина М. А., Васин А. В.* О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. — 2009. — Т. 151, кн. 5. — С. 25–35.

[3] *Васин А. В.* Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x_1 \,\&\, x_2,\ \ \bar{x}_1\}$ // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 12–22.

[4] *Васин А. В.* Асимптотически оптимальные по надежности схемы в полных базисах из трехвходовых элементов: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. — Пенза, 2010.

О разбиении множества всех триангуляций точечных конфигураций на 64 подкласса

Д. В. Груздев

gruzdevdv@mail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Изучается шесть классов триангуляций точечных конфигураций (в т. ч. классы регулярных, слаборегулярных [2], разворачиваемых, симплициально политопиальных [1] триангуляций), по отношению принадлежности/непринадлежности к которым множество всех триангуляций точечных конфигураций разбивается на 64 попарно не пересекающихся подкласса. Установлено, что из них в точности 24 подкласса являются непустыми, и для каждого из 24 непустых подклассов показано, что множество комбинаторных типов его триангуляций является счётным.

Рассмотрим d-мерный выпуклый многогранник $M \subset \mathrm{R}^d$, который будем называть также *d-мерным политопом*, и обозначим через $\Gamma_i(M)$ множество его i-мерных граней, $i = -1, \ldots, d$. При этом $\Gamma_{-1}(M) = \{\varnothing\}$ и $\Gamma_d(M) = \{M\}$. Положим $\dim(M) = d$, $\Gamma(M) = \bigcup_{i=-1}^{d} \Gamma_i(M)$ и $\Gamma^\partial(M) = \bigcup_{i=-1}^{d-1} \Gamma_i(M)$. Через $\partial(M)$ обозначим границу политопа M. Если $|\Gamma_0(M)| = d+1$, то политоп M называется *d-мерным симплексом.* Политоп M называется *симплициальным*, если все его $(d-1)$-мерные грани являются $(d-1)$-мерными симплексами. Выпуклую оболочку множества точек A' обозначим через $[A']$.

Конечное множество точек $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathrm{R}^d$, выпуклая оболочка $[A]$ которого есть d-мерный политоп, называется *d-мерной точечной конфигурацией. Триангуляцией* d-мерной точечной конфигурации A называется такое множество $T = \{S_1, \ldots, S_t\}$ d-мерных симплексов $S_1, \ldots, S_t$ с вершинами из A, что их объединение есть политоп $[A]$ и пересечение любых двух симплексов из T является их общей гранью (возможно, пустой). Политоп $M(T) = \bigcup_{j=1}^{t} S_j = [A]$ назовём *многогранником триангуляции* T. Положим $\Gamma(T) = \bigcup_{j=1}^{t} \Gamma(S_j)$ и $\Gamma^\partial(T) = \{F \in \Gamma(T) \ : \ F \subset \partial([A])\}$, $\Gamma_i(T) = \bigcup_{j=1}^{t} \Gamma_i(S_j)$, $\Gamma_i^\partial(T) = \Gamma_i(T) \cap \Gamma^\partial(T)$, $\Gamma_i^{int}(T) = \Gamma_i(T) \backslash \Gamma_i^\partial(T)$ при $i = -1, \ldots, d$. Через $\mathcal{T}'_d$ обозначим множество триангуляций d-мерных точечных конфигураций и положим $\mathcal{T}' = \bigcup_{d=0}^{+\infty} \mathcal{T}'_d$.

Симплициальные комплексы называются *изоморфными*, если между ними можно установить биекцию, сохраняющую отношение включения. Триангуляция $T \in \mathcal{T}'$ называется *слаборегулярной* (weakly regular, [2]), если существует такая регулярная (regular, правильная, см., например, [2]) триангуляция $T' \in \mathcal{T}'$, что симплициальные комплексы $\Gamma(T)$ и $\Gamma(T')$ изоморфны.

Триангуляция T называется *разворачиваемой* (shellable), если существует такая последовательность её симплексов $(S_1, \ldots, S_t)$, что $T = \{S_1, \ldots, S_t\}$ и при $l = 2, \ldots, t$ множество $\Gamma(S_l) \backslash \bigcup_{i=1}^{l-1} \Gamma(S_i)$ имеет единственный минимальный по включению элемент.

Триангуляцию $T \in \mathcal{T}'$ назовём *симплициально политопиальной* [1], если для неё существует такой симплициальный политоп P, что симплициальные комплексы $\Gamma^\partial(T)$ и $\Gamma^\partial(P)$ изоморфны.

Через $\mathcal{T}^R$, $\mathcal{T}^{WR}$, $\mathcal{T}^{Sh}$ и $\mathcal{T}^{SP}$ обозначим соответственно множества регулярных, слаборегулярных, разворачиваемых и симплициально политопиальных триангуляций из $\mathcal{T}'$. Положим $\mathcal{T}^{int} = \{T \in \mathcal{T}' \ : \ \Gamma_0^{int}(T) \neq \varnothing\}$ и $\mathcal{T}'^{\partial} = \{T \in \mathcal{T}' \ : \ \Gamma_0^{\partial}(T) \setminus \Gamma_0(M(T)) \neq \varnothing\}$. Таким образом, исследуются шесть классов триангуляций: $\mathcal{T}^R$, $\mathcal{T}^{WR}$, $\mathcal{T}^{Sh}$, $\mathcal{T}^{SP}$, $\mathcal{T}^{int}$ и $\mathcal{T}'^{\partial}$. При $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ положим $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}$. Тогда $\mathcal{T}'$ разбивается на 64 попарно не пересекающихся подкласса $\mathcal{T}_{i_0,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} = (\mathcal{T}^R)^{i_0} \cap (\mathcal{T}^{WR})^{i_1} \cap (\mathcal{T}^{Sh})^{i_2} \cap (\mathcal{T}^{SP})^{i_3} \cap (\mathcal{T}^{int})^{i_4} \cap (\mathcal{T}'^{\partial})^{i_5}$, где $i_0, \ldots, i_5 \in \{0, 1\}$.

Для $T \in \mathcal{T}'_d$ положим $s(T) = |\Gamma_{d-1}^{\partial}(T) \cap \Gamma_{d-1}(M(T))|$.

Положим $T_0 = \{[(0,0),(0,1),(1,0)]\}$ и заметим, что $T_0 \in \mathcal{T}_{1,1,1,1,0,0}$ и $s(T) = 3$. Известно [2], что $\mathcal{T}^R \subset \mathcal{T}^{WR} \subset \mathcal{T}^{Sh}$. В [2] приведена триангуляция из $\mathcal{T}_{0,1,1,1,0,0}$, которую обозначим через T_1, и построена триангуляция из $\mathcal{T}_{0,0,1,1,0,0}$, которую обозначим через T_2. Из [3] следует существование триангуляции из $\mathcal{T}_{0,0,0,1,0,0}$, обозначаемой здесь через T_3 и являющейся модификацией известного примера M. E. Rudin триангуляции из $\mathcal{T}_{0,0,0,1,0,1}$, причём $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}'_3$, $s(T_1) = 4$, $s(T_2) = 10$, $s(T_3) = 24$, $|\Gamma_2^{\partial}(T_1)| = |\Gamma_2^{\partial}(T_2)| = 10$ и $|\Gamma_2^{\partial}(T_3)| = 24$. Таким образом, $\mathcal{T}^R \subset \mathcal{T}^{WR} \subset \mathcal{T}^{Sh} \subset \mathcal{T}'$.

Лемма 1. $\mathcal{T}^R \subset \mathcal{T}^{WR} \subset \mathcal{T}^{Sh} \cap \mathcal{T}^{SP}$.

Для $w = (w_1, \ldots, w_d) \in \mathrm{R}^d$ положим $\psi(w) = (w_1, \ldots, w_d, 0) \in \mathrm{R}^{d+1}$, а для $M \subset \mathrm{R}^d$ положим $\psi(M) = \{\psi(w) \ : \ w \in M\}$. Для триангуляции $T \in \mathcal{T}'_d$ положим $\eta(T) = \{[\psi(S), e_{d+1}] \ : \ S \in T\}$, где $e_{d+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathrm{R}^{d+1}$, и заметим, что $\eta(T) \in \mathcal{T}'_{d+1}$.

Лемма 2. *Если* $i_0, i_2, \ldots, i_5 \in \{0,1\}$ *и* $T \in \mathcal{T}_{i_0,0,i_2,i_3,i_4,i_5}$, *то* $i_0 = 0$, $\eta(T) \in \mathcal{T}_{0,0,i_2,0,0,\max\{i_4,i_5\}}$ *и* $s(\eta(T)) \geqslant s(T)$.

Лемма 3. *Если* $i_0, i_2, \ldots, i_5 \in \{0,1\}$ *и* $T \in \mathcal{T}_{i_0,1,i_2,i_3,i_4,i_5}$, *то* $i_2 = 1$, $i_3 = 1$, $\eta(T) \in \mathcal{T}_{i_0,1,1,1,0,\max\{i_4,i_5\}}$ *и* $s(\eta(T)) \geqslant s(T)$.

Теперь рассмотрим такую триангуляцию $T \in \mathcal{T}'$, что $s(T) \geqslant 1$ и $d = \dim(M(T)) \geqslant 2$. Тогда существуют точки $v_0, v_1, \ldots, v_d \in \mathrm{R}^d$, такие, что грань $F = [v_1, \ldots, v_d] \in \Gamma_{d-1}^{\partial}(T) \cap \Gamma_{d-1}(M(T))$ и точка v_0 расположена над F и под всеми остальными $(d-1)$-мерными гранями политопа $M(T)$ и не принадлежит аффинной оболочке ни одной $(d-1)$-мерной грани политопа $M(T)$. Пусть $p_1 = \frac{1}{d+1} \sum\limits_{k=0}^{d} v_k$, $p_2 = \frac{1}{d} \sum\limits_{k=0}^{d-1} v_k$, $T_{0,0} = \{[v_0, \ldots, v_d]\}$,

$T_{0,1} = \{[\{v_0,\ldots,v_d,p_2\}\backslash\{v_k\}] : k = 0,\ldots,d-1\}$, $T_{1,0} = \{[\{p_1,v_0,\ldots,v_d\}\backslash\{v_k\}] : k = 0,\ldots,d\}$, $T_{1,1} = \{[\{p_1,v_0,\ldots,v_d\}\backslash\{v_k\}] : k = 0,\ldots,d-1\} \cup \{[\{p_1,v_0,\ldots,v_{d-1},p_2\}\backslash\{v_k\}] : k = 0,\ldots,d-1\}$. Положим $\mu_{i_4,i_5}(T) = T \cup T_{i_4,i_5}$ при $i_4,i_5 \in \{0,1\}$. Также положим $\mu^0_{i_4,i_5}(T) = T$ и $\mu^j_{i_4,i_5}(T) = \mu_{i_4,i_5}(\mu^{j-1}_{i_4,i_5}(T))$ при $i_4,i_5 \in \{0,1\}$ и натуральном j.

Лемма 4. *Если* $i_0,\ldots,i_5,k_4,k_5 \in \{0,1\}$, $T \in \mathcal{T}_{i_0,i_1,i_2,i_3,k_4,k_5}$, $\dim(M(T)) \geqslant 2$ *и* $s(T) \geqslant 1$, *то* $\mu_{i_4,i_5}(T) \in \mathcal{T}_{i_0,i_1,i_2,i_3,\max\{i_4,k_4\},\max\{i_5,k_5\}}$ *и* $s(\mu_{i_4,i_5}(T)) \geqslant s(T)$.

Теорема 1. *Для* $i_4,i_5 \in \{0,1\}$ *и целого неотрицательного* j *выполняются следующие соотношения:*

$$\mu_{i_4,i_5}(\mu^j_{0,0}(\eta(T_3))) \in \mathcal{T}_{0,0,0,0,i_4,i_5},\ \ \mu_{i_4,i_5}(\mu^j_{0,0}(T_3)) \in \mathcal{T}_{0,0,0,1,i_4,i_5},$$
$$\mu_{i_4,i_5}(\mu^j_{0,0}(\eta(T_2))) \in \mathcal{T}_{0,0,1,0,i_4,i_5},\ \ \mu_{i_4,i_5}(\mu^j_{0,0}(T_2)) \in \mathcal{T}_{0,0,1,1,i_4,i_5},$$
$$\mathcal{T}_{0,1,0,0,i_4,i_5} = \varnothing,\ \ \mathcal{T}_{0,1,0,1,i_4,i_5} = \varnothing,\ \ \mathcal{T}_{0,1,1,0,i_4,i_5} = \varnothing,$$
$$\mu_{i_4,i_5}(\mu^j_{0,0}(T_1)) \in \mathcal{T}_{0,1,1,1,i_4,i_5},\ \mu_{i_4,i_5}(\mu^j_{0,0}(T_0)) \in \mathcal{T}_{1,1,1,1,i_4,i_5},$$
$$\mathcal{T}_{1,i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} = \varnothing \text{ при } (i_1,i_2,i_3) \in \{0,1\}^3\backslash\{(1,1,1)\}.$$

Триангуляции $T_1 \in \mathcal{T}'$ и $T_2 \in \mathcal{T}'$ называются *комбинаторно-эквивалентными*, если симплициальные комплексы $\Gamma(T_1)$ и $\Gamma(T_2)$ изоморфны. *Множеством комбинаторных типов* триангуляций из $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ назовём такое множество триангуляций $C_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}'$, что любые две триангуляции из $C_{\mathcal{T}}$ являются комбинаторно-неэквивалентными, для каждой триангуляции из $\mathcal{T}$ существует комбинаторно-эквивалентная ей триангуляция из $C_{\mathcal{T}}$ и для каждой триангуляции из $C_{\mathcal{T}}$ существует комбинаторно-эквивалентная ей триангуляция из $\mathcal{T}$.

Теорема 2. *Для каждого из 24 подклассов* ($\mathcal{T}_{0,0,i_2,i_3,i_4,i_5}$, $\mathcal{T}_{i_0,1,1,1,i_4,i_5}$, *где* $i_0,i_2,\ldots,i_5 \in \{0,1\}$) *множество комбинаторных типов триангуляций данного подкласса является счётным.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00545-а.

Список литературы

[1] *Груздев Д. В.* О классах триангуляций точечных конфигураций // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. — С. 478–481.

[2] *Lee C. W.* Regular triangulations of convex polytopes // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 1991. — V. 4. — P. 443–456.

[3] *Connelly R., Henderson D. W.* A convex 3-complex not simplicially isomorphic to a strictly convex complex // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1980. — V. 88. — P. 299–306.

Автоматное распознавание отмеченных орграфов

В. И. Грунская, М. Ю. Тихончев

veragrunska@yandex.ru, tikhonchev@sv.ulsu.ru

Ульяновский государственный университет

В работе рассматривается задача распознавания детерминированных автоматных графов с отмеченными дугами блуждающим по ним конечным автоматом. Для заданного графа G предлагается алгоритм синтеза конечного инициального автомата, который, перемещаясь по дугам произвольного исследуемого детерминированного графа H и оставляя в его вершинах отметки, за конечное число тактов делает заключение о изоморфизме-неизоморфизме графов G и H. Схожие задачи рассматривались ранее для ориентированных и неориентированных графов (см., например, работы [1, 2]).

Все неопределяемые понятия взяты из [3].

Пусть $G = (G, E_G, \mathbf{L}, \upsilon)$ — конечный ориентированный граф, где G и E_G — множества вершин и дуг соответственно, $\mathbf{L}$ — заданный алфавит отметок дуг, причем множество $\mathbf{L}$ упорядочено, $\upsilon : E_G \to \mathbf{L}$ — функция разметки дуг.

Граф называется детерминированным, если для каждой его вершины отметки всех исходящих дуг попарно различны. Будем рассматривать только детерминированные односторонне связные графы и обозначим их класс через $\mathbf{K}_d$. Граф называется инициальным, если в нем выделена инициальная вершина g_0, и обозначается G_{g0}. Обозначим класс инициальных детерминированных графов через $\mathbf{K}_d^i$.

Отметкой маршрута в графе G назовем слово, составленное из отметок дуг этого маршрута, выписанных в порядке их прохождения. Языком вершины графа G назовем множество отметок всех маршрутов, начинающихся в этой вершине. Вершины g графа G и h графа H называются отличимыми, если их языки различны. Граф называется приведенным, если любая пара его вершин отличима.

Графы из множества $\mathbf{K}_d(\mathbf{K}_d^i)$ будем называть изоморфными, если между их множествами вершин существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность, отметки дуг (и инициальную вершину).

Рассмотрим обход инициально связного графа $G_{g0} \in \mathbf{K}_d^i$ методом поиска в глубину с расстановкой отметок вершин из множества $\mathbf{M} = \{1, \ldots, |G|\}$ по следующим правилам (при этом полагаем, что по графу можно перемещаться как по направлению, так и против направления дуг). Полагаем, что в начальный момент всем вершинам графа G_{g0} приписана отметка 0.

1. Объявляем инициальную вершину графа G_{g0} текущей.

2. Если для текущей вершины g найдется вершина g', такая, что $\mu(g') = 0$, $(g, g') \in E_G$, перейдем в эту вершину (если таких вершин несколько, выбираем ту, в которую ведет дуга с наименьшей по порядку отметкой). Если для текущей вершины g таких вершин g' нет, переходим в вершину, из которой был выполнен переход в вершину g. Перед уходом из текущей вершины, если $\mu(g) = 0$, припишем ей отметку $(i+1)$, где i — максимальная из уже приписанных отметок.

3. Обход завершен, когда для текущей вершины g нет вершин g', таких, что $\mu(g') = 0$, $(g, g') \in E_G$, и $\mu(g) = 1$.

Для каждого j-го шага обхода, $j = 0, \ldots, 2|G| - 2$, определим $\Theta_j^G = (\mu_j, O_j, \mu'_j)$, где μ_j — отметка текущей вершины g при входе в эту вершину, μ'_j — ее отметка при выходе из нее; $O_j = \{(\alpha, \beta)_i\}$ — множество всех таких пар, что для каждого $(\alpha, \beta) \in O_j$ $\exists g' \in G$, $(g, g') \in E_G$, $\alpha = \upsilon(g, g')$, $\beta = \mu(g')$. Назовем упорядоченное множество $\mathbf{X}(G_{g0}) = \{\Theta_0, \ldots, \Theta_{2|G|-2}\}$ лабиринтной характеристикой графа G_{g0}. Согласно алгоритму, построение $\mathbf{X}(G_{g0})$ требует $O(|G|)$ тактов времени.

Теорема 1. *Инициально связные графы $G_{g0}, H_{h0} \in \mathbf{K}_d^i$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathbf{X}(G_{g0}) = \mathbf{X}(H_{h0})$.*

Пусть g — некоторая вершина односторонне связного графа $G \in \mathbf{K}_d$. Характеристику $\mathbf{X}(G_g)$ назовем полной и обозначим $\mathbf{XC}(G_g)$, если она имеет длину $2|G| - 1$, и неполной в противном случае. В силу односторонней связности графа $\mathbf{XC}(G_g)$ может существовать не для всякой $g \in G$.

Теорема 2. *Приведенные односторонне связные графы G, H изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся $g_0 \in G$ и $h_0 \in H$, такие, что $\mathbf{XC}(G_{g0}) = \mathbf{XC}(H_{h0})$.*

Очевидно, теорема 2 справедлива и для сильно связных графов.

Под конечным автоматом $\mathbf{A}$ будем понимать конечный, всюду определенный инициальный автомат Мили с заключительными состояниями, т. е. семёрку $\langle A, B, S, \varphi, \psi, S_e, s_0 \rangle$, где A и B — входной и выходной алфавиты, соответственно, S — конечное множество состояний, φ и ψ — функции переходов и выходов, соответственно, $S_e \subset S$ — множество заключительных состояний, $s_0 \in S$ — начальное состояние.

Для заданного инициально связного графа G_{g0} из класса $\mathbf{K}_d^i$ построим автомат $\mathbf{A}(G_{g0})$, способный, начав движение из инициальной вершины графа H_{h0} , за конечное число тактов определить, является H_{h0} изоморфным G_{g0} или нет.

Автомат строим по лабиринтной характеристике $\mathbf{X}(G_{g0}) = \{\Theta_0, \dots, \Theta_{2|G|-2}\}$ графа G_{g0}. Множество его состояний есть множество $\{0, \dots, 2|G|\}$. Начальное состояние $s_0 = 0$, заключительные — $2|G| - 1$ и $2|G|$.

Входной алфавит A представляет собой множество всевозможных векторов $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{|L|})$ длины $(|\mathbf{L}| + 1)$. Первый элемент вектора $\mathbf{a}$ является отметкой из $\mathbf{M}$. Следующие $|\mathbf{L}|$ элементов являются парами из $(\mathbf{L} \cup \{\Lambda\}) \times (\mathbf{M} \cup \{\Lambda\})$, упорядоченными по возрастанию первых элементов пар, считая, что Λ меньше любого элемента из $\mathbf{L}$. Выходной алфавит B — множество пар (b_1, b_2), где $b_1 \in (\mathbf{M} \backslash \{0\}) \cup \{\Lambda\}$, b_2 — отметка из $\mathbf{L}$, взятая со знаком плюс или минус, или пустой символ Λ.

Вход автомата интерпретируется следующим образом: пусть автомат $\mathbf{A}(G)$ в некоторый момент времени находится в вершине h с полустепенью исхода d графа H_{h0}. Тогда автомат получает на вход вектор $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{|L|})$, где a_0 является отметкой вершины h, $a_1, \dots, a_d$ — пары, состоящие из отметок исходящих из нее дуг, а также отметок вершин, в которые эти дуги идут, упорядоченные по возрастанию отметки дуги. Остальные элементы вектора $\mathbf{a}$ (если они есть) — пары (Λ, Λ).

Выход интерпретируется следующим образом. Пусть $\psi(\mathbf{a}, j) = (b_1, b_2)$. Тогда b_1 — отметка, приписываемая автоматом текущей вершине при $b_1 \neq \Lambda$, или указание не менять отметку текущей вершины, если $b_1 = \Lambda$. А b_2 есть отметка дуги, по которой автомату следует переместиться, если $b_2 \neq \Lambda$, или остаться в текущей вершине, если $b_2 = \Lambda$. Причем, если b_2 — отметка со знаком плюс, автомат перемещается по направлению дуги, со знаком минус — против направления дуги.

Функция выходов $\psi(\mathbf{a}, j) = (b_1, b_2)$ определяется по следующим правилам. Если отметка текущей вершины $\mu_j \neq 0$, то $b_1 = \Lambda$, в противном случае $b_1 = \mu'_j$. Если среди вершин, смежных текущей, имеются вершины с дополнительной отметкой 0, то b_2 есть минимальная из отметок дуг, идущих в такие вершины, взятая со знаком плюс. Если среди вершин, смежных текущей, нет вершин с дополнительной отметкой 0, то b_2 есть значение отметки дуги, идущей в текущую вершину из вершины с максимальной отметкой, взятое со знаком минус, и переход осуществляется в эту вершину.

Зададим функцию переходов $\varphi(\mathbf{a}, j)$ следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{a}, j) = \begin{cases} j+1, & \text{если } \mathbf{a} = (\mu_j, O_j) \\ 2|G|, & \text{если } \mathbf{a} \neq (\mu_j, O_j) \end{cases}, \ 0 \leqslant j \leqslant 2|G| - 2.$$

Таким образом, автомат за $O(|G|)$ тактов переходит в состояние $2|G| - 1$, если графы G_{g0} и H_{h0} изоморфны, и в состояние $2|G|$ в противном случае.

Для заданого односторонне связного графа $G \in \mathbf{K}_d$ произвольным образом выбирается $g \in G$, и для полученного $G_g \in \mathbf{K}_d^i$ мы пытаемся построить $\mathbf{XC}(G_g)$. Если это не удается, выбирается другая начальная вершина, которую, очевидно, нужно выбирать среди вершин с отметкой $\mu = 0$. В худшем случае на выбор вершины, для которой существует $\mathbf{XC}(G_g)$, мы потратим $O(|G|^2)$ тактов. По $\mathbf{XC}(G_g)$ строится автомат $\mathbf{A}(G_g)$. Для произвольного исследуемого $H \in \mathbf{K}_d$ автомат пытается обойти его из некоторой вершины h, следуя описанным выше правилам. При этом он проверяет совпадение характеристик $\mathbf{XC}(G_g)$ и $\mathbf{X}(H_h)$, из чего делает заключение о изоморфизме-неизоморфизме G и H. Если G_g и H_h не изоморфны, автомат пытается совершить обход из другой вершины. Если $\mathbf{X}(H_h)$ для любой $h \in H$ не совпадет с $\mathbf{XC}(G_g)$, графы не изоморфны. Таким образом, автомат тратит на решение проблемы изоморфизма графов $O(|G|^2)$ тактов.

Список литературы

[1] *Сапунов С. В.* Контрольные эксперименты с помеченными графами при неизвестной верхней оценке числа вершин // Дискретные модели в теории управляющих систем: VII Международная конференция. — М: МАКС Пресс, 2006. — С. 325–331.

[2] *Грунский И. С., Сапунов С. В., Татаринов Е. А.* Эксперименты с помеченными графами // Дискретные модели в теории управляющих систем: VIII Международная конференция. — М: МАКС Пресс, 2009. — С. 68–70.

[3] *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973.

Анализ геометрических образов асинхронных автоматов

Е. В. Гуревич, Л. Б. Тяпаев

lbeasty@gmail.com

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Исследование преобразований геометрических образов синхронных и асинхронных автоматов

Представление конечных детерминированных автоматов геометрическими образами порождает целый класс различных задач. Интересной представляется взаимосвязь геометрических преобразований образов и свойств синхронных и асинхронных автоматов в их классическом представлении. В данной статье представлены некоторые результаты исследования применения преобразований к геометрическим образам, порождаемым некоторыми частными классами автоматов.

Пусть задан синхронный автомат $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$, $|X| = n$, $|Y| = m$, $\delta_A : S \times X \to S$, $\lambda_A : S \times X \to Y$. С инициальным автоматом (A, s) связано автоматное отображение $\Lambda_A^S = \{(p, q) | \forall p \in X^* \lambda(s, p) = q\}$. Геометрическое пространство Γ для автомата (A, s) определяется по следующему алгоритму [2]:

1. Сопоставим элементам множества X натуральные числа от 1 до n, т. е. осуществим взаимно-однозначное отображение $f : X \to \{1, 2, \dots n\}$.

2. Определим координатную ось абсцисс $\tilde{X}$ для пространства Γ как отрезок числовой оси $[0, n+1]$.
3. Каждому слову $p = x_{i1}x_{i2}\dots x_{ik}$ сопоставим вектор $\omega = (f(x_{i1}), f(x_{i2}), \dots, f(x_{ik}))$, т. е. осуществим взаимно-однозначное соответствие $g : X^* \to V_N$, где V_N — пространство конечномерных векторов, элементами которых являются натуральные числа.
4. Каждому такому вектору $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ взаимно-однозначно сопоставим точку $\tilde{x} \in Q$ на оси абсцисс:

$$\tilde{x} = \frac{\omega_1}{(n+1)^0} + \frac{\omega_2}{(n+1)^1} + \frac{\omega_3}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\omega_k}{(n+1)^{k-1}}.$$

Аналогично определяется нумерация элементов множества Y, ось ординат $\tilde{Y}$ пространства Γ и отображение $h : Y^* \to V_N$. Каждой паре $(p, q) \in \Lambda_A^S$ в пространстве Γ сопоставляется точка с координатами $(\tilde{x}, \tilde{y})$, где $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}$, $(c_1, c_2, \dots, c_{|p|}) = g(p)$, $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{|q|} \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}$, $(b_1, b_2, \dots, b_{|q|}) = h(q)$.

Под геометрическим образом Ω_A^S автомата (A, s) понимается множество таких пар $(\tilde{x}, \tilde{y})$ [1, 2].

Пусть автомат A удовлетворяет условию: $(\exists q \in Y^*)$ $(\forall p \in X^*)$ $\lambda(s_0, p) = q$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $p = x_{i1}x_{i2}\dots x_{ik+1}, x_{ij} \in X$, ε — достаточно малая величина. Тогда $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists k > log_{m+1}(\frac{1}{\varepsilon}))$, что автомат A на словах длины $k+1$ в пространстве Γ определяется точками, расположенными на прямой $f(\tilde{x}) = l$, $f^{'}(\tilde{x}) < l < f^{''}(\tilde{x})$, $f^{'}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{(m+1)^{i-1}}$, $f^{''}(\tilde{x}) = f^{'}(\tilde{x}) + \frac{1}{(m+1)^{k-1}}$.*

Автомат $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ называется автономным, если $|X| = 1$.

Обозначим класс автономных автоматов, содержащий все автономные автоматы с фиксированным числом N состояний и числом M выходных сигналов, как $K(N, M)$.

Рассмотрим множество Ω всех различных геометрических образов всевозможных инициальных синхронных и асинхронных автоматов из класса $K(N, M)$.

Автомат $B = (S, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ называется асинхронным, если $\lambda_B : S \times X \to Y^*$.

Будем рассматривать те геометрические преобразования образов, путем применения которых можно из некоторого образа $\Omega_i \in \Omega$ синхронного автомата получить другой образ $\Omega_y \in \Omega$ асинхронного автомата.

Пример преобразования геометрических образов синхронных и асинхронных автоматов

Рассмотрим асинхронный автомат $B = (S, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$, где $X = \{a\}, Y = \{c, d\}, S = \{0, 1\}$, представленный в виде таблицы переходов и выходов:

X	S	Y	S
a	0	cd	1
a	1	d	0

Рассмотрим следующий синхронный автомат $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$, где $X = \{a\}$, $Y = \{c, d\}$, $S = \{0, 1\}$, представленный в виде таблицы переходов и выходов:

X	S	Y	S
a	0	d	1
a	1	c	1

Рассмотрим преобразование вида $\tilde{x'} = \tilde{x}$, $\tilde{y'} = A\tilde{y}^2 + B\tilde{y} + C$, где A, B, C — некоторые коэффициенты. Тогда образ синхронного автомата A, $\Omega_i \in \Omega$, переводится в образ асинхронного автомата B, $\Omega_y \in \Omega$, описанным преобразованием с коэффициентами (A, B, C), если $(\forall (x, y) \in \Omega_i)\ (x, Ay^2 + By + C) \in \Omega_y$.

Образ Ω_i будет представлен уравнением:

$$y = \frac{5 \cdot 3^n - 3}{2 \cdot 3^n},$$

где n — количество тактов. Выразим n через x:

$$n = 1 - \log_2(2 - x).$$

Образ Ω_y будет представлен уравнением:

$$y = \frac{51}{26} - \frac{9}{26} \cdot \left(\frac{3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{3^n} \right)^3 - \frac{3}{26} \cdot \left(\frac{3^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{3^n} \right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^n \cdot 3^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}.$$

Тогда коэффициенты (A, B, C) будут иметь следующий вид:

$$A = -\frac{2}{3} \cdot 3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad B = \frac{3}{13} \cdot \frac{3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{3^{2n}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{3^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{3^{2n}} + \frac{10}{3} \cdot 3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad C = \frac{51}{26}.$$

Разработано программное обеспечение для проведения эксперимента по преобразованию геометрических образов синхронных и асинхронных автоматов. Ведутся исследования по характеризации нелинейных преобразований в рассматриваемом классе геометрических образов.

Список литературы

[1] *Тяпаев Л. Б.* Аффинные классы автоматов и их преобразования // Теоретические проблемы информатики и её приложений. — Саратов: Гос. УНЦ «Колледж», 2001. — С. 133–135.

[2] *Тяпаев Л. Б.* Решение некоторых задач для конечных автоматов на основе анализа их поведения // Известия Саратовского университета. Серия «Математика. Механика. Информатика». — 2006. — Т. 6, № 2. — С. 121–133.

Реализация формулами функций из некоторых классов трехзначной логики

Д. А. Дагаев

ddagaev@gmail.com

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва

Рассматривается задача о сложности реализации формулами функций из некоторого семейства конечно-порожденных замкнутых классов трехзначной логики.

Пусть $k \geqslant 2$. Множество всех функций k-значной логики будем обозначать через P_k, а множество всех функций трехзначной логики, принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$, — через $P_{3,2}$. Пусть $G \subseteq P_k$. Обозначим через $[G]$ замкнутый класс, порожденный системой G, а через $G(n)$ — множество всех функций из G, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, $n \geqslant 1$. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in [G]$, Φ — формула над G, реализующая функцию f, а $F \subseteq [G]$. Обозначим через $L(\Phi)$ число символов переменных и констант, входящих в формулу Φ (сложность формулы Φ), а через $L_G(F(n))$ — функцию Шеннона для множества F.

Известно [1], что для любой полной системы булевых функций G выполняется соотношение

$$L_G(P_2(n)) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Также известно [2], что для любой конечной системы $G \subseteq P_2$ найдется константа $c = c(G)$, такая, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из $[G]$ имеет место неравенство $L_G(f) \leqslant c^n$. В работах [3, 4] для некоторых конечных полных базисов $G \subseteq P_k$, $k \geqslant 3$, получено соотношение

$$L_G(P_k(n)) \sim \frac{k^n}{\log_k n}.$$

Введем обозначения для некоторых замкнутых классов булевых функций. Положим $C_0 = \{0\}, C_1 = \{1\}, C = \{0, 1\}$. Через L будем обозначать множество всех линейных булевых функций.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{3,2}$. Проекцией функции f называется булева функция $prf(x_1, \dots, x_n)$, значение которой на произвольном наборе $\widetilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n$ определяется равенством $prf(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Проекцией prF множества функций $F \subseteq P_{3,2}$ называется множество $\bigcup\{prf\}$, где объединение берется по всем функциям $f \in F$. Нетрудно показать, что для любого замкнутого класса $F \subseteq P_{3,2}$ множество prF является замкнутым классом булевых функций.

Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций. Положим

$$pr^{-1}B = \{f \in P_{3,2} |\ prf \in B\}.$$

Легко видеть, что множество $pr^{-1}B$ является замкнутым классом и для любого замкнутого класса $F \subseteq P_{3,2}$, такого, что $prF = B$, выполняется соотношение $F \subseteq pr^{-1}B$. Класс $pr^{-1}B$ будем называть максимальным замкнутым классом. Таким образом, каждому замкнутому классу булевых функций соответствует максимальный класс функций из $P_{3,2}$. Известно (см. [5]), что замкнутый класс $pr^{-1}B$ является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда $B \notin \{C, C_0, C_1\}$.

В данной работе изучается вопрос о сложности реализации формулами функций из конечно-порожденных максимальных замкнутых классов. В работе [6] получена асимптотически точная оценка для функции Шеннона класса $pr^{-1}L$ и некоторой конечной системы, порождающей этот класс. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, отличный от классов C, C_0, C_1. Тогда существует конечная порождающая система G класса $pr^{-1}B$, такая, что*

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)).$$

Автор выражает благодарность проф. А. Б. Угольникову за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-00508) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — 1960. — С. 61–80.

[2] *Угольников А. Б.* О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 6. — С. 1341–1344.

[3] *Гашков С. Б.* О параллельном вычислении некоторых классов многочленов с растущим числом переменных // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1990. — № 2. — С. 88–92.

[4] *Захарова Е. Ю.* Реализация функций из P_k формулами // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, № 1. — С. 99–108.

[5] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[6] *Дагаев Д. А.* О сложности псевдолинейных функций // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2010. — № 2. — С. 53–56.

О графах с заданным числом независимых множеств

А. Б. Дайняк

dainiak@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Данная статья содержит результаты исследования, продолжающего работу [1]. Пусть $\varphi : \mathcal{G} \to S$ и $\psi : \mathcal{G} \to T$ — функционалы, заданные на классе графов $\mathcal{G}$. *Обратная задача существования* для пары $(\mathcal{G}, \varphi)$ ставится следующим образом [1]: «для всякого ли $s \in S$ найдётся граф $G \in \mathcal{G}$, такой, что $\varphi(G) = s$?» Если ответ на предыдущий вопрос положителен, то имеет смысл *обратная задача оптимизации* для тройки $(\mathcal{G}, \varphi, \psi)$: «для заданного $s \in S$ найти величину $L_{\varphi,\psi}(s)^{\mathcal{G}} = \inf\{\psi(G) \mid G \in \mathcal{G}, \varphi(G) = s\}$». Будем через $\iota(G)$ обозначать количество независимых множеств (н. м.) в графе G, а через $\iota_m(G)$ —количество максимальных по включению н. м. в G (м. н. м.). Через $\nu(G)$ обозначим число вершин в G. Классы двудольных графов и лесов обозначим соответственно $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$.

В работе [1] было показано, что $L^{\mathcal{B}}_{\iota_M,\nu}(n) \leqslant 8\log_6 n < 3.1\log_2 n$ для произвольного n, в то время как тривиальная нижняя оценка имеет вид $L^{\mathcal{B}}_{\iota_M,\nu}(n) \geqslant 2\log_2 n$. В той же работе было установлено, что для натуральных чисел n, имеющих в двоичной записи $o(\log n)$ отрезков из единиц, справедлива асимптотика $L^{\mathcal{B}}_{\iota_M,\nu}(n) \sim 2\log_2 n$. Предполагается, что данная асимптотика имеет место для любого натурального n. Пока это не удается доказать, однако можно указать способ понижения верхней оценки.

Лемма 1. *Пусть G — двудольный граф без изолированных вершин с долями L_G, R_G. Пусть $\widetilde{G}$ — двудольный граф, не пересекающийся с G, в первой и второй долях которого выделены (возможно, пустые) множества U и V соответственно. Пусть G' — граф, полученный соединением всех вершин U (V) со всеми вершинами L_G (соответственно, R_G). Тогда $\iota_M(G') = (\iota_M(G) - 2) \cdot \iota_M(\widetilde{G} \setminus (U \cup V)) + \iota_M(\widetilde{G} \setminus U) + \iota_M(\widetilde{G} \setminus V) + \iota_M(\widetilde{G} + U + V)$, где через $\iota_M(\widetilde{G} + U + V)$ обозначены м. н. м. графа $\widetilde{G}$, пересечения которых с множествами U и V непусты.*

Доказательство. Утверждение леммы проверяется прямым подсчетом. Если в м. н. м. G' не входит ни одна вершина графа G, то должно входить хотя бы по одной вершине из U и V, и таких множеств $\iota_M(\widetilde{G}+U+V)$. Если в м. н. м. в G' входят вершины из обеих долей G, то ни одна из вершин множества $U \cup V$ туда не войдет, а подмножества этого м. н. м. в G и $\widetilde{G}$ сами будут максимальными в графах G и $\widetilde{G}$. Следовательно, количество таких м. н. м. равно $(\iota_M(G)-2)\cdot\iota_M(\widetilde{G}\setminus(U\cup V))$. Если м. н. м. в G содержит все вершины L_G или все вершины R_G, то его часть в графе $\widetilde{G}$ будет совпадать с м. н. м. в $\widetilde{G}\setminus U$ или $\widetilde{G}\setminus V$ соответственно. ∎

Пусть $\widetilde{G}$ —двудольный граф с выделенными подмножествами U и V вершин в долях. Пару чисел (a,b), где $a=\iota_M(\widetilde{G}\setminus(U\cup V))$ и $b=(\iota_M(\widetilde{G}\setminus U)+\iota_M(\widetilde{G}\setminus V)+\iota_M(\widetilde{G}+U+V)-2\iota_M(\widetilde{G}\setminus(U\cup V)))$, будем называть ι-парой $\widetilde{G}$. *Полным множеством* пар натуральных чисел будем называть всякое множество Q, такое, что любое натуральное n представимо в виде $n=ak+b$ для некоторых $(a,b)\in Q$.

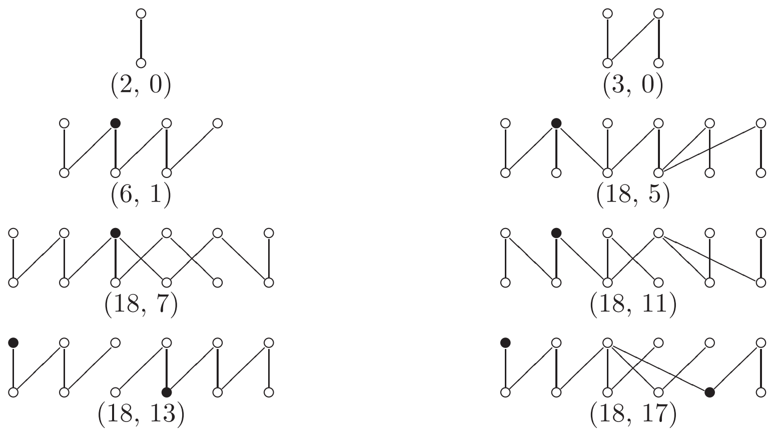
Лемма 2. *Пусть Γ — конечное множество графов с выделенными подмножествами вершин в долях, такое, что множество ι-пар графов из Γ является полным. Пусть*

$$\gamma=\max\left\{(\log_2 a)^{-1}\nu(G)\mid a \text{ — первый элемент } \iota\text{-пары } G,\ G\in\Gamma\right\},$$

и пусть a_0 — максимальный из первых элементов ι-пар графов из Γ. Тогда $L^{\mathcal{B}}_{\iota_M,\nu}(n)\lesssim\gamma\cdot\log_2 n$.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по n с использованием леммы 1. ∎

Лемма 2 показывает, что для получения верхней оценки величины $L^{\mathcal{B}}_{\iota_M,\nu}(n)$ достаточно подобрать «удачное» множество графов Γ. Перебором было найдено следующее множество графов (жирным выделены подмножества U, V; ι-пары подписаны снизу):



Легко проверяется, что множество ι-пар указанных графов является полным. Отсюда и из леммы 2 следует приводимая ниже оценка.

Теорема 3. $L^{\mathcal{B}}_{\iota_M,\,\nu}(n) \lesssim 12(\log_2 18)^{-1}\log_2 n < 2.88\log_2 n.$

Также интерес представляет получение оценки величины $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\,\nu}(n)$ (соответствующая задача существования была положительно решена Линеком [2]). Тривиальная нижняя оценка имеет вид $L^{\mathcal{B}}_{\iota,\,\nu}(n) \geqslant \log_2 n$, при этом в [2] для реализации числа n строятся двудольные графы с максимально возможными мощностями долей: $\lfloor \log_2 n \rfloor$ и $\lfloor \log_2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} + 1) \rfloor$. Для реализации чисел вида $n = 2^k - 1$ соответствующий граф будет иметь $2k - 2$ вершины, что вдвое больше ожидаемого оптимума. Некоторые из чисел указанного вида можно реализовать проще, как показывает следующее утверждение.

Теорема 4. *При $k = 2^t$ имеет место оценка $L^{\mathcal{F}}_{\iota,\,\nu}(2^k - 1) \lesssim k$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $2^{2^t} - 1 = \prod_{j=0}^{t-1}(2^{2^j} + 1) = \prod_{j=0}^{t-1}\iota(K_{2^j,1}) = \iota(\bigsqcup_{j=0}^{t-1} K_{2^j,1})$. При этом $\nu(\bigsqcup_{j=0}^{t-1} K_{2^j,1}) = 2^t + t - 1 \lesssim k$. ∎

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-3429.2010.1 и гранта РФФИ № 10-01-00768а.

Список литературы

[1] *Дайняк А. Б.* О реализации натуральных чисел инвариантами графов // Материалы X Международного семинара «Дискретная мате-

матика и ее приложения». — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. — С. 294–295.

[2] *Linek V.* Bipartite graphs can have any number of independent sets // Discrete Mathematics. — 1989. — V. 2, № 76. — P. 131–136.

Задачи комбинаторного распознавания

Г. А. Донец

g_donets@mail.ru

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

Рассматривается задача:

Задача 1. Пусть n выключателей независимо присоединены к одной лампочке. Известно, что среди них m испорченных. Эксперимент состоит в одновременном включении k $(1 < k \leqslant m)$ выключателей. Если среди них хотя бы один исправный, то лампочка зажигается. Необходимо за минимальное количество проб найти k неисправных выключателей.

Многие задачи о монетах, среди которых встречаются фальшивые, можно свести к задаче 1, при этом ответом на разные эксперименты является результат взвешивания на двудольных весах определенных комбинаций монет.

К задаче 1 приводит и следующая задача.

Задача 2 (задача о лотерее). Пусть задано множество натуральных чисел $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Из него случайным образом выбирается подмножество выигрышных чисел $M = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$. Эксперимент состоит в выборе k чисел $(k \leqslant m)$ из N_n. Необходимо найти минимальное количество таких k-выборок, чтобы хотя бы одна из них принадлежала M.

Задачу 1 можно сформулировать в такой математической постановке.

Задача 1′. Пусть задано множество n чисел $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ из m единиц и $n - m$ нулей. Эксперимент состоит в выборе фиксированного количества k $(k \leqslant m)$ чисел, после чего становится известным их произведение. Необходимо за минимальное количество проб найти k чисел, равных 1.

Обозначим такое количество $C_m^k(n)$. Покажем, что задача $1'$ сводится к задаче 1. Действительно, если включать x_i в каждую комбинацию из k чисел, то решение можно получить только тогда, когда будем уверены, что остальные $k-1$ чисел состоят из единиц. Тогда произведение всех k чисел равно x_i. Таким образом, эта задача сводится к задаче 1, если из множества $\{X\}$ удалить x_i и комбинировать в нем по $k-1$ чисел. Самый худший случай будет тогда, когда $x_i = 1$, то есть в множестве $\{X\}$ останутся $m-1$ единиц. Это означает, что $C_m^k(n) = F_{m-1}^{k-1}(n-1)$, отсюда и видно, что достаточно изучать решения только задачи 1, то есть функцию $F_m^k(n)$. Очевидно, что $F_m^m(n) = C_n^m$, потому что набор из единиц единственный и для его поиска в худшем случае необходимо перебрать все комбинации. Принцип оптимальности для $k=2$: необходимо все множество чисел разбить на столько групп, чтобы хотя бы в одной из них было не меньше двух единиц. Отсюда вытекает, что число групп должно быть $m-1$.

Обозначим $\lambda \equiv n \pmod{m-1}$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$F_3^2(n) = \frac{n(n-2)+\lambda}{4}. \tag{1}$$

Пусть $\lambda \equiv n \equiv 0 \pmod 2$. Тогда n разбивается на две одинаковые группы из $n/2$ чисел, и

$$F_3^2(n) = C_{n/2}^2 + C_{n/2}^2 = 2 \cdot \frac{(n/2)(n/2-1)}{2} = \frac{n(n-2)}{4}.$$

Если $\lambda \equiv 1 \pmod 2$, то n разбивается на два разных числа $d(n+1)/2$ и $d(n-1)/2$. Тогда

$$F_3^2(n) = C_{\frac{n+1}{2}}^2 + C_{\frac{n-1}{2}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Можно записать общую формулу

$$F_3^2(n) = \frac{(n-\lambda)(n-2+\lambda)}{4} = \frac{n(n-2)+2\lambda-\lambda^2}{4}.$$

Учитывая, что $\lambda^2 \equiv \lambda \pmod 2$, получаем формулу (1).

Лемма 2. *При делении n на $m-1$ группу получаем разбиение*

$$n=(m-1-\lambda)\left(\frac{n-\lambda}{m-1}\right)+\lambda\left(\frac{n-\lambda}{m-1}+1\right). \qquad (2)$$

При делении числа n на q получаем остаток $n(\operatorname{mod} q)$. Следовательно, $n=q\left\lfloor\frac{n}{q}\right\rfloor+n(\operatorname{mod} q)$. Запишем $q=[q-n(\operatorname{mod} q)]+n(\operatorname{mod} q)$, откуда $n=[q-n(\operatorname{mod} q)]\left\lfloor\frac{n}{q}\right\rfloor+n(\operatorname{mod} q)\left(\left\lfloor\frac{n}{q}\right\rfloor+1\right)$. Подставляя сюда $q=m-1$ и $\left\lfloor\frac{n}{m-1}\right\rfloor=\frac{n-\lambda}{m-1}$, получим искомую формулу (2).

Отсюда легко вывести общую формулу

$$n=\sum_{i=0}^{q-1}\left\lfloor\frac{n+i}{q}\right\rfloor. \qquad (3)$$

Теперь можно доказать основную теорему.

Теорема. *Справедливо равенство*

$$F_m^2(n)=\frac{(n-\lambda)(n+\lambda-m+1)}{2(m-1)}. \qquad (4)$$

Для доказательства воспользуемся результатами леммы 2 о разбиении множества чисел на $m-1$ группу

$$F_m^2(n)=(m-1-\lambda)C^2_{\frac{n-\lambda}{m-1}}+\lambda C^2_{\frac{n-\lambda}{2}+1}=$$

$$=\frac{m-1-\lambda}{2}\left(\frac{n-\lambda}{m-1}\right)\left(\frac{n-\lambda}{m-1}-1\right)+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{n-\lambda}{m-\lambda}+1\right)\left(\frac{n-\lambda}{m-1}\right),$$

откуда после сокращений получаем (4).

О порождающих системах специального вида для предполных классов монотонных функций k-значной логики

О. С. Дудакова

olga.dudakova@gmail.com

Франко-русский центр им. А. М. Ляпунова
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Известно, что при $k \leqslant 7$ все предполные классы функций k-значной логики являются конечно-порожденными [1], а начиная с $k = 8$ существуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса [2]; полного описания конечно-порожденных предполных классов монотонных функций к настоящему времени не получено. В работах автора [3, 4, 5, 6] получены критерий конечной порожденности для предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два, а также условия существования конечных порождающих систем для ряда других семейств классов монотонных функций. В данной работе продолжены исследования в этом направлении.

Пусть $\preccurlyeq$ — частичный порядок на множестве $E_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Положим $\mathcal{P} = (E_k, \preccurlyeq)$. Будем считать, что множество $\mathcal{P}$ имеет наименьший и наибольший элементы. Через $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ будем обозначать класс всех монотонных функций над $\mathcal{P}$ (отметим, что класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ является предполным [7]).

Функцию $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ будем называть *функцией выбора*, если для каждого набора $(i, a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{P}^{k+1}$ выполняется равенство

$$\lambda(i, a_1, \ldots, a_k) = a_i.$$

Легко видеть, что если замкнутый класс функций k-значной логики содержит функцию выбора, то он является конечно-порожденным. Отметим также, что если $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное множество, содержащее хотя бы одну цепь длины 2, то $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k) \notin \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$.

Положим

$$\mathcal{P}_\lambda = \big\{(a, b_1, \ldots, b_k) \in \mathcal{P}^{k+1} \mid \text{ если } i \preccurlyeq j, \text{ то } b_i \preccurlyeq b_j\big\}.$$

Легко видеть, что функция λ монотонна на множестве $\mathcal{P}_\lambda$. Назовем *монотонной функцией выбора* функцию $\nu(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ из $\mathcal{M}_\mathcal{P}$, совпадающую на множестве $\mathcal{P}_\lambda$ с функцией $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Нетрудно показать, что если класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ содержит монотонную функцию выбора, то он является конечно-порожденным.

Пусть $a_1, a_2 \in \mathcal{P}$. Элемент $b \in \mathcal{P}$ называется *точной верхней гранью* элементов a_1, a_2 (обозначение $\sup(a_1, a_2)$), если выполняются неравенства $b \succcurlyeq a_1$ и $b \succcurlyeq a_2$ и для любого элемента c, такого, что $c \succcurlyeq a_1$ и $c \succcurlyeq a_2$, выполняется неравенство $c \succcurlyeq b$. Аналогичным образом определяется *точная нижняя грань* элементов a_1 и a_2 (обозначение $\inf(a_1, a_2)$). Через $|\mathcal{P}|$ будем обозначать число элементов множества $\mathcal{P}$. Положим $w_\mathcal{P} = \max |J|$, где максимум берется по всем антицепям J множества $\mathcal{P}$; величину $w_\mathcal{P}$ будем называть *шириной* множества $\mathcal{P}$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное множество ширины два с наименьшим и наибольшим элементами. Класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ содержит монотонную функцию выбора тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in \mathcal{P}$ множество $\mathcal{P}$ содержит по крайней мере один из элементов* $\sup(a, b)$, $\inf(a, b)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00508, и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения», проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем».

Список литературы

[1] *Lau D.* Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik // Z. Math Log. und Grundl. Math. — 1978. — 24. — S. 79–96.

[2] *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. — 1986. — 3. — P. 211–218.

[3] *Дудакова О. С.* О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 1. — С. 31–37.

[4] *Дудакова О. С.* О конечной порожденности замкнутых классов монотонных функций в P_k // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 2. — С. 65–71.

[5] *Дудакова О. С.* О конечной порожденности предполных классов монотонных функций девятизначной логики // Мат-лы XVIII Междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.). — М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ. — 2009. — С. 38–41.

[6] *Дудакова О. С.* О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины три // Мат-лы X Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) — М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ. — 2010. — С. 178-180.

[7] *Мартынюк В. В.* Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. — М.: Наука. — 1960. — Т. 3. — С. 49–60.

Задачи теории интерполяции, возникающие в алгебраическом подходе к распознаванию

А. Г. Дьяконов

djakonov@mail.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Алгебраический подход к решению задач распознавания (образов) был предложен акад. РАН Ю. И. Журавлёвым в 1970-х гг. [1]. Над алгоритмами специальным образом вводились операции, и корректный алгоритм (который не делает ошибок на контрольной выборке) предлагалось искать в виде алгебраического выражения. Затем было показано [2], что многие проблемы описания и анализа алгебраических замыканий (выражений специального вида над алгоритмами конкретной модели) сводятся к задачам интерполяции. В этом докладе рассмотрена задача представления функции, заданной на конечном множестве, в виде суммы функций от меньшего числа переменных. Получены критерии такого представления, показана связь с классическими результатами алгебраического подхода и теории интерполяции.

Алгебраический подход к распознаванию

Подход основан на том факте, что любой алгоритм классификации q объектов на l классов может быть представлен в виде суперпозиции распознающего оператора B и решающего правила C [3]. Распознающий оператор B получает $q \times l$-матрицу $\Gamma[B]$, ij-й элемент которой является оценкой принадлежности объекта S_i, $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, к классу K_j, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Решающее правило по этой матрице классифицирует (контрольные) объекты $S_1, \ldots, S_q$ (например, просто сравнивая каждую оценку с порогом).

При фиксированном решающем правиле операции над алгоритмами (операторами) индуцируются операциями над их матрицами оценок:

$$\Gamma[B_1 + B_2] = \Gamma[B_1] + \Gamma[B_2],$$
$$\Gamma[cB] = c\Gamma[B], \quad \Gamma[B_1 \cdot B_2] = \Gamma[B_1] \circ \Gamma[B_2],$$

умножение $\circ$ поэлементное. Для модели алгоритмов, которая характеризуется фиксированным множеством B^* распознающих операторов (этой модели), вводится понятие алгебраического замыкания k-й степени $\mathbb{U}^k(B^*)$ – множества всех полиномов степени не выше k над операторами модели. Центральный результат алгебраического подхода – корректность алгебраических замыканий $\mathbb{U}^\infty(B^*)$ «естественных» моделей при необременительных ограничениях на постановку задачи распознавания (последнее формализуется термином «регулярная задача», см. [1]). Под корректностью понимается возможность получить любую классификацию объектов $S_1, \ldots, S_q$ (что для большинства моделей эквивалентно возможности получить произвольную $q \times l$-матрицу оценок). Ниже будем считать, что мы рассматриваем одну из таких моделей B^* (это может быть модель алгоритмов вычисления оценок [3], потенциальных функций, двуслойных нейронных сетей и т. д. [4]).

k-сингулярные системы точек

Рассмотрим систему точек $D = \{\tilde{d}_i\}_{i=1}^s$, $s \geqslant 2$, заданную $s \times s$-матрицей попарных расстояний P_D. Пусть $\mathbb{U}^k[D]$ — множество всех полиномов над столбцами матрицы P_D степени не выше k (умножение поэлементное).

Определение 1. Система точек D называется *k-сингулярной*, если размерность пространства $\mathbb{U}^k[D]$ меньше q.

Теорема 1. *Для любой регулярной задачи распознавания и модели алгоритмов B^* существует система точек D в пространстве $\mathbb{R}^n$ с l_1-метрикой (или метрикой Хэмминга), которая для всех натуральных k не является k-сингулярной тогда и только тогда, когда алгебраическое замыкание k-й степени $\mathbb{U}^k(B^*)$ корректно. При этом $\mathbb{U}^k[D]$ точно описывает пространство матриц оценок операторов из $\mathbb{U}^k(B^*)$.*

В простейшем случае (задача распознавания с двумя непересекающимися классами, см. [5]) система D совпадает с контрольными объектами $S_1, \ldots, S_q$ задачи распознавания, а каждый из двух столбцов матрицы оценок любого оператора замыкания $\mathbb{U}^k(B^*)$ является элементом множества $\mathbb{U}^k[D]$. В общем случае точек ровно ql, а множество $\mathbb{U}^k[D]$ состоит из матриц оценок операторов замыкания $\mathbb{U}^k(B^*)$, записанных в векторной форме. Теорема справедлива для целого класса метрик, l_1-метрика и метрика Хэмминга являются лишь его простейшими представителями.

Следующая теорема показывает связь k-сингулярности с представлениями функции в определённом виде.

Теорема 2. *Система точек $D \subset \mathbb{R}^n$ не является k-сингулярной при $k \leqslant n$ тогда и только тогда, когда любая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на точках системы D может быть представлена в виде конечной суммы*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} f_{i_1, \ldots, i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \tag{1}$$

функций, каждая из которых зависит от k переменных.

К. В. Рудаковым [6] было доказано (в другой терминологии), что любая система попарно различных точек не является k-сингулярной при $k \geqslant \lfloor \log_2 |D| \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа x. Отсюда следует оценка на k при представлении (1). Интересно, что в теории интерполяции задачи представления функций достаточно часто сводятся к исследованию k-сингулярности. Например, в классе радиальных базисных функций (RBF) [7] или жёстких функций (riddle functions) [8].

Пусть функция $\Pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ обращается в ноль вне элементов множества $X = \times_{t=1}^{n} \{a_t, b_t\}$, а в точках $(c_1, \ldots, c_n)$ этого множества равна $(-1)^c$, где $c = \bigl|\{t \in \{1, \ldots, n\} \mid c_t = a_t\}\bigr|$. Назовём такую функцию размеченным параллелепипедом размерности $r = \bigl|\{t \in \{1, \ldots, n\} \mid a_t \neq b_t\}\bigr|$.

Теорема 3. *Существует функция на $D \subset \mathbb{R}^n$, которая не представима в виде* (1)*, тогда и только тогда, когда найдётся непустая подсистема системы точек D, которая является носителем* (*множеством наборов, на которых функция отлична от нуля*) *суммы конечного числа размеченных параллелепипедов размерности $k+1$.*

Этот критерий следует из критерия k-сингулярности [5] и является обобщением критерия 1-сингулярности Л. Рида и К. Сана [8]. В теории распознавания он означает, что все «плохие» задачи для алгебраических замыканий (в которых рассматриваемое замыкание некорректно) являются «линейными комбинациями» задач типа XOR (точки булева куба с чётными весами лежат в одном классе, а с нечётными — в другом).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-07-00609-а, и гранта Президента РФ, проект МД-757.2011.9.

Список литературы

[1] *Журавлёв Ю. И.* Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. II // Кибернетика. — 1977. — № 6. — С. 21–27.

[2] *Дьяконов А. Г.* Критерии корректности алгебраических замыканий модели алгоритмов вычисления оценок // Доклады Академии наук. — 2008. – Т. 420, № 6. — С. 732–735.

[3] *Журавлёв Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. Вып. 33. — 1978. — С. 5–68.

[4] *Воронцов К. В.* Курс лекций «Математические методы обучения по прецедентам». URL: http://www.ccas.ru/voron, http://www.machinelearning.ru

[5] *Карпович П. А., Дьяконов А. Г.* Критерий k-сингулярности систем точек в алгебраическом подходе к распознаванию // 14-я Всероссийская конференция «Математические методы распознавания образов»: Сборник докладов. — Москва: Макс Пресс, 2009. — С. 41–44.

[6] *Рудаков К. В.* Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение. — М.: Наука, 1989. — Вып. 1. – С. 176–201.

[7] *Baxter B. J. C.* Conditionally positive functions and p-norm distance matrices // Constr. Approx. — 1991. — № 7. — P. 427–440.

[8] *Reid L., Sun X.* Distance matrices and ridge function interpolation // Constr. Approx. — 1993. — V. 45. — P. 1313–1323.

Символьные алгоритмы решения булевых уравнений в применении к исследованию дискретных моделей генных сетей

А. А. Евдокимов, С. Е. Кочемазов, И. В. Отпущенников, А. А. Семенов

evdok@math.nsc.ru, veinamond@gmail.com, otilya@yandex.ru, biclop@rambler.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
Институт динамики систем и теории управления, Иркутск.

При помощи дискретно-автоматных отображений можно описывать функционирование или эволюцию различных систем, например, дискретных моделей генных сетей. Генная сеть представляет собой совокупность активных элементов клетки, соединенных между собой различными видами обратной связи [1].

В работе предлагается обобщенная дискретная модель генной сети, в которой учитываются возможности саморегуляции вершин, различные типы обратной связи и возможность преобладания одних видов регуляции над другими. Также рассматривается сведение некоторых задач, связанных с предложенной моделью, к задачам поиска решений булевых уравнений. Идейно предлагаемая модель и методы её исследования близки к описанным в [2, 3].

Обобщенная дискретная модель и соответствующие методы были использованы для исследования регуляторных контуров генных сетей, подобных сети бактерии *E. Coli* [1]. Были найдены неподвижные точки и циклы соответствующих дискретно-автоматных отображений. Для сведения рассматриваемых задач к булевым уравнениям использовался специализированный транслятор алгоритмов, вычисляющих дискретные функции.

В [1] приведены примеры задания генных сетей при помощи раскрашенных графов. Вершины таких графов соответствуют элементам клетки, дуги интерпретируют связи между этими элементами. Раскраска вершин указывает на некоторый вид саморегуляции, а раскраска дуг — на характер обратной связи между весовыми функциями соединяемых вершин. В предлагаемой нами обобщенной модели генная сеть задается матрицей $n \times n$ (n — число вершин в графе). На ее главной диагонали находятся целые неотрицательные числа, интерпретирующие раскраску вершин. При этом подразумевается, что красная вершина ингибирует сама себя, зеленая активирует сама себя, коричневая вершина в зависимости от ситуаций может вести себя либо как зеленая, либо как красная, черная вершина себя не регулирует. Для матрицы смежности:

1. Если вершина с номером $i \in 1, \ldots, n$ зеленая, то $a_{ii} = 1$,
2. Если вершина с номером $i \in 1, \ldots, n$ красная, то $a_{ii} = 2$,
3. Если вершина с номером $i \in 1, \ldots, n$ коричневая, то $a_{ii} = 3$,
4. Если вершина с номером $i \in 1, \ldots, n$ черная, то $a_{ii} = 0$.

Аналогичным образом интерпретируется раскраска дуг:

1. Если $a_{12} = 1$, то из первой вершины во вторую ведет дуга зеленого цвета,
2. Если $a_{12} = 2$, то из первой вершины во вторую ведет дуга красного цвета,
3. Если $a_{12} = 3$, то из первой вершины во вторую ведет дуга коричневого цвета,
4. Черных дуг не бывает; $a_{12} = 0$ означает, что дуги из первой вершины во вторую нет.

Значение веса в каждой вершине определяется функцией от весов вершин, дуги из которых входят в рассматриваемую вершину, и от цвета этих дуг.

Пусть x_j, $j \in 1, \ldots, n$ — вес j-й вершины сети; X_j — множество вершин сети, дуги из которых входят в j-ю вершину, p — значность. Каждой вершине сети с номером $j \in 1, \ldots, n$ сопоставляем функции $\delta_j(x_i)$ по всем $x_i \in X_j$, которые помогают учесть зависимость веса вершины от цветов дуг, входящих в нее:

$$\delta_j(x_i) = \begin{cases} x_i, & a_{ij} = 1 \vee (a_{ij} = 3) \,\&\, \left(x_i \geqslant \frac{p}{2}\right), \\ -x_i, & a_{ij} = 2 \vee (a_{ij} = 3) \,\&\, \left(x_i < \frac{p}{2}\right), \\ 0, & a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Смысл данной функции в том, что вес i-й вершины при пересчете веса вершины с номером j (существует дуга из i в j) учитывается со знаком $+$, если данная дуга зеленая, со знаком $-$, если она красная, а в случае коричневой дуги возможен один из этих двух вариантов в зависимости от значения веса i-й вершины (если вес меньше $\frac{p}{2}$, то считаем, что i-я вершина ингибирует j-ю, если же $x_i \geqslant \frac{p}{2}$, считаем, что i-я вершина активирует j). Функция пересчета весов вершин задается следующим образом:

$$x'_j = \begin{cases} x_j + 1, & \left(\sum\limits_{x_i \in X_j} \delta_j(x_i) > 0\right) \& \left(x_j < p - 1\right), \\ x_j - 1, & \left(\sum\limits_{x_i \in X_j} \delta_j(x_i) < 0\right) \& \left(x_j > 0\right), \\ x_j, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Задача поиска неподвижных точек отображений, заданных регуляторными контурами генных сетей описанного выше типа (1), транслировалась в SAT-задачи (при разных значениях параметра p) при помощи программного комплекса «Transalg» [4]. Для генных сетей на 100 и более вершинах удавалось находить неподвижные точки в среднем менее чем за одну минуту работы sat-решателя minisat2.0 [5] (при значениях параметра $p \in \{32, 64\}$).

Описанный в работе подход позволяет находить циклы (длины более 1) дискретных отображений, заданных различными моделями генных сетей. Для отображений, рассмотренных в [2], в тестовых экспериментах, проводимых на графах сетей со случайной структурой, были решены задачи поиска циклов длины от 2 до 10 при значности сети (параметр p) от 8 до 32. Использовались графы от 50 до 100 вершин. Среднее время поиска циклов не превосходило 10 минут (обычный ноутбук).

Для обобщенной модели (с раскрасками вершин и дуг) задачи поиска циклов оказываются существенно более сложными. На данном этапе за приемлемое время удавалось находить циклы длиной 10 для сетей на 30 вершинах (с различными значениями параметра p).

В заключение отметим перспективность рассмотренного в работе подхода в применении к решению задач исследования свойств дискретно-автоматных отображений комбинаторной природы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00997, 09-01-00070, 11-07-00377) и целевой программы СО РАН (Междисциплинарный интеграционный проект № 119).

Список литературы

[1] Системная компьютерная биология / Под ред. Н. А. Колчанова, С. С. Гончарова, В. А. Лихошвая, В. А. Иванисенко. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.

[2] *Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А.* Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. — 2005. — № 14. — С. 206–212.

[3] *Евдокимов А. А., Кочемазов С. Е., Семенов А. А.* Применение символьных алгоритмов к исследованию дискретных моделей некоторых классов генных сетей // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 1. — С. 30–47.

[4] *Отпущенников И. В., Семенов А. А.* Инструментальное средство трансляции алгоритмов вычисления дискретных функций в выражения исчисления высказываний Transalg 1.0. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011611151 (03.02.2011).

[5] MiniSat `http://minisat.se/MiniSat.html`

Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети

А. А. Евдокимов, А. Л. Пережогин

evdok@math.nsc.ru, pereal@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть даны $n \geqslant 3$, $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и ориентированный граф $G_{n;d_1,d_2,\ldots,d_k}$ с множеством вершин $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ и множеством дуг $\{\overrightarrow{ij} \mid j - i \equiv d_r \pmod{n},\ \ r = 1, 2, \ldots, k\}$, матрица смежности которого является циркулянтом.

Определим рассматриваемую конечную динамическую систему. В каждый момент времени вершины циркулянта $G_{n;d_1,d_2,\ldots,d_k}$ помечены элементами $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ из конечного поля F_q порядка q.

Набор $\tilde{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \in F_q^n$ называется состоянием системы. В каждый момент времени (такт работы системы) состояние системы меняется, и динамика его изменения определяется отображением $A_{f,q} : F_q^n \to F_q^n$, где $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$, и новая метка каждой вершины i является значением функции $f_i : F_q^k \to F_q$, аргументы которой принимают значения старых меток тех вершин, дуги из которых входят в вершину i.

Функциональным графом $G_{f,q}$ назовём ориентированный граф, вершинами которого являются элементы из F_q^n, причем дуга из вершины $\tilde{v}$ идет в вершину $\tilde{u}$ тогда и только тогда, когда $A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$. Известно, что функциональный граф любого преобразования конечного множества состоит из нескольких (быть может, одной) компонент связности, каждая из которых содержит единственный контур, вершины которого являются корнями деревьев с дугами, ориентированными к корню [1].

Данная конечная динамическая система является моделью регуляторного контура генной сети, функционирование которого определяется сменой его состояний и полностью характеризуется структурой функционального графа преобразования $A_{f,q} : F_q^n \to F_q^n$. Метки вершин характеризуют уровень концентрации веществ (гены, белки и др.), сопоставляемых этим вершинам [2, 3, 4, 5]. Заметим, что в отличие от [2], где функции в вершинах являются пороговыми, мы рассматриваем линейные функции. В нашем случае оказалось удобно использовать циклические коды и технику их порождения с помощью полиномов [4, 6, 7], что позволило полнее описать структуру функционального графа.

Далее полагаем, что линейные функции f_i равны между собой. Таким образом, везде далее если $A_{f,q}(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$, то

$$u_i = v_{(i-d_1) \bmod n} + v_{(i-d_2) \bmod n} + \cdots + v_{(i-d_k) \bmod n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Линейное подпространство C векторного пространства F_q^n называется циклическим кодом длины n над F_q, если из условия $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \in C$ следует $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0) \in C$. Каждому набору $\tilde{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ из F_q^n поставим в соответствие многочлен $v(x) = v_0 + v_1 x + \cdots + v_{n-1} x^{n-1}$ из кольца многочленов $F_q[x]$ над полем F_q. Известно, что при таком соответствии действие отображения

$A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$, определяемое линейной рекуррентностью (1), можно записать в следующем виде

Утверждение 1. *$A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{u}$ тогда и только тогда, когда*

$$v(x)(x^{d_1} + x^{d_2} + \cdots + x^{d_k}) \equiv u(x) \pmod{x^n - 1}.$$

Теперь в качестве состояний системы будем рассматривать элементы фактор-кольца $F_q[x]/(x^n - 1)$, а изменение состояния определяется умножением в этом фактор-кольце на многочлен

$$A(x) = A_{d_1,d_2,\ldots,d_k}(x) = x^{d_1} + x^{d_2} + \cdots + x^{d_k}.$$

Такую динамическую систему будем называть системой $(n, q, A(x))$.

Известно [6], что если $C \subseteq F_q^n$ является циклическим кодом, то соответствующее ему подпространство (обозначать будем той же буквой C) фактор-кольца $F_q[x]/(x^n - 1)$ является идеалом. Порождающий многочлен $g(x)$ этого идеала называют порождающим многочленом кода C. Тогда, если $\deg g(x) = r$, то $C = \{g(x)f(x) | f(x) \in F_q[x], \deg f(x) < n - r\}$. Многочлен $h(x)$, заданный соотношением $g(x)h(x) = x^n - 1$, является проверочным многочленом циклического кода C. Таким образом, $c(x) \in C$ тогда и только тогда, когда $c(x)h(x) = 0$ в $F_q[x]/(x^n - 1)$.

Пусть $\gcd(A(x), x^n - 1) \neq 1$. Рассмотрим последовательность таких циклических кодов $C_0 = F_q[x]/(x^n - 1)$, C_1, …, C_t, что код C_i имеет порождающий и проверочный многочлены $g_i(x)$ и $h_i(x)$ соответственно, $i = 1, 2, \ldots t$, где

$$g_1(x) = \gcd(A(x), x^n - 1), \qquad h_1(x) = x^n - 1/g_1(x),$$

$$g_i(x) = g_{i-1}(x)\gcd(g_1(x), h_{i-1}(x)),\ h_i(x) = x^n - 1/g_i(x),\ i = 2, 3, \ldots, t,$$

и t – такое минимальное число, что $\gcd(g_1(x), h_t(x)) = 1$.

Пусть $S_i = C_i \setminus C_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots t - 1$ и $S_t = C_t$.

Теорема 2. *В функциональном графе $G_{f,q}$ вершины, принадлежащие контурам, образуют множество S_t. Множество вершин, принадлежащих деревьям, разбивается на t уровней S_0, S_1, …, S_{t-1}, таких, что S_0 – множество листьев, а вершины из S_i находятся на расстоянии i от вершин из S_0, $1 \leqslant i \leqslant t - 1$.*

Следствие 1. *Пусть* $x^n - 1 = f_1^{m_1}(x) f_2^{m_2}(x) \dots f_s^{m_s}(x)$ *– разложение в* $F_q[x]$ *на неприводимые многочлены. Если для любого* $i = 1, 2, \dots, s$ *многочлен* $f_i(x)$ *делит* $A(x)$*, то функциональный граф* $G_{f,q}$ *состоит из единственной компоненты связности, являющейся деревом с петлёй в корневой вершине* $(0, 0, \dots, 0)$.

Следствие 2. *Состояние* $g_t(x)$ *принадлежит контуру наибольшей длины в функциональном графе* $G_{f,q}$.

Теорема 3. *Для любого целого положительного* l *все вершины функционального графа, принадлежащие контурам длины, делящей* l*, образуют циклический код с проверочным многочленом* $\gcd(A^l(x) - 1, x^n - 1)$.

Следствие 3. *Неподвижные точки функционального графа* $G_{f,q}$ *образуют циклический код с проверочным многочленом* $\gcd(A(x) - 1, x^n - 1)$*. Если степень этого многочлена равна* r*, то число неподвижных точек равно* q^r.

Следствие 4. *Наибольшая длина контура в функциональном графе равна минимальному* l*, для которого* $\gcd(A^l(x) - 1, x^n - 1) = h_t(x)$.

Для случая $q = 2$, то есть булева оператора $A_{f,2}$, справедлива

Теорема 4. *Если наибольшая длина контура функционального графа системы* $(n, 2, A(x))$ *равна* l *и* $h_t(x)$ *является порождающим многочленом циклического кода, образованного вершинами всех контуров, то максимальная длина контура функционального графа системы* $(2n, 2, A(x))$ *не изменится тогда и только тогда, когда* $h_t^2(x)$ *делит* $A^l(x) - 1$*. В противном случае наибольшая длина контура удвоится.*

Следствие 5. *Если в системе* $(n, 2, A(x))$ *наибольшая длина* l *контура чётна, то в системе* $(2n, 2, A(x))$ *наибольшая длина контура равна* $2l$.

Рассмотрим, например, систему $(n, 2, x + 1)$. Функциональный граф этой системы рассматривался в [8], а в случае $n = 2^m$ — в [9].

Теорема 5. *Для любого нечётного* n *наибольшая длина контура функционального графа системы* $(n, 2, 1 + x)$ *является делителем числа* $2^r - 1$*, где* $r = \min\{j | j > 0,\ 2^j \equiv 1 \pmod{n}\}$.

Следствие 6. *При любых* $k \geqslant 2$*,* $m \geqslant 0$ *для* $n = 2^m(2^k - 1)$ *наибольшая длина контура функционального графа системы* $(n, 2, 1+x)$ *равна* n.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-01-00997 и № 09-01-00070 и целевой программы СО РАН (Интеграционный проект № 119).

Список литературы

[1] *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1980.

[2] *Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А.* Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник ТГУ. — 2005. — № 14. — С. 206–212.

[3] *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журн. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — Т. 44, № 12. — С. 2276–2295.

[4] *Эйген М., Шустер П.* Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул. — М.: Мир, 1982.

[5] *Kauffman S. A.* At Home in the Universe: The Search for the Laws of Self-Organization and Complexity. — Oxford University Press, Oxford, 1995.

[6] *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.

[7] *Zierler N.* Linear recurring sequences // J. Soc. Ind. Appl. Math. — 1959. — V. 7, № 1. — P. 31–48.

[8] *Арнольд В. И.* Топология и статистика формул арифметики // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, № 4. — С. 3–28.

[9] *Merekin Yu. V.* On the computational complexity of the Arnold complexity of binary words // Asian-European J. of Mathematics. — 2009. — V. 2, № 4. — P. 641–648.

Анализ чувствительности векторной инвестиционной булевой задачи с упорядоченными критериями рисков Сэвиджа

В. А. Емеличев, В. В. Коротков

emelichev@bsu.by, wladko@tut.by

Белорусский государственный университет, Минск

Рассмотрим векторный вариант задачи управления финансовыми инвестициями, основанный на классической портфельной теории Марковица [1]. Для этого введем следующие обозначения: $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — активы (акции, облигации предприятий, недвижимость и т. п.); N_m — состояния рынка (ситуации); N_s — риски (финансовые, экологические, производственные и т. п.); R — трехиндексная матрица рисков (упущенных возможностей) размера $m \times n \times s$ с элементами r_{ijk} из $\mathbf{R}$; r_{ijk} — величина риска, которому подвергается инвестор, выбирая актив $j \in N_n$ по критерию (виду риска) $k \in N_s$ в том случае, если бы рынок находился в состоянии $i \in N_m$; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$ — портфель инвестиций (активов), где $\mathbf{E} = \{0, 1\}$, $x_j = 1$, если инвестор выбирает актив j, и $x_j = 0$ в противном случае.

Наряду с трехиндексной матрицей рисков $R = [r_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m\times n\times s}$ будем использовать и ее двумерные сечения $R_k \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $k \in N_s$.

Пусть эффективность выбираемого портфеля (булева вектора) $x \in X$, $|X| \geqslant 2$, оценивается векторной целевой функцией

$$f(x, R) = (f_1(x, R_1), f_2(x, R_2), \ldots, f_s(x, R_s)),$$

состоящей из минимаксных критериев риска (крайнего пессимизма) Сэвиджа [2]

$$f_k(x, R_k) = \max_{i\in N_m} R_{ik}x \to \min_{x\in X}, \quad k \in N_s,$$

где $R_{ik} = (r_{i1k}, r_{i2k}, \ldots, r_{ink})$ — i-я строка сечения R_k, $i \in N_m$.

Под векторной (s-критериальной) задачей портфельной оптимизации $Z^s(R)$, $s \geqslant 1$, с упорядоченными критериями Сэвиджа будем понимать задачу поиска множества лексикографических оптимумов, которое задается формулой

$$L^s(R) = \{x \in X : \ \nexists x' \in X \ (x \underset{R}{\succ} x')\},$$

где $x \succ_R x'$ тогда и только тогда, когда существует такой индекс $p \in N_s$, что

$$p = \min\{k \in N_s : \; g_k(x, x', R_k) \neq 0\} \quad \& \quad g_p(x, x', R_p) > 0,$$

$$g_k(x, x', R_k) = f_k(x, R_k) - f_k(x', R_k), \quad k \in N_s.$$

В этом контексте возникает вопрос: каков предельный уровень возмущений элементов матрицы рисков R, при которых не появляются новые лексикографические оптимумы задачи, т. е. каков радиус устойчивости задачи?

В пространстве портфелей $\mathbf{R}^n$ зададим линейную метрику l_1, а в пространствах состояний $\mathbf{R}^m$ и рисков $\mathbf{R}^s$ — чебышевскую метрику l_∞, т. е. полагаем, что

$$\|R_{ik}\|_1 = \sum_{j \in N_n} |r_{ijk}|, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s,$$

$$\|R_k\| = \max_{i \in N_m} \|R_{ik}\|_1 = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |r_{ijk}|, \quad k \in N_s,$$

$$\|R\| = \max_{k \in N_s} \|R_k\| = \max_{k \in N_s} \max_{i \in N_m} \|R_{ik}\|_1 = \max_{k \in N_s} \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |r_{ijk}|.$$

Таким образом, $\|R_{ik}\|_1 \leqslant \|R_k\| \leqslant \|R\|$ для любых индексов $i \in N_m$ и $k \in N_s$. Кроме того, для всякого сечения $R_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и любых портфелей $x, x' \in X$ очевидны неравенства

$$R_{ik}x - R_{i'k}x' \geqslant -\|R_{ik}\|_1 - \|R_{i'k}\|_1 \geqslant -2\|R_k\|, \quad i, i' \in N_m, \quad k \in N_s. \tag{1}$$

Радиусом устойчивости задачи $Z^s(R)$, $s \geqslant 1$, как обычно (см., например, [3]), назовем число

$$\rho = \rho(n, m, s) = \begin{cases} \sup\ \Xi, & \text{если } \ \Xi \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \ \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 : \; \forall R' \in \Omega(\varepsilon) \quad (L^s(R + R') \subseteq L^s(R))\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \{R' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} : \; \|R'\| < \varepsilon\}.$$

Обозначим

$$\varphi = \varphi(n, m, s) = \min_{x \notin L^s(R)} \max_{x' \in L^s(R)} \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i'1}x').$$

Очевидно, что $\varphi \geqslant 0$.

Теорема. *Пусть* $X \neq L^s(R)$. *Для радиуса устойчивости* $\rho = \rho(n, m, s)$ *векторной нетривиальной задачи* $Z^s(R)$, $s \geqslant 1$, *справедливы оценки*

$$\varphi(n, m, s)/2 \leqslant \rho \leqslant n\varphi(n, m, s).$$

Доказательство. Сначала убедимся в справедливости неравенства $\rho \geqslant \varphi/2$. Это неравенство очевидно, если $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$ и пусть портфель $x \notin L^s(R)$. Тогда согласно определению числа φ существует такой портфель $x^* \in L^s(R)$, что $\min\limits_{i' \in N_m} \max\limits_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i'1}x^*) \geqslant \varphi$. Отсюда и из (1) для любого сечения $R'_1 \in \mathbf{R}^{m \times n}$ выводим

$$g_1(x, x^*, R_1 + R'_1) = \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i'1}x^* + R'_{i1}x - R'_{i'1}x^*) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i'1}x^*) - 2\|R'_1\| \geqslant \varphi - 2\|R'_1\|.$$

Поэтому, полагая $R' \in \Omega(\varphi/2)$, ввиду $\|R'_1\| < \varphi/2$ получаем $g_1(x, x^*, R_1 + R'_1) > 0$. Следовательно, портфель x не является лексикографическим оптимумом задачи $Z^s(R + R')$. Резюмируя, заключаем, что портфель $x \notin L^s(R + R')$ при $x \notin L^s(R)$ и $R' \in \Omega(\varphi/2)$, т. е. $\rho \geqslant \varphi/2$.

Далее докажем неравенство $\rho \leqslant n\varphi$. Согласно определению числа φ существует такой портфель $x^* \notin L^s(R)$, что для любого портфеля $x \in L^s(R)$ справедливо неравенство

$$g_1(x^*, x, R_1) \leqslant \varphi. \tag{2}$$

Теперь, полагая $\varepsilon > n\varphi$, элементы сечения R^0_1 матрицы $R^0 = [r^0_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ зададим по правилу: $r^0_{ij1} = -\delta$, если $i \in N_m$, $x^*_j = 1$, и $r^0_{ij1} = \delta$, если $i \in N_m$, $x^*_j = 0$, где $\varphi < \delta < \varepsilon/n$. Все элементы остальных сечений R^0_k, $k \in N_s \setminus \{1\}$, матрицы R^0 положим равными нулю. Поэтому $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$ и справедливы равенства $\|R^0\| = \|R^0_1\| = \|R^0_{i1}\|_1 = n\delta$, $\; i \in N_m$. Кроме того, все строки R^0_{i1}, $i \in N_m$, сечения

R_1^0 одинаковы. Обозначив такую строку через B (зависит лишь от x^*), имеем

$$B(x^* - x) = -\delta\|x^* - x\|_1 \leqslant -\delta < -\varphi.$$

Отсюда и из (2) выводим, что для любого портфеля $x \in L^s(R)$ справедливо неравенство $g_1(x^*, x, R_1 + R_1^0) < 0$. Поэтому $L^s(R) \cap L^s(R + R^0) = \varnothing$, а значит, для любого числа $\varepsilon > n\varphi$ существует такая матрица $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$, что $L^s(R + R^0) \not\subseteq L^s(R)$, т. е. $\rho \leqslant n\varphi$. ∎

Нетрудно доказать, что полученные оценки достижимы.

Список литературы

[1] *Markowitz H. M.* Portfolio selection: efficient diversification of investments. — New York: Blackwell Publ., 1991.

[2] *Savage L. J.* The foundations of statistics. — Oxford: Dover Publ., 1972.

[3] *Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.* О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 1. — С. 82–89.

Применение оптимизационных алгоритмов для одного класса обратных задач атмосферного электричества

А. А. Жидков, А. В. Калинин, М. И. Сумин

Artem.Zhidkov@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В настоящее время одной из наиболее актуальных задач атмосферного электричества является моделирование глобальной электрической цепи в атмосфере Земли. Глобальная электрическая цепь формируется за счёт некоторых электрических генераторов, которые, как экспериментально установлено, поддерживают относительно постоянную разность потенциалов между поверхностью Землёй и верхними слоями атмосферы [1, 2]. В настоящее время наиболее состоявшейся является концепция о генерации глобальной электрической цепи за счёт грозовых образований (грозовых облаков).

Известно [3, 4], что задача исследования глобальной электрической цепи сводится к решению неклассического уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(x,t) + 4\pi \mathrm{div}\,(\sigma(x,t)\mathrm{grad}\,\varphi(x,t)) = 4\pi \mathrm{div}\,\mathbf{J}^{\text{ст}}(x,t), \qquad (1)$$

где $\varphi(x,t)$ — скалярный потенциал электрического поля, $\sigma(x,t)$ — проводимость атмосферы, $\mathbf{J}^{\text{ст}}(x,t)$ — объёмная плотность «сторонних» электрических токов, протекающих в грозовых образованиях. Предполагается, что пространственная переменная лежит в области $\Omega \subset \mathrm{R}^3$, диффеоморфной шаровому слою с гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — две компоненты связности границы, определяющие поверхность Земли и верхние слои атмосферы соответственно.

При решении прямых задач заданными считаются функции $\sigma(x,t)$ и $\mathbf{J}^{\text{ст}}(x,t)$, а неизвестной — $\varphi(x,t)$.

В настоящей работе уравнение (1) дополняется граничными и начальными условиями

$$\varphi(x,t)|_{x\in\Gamma_1} = C(t), \quad \varphi(x,t)|_{x\in\Gamma_2} = 0, \qquad (2)$$

$$\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n} + 4\pi\sigma(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial n} - 4\pi J_n^{\text{ст}}(x,t)\right)dS = 0, \qquad (3)$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x). \qquad (4)$$

Граничные условия (2) представляют собой равенство нулю тангенциальной компоненты электрического поля и являются естественными с физической точки зрения, если принять во внимание, что проводимость Земли существенно превышает проводимость приземлых слоёв атмосферы, а также, что при удалении от поверхности Земли наблюдается экспоненциальный рост проводимости. В рассматриваемой постановке задачи, функция $C(t)$ также является неизвестной, подлежащей определению в процессе решения.

Условие (3) представляет собой условие сохранения заряда на верхней границе.

Исследованию корректности задачи (1)–(4) посвящены работы авторов [5, 4], в которых также обсуждаются некоторые алгоритмы численного решения и проводятся результаты расчётов.

Достаточно часто возникает необходимость определения различных характеристик «сторонних» электрических токов по результатам измерений электромагнитного поля. Настоящая работа посвящена изучению одного класса обратных задач граничного наблюдения.

Пусть необходимо определить $\mathrm{div}\mathbf{J}^{\text{ст}}$ и $\int_{\Gamma_2} J_n(x,t)dS$ в задаче (1)–(4), если дополнительно известна нормальная составляющая электрического поля на границе Γ_1

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{x\in\Gamma_1} = e_n(x,t). \tag{5}$$

Условие (5) может быть получено, например, в результате эксперимента.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{J}^{\text{ст}} \in \left\{H^1(\Omega\times[0,T])\right\}^3$, $\sigma \in L_\infty(\Omega\times[0,T])$. *Тогда* $\varphi \in L_2(\Omega\times[0,T])$ *и существует линейный ограниченный оператор решения задачи (1)–(4)*

$$A : L_2(\Omega\times[0,T])\times\mathrm{R} \to L_2(\Gamma_1\times[0,T]),$$

$$A\left(\mathrm{div}\,\mathbf{J}^{\text{ст}}, \int_{\Gamma_2} J_n^{\text{ст}} dS\right) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{x\in\Gamma_1}.$$

Данная теорема позволяет свести задачу (1)–(5) к решению следующей абстрактной задачи минимизации:

$$\|z\|^2 \to \min, \quad Az = u, \quad z\in Z, u\in U, \tag{6}$$

где $Z = L_2(\Omega\times[0,T])\times\mathrm{R}$, $U = L_2(\Gamma_1\times[0,T])$.

Однако при решении реальных задач, результаты измерений известны с некоторой погрешностью, поэтому, задача (6) может быть переписана в возмущённой форме

$$\|z\|^2 \to \min, \quad A_h z = u_\delta, \tag{7}$$

$$\|A_h - A\| \leqslant h, \quad \|u_\delta - u\| \leqslant \delta.$$

Для решения задачи (7) используется алгоритм двойственной регуляризации (в основе которого лежит итерационный алгоритм Удзавы) [6, 7]. Показано, что при согласованном уменьшении ошибки задания исходных данных h, δ с параметром регуляризации, решение возмущённой задачи (7) сходится к решению исходной оптимизационной задачи (6).

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках Аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер 2.1.1/3927) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (шифр проекта НК-13П-13).

Список литературы

[1] *Hays P. B., Roble R. G.* A quasi-static model of global atmospheric electricity. 1. The lower atmosphere // J. of Geophysical Research. — 1979. — Vol. 84, No A7. — P. 3291–3305.

[2] *Roble R. G., Hays P. B.* A quasi-static model of global atmospheric electricity. 2. Electrical coupling between the upper and lower atmophere // J. of Geophysical Research — 1979. — Vol 84, No A12. — P. 7247–7256.

[3] *Морозов В. Н.* Распределение электрического поля, создаваемого нестационарным током заряжения грозового облака в атмосфере с неоднородной электрической проводимостью // Прикладная метеорология. — 2006. — № 5 (777). — С. 51–67.

[4] *Жидков А. А., Калинин А. В.* Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского. — 2009. — № 6. — С. 150–158.

[5] *Жидков А. А., Калинин А. В.* Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского. — 2009. — № 4. — С. 123–129.

[6] *Сумин М. И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2004. — Т. 44, — № 11. — С. 2001–2019.

[7] *Сумин М. И.* Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. — 2007. — Т. 47, № 4. — С. 602–625.

О свойствах деревьев вывода для стохастической КС-грамматики, имеющей вид «цепочки»

Л. П. Жильцова, И. М. Мартынов

larzhil@rambler.ru, murbidodrus@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Исследуются свойства деревьев вывода высоты t при $t \to \infty$ для стохастической КС-грамматики с разложимой матрицей A первых моментов специального вида. Рассматривается критический случай, когда перронов корень матрицы A равен 1.

Стохастической КС–грамматикой называется система $G = \langle V_T, V_N, R, s\rangle$, где V_T и V_N — конечные алфавиты терминальных и нетерминальных символов (терминалов и нетерминалов) соответственно, $s \in V_N$ — аксиома, $R = \cup_{i=1}^{k} R_i$, где k — мощность алфавита V_N и R_i — множество правил с одинаковой левой частью A_i. Каждое правило r_{ij} из R_i имеет вид

$$r_{ij} : A_i \overset{p_{ij}}{\to} \beta_{ij},\ j = 1, ..., n_i,$$

где $A_i \in V_N$, $\beta_{ij} \in (V_T \cup V_N)^*$ и p_{ij} – вероятность применения правила r_{ij}, причем $0 < p_{ij} \leqslant 1$ и $\sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1$.

Применение правила грамматики к слову состоит в замене вхождения нетерминала из левой части правила на слово, стоящее в его правой части.

Каждому слову α КС-языка соответствует последовательность правил грамматики (вывод), с помощью которой α выводится из аксиомы s. Выводу слова соответствует дерево вывода [1], вероятность которого определяется как произведение вероятностей правил, образующих вывод.

По стохастической КС-грамматике строится матрица A первых моментов. Для нее элемент a_j^i определяется как $\sum_{l=1}^{n_i} p_{il} s_{il}^j$, где величина s_{il}^j равна числу нетерминальных символов A_j в правой части правила r_{il}. Перронов корень матрицы A обозначим через r.

Введем некоторые обозначения. Будем говорить, что нетерминал A_j непосредственно следует за нетерминалом A_i (и обозначать $A_i \to A_j$), если в грамматике существует правило вида

$A_i \overset{p_{ij}}{\to} \alpha_1 A_j \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in (V_T \cup V_N)^*$. Рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\to$ обозначим $\to_*$.

Классом нетерминалов назовем максимальное по включению подмножество $K \subseteq V_N$ такое, что $A_i \to_* A_j$ для любых $A_i, A_j \in K$. Для различных классов нетерминалов K_1 и K_2 будем говорить, что класс K_2 непосредственно следует за классом K_1 (и обозначать $K_1 \prec K_2$), если существуют $A_1 \in K_1$ и $A_2 \in K_2$, такие, что $A_1 \to A_2$. Рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\prec$ обозначим через $\prec_*$.

Пусть $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$ — множество классов нетерминалов грамматики, $m \geqslant 2$. Будем полагать, что классы нетерминалов перенумерованы таким образом, что $K_i \prec_* K_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$.

Будем говорить, что грамматика имеет вид «цепочки», если ее матрица первых моментов A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{m-1,m-1} & A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{m,m} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Один класс нетерминалов представлен в матрице множеством подряд идущих строк и соответствующим множеством столбцов с теми же номерами. Для класса K_i квадратная подматрица, образованная соответствующими строками и столбцами, обозначается через A_{ii}. Подматрица A_{ij} является нулевой, если $K_i \not\prec K_j$. Блоки, расположенные ниже главной диагонали, нулевые в силу упорядоченности классов.

Для грамматики с матрицей первых моментов вида (1) классы нетерминалов образуют линейный порядок по отношению $\prec$:

$$K_1 \prec K_2 \prec \ldots \prec K_i \prec \ldots \prec K_m. \tag{2}$$

Для каждого класса K_i матрица A_{ii} неразложима. Без ограничения общности будем считать, что она строго положительна и непериодична. Обозначим через r_i перронов корень матрицы A_{ii}. Для неразложимой матрицы перронов корень является вещественным и простым [2]. Очевидно, $r = \max\limits_i \{r_i\}$.

Пусть $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$ — множество всех номеров i_j классов, для которых $r_{i_j} = 1$. Рассмотрим подцепочку классов

$$K_j \prec K_{j+1} \prec \ldots \prec K_m. \tag{3}$$

Число классов с номерами из J в такой цепочке обозначим через q_j.

Через $P_j(t)$ обозначим вероятность множества деревьев вывода высоты t, корень которых помечен нетерминалом A_j.

Теорема 1. *При $t \to \infty$*

$$P_j(t) \sim U^{(j)} \cdot \frac{c_j}{t^{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{q_j-1}}},$$

где c_j — некоторая положительная константа.

При $r_j = 1$ вектор $U^{(j)}$ является правым собственным вектором для матрицы A_{jj}, соответствующим r_j.

Обозначим через $M_{ij}(t)$ математическое ожидание числа применений правила r_{ij} грамматики в дереве вывода высоты t, корень которого помечен аксиомой грамматики $s = A_1$.

Теорема 2. *Пусть матрица первых моментов грамматики G имеет вид (1), и r_{ij} — правило грамматики, для которого $A_i \in K_l$. Тогда при $t \to \infty$*

$$M_{ij}(t) \sim d_i \cdot p_{ij} \cdot t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{q_l^*-1}},$$

где $q_l^* = q_l - 1$ при $l \in J$ и $q_l^* = q_l$ при $l \notin J$; $d_i > 0$ – некоторая константа, и p_{ij} — вероятность правила r_{ij}.

Таким образом, величина $M_{ij}(t)$ определяется удаленностью класса K_l, которому принадлежит нетерминал A_i из левой части правила r_{ij}, от конца цепочки (2). Математическое ожидание $M_{ij}(t)$ тем больше, чем меньше число классов с номерами из множества J, следующих за классом K_l в (3). Следовательно, чем дальше удален класс от начала цепочки (2), тем чаще применяются соответствующие ему правила грамматики. Для последнего класса в (2) с номером из J и всех последующих классов величины $M_{ij}(t)$ соответствующих правил грамматики имеют порядок $O\left(t^2\right)$, как в случае неразложимой грамматики [3] и грамматики с двумя классами нетерминалов [4].

Список литературы

[1] *Ахо А. О., Ульман Дж.* Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1. — М.: Мир, 1978.

[2] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.

[3] *Жильцова Л. П.* Закономерности в деревьях вывода слов стохастического контекстно–свободного языка и нижняя оценка стоимости кодирования. Критический случай // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 2003. — Т. 10, № 3. — С. 23–53.

[4] *Борисов А. Е.* О свойствах слов языка, порожденного разложимой стохастической КС-грамматикой с двумя нетерминалами. Критический случай // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». — М.: Изд. мех-мат. ф-та МГУ, 2004. — С. 408–410.

О некоторых алгоритмах минимизации, основанных на отсечении множеств

И. Я. Заботин, О. Н. Шульгина

IYaZabotin@mail.ru, ONSHUL@mail.ru

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Предлагается общая процедура решения задачи математического программирования, относящаяся к методам погружений–отсечений. Обсуждаются реализации процедуры и возможность ее использования, например, при решении вспомогательных задач в некоторых методах условной минимизации. Процедура опирается на идею последовательного погружения допустимого множества исходной задачи в некоторые выпуклые множества более простой структуры. Эта идея использована ранее в методе опорных множеств [1] и ряде других методов отсечений (например, [2, 3, 4, 5]). Предлагаемая процедура отличается от упомянутых методов, в частности, более широкими возможностями ее применения и способами построения на каждом шаге погружающих множеств.

Решается задача

$$\min \{g(x) \mid x \in G\}, \tag{1}$$

где $G = G^{'}\bigcap G^{''}$, $G^{'} = \bigcap\limits_{j\in J} G_j$, множества G_j, $j \in J = \{1,\ldots,m\}$, и $G^{''}$ из n-мерного евклидова пространства R_n выпуклы и замкнуты, внутренность $int\ G_j$ множества G_j для каждого $j \in J$ непуста, а $g(x)$ — непрерывная достигающая на G своего минимального значения функция. Сразу подчеркнем, что внутренность множества G может быть пустой, причем как за счет пустоты $int\ G^{''}$, так и за счет пустоты $int\ G^{'}$.

Пусть $g^* = \min\{g(x) \mid x \in G\}$, $Y^* = \{y \in G : g(x) = g^*\}$, $W(x, G_j) = \{a \in R_n : \langle a, z - x\rangle \leqslant 0\ \forall z \in G_j\}$ – конус обобщенно-опорных векторов для множества G_j в точке $x \in R_n$, $W^1(x, G_j) = \{a \in R_n : a \in W(x, G_j),\ \|a\| = 1\}$, $E(g, \gamma) = \{x \in R_n : g(x) \leqslant \gamma\}$, $\gamma \in R_1$, $I = \{0, 1, \ldots\}$.

Предлагаемая поцедура $\pi = \pi(g(x), G)$ решения задачи (1) вырабатывает последовательность приближений y_i, $i \in I$, и заключается в следующем. Строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset R_n$, содержащее хотя бы одну точку множества Y^*. Выбираются точки $y^j \in int\ G_j$ для всех $j \in J$, задается число $q \in [1, +\infty)$, находится точка $y_0 \in M_0 \bigcap G^{''} \bigcap E(g, g^*)$, полагается $i = 0$.

1. Формируется множество $J_i = \{j \in J\ :\ y_i \notin G_j\}$. Если
$$J_i = \varnothing, \tag{2}$$
то процесс заканчивается.
2. Для каждого $j \in J_i$ в интервале (y^j, y_i) выбирается точка $z_i^j \notin int\ G_j$ так, чтобы существовала точка $\overline{y}_i^j \in G_j$, удовлетворяющая неравенству
$$\|y_i - \overline{y}_i^j\| \leqslant q\|y_i - z_i^j\|. \tag{3}$$
Для всех $j \in J \setminus J_i$ полагается $z_i^j = \overline{y}_i^j = y_i$.
3. Отыскивается номер $j_i \in J_i$, удовлетворяющий условию
$$\left\|y_i - z_i^{j_i}\right\| = \max_{j\in J_i}\left\|y_i - z_i^j\right\|. \tag{4}$$
4. Выбирается конечное множество $A_i^{j_i} \subset W^1(z_i^{j_i}, G_j)$ и полагается
$$M_{i+1} = M_i \bigcap \{x \in R_n\ :\ \langle a, x - z_i^{j_i}\rangle\ \leqslant 0\ \forall a \in A_i^{j_i}\}. \tag{5}$$

5. Отыскивается очередное приближение

$$y_{i+1} \in M_{i+1} \bigcap G^{''} \bigcap E(g, g^*), \tag{6}$$

и следует переход к п. 1 при i, увеличенном на единицу.

Если при некотором $i \in I$ выполняется (2), то $y_i \in Y^*$ и процесс завершается.

Если $G'' = R_n$, $G_1 = \ldots = G_m = G' = G$, $int\ G \neq \varnothing$, функция $g(x)$ выпукла, $y^1 = \ldots = y^m = y$, и $y \in int\ G$, то процедура π близка к методу [1] для задачи выпуклого программирования.

В процедуре π можно положить $M_0 = \bigcap\limits_{j \in J'} G_j$, где $J' \subset J$, в частности, $M_0 = G_l$, где $l \in J$. Такой способ выбора множества M_0 удобен, например, когда $\bigcap\limits_{j \in J'} G_j$ – выпуклый многогранник , а множество $G^{''}$ задано системой линейных равенств или неравенств. В этом случае нет необходимости в задании точек y^j, $j \in J'$. Кроме того, отметим, что при достижении функцией $g(x)$ в R_n своего минимального значения можно положить $M_0 = R_n$, $\ y_0 = \arg\min\{g(x) \mid x \in R_n\}$.

Сделаем также замечание, касающееся выбора точек z_i^j. В методе [1] для построения отсекающей гиперплоскости выбирается точка z_i пересечения отрезка $[y, y_i]$ с границей множества G. В предложенной процедуре не нужно отыскивать точку пересечения отрезка $[y^j, y_i]$, $j \in J_i$, с границей множества G_j. Для проверки условия (3) не требуется находить и точку $\overline{y}_i^j$. Например, если $y_i + q(z_i^j - y_i) \in G_j$ или если $y_i + q(z_i^j - y_i) \notin G_j$, но $\|y_i - y^j\| < q\|y_i - z_i^j\|$, то условие (3) для z_i^j выполняется.

Если точки y_i, $i \in I$, выбирать из условия

$$g(y_i) = \min\left\{g(x) \mid x \in M_i \bigcap G^{''}\right\}, \tag{7}$$

то требуемое в процедуре включение

$$y_i \in M_i \bigcap G^{''} \bigcap E(g, g^*) \tag{8}$$

выполняется при всех $i \in I$. Условие (8) позволяет, во-первых, решать задачу минимизации $g(x)$ на множестве $M_i \bigcap G^{''}$ приближенно и, во-вторых, дает возможность строить различные реализации процедуры. Отметим, что авторами предложены и обоснованы некоторые из таких реализаций.

Для обоснования сходимости процедуры с использованием условий (5), (6) и (3), (4), соответственно, доказаны

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\{y_i\},\ i \in I$, *построена процедурой* π *и* $\{y_i\},\ i \in I^{'} \subset I$, *– ее сходящаяся подпоследовательность. Пусть номер* $l \in J$ *таков, что множество* $I_l = \left\{ i \in I^{'}\ :\ l = j_i \right\}$ *состоит из бесконечного числа элементов. Тогда справедливо равенство* $\lim\limits_{i \in I_l} \|z_i^l - y_i\| = 0$.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{y_i\},\ i \in I$, *построенная процедурой* π, *ограничена. Тогда любая предельная точка этой последовательности принадлежит множеству* G.

На основе этих лемм и теоремы [6, с. 74] доказана

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{y_i\},\ i \in I$, *построена процедурой* π *и является ограниченной. Тогда любая ее предельная точка принадлежит множеству* Y^*, *а если при этом для всех* $i \in I$ *выполняется* (7), *то вся последовательность* $\{y_i\},\ i \in I$, *сходится к множеству* Y^*.

Далее, процедуру π можно использовать для минимизации функции $g(x)$ на множестве G с заданной точностью. Пусть в (1) $G^{''} = R_n$, множество J состоит только из одного индекса, например j, и при построении последовательности приближений на всех итерациях отыскиваются точки $\overline{y}_i^j \in G_j$. Поскольку $g(y_i) \leqslant g^* \leqslant g(\overline{y}_i^j),\ i \in I$, то из первой леммы и неравенства (3) легко следует существование номера $i = i_0$, для которого выполнится соотношение $g(\overline{y}_{i_o}^j) - g(y_{i_o}) \leqslant \varepsilon$, а значит, и неравенство $g(\overline{y}_{i_o}^j) \leqslant g^* + \varepsilon$ при некотором заданном $\varepsilon > 0$. Показано, что при высказанных условиях той же процедурой можно решать задачи минимизации с фиксированной точностью и в других постановках.

Последнее замечание позволяет применять процедуру $\pi(g(x), G)$ для приближенного решения вспомогательных задач вида (1) построения направлений итерационного перехода в некоторых методах условной минимизации. Приводятся примеры такого использования процедуры $\pi(g(x), G)$ в методах выпуклого и псевдовыпуклого программирования с линейными и выпуклыми квадратичными вспомогательными функциями $g(x)$.

Список литературы

[1] *Булатов В. П.* Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1977.

[2] *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование. — М.: Сов. радио, 1973.

[3] *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1966. — Т. 6, № 5. — С. 787–823.

[4] *Немировский А. С., Юдин Д. Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. — М.: Наука, 1979.

[5] *Заботин И. Я.* Одна общая схема решения задачи математического программирования и ее использование в алгоритмах минимизации псевдовыпуклых функций // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Шестого Всероссийского семинара. — Казань: Казанский государственный университет, 2005. — С. 83–86.

[6] *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988.

Оценка числа графов в наследственных классах с запрещенными графами маленького порядка

В. А. Замараев

viktor.zamaraev@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Введение

Рассматриваются обыкновенные, помеченные графы с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$. Множество графов X называется *наследственным классом графов*, если любой граф, изоморфный порожденному подграфу графа из X, также принадлежит X. Известно [1], что для любого бесконечного наследственного класса графов X, отличного от класса всех графов, справедливо следующее соотношение:

$$\log_2 |X_n| = \left(1 - \frac{1}{c(X)}\right)\frac{n^2}{2} + o(n^2), \tag{1}$$

где $c(X)$ — натуральное число, называемое индексом класса X, а X_n — множество всех n-вершинных графов из класса X. Множество классов, соответствующих определенному индексу, называется *слоем*. Так, множество классов с индексом, равным 1, образует *унитарный* слой. Для классов из унитарного слоя соотношение (1) не дает асимптотической оценки величины $\log_2 |X_n|$, знание которой важно, например, при экономном кодировании графов из класса X [2]. Для исследования поведения величины $\log_2 |X_n|$ для классов X из унитарного слоя используется понятие равновеликости. Два класса графов X и Y называются *равновеликими*, если существуют положительные числа c_1, c_2 и n_0, такие, что $|Y_n|^{c_1} \leqslant |X_n| \leqslant |Y_n|^{c_2}$ для любого $n > n_0$. Очевидно, что равновеликость является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности на множестве наследственных классов графов называются *ярусами*. Унитарный слой состоит из бесконечного числа ярусов.

В [3] были выделены первые четыре яруса унитарного слоя, для которых $\log_2 |X_n|$ по порядку совпадает с 1, $\log n$, n, $n \log n$. Эти ярусы называются константным, полиномиальным, экспоненциальным и факториальным, соответственно. В каждом из четырех этих ярусов найдены все минимальные элементы [4]. Кроме того, для первых трёх ярусов в [4] дана полная структурная характеризация. Факториальный ярус является наименьшим, для которого такой характеризации неизвестно. В то же время этому ярусу принадлежат многие известные классы: рёберные графы, интервальные графы, леса, планарные графы, кографы и др.

Данная работа является логическим продолжением исследования факториального яруса, начатого в работах [5, 6].

Основные результаты

Хорошо известно, что любой наследственный класс графов X можно определить с помощью множества M запрещённых порожденных подграфов, при этом принято писать, что $X = Free(M)$. В [5, 6] исследование факториального яруса начато с изучения конечноопределённых классов, то есть таких, у которых множество запрещённых подграфов конечно. До сих пор класс $Free(\{K_{1,3}, C_4\})$ был единственным классом, определяемым двумя запрещенными подграфами с четырьмя вершинами, для которого вопрос о принадлежности факториальному ярусу был открыт. В данной работе дается ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Класс* $Free(\{K_{1,3}, C_4\})$ *является факториальным.*

Этот результат в совокупности с результатами работ [5, 6] позволяет выделить все факториальные классы, у которых множество запрещённых подграфов состоит из графов с не более чем четырьмя вершинами. Обозначим через $\mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}}, \mathcal{S}$ класс двудольных, кодвудольных и расщепляемых графов соответственно.

Теорема 2. *Пусть* M *— множество графов с числом вершин не более четырёх и* $Free(M)$ *— не менее чем факториальный класс.* $Free(M)$ *факториальный тогда и только тогда, когда ни одно из следующих множеств не пусто:* $M \cap \mathcal{B}$, $M \cap \overline{\mathcal{B}}$, $M \cap \mathcal{S}$, $M \cap Free(\{C_4, K_3\})$, $M \cap Free(\{\overline{C_4}, \overline{K_3}\})$.

Список литературы

[1] *Алексеев В. Е.* Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, № 2. — С. 148–157.

[2] *Алексеев В. Е.* Наследственные классы и кодирование графов // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 151–164.

[3] *Scheinerman E. R., Zito J.* On the size of hereditary classes of graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1994. — V. 61. — P. 16–39.

[4] *Алексеев В. Е.* О нижних ярусах решётки наследственных классов графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Серия 1. — 1997. — Т. 4. — С. 3–12.

[5] *Замараев В. А.* Оценка числа графов в некоторых наследственных классах // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 1–6 февраля 2010). — С. 301–303.

[6] *Алексеев В. Е., Замараев В. А., Лозин В. В., Мэйхил К.* Некоторые факториальные классы графов, определяемые двумя запрещёнными графами // Тезисы докладов XV Нижегородской сессии молодых ученых — математические науки (Красный плес, 25–28 мая 2010). — С. 16–17.

О верхней оценке мощности минимального разрешающего множества пороговой функции

Н. Ю. Золотых, А. Ю. Чирков

nikolai.zolotykh@gmail.com, chir7@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $f : E_k^n \to \{0, 1\}$, $k \geqslant 2$. Обозначим

$$M_\nu(f) = \{x \in E_k^n : \ f(x) = \nu\} \qquad (\nu = 0, 1).$$

Функция f называется *пороговой*, если существуют числа $a_0, \ldots, a_n$, такие, что

$$M_0(f) = \left\{ x \in E_k^n : \ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a_0 \right\}. \tag{1}$$

Множество всех пороговых функций, заданных на E_k^n, обозначим $\Pi(n, k)$.

Разрешающим множеством функции $f \in \Pi(n, k)$ называется такое $T \subseteq E_k^n$, что для произвольной функции $g \in \Pi(n, k) \setminus \{f\}$ найдется $z \in T$, такое, что $f(z) \neq g(z)$. Разрешающее множество функции f называется *минимальным*, или *тупиковым*, если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для функции f. Известно, что для любой пороговой функции f минимальное разрешающее множество единственно. Минимальное разрешающее множество функции f обозначим $T(f)$. *Длиной обучения* называется величина

$$t(n, k) = \max_{f \in \Pi(n,k)} |T(f)|.$$

Длина обучения $t(n, k)$ зависит от n экспоненциально, в частности, $t(n, 2) = 2^n$, поэтому представляет интерес поиск оценок для $t(n, k)$, когда n фиксировано. Известно, что

$$c'_n \log^{n-2} k \leqslant t(n, k) \leqslant c''_n \log^{n-1} k, \tag{2}$$

где c'_n, c''_n — некоторые положительные величины, зависящие только от n. Верхняя оценка в (2) получена в [1] на основе [2, 3]; нижняя оценка установлена в [4, 5]; см. также [6], где приводятся явные выражения для c'_n, c''_n. В [7] доказано, что $t(2, k) = 4$, а в [8] установлено, что $\sigma(3,k)=\Theta(\log k)$. Средняя мощность минимального разрешающего множества изучается в [9, 10].

Авторы предполагают, что $t(n,k)$ при фиксированном n ограничена сверху полиномом от $\log k$ степени $n-2$. В настоящей работе выделяется подкласс $\Pi'(n,k)\subset\Pi(n,k)$, такой, что для каждой $f\in\Pi'(n,k)$ выполнено неравенство $|T(f)|\leqslant c_n\log^{n-2}k$, где c_n — некоторая величина, зависящая только от n.

Введем обозначения: $K(f)=\operatorname{cone}\bigl(M_1(f)-M_0(f)\bigr)$, $F_0(f)=\operatorname{conv}\bigl(M_0(f)\bigr)-K(f)$, $F_1(f)=\operatorname{conv}\bigl(M_0(f)\bigr)+K(f)$.

Лемма 1. *Для любой $f\in\Pi(n,k)$ и любых $x,y\in T_i(f)$ $(i=0,1)$ справедливо $2x-y\notin F_0(f)\cup F_1(f)$.*

К сожалению, на данный момент удобного описания множества $F_0(f)\cup F_1(f)$ в общем случае не имеется. Рассмотрим множество $\Pi'(n,k)$ таких пороговых функций f, для каждой из которых найдутся числа $a_0,\dots,a_n$, удовлетворяющие (1), такие, что $a_j(k-1)<a_0$ $(j=1,2,\dots,n)$. Для $f\in\Pi'(n,k)$ множество $F_0(f)\cup F_1(f)$ содержит множество $\mathbb{Z}_+^n$ всех точек с неотрицательными целочисленными компонентами. Говорят, что множество $G\subset\mathbb{Z}_+^n$ обладает *свойством разделенности*, если из $x,y\in G$ следует $2x-y\in\mathbb{Z}_+^n$ [11]. По лемме 1, если $f\in\Pi'(n,k)$, то каждое из множеств $T_0(f)$ и $T_1(f)$ обладает свойством разделенности, и для оценок их мощностей воспользуемся подходом [11, 12].

Лемма 2. *Пусть $f\in\Pi'(n,k)$. Для любого $x\in T_0(f)$ существует j, такое, что*

$$\frac{a_0}{na_j}-\frac{1}{d}\leqslant x_j\leqslant\frac{a_0}{a_j}.$$

Для любого $x\in T_1(f)$ существует j, такое, что

$$\frac{a_0}{na_j}\leqslant x_j\leqslant\frac{a_0}{a_j}+1.$$

Известно [11, 12], что если компоненты точек множества G, обладающего свойством разделенности, удовлетворяют неравенствам $\alpha_j\leqslant x_j\leqslant\beta_j$ $(j=1,\dots,n-1)$, то $|G|\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n-1}\left(1+\log_2\dfrac{\alpha_i+1}{\beta_i+1}\right)$. Отсюда и из лемм 1, 2 получаем следующий результат.

Теорема. *Для любой $f\in\Pi'(n,k)$*

$$|T(f)|\leqslant 2n(2+\log_2 n)(1+\log_2 k)^{n-2}.$$

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 09-01-00545-а.

Список литературы

[1] *Hegedüs T.* Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc. 7th Ann. ACM Conf. Comput. Learning Theory. — NY: ACM Press, 1994. — P. 228–236.

[2] *Шевченко В. Н.* О некоторых функциях многозначной логики, связанных с целочисленным программированием // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. Вып. 42. — Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1985. — С. 99–108.

[3] *Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C.* On integer points in polyhedra // Combinatorica. — 1992. — V. 12, No 1. — P. 27–37.

[4] *Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н.* О нижней оценке расшифровки пороговых функций k-значной логики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 2. — С. 346–352.

[5] *Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю.* О сложности расшифровки пороговых функций k-значной логики // Доклады Академии наук. — 1998. — Т. 362, № 5. — С. 606–608.

[6] *Золотых Н. Ю.* Оценки мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. — М.: Физматлит, 2008. — С. 159–168.

[7] *Золотых Н. Ю.* О сложности расшифровки пороговых функций, зависящих от двух переменных // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». Часть I. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ, 2001. — С. 74–79.

[8] *Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю.* О мощности разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Материалы XIV Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — Н. Новгород: Издательство Нижегородского государственного педагогического университета, 2003. — С. 20–21.

[9] *Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю.* Верхняя оценка средней мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Нижний Новгород.: изд-во ННГУ, 2003. — С. 238–246.

[10] *Antony M., Brightwell G., Shawe-Taylor J.* On exact specification by labelled examples // Discrete Applied Mathematics. — 1995. — V. 61, № 1. — С. 1–25.

[11] *Шевченко В. Н.* О числе крайних точек в целочисленном программировании // Кибернетика. — 1981. — № 2. — С. 133–134.

[12] *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995.

Кибернетический подход к построению и анализу математической модели тандема двух перекрестков

А. В. Зорин

zoav1@uic.nnov.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Тандем из двух перекрестков как управляющая система обслуживания

В систему поступают независимые стационарные неординарные потоки без последействия Π_1, Π_2 первичных требований. Интенсивность групп по потоку Π_j, $j = 1, 2$, равна λ_j. Группа из потока Π_j содержит $x = 1, 2, \ldots$ требований с вероятностью $p_x^{(j)}$. Требования потока Π_j помещаются в накопитель O_j неограниченного объема. Обслуженные требования первого потока поступают в промежуточную очередь O_3. Со случайной задержкой требования из O_3 поступают в очередь O_2 и формируют входной поток Π_3 вторичных требований. Обслуживающее устройство (ОУ) имеет $n < \infty$ состояний $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, $\ldots$, $\Gamma^{(n)}$. В состоянии $\Gamma^{(r)}$, $r = 1, 2, \ldots, n$, ОУ проводит неслучайное время T_r и функционирует в одном из четырех режимов: 1) требования не обслуживаются, 2) обслуживаются только требования из очереди O_1, 3) обслуживаются только требования из очереди O_2, 4) обслуживаются требования из очередей O_1 и O_2. Смена состояний ОУ происходит по циклическому алгоритму: после состояния $\Gamma^{(r)}$ осуществляется мгновенный переход в состояние $\Gamma^{(r \oplus 1)}$, где $r \oplus 1 = r + 1$ при $r < n$ и $n \oplus 1 = 1$. Процесс обслуживания удобно характеризовать потоками насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$

— выходными потоками системы обслуживания при максимально возможной загруженности ее накопителей и эксплуатации. Если в состоянии $\Gamma^{(r)}$ обслуживаются требования очереди O_j, то поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ содержит $\ell_{r,j}$ требований за время T_r. Пусть $\tau_0 = 0$ и τ_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — последовательные моменты смены состояния обслуживающего устройства. Требования из очереди O_1, обслуженные на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, находятся в очереди O_3 вплоть до момента τ_{i+1}. Каждое требование, находившееся в очереди O_3 в момент τ_i, независимо от других в промежутке времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ либо перемещается в очередь O_2 с вероятностью p_r, зависящей от состояния $\Gamma^{(r)}$ обслуживающего устройства на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, либо остается в очереди O_3 с вероятностью $1 - p_r$. Таким образом, каждое требование с вероятностью единица за конечное (но случайное) время перемещается из очереди O_3 в очередь O_2.

В соответствии с кибернетическим подходом [1, 2] выберем последовательность $\{\tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ в качестве дискретной временной шкалы функционирования управляющей системы. Определим схему, информацию, координаты и функцию этой управляющей кибернетической системы. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда, формирующая входные потоки; 2) входные потоки Π_1, Π_2, Π_3 требований — первый тип входных полюсов; 3) потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$ — второй тип входных полюсов; 4) накопители O_1, O_2, O_3 — внешняя память; 5) устройства организации дисциплины очереди в накопителях — устройства переработки информации во внешней памяти; 6) обслуживающее устройство — внутренняя память; 7) граф смены состояний обслуживающего устройства — устройство переработки информации внутренней памяти; 8) выходные потоки $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$ — выходные полюсы. Набор состояний среды, очередей в накопителях, обслуживающего устройства, потоков насыщения и потоков обслуженных требований полностью определяет информацию управляющей системы. Номера состояний случайной среды, входных потоков, накопителей, механизмов формирования очереди и номер состояния обслуживающего устройства задают расположение блоков на схеме. Функция этой системы — обслуживание потоков по циклическому алгоритму. В следующем разделе будет произведено нелокальное описание поблочного строения управляющей системы и совместно рассмотрено поблочное строение управляющей системы и ее функционирование во времени.

Марковская случайная последовательность и ее предельные свойства

Все случайные величины и элементы рассматриваются на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Пусть Γ_i — состояние обслуживающего устройства в момент τ_i (и на промежутке $(\tau_{i-1}, \tau_i]$), $\varkappa_{s,i}$ — число требований в очереди O_s, $s = 1, 2, 3$, в момент τ_i, $\eta_{s,i}$ — число требований потока Π_s, поступивших на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\bar{\xi}_{j,i}$ — число требований по потоку $\Pi_j^{\text{вых}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\xi_{j,i}$ — число требований по потоку $\Pi_j^{\text{нас}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$. Имеют место рекуррентные соотношения $\varkappa_{1,i+1} = \max\{0, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}$, $\varkappa_{2,i+1} = \max\{0, \varkappa_{2,i} + \eta_{2,i} + \eta_{3,i} - \xi_{2,i}\}$, $\varkappa_{3,i+1} = \varkappa_{3,i} + \bar{\xi}_{1,i} - \eta_{3,i}$, $\bar{\xi}_{1,i+1} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}$. Для нелокального описания входных потоков и потоков насыщения зададим свойства условных распределений дискретной компоненты $\{(\eta_{1,i}, \eta_{2,i}); i = 0, 1, \ldots\}$ маркированного точечного процесса $\{(\tau_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \nu_i); i = 0, 1, \ldots\}$ с меткой $\nu_i = \Gamma_i$ первичных требований, прибывающих за время $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, дискретной компоненты $\{(\xi_{1,i}, \xi_{2,i}); i = 0, 1, \ldots\}$ маркированного точечного процесса $\{(\tau_i, \xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \nu_i); i = 0, 1, \ldots\}$ и дискретной компоненты $\{\eta_{3,i}; i = 0, 1, \ldots\}$ маркированного точечного процесса $\{(\tau_i, \eta_{3,i}, \bar{\nu}_i); i = 0, 1, \ldots\}$ с меткой $\bar{\nu}_i = (\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$. Для $x \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant x$, $0 < \alpha < 1$ обозначим $\psi(k; x, \alpha) = C_x^k \alpha^k (1-\alpha)^{x-k}$, пусть $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}$ где Γ^{I} — множество состояний ОУ режима 1, Γ^{II} — множество состояний ОУ режима 2, Γ^{III} — множество состояний ОУ режима 3, Γ^{IV} — множество состояний ОУ режима 4. Введем функции $\varphi_j(x, T)$, $T > 0$, $x = 0, 1, \ldots$, через разложения в ряды $\sum\limits_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x, T) = \exp\left\{\lambda_j T \left(\sum\limits_{x=1}^{\infty} z^x p_x^{(j)} - 1\right)\right\}$, $|z| < 1$. Тогда

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{j,i} = b\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = \varphi(b; j, T_{r\oplus 1}) \qquad \text{при } b = 0, 1, \ldots,$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{1,i} = 0\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = 1 \qquad \text{при } \Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}},$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{1,i} = \ell_{r\oplus 1,1}\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = 1 \qquad \text{при } \Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}},$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{2,i} = 0\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = 1 \qquad \text{при } \Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}},$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{2,i} = \ell_{r\oplus 1,2}\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}\}) = 1 \qquad \text{при } \Gamma^{(r\oplus 1)} \in \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}},$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{3,i} = b\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \varkappa_{3,i} = x\}) = \psi(b; x, p_{r\oplus 1}) \text{ при } 0 \leqslant b \leqslant x.$$

Для произвольных неотрицательных целых i, x_1, x_2, x_3, b_1, b_2, b_3, y_1, y_2 и $r = 1, 2, \ldots, n$ обозначим $A_i(r, x_1, x_2, x_3) = \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{2,i} = x_2, \varkappa_{3,i} = x_3\}$, $B_i(b_1, b_2, b_3, y_1, y_2) = \{\omega\colon \eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \}$. Тогда для произвольных неотрицательных целых $x_{1,\bar{\iota}}$, $x_{2,\bar{\iota}}$, $x_{3,\bar{\iota}}$ и $\Gamma^{(r_{\bar{\iota}})} \in \Gamma$, $0 \leqslant \bar{\iota} \leqslant i$, имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left(B_i(b_1, b_2, b_3, y_1, y_2) \middle| \bigcap_{\bar{\iota}=0}^{i} A_{\bar{\iota}}(r_{\bar{\iota}}, x_{1,\bar{\iota}}, x_{2,\bar{\iota}}, x_{3,\bar{\iota}})\right) =$$
$$= \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{1,i} = b_1\}|\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{2,i} = b_2\}|\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_{3,i} = b_3\}|\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_i\})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{1,i} = y_1\}|\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{2,i} = y_2\}|\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}\}).$$

Пусть $X = \{(w_1, w_2, w_3)\colon w_s = 0, 1, \ldots, s = 1, 2, 3\}$. Соотношения для величин очередей, циклический алгоритм смены состояния ОУ и свойства условных распределений позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *При заданном распределении вектора* $(\Gamma_0, \varkappa_{1,0}, \varkappa_{2,0}, \varkappa_{3,0})$ *последовательность*

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i});\ i = 0, 1, \ldots\} \tag{1}$$

является марковской цепью. Множество состояний марковской цепи (1) *есть объединение незамкнутого подмножества* $\{(\Gamma^{(r)}, w)\colon \Gamma^{(r)} \in \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}, w \in X, w_1 > 0, w_3 < \ell_{r,1}\}$ *несущественных состояний и замкнутого подмножества* $\{(\gamma, w)\colon \gamma \in \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}, w \in X\} \cup \{(\gamma, w)\colon \gamma \in \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}, w \in X, w_1 = 0\} \cup \{(\Gamma^{(r)}, w)\colon \Gamma^{(r)} \in \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}, w \in X, w_1 > 0, w_3 \geqslant \ell_{r,1}\}$ *существенных периодических состояний с периодом* n.

Обозначим $\ell_1 = \sum\limits_{r\colon \Gamma^{(r)} \in \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}} \ell_{r,1}$, $\ell_2 = \sum\limits_{r\colon \Gamma^{(r)} \in \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}} \ell_{r,2}$, $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, $\bar{\lambda}_j = \lambda_j \sum\limits_{x=1}^{\infty} x p_x^{(j)}$. В следующей теореме приводятся условия на входные потоки, потоки насыщения и длительности состояний ОУ, при которых среднее число требований в системе обслуживания остается ограниченным.

Теорема 2. *Для существования стационарного распределения цепи* (1) *необходимо и достаточно выполнение неравенств* $\bar{\lambda}_1 T - \ell_1 < 0$, $(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)T - \ell_2 < 0$.

Работа выполнена в рамках госбюджетной НИР ННГУ по теме № 0120.0602598 «Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций».

Список литературы

[1] *Ляпунов А. А., Яблонский С. В.* Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. — М.: Физматгиз, 1963. Вып. 9. — С. 5–22.

[2] *Федоткин М. А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1998. — С. 333–344.

Функциональные построения в теории графов

М. А. Иорданский

Нижегородский государственный педагогический университет

Рассматривается система $(\Im, C)$, в которой $\Im$ — носитель системы — есть множество графов, а C — суперпозиция операций над графами, описывающая процессы построения одних графов из других. Изучаются задачи, которые в «традиционных» функциональных системах принято относить к проблематике выразимости и полноты. Функциональные построения в теории графов представляют интерес как с теоретической точки зрения в плане сопоставительного анализа соответствующих результатов с традиционными функциональными системами [1, 2], так и в практическом отношении, позволяя эффективно решать задачи «сжатия» информации [3] и оптимального размещения графов [4].

Операции над графами

Рассматриваемые графы могут содержать петли и кратные ребра. Используются следующие обозначения: K_n — полный n-вершинный граф; K_0 — граф, не содержащий вершин (нуль-граф); L_n — цепь, содержащая n вершин; C_n — цикл, содержащий n вершин; $\overline{G}$ — дополнение графа G до полного.

Операции над графами из $\Im$ задаются отображениями $\Im \times \Im \to \Im$, в которых результирующий граф отображения G допускает представление в виде объединения с пересечением подграфов, изоморфных исходным графам G_1 и G_2. Эти отображения интерпретируются как *операции склейки* графов-операндов G_1 и G_2 по отождествляемым подграфам $G_1' \subseteq G_1$ и $G_2' \subseteq G_2$, изоморфным *подграфу склейки* $\widetilde{G} \subseteq G$.

Граф G называется *суперпозицией* графов из $\Im$, если $G \in \Im$ или G можно получить из графов множества $\Im$ путем последовательного применения операций склейки. Каждому такому процессу соответствует *операция суперпозиции* графов из $\Im$. Множество всех графов, полученных из $\Im$ с помощью операций суперпозиции, обозначается через $[\Im]$. Если $[\Im] = \Im$, то класс $\Im$ называется *замкнутым*.

Множество графов $\Im' \subset \Im$ образует *полную систему* графов в $\Im$, если $[\Im'] = \Im$. Минимальная по включению полная система графов B_e называется *элементным базисом* замкнутого класса. Если граф $G \in \Im$ строится из графов элементного базиса с помощью последовательности операций, в каждой из которых текущий (исходный) граф склеивается с графом, изоморфным графу из B_e (строится «по кирпичику»), то соответствующая операция суперпозиции называется *канонической*. Операции склейки с изоморфными подграфами склейки $\widetilde{G}$ относятся к одному *типу*. Минимальное по включению множество операций склейки различных типов, достаточное для построения из B_e всех графов замкнутого класса, называется *операционным базисом* B_o класса. Операционный базис B_o задается множеством графов, изоморфных подграфам склейки. Элементный и операционный базисы называются *порождающими базисами* замкнутого класса графов. Порождающие базисы задают *конструктивное описание* замкнутого класса графов.

Структура замкнутых классов графов

В работе [1] были доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Мощность множества всех замкнутых классов графов континуальна.*

Теорема 2. *Каждый замкнутый класс графов имеет единственный элементный базис B_e.*

Теорема 3. *Замкнутый класс всех графов имеет элементный базис $B_e = \{K_1, C_1, K_2\}$ и операционный базис $B_o = \{K_0, K_1, \overline{K}_2\}$.*

Для операционного базиса в [5] был установлен следующий факт.

Теорема 4. *Каждый замкнутый класс графов имеет хотя бы один операционный базис B_o.*

В решетке замкнутых классов графов все предполные классы являются *тривиальными* — не содержащими лишь по одному графу из своего надкласса [6]. С учетом этого для замкнутых классов графов становится содержательным понятие *базисной предполноты* по B_e или B_o . Класс $\Im_1$ является базисно предполным в $\Im_2$, если элементный или операционный базис класса $\Im_1$ не содержит одного из графов одноименного базиса класса $\Im_2$. Используя теорему 3, можно построить решетку всех базисно предполных замкнутых классов графов, каждый из которых однозначно определяется порождающими базисами.

Конструктивные описания H-замкнутых классов графов

В общем случае для сохранения характеристического свойства графов могут потребоваться ограничения не только на порождающие базисы, но также на выбор отождествляемых подграфов в графах-операндах и на сам способ отождествления (внутренние ограничения). Кроме того, возможны ограничения на операции склейки, влияющие на возможный порядок сборки графов, то есть на выбор операций суперпозиции (внешние ограничения). К внешним ограничениям можно отнести, например, требования, чтобы отождествляемые подграфы графов-операндов были порожденными или чтобы вершины подграфа склейки образовывали тупиковое или минимальное разделяющее множество в результирующем графе. Подобные ограничения влияют на величину избыточности конструктивного описания. Системы внутренних и внешних ограничений будем обозначать с использованием символа H и говорить соответственно об операциях H-склейки, H-суперпозициях и H-замкнутых классах графов. Конструктивные описания H-замкнутых классов графов задаются системой ограничений на операции H-склейки и совокупностью порождающих базисов.

В работах [1] и [7, 8, 9] можно найти конструктивные описания замкнутых классов обыкновенных, двудольных, расщепляемых, триангулированных и планарных графов при различных системах внутренних и внешних ограничений на операции склейки. Приведем здесь лишь несколько новых результатов.

1. *Гамильтоновы графы.* Характеристическое свойство сохраняют операции H^l-склейки, в которых отождествляемыми подграфами графов-операндов G_1 и G_2 выбираются цепи L_n, $n = \min\{|V((G_1)|, |V(G_2)|\}$, являющиеся гамильтоновыми хотя бы в одном из графов G_1 или G_2.

Теорема 5. *Класс гамильтоновых графов канонически H^l-замкнут с порождающими базисами $B_e = \{C_1, C_2, \ldots\}$ и $B_o = \{K_1, L_2, L_3, \ldots\}$.*

2. *Эйлеровы графы.* Характеристическое свойство сохраняют операции склейки, в которых отождествляемые подграфы графов-операндов содержат вершины четной степени. Минимальной избыточностью обладает описание, когда склейка осуществляется по пустым подграфам (операции $H^{\varnothing}$-склейки). В работе [9] доказана

Теорема 6. *Класс эйлеровых графов канонически $H^{\varnothing}$-замкнут с порождающими базисами $B_e = \{C_1, C_2, \ldots\}$ и $B_o = \{K_1, \overline{K}_2, \ldots\}$.*

Отметим в заключение, что класс эйлеровых планарных графов имеет три конечных операционных базиса $B_o^1 = \{K_1, \overline{K}_2, \overline{K}_3\}$, $B_o^2 = \{K_1, \overline{K}_2, \overline{K}_4\}$, $B_o^3 = \{K_1, \overline{K}_2, \overline{K}_5\}$ [5], что создает возможность для постановки задач оптимального синтеза графов.

Список литературы

[1] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, № 4. — С. 35–63.

[2] *Иорданский М. А.* Функциональный подход к представлению графов // Доклады РАН. — 1997. — Т. 353, № 3. — С. 303–305.

[3] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания и экономное кодирование графов // Вестник Нижегородского госуниверситета. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2000. — Вып. 1(22). — С. 88–93.

[4] *Иорданский М. А.* Оптимальные нумерации вершин графов // Математические вопросы кибернетики. — 2001. — Вып. 10. — С. 83–102.

[5] *Бурков Е. В.* Операционные базисы замкнутых классов графов // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», Москва, 18–23 июня 2007 г. — М.: Изд-во механико-матем. факультета МГУ. — 2007. — С. 105–116.

[6] *Иорданский М. А.* Структура и способы порождения замкнутых классов графов // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15, вып. 3. — С. 105–116.

[7] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания двудольных графов //Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Международной конференции (Казань, 2–7 июня 2008г.). — Казань: Изд-во «Отечество». — 2008. — С. 44.

[8] *Иорданский М. А.* Конструктивные описания расщепляемых графов //Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) — М.: Изд-во механико-матем. факультета МГУ.— 2010. — С. 306–308.

[9] *Бурков Е. В.* Конструктивные описания планарных и эйлеровых графов // Вестник Нижегородского госуниверситета. Математика. — 2010. — № 5(1). — С. 165–170.

Полиэдральные аспекты оптимизационной задачи на циклических перестановках

А. Н. Исаченко, Я. А. Исаченко

isachen@bsu.by, yarais@mail.ru

Белорусский государственный университет, Минск

Введение

Рассматривается следующая оптимизационная задача

$$\min_{\pi\in C_n}\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}b_i. \qquad (1)$$

Здесь C_n — множество циклических перестановок элементов множества $N=\{1,2,..,n\}$, а $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ и $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ — множества действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Для задачи рассматривается полиэдральный подход, основанный на построении системы линейных неравенств для циклического перестановочного многогранника

$$M(C_n) = \mathrm{conv}\{a(\pi) = (a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)})|\pi\in C_n\},$$

и описании его характеристик.

Ранее установлено [1], что $\dim M(C_n) = n-1$ при $n \geqslant 4$ и $\mathrm{vert}\, M(C_n) = \{a(\pi)|\pi\in C_n\}$, определены отдельные семейства гиперграней многогранника $M(C_n)$.

В работе [2] введено понятие наследуемой грани. Пусть M_1, M_2 — многогранники размерности $d > 2$, причем $\operatorname{vert} M_1 \subset \operatorname{vert} M_2$, а G есть m-мерная грань многогранника M_1 ($1 \leqslant m < d$). Назовем G наследуемой гранью (относительно многогранника M_2), если существует грань F многогранника M_2, такая, что $\dim G = \dim F$ и $\operatorname{vert} G \subseteq \operatorname{vert} F$.

Как известно [3], для перестановочного многогранника $M(S_n)$ задающая его полная неприводимая система имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i, \\ &\sum_{i\in w} x_i \geqslant \sum_{j=1}^{|w|} a_j, \quad \forall w \subset N,\, |w| \leqslant n-1. \end{aligned} \tag{2}$$

В [2, 4] установлено, что при $n \geqslant 5$ каждая гиперплоскость

$$H(i) = \{x \in E^n \mid x_i = a_1\},\ i \in \{2, 3, \ldots, n\},$$

определяет наследуемую относительно $M(S_n)$ гипергрань многогранника $M(C_n)$.

Семейство гиперграней для $|w| = 2$

Теорема 1. *При $n \geqslant 5$ каждая гиперплоскость*

$$H(i,j) = \{x \in E^n | x_i + x_j = a_1 + a_2\}, \quad i, j \in \{3, \ldots, n\},\ i < j, \tag{3}$$

определяет гипергрань многогранника $M(C_n)$.

Доказательство. Согласно определению, множество называется k-мерным, если оно содержит $k+1$ аффинно-независимых точек. Поскольку $\dim M(C_n) = n-1$, то для доказательства необходимо указать $n-1$ аффинно-независимые точки многогранника $M(C_n)$, принадлежащие гиперплоскости (3).

При $n = 3$ множество гиперплоскостей (3) пусто.

Если $n = 4$, то в (3) входит единственная интересующая нас гиперплоскость $H(3,4)$, причём число точек, принадлежащих $H(3,4) \cap M(C_4)$, равно двум, что даёт $\dim(H(3,4) \cap M(C_4)) = 1 < \dim M(C_4) = 3$.

Если $n = 5$, то в (3) входит три гиперплоскости, причём число точек, принадлежащих пересечению $M(C_5)$ с каждой из них, равно четырем. Непосредственной проверкой легко убедиться, что каждое из этих множеств является аффинно-независимым, что влечёт справедливость теоремы для $n = 5$.

Для общего случая при $n \geqslant 6$, не нарушая общности, рассмотрим следующее множество точек:

$$
\begin{array}{l}
(a_j, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \ldots, a_n, a_i)\\
(a_j, a_4, a_5, a_3, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \ldots, a_n, a_i)\\
(a_j, a_5, a_4, a_6, a_3, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \ldots, a_n, a_i)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_j, a_{i-1}, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i+1}, a_3, a_1, a_{i+2}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \ldots, a_n, a_i)\\
(a_j, a_{i+1}, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+2}, a_1, a_3, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \ldots, a_n, a_i)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_j, a_{j-1}, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \ldots, a_{j+1}, a_3, a_2, a_{j+2}, \ldots, a_n, a_i)\\
(a_j, a_{j+1}, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+2}, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_i)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_j, a_{n-1}, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, ..., a_3, a_i)\\
(a_j, a_n, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \ldots, a_i, a_3)\\
(a_i, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_2, a_{i+2}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_1, a_{j+2}, \ldots, a_n, a_j)\\
(a_3, a_j, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_2, a_{i+2}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_1, a_{j+2}, \ldots, a_n, a_i)\\
(a_3, a_i, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \ldots, a_n, a_j).
\end{array}
$$

Учитывая тот факт, что множество точек $\{X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}\}$ является аффинно-независимым тогда и только тогда, когда множество $\{X_2 - X_1, \ldots, X_{k+1} - X_1\}$ является линейно независимым, вычтем покоординатно первую точку из всех остальных точек множества. Затем удалим вторую и i-ю координаты, а первую и j-ю координаты переставим в конец. В результате получим $(n-2) \times (n-2)$ матрицу, определитель которой будет равен

$$
(a_{i+1} - a_{i-1})(a_{j+1} - a_{j-1}) \prod_{k=4}^{i-2} (a_{k+1} - a_k) \prod_{l=j+1}^{n-1} (a_{l+1} - a_l) \times
$$

$$
\times (a_i - a_j)(a_1 - a_2)(2a_3 - a_i - a_j).
$$

В силу неравенств $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ определитель будет отличен от нуля. Следовательно, полученное множество разностей является линейно независимым. Последнее влечёт аффинную независимость исходного множества точек. ∎

Следствие. *Каждая гипергрань* $H(i,j) \cap M(C_n)$, $i, j \in \{3, \ldots, n\}$, $i < j$, $n \geqslant 5$, *циклического перестановочного многогранника* $M(C_n)$

является наследуемой относительно перестановочного многогранника $M(S_n)$.

Нижняя оценка для числа гиперграней

Рассмотрим число $f(M(C_n))$ гиперграней многогранника $M(C_n)$. В работе [1] на основании понятия 2-циклических перестановок и преобразования их за счёт одной транспозиции в циклическую перестановку получена следующая нижняя оценка при $n \geqslant 4$:

$$f(M(C_n)) \geqslant \begin{cases} ((k-1)!)^2, & n = 2k, \\ (k-1)!\,k!, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Учитывая наследуемые гиперграни многогранника циклических перестановок для $|w| = 1$ и $|w| = 2$, получим утверждение.

Теорема 2. *Для числа гиперграней* $f(M(C_n))$ *многогранника* $M(C_n)$ *при* $n \geqslant 5$ *справедливо неравенство*

$$F(M(C_n)) \geqslant \begin{cases} ((k-1)!)^2 + 2k^2 - 3k + 2, & n = 2k, \\ (k-1)!\,k! + 2k^2 - k + 1, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Список литературы

[1] *Исаченко Я. А.* Применение полиэдрального подхода к задаче на циклических перестановках // Современные информационные компьютерные технологии: Сб. науч. ст., ч. 2. — Гродно: ГрГУ, 2008. — С. 203–206.

[2] *Исаченко Я. А.* О некоторых гипергранях многогранника циклических перестановок // Технологии информатизации и управления: Сб. науч. ст.. — Минск : БГУ, 2009. — С. 16–19.

[3] *Емиличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). — М.: Наука, 1981.

[4] *Исаченко Я. А.* Об одной задаче управления на циклических перестановках // Управление информационными ресурсами: Материалы Седьмой Международной научно-практической конференции (Минск, 25 ноября 2009 г.) — Мн.: Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2009. — С. 68–69.

Оптимизационные методы решения прямых и обратных задач для квазистационарных электромагнитных процессов

А. В. Калинин, М. И. Сумин, А. А. Тюхтина

avk@mm.unn.ru, msumin@sinn.ru, kalinmm@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Решение любой технологической проблемы с использованием электромагнитных полей предполагает в первую очередь формирование электрического и магнитного поля, структура которого отвечает требованиям технологического процесса. При этом значительная часть технологических процессов допускает описание в рамках квазистационарного магнитного приближения, в котором пренебрегают токами смещения [1–3].

Система уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в гауссовой системе единиц [1] с учетом справедливых в линейных средах материальных соотношений может быть переписана в виде

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mu\mathbf{H}(x,t)+\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\,(\sigma^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{H})=\mathrm{rot}\,\mathbf{E}^{cm}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\mu\mathbf{H}=0, \tag{2}$$

где $(x,t)\in Q=\Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset R^3$, $T>0$, $\mathbf{H}\colon Q\to R^3$ — напряженность магнитного поля, μ — тензор магнитной проницаемости среды, σ — тензор проводимости, $\mathbf{E}^{cm}$ — напряженность поля сторонних электродвижущих сил.

В работе предполагается, что Ω – открытая ограниченная область класса C^2, гомеоморфная шару, $\mathbf{E}^{cm}\colon Q\to R^3$ — суммируемая с квадратом функция, μ, σ, — самосопряженные линейные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие условиям

$$\mu_1\|\mathbf{u}\|^2_{2,\Omega}\leqslant(\mu\mathbf{u},\mathbf{u})_{2,\Omega}\leqslant\mu_2\|\mathbf{u}\|^2_{2,\Omega},\ \sigma_1\|\mathbf{u}\|^2_{2,\Omega}\leqslant(\sigma\mathbf{u},\mathbf{u})_{2,\Omega}\leqslant\sigma_2\|\mathbf{u}\|^2_{2,\Omega}, \tag{3}$$

μ_i, σ_i, $i=1,2$, c — заданные положительные числа.

Уравнения (1), (2) рассматриваются при краевых условиях

$$\mathbf{H}_\tau(x,t)=0, x\in\partial\Omega, t\in(0,T), \tag{4}$$

и начальном условии

$$\mathbf{H}(x,0) = \mathbf{h}(x), x \in \Omega, \tag{5}$$

где $\mathbf{h} \in \{L_2(\Omega)\}^3$.

Исходные данные задачи (1), (2), (4), (5) обозначаются через $\Pi \equiv (\mathbf{h}, \mathbf{E}^{cm})$.

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [4–6]:

$$H(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\},$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{rot} = \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})dx + \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{v})dx,$$

$$K(\mathrm{div}\mu;\Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L^2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{div}\mu\mathbf{u} = 0\},\ (\mathbf{u},\mathbf{v})_{K(div\mu;\Omega)} = \int_\Omega (\mu\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})dx.$$

Пусть функции $\mathbf{E}^{cm}$, $\mathbf{h}$ известны. Решением задачи (1), (2), (4), (5) называется функция $\mathbf{H} \in L_2(0,T,H(\mathrm{rot};\Omega))$, удовлетворяющая равенствам (1), (2), (5) в смысле распределений на Q, а условиям (4) в смысле теории следов [7].

Теорема [6, 8]. *Для любого $\Pi \in K(\mathrm{div}\mu;\Omega) \times \{L_2(Q)\}^3$ существует единственное решение $\mathbf{H}[\Pi]$ задачи* (1), (2), (4), (5). *При этом $\mathbf{H}[\Pi]$ эквивалентно непрерывной функции из $[0,T]$ в $L_\mu(\Omega)$.*

Доказательство теоремы проводится с использованием метода Фаэдо–Галеркина, возможность применения которого вытекает из установленных в [9] неравенств для скалярных произведений векторных полей.

Задание пары $\Pi = (\mathbf{h}, \mathbf{E}^{cm})$ полностью определяет конфигурацию электромагнитного поля [6]. Пусть $D \subset K(\mathrm{div}\mu;\Omega) \times \{L_2(Q)\}^3$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество, $\mathbf{q} \in K(\mathrm{div}\mu;\Omega)$. Ставится задача определения элемента $\Pi \in D$, имеющего минимальную норму $\|\Pi\| = \sqrt{\|\mathbf{h}\|_\mu^2 + \|\mathbf{E}^{cm}\|_{2,Q}^2}$ по финальному (в момент времени T) наблюдению $\mathbf{q} = \mathbf{H}[\Pi](T)$.

Обратная задача поиска нормального решения при финальном наблюдении $\mathbf{q} \in K(\mathrm{div}\mu;\Omega)$ эквивалентна задаче оптимального управления с полуфазовым ограничением типа равенства [10]:

$$I_0(\Pi) \to \inf,\ I_1(\Pi) = \mathbf{q},\ \Pi \in D,\ \mathbf{q} \in K(\mathrm{div}\mu;\Omega), \tag{6}$$

где $I_0(\Pi) \equiv \|\mathbf{h}\|_\mu^2 + \|\mathbf{E}^{cm}\|_{2,Q}^2$, $I_1(\Pi) \equiv \mathbf{H}[\Pi](T)$.

В работе рассматриваются алгоритмы для решения указанной обратной задачи (6), непосредственно связанные с теорией двойственности (см., например, [11, 12]) и основанные на методе двойственной регуляризации [10, 13, 14]. Выбор данного метода в качестве базового связан с рядом его важных отличительных особенностей. В нем, во-первых, самым существенным образом используется классическая идея «снятия» ограничений, заложенная в принципе Лагранжа; во-вторых, он непосредственно сопрягается с методом возмущений [11], что позволяет эффективно использовать преимущества последнего при анализе и решении оптимизационных и обратных задач; и наконец, в-третьих, наиболее полно используется оптимизационная техника, развитая в последние десятилетия для задач оптимизации с операторными ограничениями, к которым естественным образом сводятся самые разнообразные обратные задачи, в том числе и рассматриваемая в данной работе.

В отличие от классических двойственных алгоритмов, рассматриваемые в работе методы двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации могут использоваться независимо от того, разрешима или нет двойственная задача, и при приближенном задании исходных данных, то есть в ситуации, когда вместо $\mathbf{q}$ и проводимости σ заданы их приближения: элемент $\mathbf{q}^{\,\delta} \in K(\mathrm{div}\mu;\Omega)$ и оператор $\sigma^\delta : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющий условиям (3), такие, что

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{q}^{\,\delta}\|_\mu \leqslant \delta, \qquad \|\sigma^{-1} - (\sigma^\delta)^{-1}\| \leqslant \delta.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97019-р_поволжье_а), аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» Минобрнауки РФ (рег. номер 2.1.1/3927), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (шифр заявки НК-13П-13, контракт № П945).

Список литературы

[1] *Тамм И. Е.* Основы теории электричества — М.: Наука, 1989.

[2] *Кулон Ж.-Л., Сабоннадьер Ж.-Р.* САПР в электротехнике. — М.: Мир, 1988.

[3] *Галанин М. П., Попов Ю. П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. — М.: Наука, Физматлит, 1995.

[4] *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ.— М.: Мир, 1981. — 408 с.

[5] *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.

[6] *Калинин А. В.* Оценки скалярных произведений векторных полей и их применение в математической физике: Учебное пособие. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.

[7] *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.

[8] *Калинин А. В., Калинкина А. А.* Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2003. — Вып. 1(26). — С. 21–38.

[9] *Калинин А. В., Калинкина А. А.* Lp-оценки векторных полей // Изв. вузов. Математика. — 2004. №3. — С. 26–35.

[10] *Сумин М. И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т. 44, № 11. — С. 2001–2019.

[11] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.

[12] *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1990.

[13] *Сумин М. И.* Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. матем. и мат. физ. — 2007. — Т. 47, №4. — С. 602–625.

[14] *Сумин М. И.* Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2009.

[15] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.

О конгруэнциях графов

Е. О. Карманова

lkb@info.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Под ориентированным графом понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, а α — отношение на V. Множество V называется множеством вершин, отношение α — отношением смежности, а пары, входящие в α, — дугами орграфа G. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина v смежна с вершиной u (см. [1]).

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа G. Фактор-графом орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε, а $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : (\exists u_1 \in \varepsilon(v_1), u_2 \in \varepsilon(v_2))((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть K — некоторый класс орграфов. Конгруэнцией K-графа G называется такое отношение эквивалентности θ на V, что фактор-граф G/θ является K-графом.

Возьмём в качестве класса K класс неориентированных графов.

Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. В неориентированном графе пара встречных дуг $(u, v)(v, u)$ рассматривается как один элемент графа, называемый ребром $\{u, v\}$. Ребро, соединяющее вершины u и v, называют инцидентным вершине u и вершине v.

Множество вершин неориентированного графа называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

Очевидно, что отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа G тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ-класс образует в G независимое подмножество.

В [2] была представлена программа, генерирующая все конгруэнции заданной цепи, и было показано, что любой связный граф является фактор-графом подходящей цепи.

Одной из открытых проблем является следующая: для данного связного графа G найти цепь с минимальным возможным числом ребер $p(G)$, фактор-графом которой является данный граф.

Диаметром дерева T называется максимальное расстояние между его вершинами.

Теорема. *Если T— дерево с m ребрами, имеющее диаметр d, то $p(T) = 2m - d$.*

Доказательство. Любой граф с m ребрами имеет обход длины $2m$. Пусть R — минимальный обход дерева T и пусть его длина $r < 2m$. Значит, в R есть ребро, проходимое один раз. Пусть таких ребер k штук. Пронумеруем их в порядке обхода R. Покажем, что ребра, проходимые один раз, образуют в T цепь. Предположим, что это не так. Пусть ребра $1 = \{u_0, u\}$ и 2 с началом v не инцидентны. Рассмотрим в составе R маршрут $R(u, v)$. Он содержит цепь $P(u, v)$. Пусть ее первым ребром будет uu'. Ребро $\{u, u'\}$ в обходе R проходится больше одного раза.

Представим обход R в виде

$$R = R_{\text{in}} u_0 u R_u^1 u u' R_{u'}^1 u' u R_u^2 u u' R_{u'}^2 \dots u u' R_{\text{fin}},$$

где R_{in} — подмаршрут, соединяющий начальную вершину обхода R с вершиной u_0, R_{fin} — подмаршрут, соединяющий вершину u' с конечной вершиной обхода R, R_u^i — подмаршруты обхода R с началом и концом в u, а $R_{u'}^i$ — с началом и концом в u'.

Заметим, что второй раз ребро $\{u, u'\}$ не может быть пройдено от u к u', так как иначе после прохождения ребра от u к u' мы должны попасть из u' в u по некоторому подмаршруту $R(u', u)$ маршрута R, а тогда в составе маршрута $uu'R(u', u)$ будет цикл, что невозможно для дерева T. Таким образом, в составе R ребро $\{u, u'\}$ второй раз будет проходиться от u' в u.

Теперь построим маршрут $R_{\text{in}} u_0 u R_u^1 R_u^2 \dots R_u^s u u' R_{u'}^1 R_{u'}^2 \dots R_{u'}^s R_{\text{fin}}$. Этот маршрут является обходом, так как он содержит все ребра, пройденные в составе R, а значит, все ребра дерева T. Его длина меньше, чем у R, что невозможно, ибо R минимален. Таким образом, получили противоречие. И значит, наше предположение о том, что ребра, проходимые один раз, не образуют в T цепь, неверно. Таким образом, получаем, что в составе обхода R есть цепь P, состоящая из ребер, проходимых один раз.

Длина цепи из один раз проходимых ребер равна k. Но $k \leqslant d$, так как d — наибольшая длина цепи в дереве T.

Пусть s_{m-k} — длина части обхода R, проходимая по ребрам кратности $\geqslant 2$ в R. Тогда $2m > r = s_{m-k} + k \geqslant 2(m-k) + k = 2m - k \geqslant 2m - d$. Итак, каждый обход дерева T имеет длину не меньше, чем $2m - d$. Следовательно, $2m - d$ — это минимальная возможная длина обхода дерева T. Покажем, что обход длины $2m - d$ существует.

Изобразим дерево T следующим образом. Пусть P_d — цепь длины d в дереве T, $v_i \in P_d, i = \overline{0, d-1}$.

Выберем висячую вершину $v_0 \in P_d$ в качестве корневой. Так как d — расстояние от вершины v_0 до наиболее удаленной от нее вершины дерева T (другая висячая вершина цепи P_d), припишем уровень i каждой вершине v_i цепи P_d, нумеруя их снизу вверх числами $0, 1, \ldots, d-1$. Каждая вершина v_i может быть смежна с некоторыми вершинами, не входящими в цепь P_d, они, в свою очередь, с другими вершинами, и т.д.

Таким образом, каждая вершина $v_i \in P_d, i = \overline{1, d-2}$, является корнем некоторого дерева T_i (среди этих деревьев могут быть пустые).

Построим обход $v_0 v_1 T_1 v_1 v_2 T_2 \ldots v_{d-3} v_{d-2} T_{d-2} v_{d-2} v_{d-1}$.

Как известно (лемма Тарри), если граф G — связный, то можно построить циклический маршрут, содержащий все ребра графа в точности два раза, по одному в каждом направлении. Таким образом, каждое дерево T_i имеет гарантированный обход длины, равной удвоенному числу его ребер, причем начинается и заканчивается он в одной и той же вершине $v_i \in P_d, i = \overline{1, d-2}$ графа T.

Отсюда и следует доказываемое утверждение. Получаем, что длина построенного обхода дерева T с m ребрами и диаметром d равна $2m - d$. Причем этот обход минимален. ∎

Звезда — это граф, все ребра которого инцидентны одной и той же вершине. Звезду с m ребрами будем обозначать S_m.

Следствие. *Для звезды S_m имеем $p(S_m) = 2m - 2$.*

Список литературы

[1] *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука. Физматлит, 1997.

[2] *Карманова Е. О.* О конгруэнциях цепей и циклов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы науч. конф. Саратов, 1 июля 2010 г. — Саратов: Изд-во СГУ, 2010. — С. 70–74.

Свойства шаблонов минимизации полиномиальных форм булевых функций

К. Д. Кириченко

constkir@gmail.com

Восточно-Сибирская государственная академия образования, Иркутск

Одной из актуальных задач дискретной математики является задача нахождения и минимизации представлений конечнозначных, и в частности, булевых функций. В настоящей работе рассматривается вопрос о представлении булевых функций многочленами. В теории булевых функций такие представления носят название полиномиальных нормальных форм (ПНФ).

Сформулируем некоторые определения. Полиномиальной нормальной формой булевой функции $f(z_1, \ldots, z_n)$ будем называть представление функции $f(z_1, \ldots, z_n)$ вида $\sum\limits_{i=1}^{s} \prod\limits_{j=1}^{n} (y_j^i z_j \oplus x_j^i \bar{z}_j)$ Здесь x_j^i и y_j^i — это коэффициенты из поля Z_2, при подстановке которых каждая скобка обращается либо в z_i, либо в $\bar{z}_i$, либо в 1.

Сложностью ПНФ $\sum\limits_{i=1}^{s} \prod\limits_{j=1}^{n} (y_j^i z_j \oplus x_j^i \bar{z}_j)$ будем называть число слагаемых s.

Сложностью булевой функции $L(f)$ в классе ПНФ будем называть минимум из сложностей ПНФ, представляющих данную функцию.

Функцией Шеннона $L(n)$ сложности булевых функций в классе ПНФ будем называть максимум из сложностей по всем функциям n переменных.

Для получения оценок $L(n)$ был разработан метод шаблонов, идея которого заключается в том, что по ПНФ с неопределенными коэффициентами составляется система уравнений, после чего подбирается некоторая подстановка, разбивающая систему на подсистемы, которые могут быть решены итерационно. При этом факт наличия решения каждой подсистемы не зависит от решения предыдущих подсистем. Сформулируем эту идею более строго.

Системой уравнений полиномиальной нормальной формы будем называть систему из 2^n уравнений следующего вида

$$R = \begin{cases} y_1^1 y_2^1 \cdots y_n^1 \oplus y_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2 \oplus \ldots \oplus y_1^s y_2^s \cdots y_n^s = f(1,1,\ldots,1) \\ x_1^1 y_2^1 \cdots y_n^1 \oplus x_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2 \oplus \ldots \oplus x_1^s y_2^s \cdots y_n^s = f(0,1,\ldots,1) \\ y_1^1 x_2^1 \cdots y_n^1 \oplus y_1^2 x_2^2 \cdots y_n^2 \oplus \ldots \oplus y_1^s x_2^s \cdots y_n^s = f(1,0,\ldots,1) \\ x_1^1 x_2^1 \cdots y_n^1 \oplus x_1^2 x_2^2 \cdots y_n^2 \oplus \ldots \oplus x_1^s x_2^s \cdots y_n^s = f(0,0,\ldots,1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^1 x_2^1 \cdots x_n^1 \oplus x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 \oplus \ldots \oplus x_1^s x_2^s \cdots x_n^s = f(0,0,\ldots,0). \end{cases}$$

Легко увидеть, что эта система может быть получена в результате подстановки в формулу ПНФ всех различных двоичных наборов. Уравнение, полученное подстановкой набора $\tilde{\tau}$ в ПНФ с неопределенными коэффициентами, обозначим $R_{\tilde{\tau}}$.

Шаблоном $\langle s(n), \sigma \rangle$ будем называть такую константу $s(n)$, зависящую от числа переменных булевой функции n, и такую подстановку σ, заменяющую некоторые из переменных системы R на некоторые термы, после применения которой система $R(\sigma)$ может быть разделена на подсистемы $R^0(\sigma), \ldots R^k(\sigma)$, такие, что каждый многочлен $R^i_{\tilde{\tau}}(\sigma)$ представляется в виде $R^i_{\tilde{\tau}}(\sigma) = L^i_{\tilde{\tau}} \oplus P^i_{\tilde{\tau}}$, причем $L^i_{\tilde{\tau}}$ — это многочлен первой степени, и все переменные, входящие в L^i (линейные части подсистемы $R^i(\sigma)$), не встречаются в $R^0(\sigma), \ldots, R^{i-1}(\sigma)$.

Мерой универсальности шаблона будем называть сумму рангов его линейных частей: $U(\langle s(n), \sigma \rangle) = \sum\limits_{i=1}^{k} \operatorname{rang}(L^i)$.

Теорема 1. *Пусть $\langle s(n), \sigma \rangle$ некоторый шаблон. Тогда выполняется неравенство*

$$L(n) \leqslant s(n) + 2^n - U(\langle s(n), \sigma \rangle).$$

Было найдено два вида подстановок, обладающих хорошими свойствами и удовлетворяющих введенному определению. Они были названы шаблонами первого и второго рода.

Для определения шаблона первого рода выберем произвольный набор $\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^s$ из s булевых векторов длины n. Будем называть его векторным представлением шаблона первого рода. Сам шаблон будет определяться следующим образом. Если $\alpha^i_j = 1$, то заменяем y^i_j на 1, x^i_j оставляем без изменения. Если $\alpha^i_j = 0$, то заменяем y^i_j на 0, а x^i_j на 1.

С использованием шаблонов первого рода ранее была получена верхняя оценка сложности функции Шеннона сложности булевых функций в классе ПНФ [1]:

$$L(n) \leqslant 2^n \cdot \frac{2(\log_2 n + 1)}{n}.$$

Попытки дальнейшего улучшения верхней оценки с использованием шаблонов первого рода приводят к необходимости нахождения чисел Турана [2] $T(n, k+1, k)$, где k лежит в окрестности $\frac{n}{2}$, что на сегодня представляется довольно затруднительным [3]. В связи с этим рассматривается другой вид подстановок.

Введем определение шаблона второго рода. Для этого выберем произвольный набор $\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^{s/2}$ из $s/2$ булевых векторов длины n. Будем называть его векторным представлением шаблона второго рода. Сам шаблон будет определяться следующим образом. Если $\alpha_j^i = 1$, то заменяем y_j^{2i-1} на 1, x_j^{2i-1} на t_j^i, y_j^{2i} на 1, x_j^{2i} на $t_j^i \oplus 1$. Если $\alpha_j^i = 0$, то заменяем y_j^{2i-1} и y_j^{2i} на 0, а x_j^{2i-1} и x_j^{2i} на 1.

Для исследования свойств шаблонов второго рода рассмотрим класс матриц специального вида, которые будут определены далее.

Обозначим за E_{nk} квадратную матрицу размера $\binom{n}{k}$, у которой на побочной диагонали находятся единицы, а остальные элементы нули.

Матрицей биномиальных квадратов B_{nk} будем называть матрицу с коэффициентами из поля Z_2, состоящую из $\binom{n}{k+1}$ столбцов и $\binom{n}{k}$ строк, которая определяется следующими соотношениями: для $k \geqslant n$ и $k < 0$ матрица пуста (содержит ноль строк и столбцов). Для остальных значений k матрица имеет вид

$$B_{nk} = \begin{pmatrix} E_{n-1,k} & B_{n-1,k} \\ B_{n-1,k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица может быть определена еще одним способом. Каждой строке матрицы поставим в соответствие двоичный набор длины n веса k, упорядочив все наборы в порядке лексикографического возрастания. Каждому столбцу матрицы поставим в соответствие двоичный набор длины n веса $k+1$, упорядочив все столбцы в порядке лексикографического убывания. Тогда $b_{ij} = 1$, если набор, соответствующий строке i, меньше набора, соответствующего столбцу j.

Такого рода матрицы также рассматривались в связи с задачей Турана, однако при этом изучалась глубина матрицы, нас же будут интересовать ее алгебраические свойства, в частности ранг.

Пусть V — некоторое множество двоичных наборов длины n веса $k+1$. Обозначим $B_{nk}(V)$ подматрицу матрицы B_{nk}, состоящую только из столбцов, соответствующих наборам из V, и из всех строк.

Пусть $\tilde{\alpha}$ — некоторый набор длины n веса $k+1$. Обозначим $S(\tilde{\alpha})$ множество наборов длины n веса k, меньших $\tilde{\alpha}$. Если V — это некоторое множество наборов, то $S(V) = \bigcup\limits_{\tilde{\alpha}\in V} S(\tilde{\alpha})$.

Теорема 2. *Пусть T есть некоторый шаблон второго рода, состоящий из векторов длины n веса $k+2$. Тогда мера универсальности шаблона T равна рангу матрицы $B_{nk}(S(T))$.*

В связи с этим возникает задача нахождения ранга для произвольной подматрицы B_{nk}. Следующая теорема дает один из возможных вариантов решения этой задачи.

Пусть V — некоторое множество наборов длины n веса k, тогда индуцированным множеством $I_{k+1}(V)$ будем называть максимальное множество наборов длины n веса $k+1$, такое, что $S(I_{k+1}(V)) \subseteq V$.

При этом для $r > k+1$ определим $I_r(V) = I_r(I_{r-1}(V))$.

Теорема 3. *Пусть V — некоторое множество наборов длины n веса k. Тогда*

$$\operatorname{rang}(B_{n,k-1}(V)) = \min_{V\subseteq W\subseteq P^n_{k+1}} \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j-k-1} I_j(W).$$

Данная теорема, возможно, позволит находить меры универсальности для различных шаблонов второго рода, что может позволить улучшать верхние оценки сложности ПНФ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00476а.

Список литературы

[1] *Кириченко К. Д.* Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17, № 3. — С. 81–88.

[2] *Turan P.* Reseach Problems // Magyar Tud. Acad. Mat. — Kutato Int. Kozl. — 1961. — V. 6. — P. 417–423.

[3] *Ruszinko M.* Turan Systems // Handbook of Combinatorial Designs. — Taylor and Francis Group, 2007. — P. 649–651.

Бикритериальные задачи обслуживания mobile-процессором рассредоточенных в одномерной рабочей зоне объектов

Д. И. Коган, Ю. С. Федосенко, Н. А. Дуничкина

kdi_41@mail.ru, fds@aqua.sci-nnov.ru,
nadezhda.dunichkina@gmail.com

Московский государственный
университет приборостроения и информатики;
Волжская государственная академия водного транспорта,
Нижний Новгород

Рассматриваются бикритериальные модификации изученных в [1] однокритериальных задач обслуживания группы стационарных объектов, рассредоточенных вдоль одномерной рабочей зоны перемещающегося процессора. Необходимость выполняемого обобщения продиктована требованиями совершенствования управления транспортно-технологическими системами, в частности при решении задач оперативного планирования снабжения топливом группы плавучих дизель-электрических добывающих комплексов, дислоцированных в крупномасштабном русловом полигоне [2].

Считается заданной группа $O_n = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ стационарных объектов, расположенных в рабочей зоне Ξ обслуживающего процессора P. Зона Ξ представляет собой отрезок L, начальная точка A которого является базовой для процессора; объекты пронумерованы в порядке возрастания их расстояний от точки A; конечная точка B отрезка L является местом расположения объекта o_n. Из точки A, начиная от момента времени $t = 0$, процессор поступательно перемещается к конечной точке B (рейс λ_+), а затем, достигнув ее, также поступательно возвращается в точку A (рейс λ_-).

При реализации цикла $\lambda_+\lambda_-$ процессор выполняет обслуживание всех объектов группы O_n. Часть объектов обслуживается в рейсе λ_+, остальные объекты — в рейсе λ_-. Обслуживание каждого объекта реализуется однократно, без прерываний. С каждым объектом o_j ассоциируются две монотонно возрастающие функции индивидуального штрафа $\varphi_j(t)$ и $\psi_j(t)$, выражающие величины потерь, зависящие от момента завершения его обслуживания.

Примем обозначения: $1, 2, \ldots, n$ — точки отрезка L, в которых расположены соответственно объекты $o_1, o_2, \ldots, o_n$ (точки n и B совпадают); τ_j — продолжительность обслуживания процессором P объекта o_j; $\gamma_{j-1,j}$ и $\gamma_{j,j-1}$ — затраты времени на перемещения процессора между точками $j-1$ и j в рейсах λ_+ и λ_- соответственно ($j = \overline{1,n}$), при этом $\gamma_{0,1}$ и $\gamma_{1,0}$ — затраты времени на перемещения процессора между точкой A и точкой 1 в рейсах λ_+ и λ_-. Параметры τ_j, $\gamma_{j-1,j}$, $\gamma_{j,j-1}$ считаем принимающими целочисленные положительные значения.

Стратегией обслуживания именуем произвольное подмножество элементов V из совокупности $N = \{1, 2, \ldots, n\}$; объекты o_j, $j \in V$ обслуживаются процессором P в рейсе λ_+, все остальные объекты — в рейсе λ_-. Обслуживание объекта o_j, $j \in N$ начинается от момента прибытия процессора в точку j при реализации определяемого стратегией V рейса; завершив обслуживание, процессор P продолжает поступательное движение. Любая стратегия однозначно определяет моменты начала и завершения обслуживания каждого из объектов. Для объекта o_j через $t_j^*(V)$ обозначим момент завершения его обслуживания при реализации стратегии V ($j = \overline{1,n}$). Рассматриваются следующие бикритериальные задачи:

$$\min_{V \subseteq N} \Big(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j^*(V)), \max_j \psi_j(t_j^*(V))\Big), \tag{1}$$

$$\min_{V \subseteq N} \Big(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j^*(V)), \max_j \varphi_j(t_j^*(V))\Big), \tag{2}$$

$$\min_{V \subseteq N} \Big(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j^*(V)), \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_j^*(V))\Big), \tag{3}$$

$$\min_{V \subseteq N} \big(\max_j \varphi_j(t_j^*(V)), \max_j \psi_j(t_j^*(V))\big). \tag{4}$$

Задача (2) — важный частный случай задачи (1), возникающий в приложениях, когда функции штрафа по каждому объекту совпадают, т. е. $\varphi_j(t) = \psi_j(t)$, $j = \overline{1,n}$.

Принимается концепция решения, предусматривающая построение для каждой из введенных задач полной совокупности эффективных оценок E с одновременным обеспечением возможности синтеза по любой выбираемой в E оценке порождающей ее Парето-оптимальной стратегии [3, 4].

Конструируются решающие алгоритмы, основанные на построении полных совокупностей эффективных оценок методом динамического программирования в его бикритериальном обобщении [5, 6].

Известно [1], что однокритериальная задача $\min\limits_{V\subseteq N}(\max\limits_{j}\varphi_j(t_j^*(V)))$ разрешима в полиномиально зависящем от n времени; в случае линейности всех функций индивидуального штрафа полиномиально разрешима и задача $\min\limits_{V\subseteq N}(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t_j^*(V)))$.

Для задач (2) и (3) имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для задачи (2) с линейными функциями индивидуального штрафа $\varphi_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, проблема определения по произвольным натуральным константам C_1 и C_2, существует ли стратегия обслуживания V^*, одновременно удовлетворяющая условиям $\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t_j^*(V^*))\leqslant C_1$ и $\max\limits_{j}\varphi_j(t_j^*(V))\leqslant C_2$, NP-трудна.*

Теорема 2. *Для задачи (3) с линейными функциями индивидуального штрафа $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, проблема определения по произвольным натуральным константам C_1 и C_2, существует ли стратегия обслуживания V^*, одновременно удовлетворяющая условиям $\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t_j^*(V^*))\leqslant C_1$ и $\sum_{j=1}^{n}\psi_j(t_j^*(V))\leqslant C_2$, NP-трудна.*

Для задачи (4) аналогичная проблема оказывается существенно более простой. Строится имеющий линейно зависящую от n гарантированную оценку числа выполняемых элементарных операций алгоритм определения по произвольным натуральным константам C_1 и C_2, существует ли стратегия обслуживания V^*, одновременно удовлетворяющая условиям $\max\limits_{j}\varphi_j(t_j^*(V^*))\leqslant C_1$ и $\max\limits_{j}\psi_j(t_j^*(V^*))\leqslant C_2$.

Теорема 3. *Задача (1) с линейными функциями индивидуального штрафа $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, и лексикографически упорядоченными критериями (критерий $\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t_j^*(V))$ — ведущий) полиномиально разрешима. Задача (2) с линейными функциями индивидуального штрафа $\varphi_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, и лексикографически упорядоченными критериями (критерий $\max\limits_{j}\varphi_j(t_j^*(V))$ — ведущий) NP-трудна.*

Теорема 4. *Задача* (3) *с линейными функциями индивидуального штрафа* $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, *и лексикографически упорядоченными критериями полиномиально разрешима.*

Теорема 5. *Задача* (4) *с лексикографически упорядоченными критериями полиномиально разрешима.*

Список литературы

[1] *Коган Д. И., Федосенко Ю. С.* Задачи синтеза оптимальных стратегий обслуживания стационарных объектов в одномерной рабочей зоне процессора // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 3. — С. 50–62.

[2] *Коган Д. И., Федосенко Ю. С., Шлюгаев А. Ю.* Задача одностадийного обслуживания добывающих комплексов в крупномасштабной акватории // Труды V Московской Международной конференции по исследованию операций (ORM2007). — М.: МАКС Пресс, 2007. — С. 60–62.

[3] *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007.

[4] *Емеличев В. А., Перепелица В. А.* Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. — 1994. — Т. 6, № 1. — С. 3–33.

[5] *Klamroth K., Wiecek M.* Dynamic Programming Approaches to the Multiple Criteria Knapsack Problem. Technical Report #666. Dept. of Math. Sc., Clemson University. — Clemson: SC, 1998.

[6] *Коган Д. И.* Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2005.

Проверка методом передаточной функции одной перечислительной теоремы А. М. Каменецкого

Л. М. Коганов

Научный центр нелинейной волновой механики и технологии РАН, Москва

А. М. Каменецкий в [1, теорема 4] анонсировал без доказательства результаты для производящих функций перечисляющих последовательностей соответственно несократимых (н. с.) и циклически несократимых (ц. н. с.) слов [2, с. 14, 23] в вообще говоря асимметричном алфавите $A\cup A^{-1}\cup B$ конечнопорождённой свободной группы ранга $k+l$ с семейством свободных образующих $A\cup B$, где

$$A=\{a_1,\ldots,a_k\},\quad A^{-1}=\{a_1^{-1},\ldots,a_k^{-1}\},\quad B=\{b_1,\ldots,b_l\}.$$

При этом случай $l=0$ соответствует симметричному алфавиту, для которого обе перечислительные задачи (первая почти очевидна) ранее решались. Как обычно, перечисляющим параметром служит длина n слова.

Отметим, что:

a) обобщение Каменецкого в некотором смысле максимально: при присоединении к какой-то b_s обратного b_s^{-1} пара b_s, b_s^{-1} переходит в множество $A\cup A^{-1}$ образующих букв, входящих в алфавит вместе с обратными им;

b) при $k=1, l=2$ получаем из первой формулы цитированной теоремы 4 Каменецкого (промежуточный, но вполне достаточный для решения) результат задачи 2.4.6 (автор Ласло Ловас) из [3, с. 82, 338], при этом метки-символы (не числа!) 1 и 2 соответствуют a_1 и a_1^{-1}, а метки-символы 3 и 4 — образующим b_1 и b_2;

c) вторая и третья формулы указанной теоремы 4 Каменецкого равносильны: вторая есть результат нахождения в явном виде коэффициента при x^n в маклореновском разложении правой части третьей, а третья вытекает из второй умножением обеих частей на x^n с последующим суммированием при $n=1,2,\ldots$ (по всему натуральному ряду).

Автором настоящей публикации *показано, что и первая, и третья формулы* Каменецкого из его указанной теоремы 4 в [1] *могут быть получены стандартной техникой слияния когерентных состояний* [4] (и несвязанных в случае пар взаимно обратных элементов, а затем попарно связанных в $A\cup A^{-1}$-множестве; и связанных первоначально попарно в B-множестве) *в методе автора* [5, 6] *передаточной функции в рациональном перечислении.*

Получение третьей формулы теоремы 4 Каменецкого резко упрощается при использовании пакета символьных выкладок типа Maple.

Принципиальных трудностей проверка указанных формул цитированной теоремы 4 А. М. Каменецкого не содержит.

Автор сердечно благодарен Л. Н. Бондаренко (кафедра высшей и прикладной математики Пензенского ГУ) за ряд весьма полезных комментариев и упрощений, а также за существенную информационную поддержку.

Список литературы

[1] *Каменецкий А. М.* Теория детерминантных ладейных полиномов и детерминантов прямоугольных матриц с приложениями к перечислительной комбинаторике // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) — М.: Изд-во механико-матем. ф-та МГУ, 2010. — С. 233–236.

[2] *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[3] *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, 1990.

[4] *Коганов Л. М.* Развитие метода трансфер-матрицы в перечислительной комбинаторике. II: Операция слияния когерентных состояний // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) — М: Изд-во механико-матем. ф-та МГУ, 2010. — С. 236–239.

[5] *Коганов Л. М.* Передаточная функция в перечислительной комбинаторике // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Международной конференции (Казань, 2–7 июня 2008 г.) — Казань: Отечество, 2008. — С. 49.

[6] *Коганов Л. М.* Развитие метода трансфер-матрицы в перечислительной комбинаторике // Дискретные модели в теории управляющих систем: VIII Международная конференция, Москва, 6–9 апреля 2009 г.: Труды. — М.: Издательский отдел ф-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. — С. 130–131.

О продолжениях частичных полигонов

И. Б. Кожухов, Ю. И. Кожухова

kozhuhov_i_b@mail.ru

Московский государственный институт электронной техники

Полигоном над полугруппой S (или S-полигоном) называется (см. [1]) множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Полигон над полугруппой Sявляется универсальной алгеброй, в которой операциями являются отображения $\varphi_a : x \mapsto xa$ ($a \in S$). Кроме того, полигон X над полугруппой S — это алгебраическая модель автомата без выхода (см. [2]), здесь X — множество состояний, а S — множество входных сигналов.

Частичный полигон над полугруппой S задается частичным отображением $X \times S \to X$ (т.е. отображением, определенным, возможно, не для всех пар (x, s)), причем для любых $x \in X$, $s, t \in S$ произведение $x(st)$ существует в том и только том случае, если существует $(xs)t$, и в этом случае $x(st) = (xs)t$. Частичный полигон — это частичная универсальная алгебра в смысле [3]. Автоматная интерпретация заключается в следующем: если произведение xs не определено, то автомат, находящийся в состоянии x и получивший на вход сигнал s, останавливается.

В теории частичных алгебр важным является вопрос о возможности продолжения частичной операции до полной (всюду определенной) с сохранением тех или иных свойств. Будем говорить, что *частичный полигон продолжается до полного*, если после продолжения частичного отображения $X \times S \to X$ до полного равенство $x(st) = (xs)t$ будет выполнено для всех $x \in X$, $s, t \in S$.

Не всякий частичный полигон продолжается до полного. Простейшим примером может служить частичный полигон $X = \{1, 2, 3\}$ над полугруппой

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \end{pmatrix} \right\}.$$

В связи с этим примером возникают вопросы:

(1) в каких случаях частичный S-полигон продолжается до полного?

(2) для каких полугрупп S любой частичный S-полигон продолжается до полного?

В работе [4] были получены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия на частичный S-полигон X, чтобы он продолжался до полного, в случае когда S — коммутативная полугруппа идемпотентов, — это дает частичный ответ на вопрос (1).

Напомним, что полугруппа S называется *простой справа*, если $aS = S$ для всех $a \in S$. Нетрудно проверить, что всякий частичный S-полигон X является полным, если S простая справа и $XS \neq \varnothing$.

Основной результат работы:

Теорема 1. *Пусть S — полугруппа, представимая в виде объединения правых идеалов R_i $(i \in I)$, являющихся простыми справа полугруппами. Тогда всякий частичный S-полигон продолжается до полного.*

Напомним, что *вполне простой полугруппой* называется простая полугруппа, содержащая примитивный идемпотент. Так как, согласно теореме Сушкевича–Риса, вполне простая полугруппа изоморфна регулярной рисовской матричной полугруппе над группой (см. [5], теор. 3.5), то мы получаем следствие из теоремы:

Следствие 1. *Всякий частичный S-полигон над вполне простой полугруппой S продолжается до полного S-полигона.*

Список литературы

[1] *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories. — Berlin, N.Y.: Walter de Gruyter, 2000.

[2] *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Д., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. — М.: Высш. шк., 1994.

[3] *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Частичные алгебраические действия. — СПб.: Образование, 1991.

[4] *Апраксина Т. В, Максимовский М. Ю.* Полигоны и частичные полигоны над полурешетками // Известия Саратовского университета (в печати).

[5] *Клиффорд А. Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. Том 1. — М.: Мир, 1972.

О единичных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов

С. С. Коляда

kolyadass@mail.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет

В работе рассматривается задача построения легкотестируемых схем из функциональных элементов [1] в произвольных полных конечных базисах. Допускаются единичные произвольные константные неисправности на выходах элементов [2, 3, 4], когда в неисправное состояние может перейти ровно один элемент схемы, который вне зависимости от того, что подаётся на его входы, выдаёт некоторую булеву константу δ, где $\delta \in \{0,1\}$.

Пусть S — схема, реализующая в исправном состоянии булеву функцию $f(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Схему S будем считать *неизбыточной*, если при переходе в любое неисправное состояние любого элемента эта схема реализует *нетривиальную* [5], то есть отличную от $f(\tilde{x})$, функцию неисправности $g(\tilde{x})$.

Множество наборов $T = \{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l\}$ называется *единичным проверяющим тестом* для схемы S, реализующей функцию f, если для любой нетривиальной функции неисправности g существует набор $\tilde{\sigma}$ из T такой, что $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$; число l называется *длиной теста*.

Теорема 1. *Для любого функционально полного конечного базиса B, для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$, существует неизбыточная схема в базисе B, реализующая данную функцию и допускающая единичный проверяющий тест, длина которого не превосходит $n + 3$.*

Доказательство теоремы проводится конструктивно, то есть для произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ строится схема в базисе B и представляется единичный проверяющий тест, удовлетворяющий условиям теоремы.

Основная идея доказательства заключается в представлении (в зависимости от базиса) функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ полиномом Жегалкина $P = K_1 \oplus \ldots \oplus K_h \oplus c$ или в виде аналога полинома Жегалкина $P' = D_1 \oplus \ldots \oplus D_h \oplus c'$, где D_i — дизъюнкция нескольких переменных.

Далее специальными блоками реализуются конъюнкция или дизъюнкция (в зависимости от базиса), отрицание и линейная функция, а затем из блоков строится схема, моделирующая соответствующее представление функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Аналогичная оценка для схем в базисе Жегалкина была получена в [6], однако метод построения легкотестируемых схем из [6] годится только для базисов, содержащих конъюнкцию и линейную функцию ($x \oplus y$ или $x \oplus y \oplus 1$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибер-

нетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Лупанов О. Б.* Асимтотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[2] *Чегис И. А.,Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Тр. МИАН СССР. — 1984. — Т. 51. — С. 270–360.

[3] *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука. Физматлит, 1988. — С. 5–25.

[4] *Редькин Н. П.* Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

[5] *Редькин Н. П.* Дискретная математика. — М.: Физматлит, 2009.

[6] *Reddy S. M.* Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — № 1. — P. 124–141.

Реберные 1-расширения некоторых деревьев

Д. Д. Комаров

komarovdd@gmail.com

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Неориентированным графом называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное множество (множество вершин), а α — симметричное и антирефлексивное бинарное отношение на V(множество дуг).

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* (k — натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1. G^* является реберным k-расширением G, то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k ребер;
2. G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3. α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Ациклический связный граф называется *деревом*.

Дерево называется *сверхстройным*, если все его вершины, кроме корня и листьев, имеют степень 2. Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей $P_{l_1}, \ldots, P_{l_k}$ с общей концевой вершиной. Для однозначного задания сверхстройного дерева достаточно указать длины этих цепей: $(l_1 - 1, \ldots, l_k - 1)$.

Среди деревьев есть представители других хорошо известных семейств графов. Например, *цепь* P_n является частным случаем дерева. Единственное минимальное реберное 1-расширение цепи P_n есть цикл C_n (см. [1]).

Также *звезда* является частным случаем сверхстройного дерева (*звезда* — сверхстройное дерево, в котором нет вершин степени 2). Минимальное реберное 1-расширение звезды $K_{1,k}$ единственно с точностью до изоморфизма и получается соединением двух листьев звезды со всеми остальными листьями звезды и между собой.

Теорема 1. *Пусть граф $G = (V, \alpha)$ состоит из двух звезд с соединенными центрами. Построим граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ из G по следующей схеме: выберем две произвольные вершины из V степени 1, расстояние между которыми равно 3; каждую из выбранных вершин соединим со всеми вершинами степени 1, расстояние до которых от выбранной вершины равно 3. Полученный граф G^* будет являться минимальным реберным 1-расширением графа G.*

Доказательство. Доказательство того, что G^* является реберным расширением G, производится непосредственной проверкой.

Доказательство того, что G^* имеет минимальное количество ребер из всех реберных 1-расширений G, требует более детального рассмотрения различных случаев. Далее приведено лишь краткое доказательство. Пусть существует минимальное реберное 1-расширение графа $G(V, \alpha)$ — граф $G_1(V, \alpha_1)$, причем количество дополнительных ребер меньше, чем у $G^*(V, \alpha^*)$. Пусть c_1 и c_2 — центры звезд, из которых состоит граф G, степени p_1 и p_2 соответственно. Тогда, так как G_1 является реберным 1-расширеним графа G, при удалении любого ребра в полученном графе должны быть две смежные вершины, степени которых не менее, чем p_1 и p_2 соответственно. Рассмотрим случай удаления ребра, инцидентного c_1 и c_2.

Рассмотрим несколько случаев. Пусть при вложении G в G^* без ребра, инцидентного c_1 и c_2:

1. В качестве c_1 и c_2 выступают сами c_1 и c_2 — это невозможно, так как они не смежны.

2. Пусть в качестве c_1 выступает c_1, а в качестве c_2 — вершина d_k степени 1, смежная с c_1 (p_2 дополнительных ребер). Но при удалении ребра, инцидентного d_k и c_1, ни одна из этих двух вершин не сможет выступать в роли c_2. В роли c_2 в таком случае может выступать сама c_2, но понадобится еще два дополнительных ребра (от c_1 до одной из b_i (вершины степени 1, смежные с c_2) и от c_2 до одной из d_i). Также еще надо будет соединить каждую из вершин d_i, кроме d_k и d_m, с c_2. Итого получается $p_2 + p_1$ дополнительных ребер, это больше, чем в схеме для построения G^* — $(p_2 + p_1 - 1)$.
3. Пусть в качестве c_1 выступает c_1, а в качестве c_2 — вершина b_k степени 1, смежная с c_2. Тогда вершина b_k в графе $G_1(V, \alpha_1)$ должна быть соединена со всеми вершинами степени 1, смежными с c_2 в графе $G(V, \alpha)$ ($p_2 - 1$ дополнительных ребер и еще 1 дополнительное ребро, чтобы обеспечить смежность b_k и c_1). При удалении ребра, инцидентного b_k и c_2, понадобится еще два дополнительных ребра (от c_1 до одной из b_i и от c_2 до одной из d_i). Также еще надо будет соединить каждую из вершин d_i с c_2. Итого получается $p_2 + p_1$ дополнительных ребер, это больше, чем в схеме для построения G^* — $(p_2 + p_1 - 1)$.
4. Пусть в качестве c_1 выступает b_k степени 1, смежная с c_2, а в качестве c_2 — вершина d_n степени 1, смежная с c_1. При такой схеме понадобится по крайней мере $(p_2 + p_1 - 1)$ дополнительных ребер — ровно столько, сколько и в схеме для построения G^*. Отсюда получаем, что G^* имеет столько же дополнительных ребер, что и минимальное реберное 1-расширение. ∎

Теорема 2. *Пусть граф $G = (V, \alpha)$ — сверхстройное дерево, являющееся объединением k цепей длины 2 и n ($n > 1$) цепей длины 1. Построим граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ из G по следующей схеме: соединим с корнем все листья, расстояние от которых до корня равно 2; если n четное, то соединим попарно между собой все листья, расстояние от которых до корня равно 1; если n нечетное, то соединим один из листьев, расстояние от которого до корня равно 1, с двумя такими же листьями, а остальные листья, расстояние от которых до корня равно 1, кроме трех уже задействованных, соединим попарно между собой. Полученный граф G^* будет являться минимальным реберным 1-расширением графа G.*

Доказательство. Доказательство того, что граф G^* является реберным 1-расширением графа G, можно провести непосредственной проверкой.

Доказательство того, что граф G^* имеет минимальное количество ребер из всех реберных 1-расширений G, требует более детального рассмотрения различных случаев. Далее приведена схема доказательства.

Пусть существует граф $G_2(V, \alpha_2)$ — минимальное реберное 1-расширение графа G, причем с меньшим количеством ребер, чем у графа G^*. Пусть в графе G вершина максимальной степени c имеет степень s. Тогда граф G_2 при удалении любого ребра должен содержать вершину b, степень которой не меньше, чем s.

Очевидно, что при вложении графа G в любой граф, полученный из G_2 при удалении любого ребра, вершина c будет соответствовать самой себе, а иначе количество дополнительных ребер будет больше, чем в схеме для построения G^*.

Так как в G_2 не может быть вершин степени меньше 2, то снизить количество дополнительных ребер по сравнению со схемой для G^* можно, только либо соединив попарно листья ветвей длины 2, либо листья ветвей длины 1 и 2.

Соединение попарно листьев ветвей длины 2 потребует еще 3 дополнительных ребра на каждую пару ветвей длины 2, что больше, чем в схеме для построения G^*.

Соединение попарно листьев ветвей длины 2 и 1 также потребует 3 дополнительных ребра для каждой тройки ветвей с длинами 2, 1 и 1, против 2 дополнительных ребер в схеме для построения G^*.

Отсюда делаем вывод, что уменьшить количество дополнительных ребер по сравнению со схемой для построения G^* нельзя. Получаем, что G^* — минимальное реберное 1-расширение графа G. ∎

Список литературы

[1] *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. — 1976. — V. 25, № 9. — P. 875–884.

О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в некотором базисе

Ю. А. Комбаров

yuri.kombarov@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Механико-математический факультет

Введение

Минимальные реализации линейных булевых функций (т. е. функций, представимых в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n$, где $\oplus$ означает сложение по модулю два, а c — произвольная булева константа) схемами из функциональных элементов [1] достаточно хорошо изучены. В работе [2] установлено, что $L(c \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) = 4n - 4$ в базисе $\{x\&y, x \vee y, \overline{x}\}$ и $L(c \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) = 7n - 7$ в базисах $\{x\&y, \overline{x}\}$ и $\{x \vee y, \overline{x}\}$ (здесь через $L(f)$ обозначается сложность реализации функции f, т. е. число функциональных элементов в минимальной схеме, реализующей f). Дальнейшие результаты в этом направлении: $L(x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) = 4n - 4$ в базисе $\left\{\overline{x\&y}\right\}$ [3]; $L(x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) = 4n-4$ в базисе $\{x \to y, \overline{x}\}$ [4]; $L(x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1) = 4n-4$ при четных n и $L(x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) = 4n-4$ при нечетных n в базисе $\{\overline{x}\&y, \overline{x}\}$ (см. в [5]). Во всех вышеприведенных работах устанавливается только сложность реализации линейных функций в различных базисах, вопрос об устройстве минимальных схем в них не рассматривается. В работе [6] установлено, что $L(c \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) = 3n-3$ в базисе $\{\overline{x}\&y, \overline{x} \vee y\}$, и показано, что все минимальные схемы в этом базисе имеют определенную блочную структуру.

Основные определения и формулировка результатов

В данной работе рассматриваются минимальные реализации функций $l_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\overline{l}_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$ в базисе Б $= \{E_1, \ldots, E_k, E^-\}$, где $1 \leqslant k \leqslant 6$, элементы $E_1, \ldots, E_k$ — различные двухвходовые функциональные элементы, реализующие одну из функций $x\&y, x \vee y, \overline{x}\&y, \overline{x} \vee y, \overline{x\&y}, \overline{x \vee y}$. Вес инвертора будем считать равным нулю, а вес любого двухвходового функционального элемента — равным единице.

Пусть S — схема в базисе Б. Сумму весов всех входящих в нее элементов будем называть сложностью схемы и обозначать $L(S)$. Будем говорить, что S — минимальная схема для функции f, если S реализует f, причем для любой другой схемы S', реализующей f, верно, что $L(S) \leqslant L(S')$, и среди всех схем, реализующих f и имеющих сложность $L(S)$, схема S содержит наименьшее количество элементов.

Пусть V — выход функционального элемента E_1 или вход схемы, а W — вход функционального элемента E_2. Будем говорить, что *между элементами* E_1 *и* E_2 *(или между соответствующим входом схемы и* E_2*) находится инвертор* E^-, если V подается на вход E^-, а выход E^- подается на W. Будем говорить, что V *связан* с W, если V подается на W или если между E_1 (или входом схемы) и E_2 есть инвертор. Будем называть двухвходовой функциональный элемент E *верхним*, если оба его входа связаны со входами схемы. Такой функциональный элемент существует в любой схеме, которая содержит хотя бы один элемент.

Будем говорить, что в схеме S можно *выделить стандартный блок*, если в ней можно выбрать две вершины (вершинами в данном случае будем называть входы схемы или выходы элементов) V_1, V_2 и три двухвходовых функциональных элемента E_1, E_2 и E_3 так, что вершина V_1 связана со входами элементов E_1 и E_2, вершина V_2 связана со входами E_1 и E_2, выход элемента E_1 связан со входом элемента E_3, выход элемента E_2 связан со входом элемента E_3, выходы элементов E_1 и E_2 не связаны со входами никаких других элементов схемы S (кроме E_3) и при подаче на вершины V_1 и V_2 функций x_1 и x_2 на выходе элемента E_3 реализуется функция $x_1 \oplus x_2$ или $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. Подсхему, состоящую из элементов E_1, E_2, E_3, а также всех инверторов, находящихся между вершиной V_1 и входами элементов E_1 и E_2, между вершиной V_2 и входами элементов E_1 и E_2 и между выходами элементов E_1, E_2 и входами элемента E_3, будем называть *стандартным блоком.* В следующей теореме устанавливается сложность реализации линейных булевых функций в базисе Б.

Теорема 1. *Сложность реализации функций* $l_n = l_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ *и* $\overline{l_n} = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$ *в базисе* Б *равна* $3n - 3$.

Теорема 1 следует из лемм 2 и 3.

Лемма 2. $L(l_n) \leqslant 3n-3$, $L(\overline{l_n}) \leqslant 3n-3$.

Доказательство. Неравенства $L(l_n) \leqslant 3n-3$ и $L(\overline{l_n}) \leqslant 3n-3$ доказываются индукцией по n, поскольку $l_n = l_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \oplus x_n$, $\overline{l_n} = \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_n}$, а линейная функция от двух переменных может быть реализована схемой в базисе Б с весом, равным трем (эта схема является одним из стандартных блоков). ∎

Лемма 3. *Если S_n — минимальная схема, реализующая функцию l_n или $\overline{l_n}$ в базисе* Б, *то из схемы S_n можно удалить не менее трех двухвходовых элементов и, быть может, заменить несколько элементов на инверторы так, что получившаяся схема S_{n-1} будет реализовывать одну из функций l_{n-1}, $\overline{l_{n-1}}$ в базисе* Б, *причем уменьшение сложности $L(S_n)$ схемы S_n будет не меньше* 3, *то есть $L(S_n) \geqslant L(S_{n-1}) + 3$.*

Доказательство леммы 3 проводится при помощи метода забивающих констант, предложенного в [2] и использованного также в [3, 4, 5, 6]. Из-за своего значительного объема доказательство этой леммы не приводится.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 4. *В любой минимальной схеме, реализующей одну из линейных булевых функций l_n и $\overline{l_n}$ в базисе* Б, *можно выделить $n-1$ непересекающихся стандартных блоков.*

Теорема 4 дает описание минимальных схем из функциональных элементов в базисе Б, реализующих одну из линейных булевых функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляемых систем. — М.: МГУ, 1984.

[2] *Редькин Н. П.* Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — 1970. — С. 83–101.

[3] *Редькин Н. П.* О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов // Кибернетика. — 1971. — № 6. — С. 31–38.

[4] *Шкребела И. С.* О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \to y, \overline{x}\}$ // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15, № 4. — С. 100–112.

[5] *Редькин Н. П.* О минимальных и асимптотически минимальных схемах для некоторых индивидуальных булевых функций // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, 18–23 июня 2007 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2007. — С. 11–19.

[6] *Комбаров Ю.А.* О минимальных реализациях линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \to y, \overline{x} \,\&\, y\}$ // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6–9 апреля 2009 г.). — М.: МАКС Пресс, 2009. — С. 145–149.

Циклы длины девять в Pancake-графе

Е. В. Константинова, А. Н. Медведев

e_konsta@math.nsc.ru, an_medvedev@yahoo.com

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Граф Кэли $P_n = (Sym_n, PR)$, $n \geqslant 2$, определенный на симметрической группе Sym_n перестановок $\pi = [\pi_1\,\pi_2\,\ldots\,\pi_n]$, где $\pi_i = \pi(i)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, с порождающим множеством $PR = \{r_i \in Sym_n, 2 \leqslant i \leqslant n\}$ всех префикс-реверсалов r_i, меняющих порядок элементов внутри интервала $[1, \ldots, i]$, $2 \leqslant i \leqslant n$, перестановки π при умножении на нее справа: $[\pi_1\,\ldots\,\pi_i\,\pi_{i+1}\,\ldots\,\pi_n]\,r_i = [\pi_i\,\ldots\,\pi_1\,\pi_{i+1}\,\ldots\,\pi_n]$, называют *Pancake-графом.* Данный граф получил свое имя благодаря Pancake-проблеме [3–5], состоящей в определении диаметра графа P_n, $n \geqslant 2$. По-прежнему, Pancake-проблема является открытой, известны верхние и нижние оценки на диаметр графа, а также его точные значения для $2 \leqslant n \leqslant 17$ [2].

Трудности, возникающие при решении Pancake-проблемы, связаны, в первую очередь, со сложной циклической структурой данного графа: Pancake-граф содержит все циклы длины l, где $6 \leqslant l \leqslant n!$

[6, 7], в частности, он является гамильтоновым [8]. Естественным описанием циклов в Pancake-графе является их представление в виде произведения порождающих элементов.

В [1] вводится следующее определение. *Формой цикла C_l длины l* в графе P_n, $n \geqslant 3$, называется последовательность префикс-реверсалов $C_l = r_{i_1} \ldots r_{i_l}$, где $2 \leqslant i_j \leqslant n$ и $i_j \neq i_{j+1}\,((j+1) \bmod l)$ для любого $j \in \{1, \ldots, l\}$, таких, что $\pi\, r_{i_1} \ldots r_{i_l} = \pi$, где $\pi \in Sym_n$. Цикл C_l длины l также называют l-циклом, а под вершиной графа P_n понимается перестановка, которая этой вершине соответствует. Очевидно, что в зависимости от выбора вершины π и направления обхода любой l-цикл может быть представлен $2\,l$ его формами. *Канонической формой цикла C_l длины l* называется форма с лексикографически максимальной (минимальной) последовательностью индексов $i_1 \ldots i_l$.

На основе данного описания в [1] получена полная характеризация циклов длины шесть и семь.

Теорема 1. *В графе P_n, $n \geqslant 3$, имеется $n!/6$ независимых циклов длины шесть канонической формы $C_6 = r_3\, r_2\, r_3\, r_2\, r_3\, r_2$.*

Теорема 2. *В графе P_n, $n \geqslant 4$, через каждую его вершину проходит ровно $7\,(n-3)$ различных циклов длины семь канонической формы $C_7 = r_k\, r_{k-1}\, r_k\, r_{k-1}\, r_{k-2}\, r_k\, r_2$, где $4 \leqslant k \leqslant n$. В целом в графе имеется $n!\,(n-3)$ различных циклов длины семь.*

Доказательство данных результатов опирается на иерархическое строение графа, которое состоит в следующем. Граф P_n, $n \geqslant 3$, содержит n копий $P_{n-1}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в каждой из которых множество вершин представлено как $V_i = \{[\pi_1 \ldots \pi_{n-1}\, i]$, где $\pi_k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1\}$, $|V_i| = (n-1)!$, а множество ребер представлено как $E_i = \{\{[\pi_1 \ldots \pi_{n-1}\, i], [\pi_1 \ldots \pi_{n-1}\, i]\, r_j\}, 2 \leqslant j \leqslant n-1\}, |E_i| = (n-1)!(n-2)/2$. Любые две копии $P_{n-1}(i)$, $P_{n-1}(j)$, $i \neq j$, соединяются $(n-2)!$ ребрами вида $\{[i\, \pi_2 \ldots \pi_{n-1}\, j],\ [j\, \pi_{n-1} \ldots \pi_2, i]\}$, где

$$[i\, \pi_2 \ldots \pi_{n-1}\, j]\, r_n = [j\, \pi_{n-1} \ldots \pi_2\, i].$$

Префикс-реверсалы r_j, $2 \leqslant j \leqslant n-1$, определяют внутренние ребра в каждой из n копий $P_{n-1}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, а префикс-реверсал r_n определяет внешние ребра между копиями.

В настоящей работе мы продолжаем исследовать циклы нечетной длины. Для циклов длины 9 получен следующий результат.

Теорема 3. *В графе P_n, $n \geqslant 4$, через каждую его вершину проходит $O(n^3)$ различных циклов длины девять следующих канонических форм:*

$$C_9^1 = r_k\, r_{k-1}\, r_i\, r_{k-1}\, r_k\, r_i\, r_{i-1}\, r_{i+1}\, r_2, \quad 3 \leqslant i \leqslant k-2,\ 5 \leqslant k \leqslant n; \quad (1)$$

$$C_9^2 = r_2\, r_{k-i+2}\, r_k\, r_{i-2}\, r_{i-1}\, r_i\, r_{i-1}\, r_k\, r_{k-i+2}, \qquad 4 \leqslant i \leqslant k-1,\ 5 \leqslant k \leqslant n; \quad (2)$$

$$C_9^3 = r_k\, r_{k-j+i-1}\, r_{k-1}\, r_{k-i}\, r_{k-j}\, r_k\, r_i\, r_j\, r_{j-i+1}, \qquad 2 \leqslant i \leqslant j-1,\ i+1 \leqslant j \leqslant k-2,\ 5 \leqslant k \leqslant n; \quad (3)$$

$$C_9^4 = r_k\, r_{k-i}\, r_{k-1}\, r_{k-j+i-1}\, r_{k-j}\, r_k\, r_{j-i+1}\, r_j\, r_i, \qquad 2 \leqslant i \leqslant j-1,\ i+1 \leqslant j \leqslant k-2,\ 5 \leqslant k \leqslant n; \quad (4)$$

$$C_9^5 = r_k\, r_{k-1}\, r_i\, r_{i-1}\, r_{k-1}\, r_k\, r_i\, r_{i+1}\, r_2, \quad 3 \leqslant i \leqslant k-2,\ 5 \leqslant k \leqslant n; \quad (5)$$

$$C_9^6 = r_k\, r_{k-1}\, r_{k-2}\, r_{k-1}\, r_{k-2}\, r_k\, r_3\, r_k\, r_{k-2}, \quad 4 \leqslant k \leqslant n; \quad (6)$$

$$C_9^7 = r_k\, r_{k-1}\, r_{k-2}\, r_i\, r_k\, r_2\, r_k\, r_i\, r_{k-1}, \quad 2 \leqslant i \leqslant k-3,\ 5 \leqslant k \leqslant n; \quad (7)$$

$$C_9^8 = r_k\, r_{k-j+i}\, r_k\, r_j\, r_i\, r_k\, r_{k-j}\, r_{k-i}\, r_{j-i}, \qquad 2 \leqslant i \leqslant j-2,\ i+2 \leqslant j \leqslant k-2,\ 6 \leqslant k \leqslant n; \quad (8)$$

$$C_9^9 = r_k\, r_{k-j+i}\, r_{k-j}\, r_k\, r_j\, r_i\, r_k\, r_{k-i}\, r_{j-i}, \qquad 2 \leqslant i \leqslant j-2,\ i+2 \leqslant j \leqslant k-2,\ 6 \leqslant k \leqslant n; \quad (9)$$

$$C_9^{10} = r_k\, r_{k-j+i}\, r_{k-j+1}\, r_k\, r_j\, r_i\, r_k\, r_{k-i+1}\, r_{j-i+1}, \qquad 2 \leqslant i \leqslant j-1,\ i+1 \leqslant j \leqslant k-1,\ 4 \leqslant k \leqslant n; \quad (10)$$

$$C_9^{11} = r_k\, r_{k-1}\, r_k\, r_{k-1}\, r_k\, r_{k-1}\, r_{k-3}\, r_k\, r_3, \quad 5 \leqslant k \leqslant n. \quad (11)$$

Доказательство данного результата было также проведено на основе иерархического строения графа P_n.

Следующий результат был получен как обобщение результатов [1] и данной работы для циклов нечетной длины. Под записью $(r_{i_1} \dots r_{i_j})^s$ будем понимать $s \geqslant 1$ последовательных применений последовательности префикс-реверсалов $r_{i_1} \dots r_{i_j}$, $j \geqslant 2$.

Теорема 4. *В графе P_n, $n \geqslant 4$, через каждую его вершину проходят циклы нечетной длины следующего канонического вида:*

$$C^1_{2s+3} = (r_k\, r_{k-1})^s\, r_{k-s}\, r_k\, r_s, \tag{12}$$

где $2 \leqslant s \leqslant k-2,\ 4 \leqslant k \leqslant n$*;*

$$C^2_{2s+5} = r_k\, (r_{k-1}\, r_{k-2})^s\, r_{s+1} r_k r_{k-s}, \tag{13}$$

где $1 \leqslant s \leqslant k-2,\ 4 \leqslant k \leqslant n$*.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00244.

Список литературы

[1] *Константинова Е. В., Медведев А. Н.* Циклы длины семь в Pancake графе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2010. — Т. 17, № 5. — С. 46–55.

[2] *Asai S., Kounoike Y., Shinano Y. and Kaneko K.* Computing the diameter of 17–pancake graph using a PC cluster // LNCS. — 2006. — V. 4128. — P. 1114–1124.

[3] *Dweighter H. E* Elementary problems and solutions // Amer. Math. Monthly. — 1975. — V. 82, № 1. — P. 1010.

[4] *Gates W. H., Papadimitriou C. H.* Bounds for sorting by prefix–reversal // Discrete Mathematics. — 1979. — V. 27. — P. 47–57.

[5] *Hyedari M. H., Sudborough I. H.* On the diameter of the pancake network // J. Algorithms. — 1997. — V. 25, №. 1. — P. 67–94.

[6] *Kanevsky A., Feng C.* On the embedding of cycles in pancake graphs // Parallel computing. — 1995. — V. 21. — P. 923–936.

[7] *Sheu J. J., Tan J. J. M., Chu K. T.* Cycle embedding in pancake interconnection networks // Proc. 23rd Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory. — Taiwan, 2006. — P. 85–92.

[8] *Zaks S.* A new algorithm for generation of permutations // BIT. — 1984. — V. 24. — P. 196–204.

Неисправности автоматов, сохраняющие их поведение

О. М. Копытова

omkop@list.ru

Донецкий национальный технический университет

Введение

Конечные автоматы широко используются для описания поведения различных устройств и систем, от управляющих и вычислительных до организационных. Изменения в их структуре и поведении при повреждающих воздействиях окружающей среды во многих случаях адекватно описываются преобразованиями графа переходов, задаваемыми перебросками его дуг [1]. Если при этом не меняются отметки дуг (пары вход-выходных символов), то такие переброски можно понимать как «неисправности» функции переходов автомата. Известно [2], что в результате переброски ровно одной дуги в приведенном автомате получается автомат, не изоморфный исходному, т. е. поведение «неисправного» автомата в этом случае всегда отличается от поведения исправного. Таким образом, всякий приведенный автомат оказывается неустойчивым к переброске ровно одной дуги. Однако в ряде случаев автомат может быть устойчивым (по сохранению поведения) при перебросках более, чем одной дуги. В работе исследуются условия, при которых переброска k дуг в приведенном автомате, где $k > 1$, не изменяет его поведения. Найдены необходимые условия в терминах поведенческих и структурных свойств графа переходов автомата, при которых переброска нескольких дуг в приведенном автомате приводит к автомату, эквивалентному исходному. Показано, что переброска с сохранением поведения допустима только для некоторых дуг, удаление которых из графа переходов автомата приводит к его подграфу, обладающему определенной симметрией.

Постановка задачи

Пусть $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ — приведенный автомат Мили, где A, X, Y — алфавиты состояний, входов и выходов соответственно, а δ, λ — функции переходов и выходов. Автомат A будем также рассматривать как множество дуг E_A, где дуга — это четверка (s, x, y, t), если $\delta(s,x) = t$, $\lambda(s,x) = y$. Пусть $e = (s, x', y', s_1)$ — дуга автомата A. Под переброской дуги e, например, в состояние s_2 будем понимать замену этой дуги дугой (s, x', y', s_2). При $s_1 \neq s_2$ переброску назовём нетривиальной. Далее, если не оговорено противное, рассматриваются нетривиальные переброски. Пусть автомат A' получен из автомата A переброской некоторого множества дуг $M \subseteq E_A$, среди которых хотя бы одна переброска нетривиальная (такие множества перебросок также называем нетривиальными). Задача заключается в том, чтобы определить условия, при которых автомат A' остается изоморфным исходному автомату A.

В [3] сформулированы достаточные условия сохранения поведения автоматом при переброске двух дуг, и показано, что для любого натурального $k > 1$ существует приведенный автомат, в котором найдется подмножество из k дуг, одновременная переброска которых приводит к изоморфному автомату. В настоящей работе основное внимание направлено на получение необходимых условий, при которых возможна переброска дуг в общем случае.

Основные результаты

Переброска двух дуг. Пусть автомат A' является результатом переброски некоторых двух различных дуг в автомате A, например, в автомате A' дуга (s, x', y', s_1) заменена дугой (s, x', y', s_2), а дуга (t, x'', y'', t_1) заменена дугой (t, x'', y'', t_2). Обозначим через ε отношение эквивалентности на множестве состояний прямой суммы автоматов A и A' (состояние s в автомате A' переименовывается в s'). Состояния a и b автомата A называются k-эквивалентными, если для всякого входного слова p длины k выполняется равенство $\lambda(a,p) = \lambda(b,p)$.

Лемма 1. *Состояния s и t 1-эквивалентны.*

Следствие 1. *В автомате с двумя состояниями невозможно перебросить две дуги таким образом, чтобы полученный автомат был изоморфен исходному.*

Лемма 2. $(s, s') \notin \varepsilon$, $(t, t') \notin \varepsilon$.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *на перебрасываемых дугах вход-выходные отметки совпадают: $x' = x''$, причём x' есть начальная буква кратчайшего слова, различающего s и t;*

2) *состояния s и t, из которых перебрасываются дуги, различны.*

Полученные необходимые условия сохранения автоматом поведения при перебросках двух дуг совместно с достаточными условиями из [3] позволяют выделять автоматы такой структуры, при которой возможна переброска, сохраняющая поведение автомата. Более того, на этой основе могут быть определены условия допустимой переброски $2k$ дуг. В этом случае множество M перебрасываемых дуг имеет четную мощность и разбивается на такие пары дуг, для каждой из которых найденные условия выполняются независимо.

Переброска k дуг. Пусть M — множество перебрасываемых дуг в A, $|M| = k \geqslant 2$, а M' — множество переброшенных дуг в A' и $\tilde{M} = M \bigcup \varphi^{-1}(M')$. Обозначим через A_M и $A_{\tilde{M}}$ частичные автоматы, полученные из A в результате удаления всех дуг из множеств M и $\tilde{M}$ соответственно.

Утверждение 4. *Если φ — изоморфизм автомата A на A', то φ — автоморфизм автомата $A_{\tilde{M}}$.*

Частичный автомат R_u с выделенным в нем состоянием u называется идентификатором состояния s автомата A, если при любом гомоморфизме φ автомата R_u в автомат A выполняется равенство $\varphi(u) = s$ [1]. Частичный автомат R_u назовем структурным идентификатором состояния s, если последнее равенство выполняется при любом изоморфном вложении R_u в A. Множество всех идентификаторов состояния s в автомате A, включая и структурные, обозначим $I_s(A)$.

Утверждение 5. *Для любого состояния s из A справедливо $I_s(A_M) \subseteq I_s(A)$.*

Следствие 2. *Если φ — изоморфизм автомата A на A', $\varphi(s) = t$ и $s \neq t$, то $I_s(A_M) = I_t(A_M) = \varnothing$.*

Наличие идентификаторов в автомате A_M позволяет определить множество состояний автомата A, которые остаются неподвижными при любых изоморфизмах A в A' (т. е. при всевозможных перебросках дуг из M, сохраняющих поведение A).

Множество автоморфизмов автомата A_M вместе с операцией их суперпозиции является группой. Обозначим ее G_M.

Теорема 6. *Если автомат A', полученный из A нетривиальной переброской дуг множества M, изоморфен A, то группа G_M нетривиальна.*

Группа G_M определяет некоторое множество неподвижных состояний. В частности, из утверждения 6 и следствия 2 следует, что такими будут все те состояния автомата A, для которых множество идентификаторов в автомате A_M не пусто.

Одним из предельных случаев, когда неподвижны все состояния и группа G_M тривиальна, является следующий. Пусть λ_s^1 — множество вход-выходных слов длины 1, порожденных состоянием s автомата A, которое будем отождествлять с соответствующим ему частичным автоматом.

Следствие 3. *Если для любого $s \in A$ выполняется $\lambda_s^1 \in I_s(A)$, то при любой переброске непустого множества дуг автоматы A и A' не изоморфны.*

Заключение

Полученные комбинаторно-алгебраические условия сохранения поведения при перебросках двух и более дуг позволяют выделить ряд структур автоматов, для которых это возможно. Например, можно указать графы переходов, содержащие в качестве неподвижного ядра сильно связные подавтоматы, а вне его — некоторое множество состояний и инцидентных им дуг, переброска которых не меняет поведения автомата. Это множество дуг определяет некоторую частичную симметрию исходного автомата, которая описывается определенной выше группой G_M.

Список литературы

[1] *Грунский И. С., Козловский В. А.* Синтез и идентификация автоматов. — К.: Наукова думка, 2004.

[2] *Грунский И. С., Копытова О. М.* О структуре контрольного эксперимента для определенно-диагностируемого автомата // Теория управляющих систем. — Киев: Наукова думка, 1987. — С. 40–54.

[3] *Копытова О. М.* О структуре автоматов, сохраняющих поведение при перебросках дуг // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М: Макс-Пресс, 2009. — С. 155–159.

Поиск вставок в бактериальных генах

Е. В. Коротков

genekorotkov@gmail.com

Центр «Биоинженерия» РАН, Москва

В настоящей работе ставилась задача выявления потенциальных сдвигов рамки считывания в генах. Используемые ранее методы имеют определенные недостатки, которые ограничивают их применение и связаны с необходимостью использовать дополнительную информацию. Этих недостатков лишен разработанный ранее математический метод [1]. В данной работе этот метод улучшался для поиска потенциальных сдвигов фазы триплетной периодичности с целью учета возможных сдвигов рамки считывания, возникающих при вставках сравнительно больших фрагментов ДНК ($>$100 оснований ДНК). Усовершенствованным алгоритмом проверялось присутствие сравнительно длинных вставок (длиной, некратной трем основаниям ДНК) в бактериальных генах.

Будем считать, что задана кодирующая нуклеотидная последовательность $S = \{s(k), k = 1, 2, \dots L\}$, где каждое значение $s(k)$ выбирается из алфавита $A = \{a, t, c, g\}$, L есть длина последовательности S, она кратна трем. Введем три рамки считывания в последовательности S и обозначим их T_1, T_2 и T_3. Основание $s(1)$ последовательности S является первым, третьим и вторым основанием кодона для рамки считывания T_1, T_2 и T_3 соответственно. Рамка считывания T_1 реально существует в последовательности S, а рамки считывания T_2 и T_3 можно рассматривать как гипотетические. Определим также три матрицы триплетной периодичности $M_1(i_1, i_2)$, $M_2(i_1, i_2)$ и $M_3(i_1, i_2)$, которые представляют собой матрицы триплетной периодичности, определенные для рамок считывания T_1, T_2 и T_3 для фрагмента последовательности S в координатах от i_1 до i_2. Обозначим этот фрагмент $S(i_1, i_2)$. Элементы матриц $m_1(i, j)$, $m_2(i, j)$ и $m_3(i, j)$ показывают число оснований типа i в последовательности S ($i = 1$ для a, $i = 2$ для t, $i = 3$ для c, $i = 4$ для g), которые встречаются в j-й позиции кодона (j может быть равно 1, 2 или 3) для рамок считывания T_1, T_2 и T_3 соответственно. За начальную фазу матриц M_1, M_2, M_3 возьмем координату k того основания из $s(1)$, $s(2)$ и $s(3)$, которое входит в первую позицию триплета рамок считывания

T_1, T_2 и T_3 соответственно. Для матриц M_1, M_2, M_3 начальная фаза равна 1, 2 и 3 соответственно.

Пусть x_1 и x_2 будут две координаты в последовательности S и пусть x_1 и x_2 выбираются как L_1+3n, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots (L-L_1)/3$, L_1 кратно трем и находится в интервале от 60 до 600. Рассмотрим фрагмент последовательности $S(x_1-L_1+1, x_1)$ и для него построим матрицу триплетной периодичности $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ для рамки считывания T_1 последовательности S. Рассмотрим также фрагменты $S(x_2+1, x_2+L_1)$, $S(x_2+2, x_2+L_1+1)$ и $S(x_2+3, x_2+L_1+2)$ и для этих фрагментов построим матрицы триплетной периодичности $M_1(x_2 + 1, x_2 + L_1)$, $M_2(x_2 + 2, x_2 + L_1 + 1)$ и $M_3(x_2 + 3, x_2 + L_1 + 2)$ для рамок считывания T_1, T_2 и T_3 последовательности S соответственно. Если сразу же за позицией x_1 в последовательности S произойдет вставка фрагмента ДНК длиной $x_2 - x_1 + 1$ или $x_2 - x_1 + 2$ основания ДНК, то она создает сдвиг рамки считывания на одно или два основания и такой же сдвиг фазы триплетной периодичности. В этом случае матрица $M_1(x_1-L_1+1, x_1)$ будет больше похожа на матрицу $M_2(x_2+2, x_2 + L_1 + 1)$ или $M_3(x_2 + 3, x_2 + L_1 + 2)$ соответственно. Если же за позицией x_1 нет вставок нуклеотидов, то матрица $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ будет больше всего похожа на матрицу $M_1(x_2+1, x_2+L_1)$ для $x_1 = x_2$. Затем мы складывали матрицы $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ и $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1+k-1)$ в одну матрицу M и для $k = 1, 2, 3$ рассчитывали взаимную информацию объединенной матрицы по формуле:

$$I_{1k} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} m(i,j)\ln m(i,j) - \sum_{i=1}^{4} x(i)\ln x(i) - \sum_{j=1}^{3} y(j)\ln y(j) + L_1 \ln L_1,$$

где $x_i = \sum_{j=1}^{3} m(i,j)$, $\quad y_j = \sum_{i=1}^{4} m(i,j)$. Затем мы рассчитывали аргумент нормального распределения по формуле:

$$X_{1k} = \sqrt{I_{1k}} - \sqrt{11}. \tag{1}$$

Значение X_{1k} ($k = 1, 2, 3$) представляет собой меру, показывающую уровень триплетной периодичности в объединенной матрице $M = M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1) + M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$. Последовательность S (нуклеотидная последовательность гена) не является случайной последовательностью, так как в генах наблюдается триплетная периодичность. В таком случае мы не можем использовать

X_{1k} $(k = 1, 2, 3)$ как меру подобия матрицы $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ на матрицы и $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$, $k = 1, 2, 3$. Для расчета меры подобия двух матриц $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ и $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$ мы использовали метод Монте-Карло. Для этого объединяли последовательности $S(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ и $S(x_2 + 1, x_2 + L_1)$ в одну последовательность $SS(1, 2 \cdot L_1 + 2)$ и перемешивали ее с сохранением триплетной периодичности. Метод перемешивания был аналогичен тому, что использовался ранее [1]. Мы генерировали 500 случайных последовательностей R с такой же триплетной периодичностью, как и последовательность $SS(1, 2 \cdot L_1 + 2)$. Затем каждая из последовательностей R разделялась на последовательности $S(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ и $S(x_2 + 1, x_2 + L_1)$, и для них мы рассчитывали X_{1k} по формуле (1). Для множества значений X_{1k} мы определяли среднее значение $\bar{X}_{1k}$ и дисперсию $D(X_{1k})$ для $k = 2$ и для $k = 3$. Значения X_{11} для $SS(1, 2 \cdot L_1 + 2)$ равны значениям X_{11} для каждой из случайных последовательностей R при таком способе перемешивания последовательности $SS(1, 2 \cdot L_1 + 2)$. В качестве меры подобия матриц $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ и $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$ мы выбирали величину $Z_{1k} = \frac{X_{1k} - \bar{X}_{1k}}{\sqrt{D(X_{1k})}}$, где $k = 2, 3$. Чем больше значение Z_{1k}, тем более матрица $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ похожа на матрицу $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$, $k = 2, 3$. При отсутствии взаимосвязи $M_1(x_1 - L_1 + 1, x_1)$ с матрицей $M_k(x_2 + k, x_2 + L_1 + k - 1)$, $k = 2, 3$, значения Z_{1k}, $k = 2, 3$, будут малы, а при ее наличии значения велики. Пороговый уровень Z_0 для Z_{1k}, $k = 2, 3$, выбирался равным 8.0.

Для каждого значения x_1 в последовательности S определялось такое значение x_2 и L_1, для которого достигается максимум значения Z_{12} или значения Z_{13}. Назовем такой максимум mZ_{1k}. Затем построим графики зависимости mZ_{1k} от x_1 и x_2 для $k = 2, 3$. Если между позициями x_1^0 и x_2^0 была вставка фрагмента ДНК с длиной, некратной трем основаниям, то максимальное значение для зависимости mZ_{1k} от x_1 будет наблюдаться в позиции x_1^0, а максимальное значение для зависимости mZ_{1k} от x_2 будет наблюдаться в позиции x_2^0 (для соответствующего k). Если вставка была длиной $x_2 - x_1 + 1$, то такие графики наблюдаются для $k = 1$, а если вставка была длиной $x_2 - x_1 + 2$, то такие графики наблюдаются для $k = 2$. График зависимости mZ_{1k} от x_1 представляет собой «гору», вершина которой будет наблюдаться в позиции x_1^0, а график зависимости mZ_{1k} от

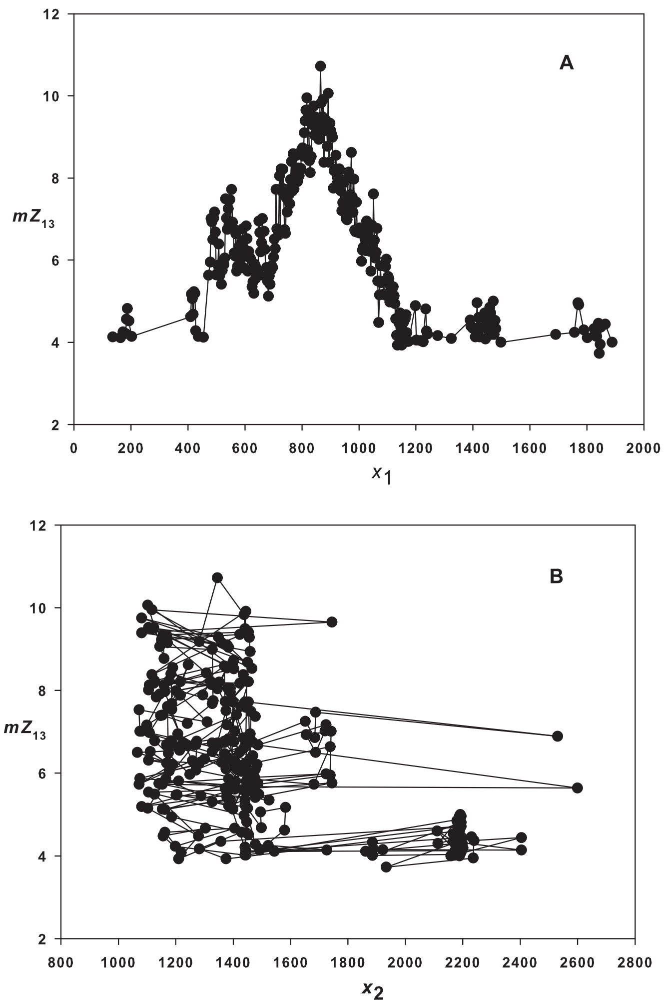


Рис. 1 Зависимость mZ_{13} от x_1 (A) и от x_2 (B) для гена, *ubiquinone oxidoreductase, chain G* из генома *E.coli*

x_2 будет представлять собой «стену» при движении от меньших x_2 к большим.

Были проанализированы гены из 17 бактериальных геномов. Для выявления сдвига фазы триплетной периодичности требуется минимально 240 нуклеотидов, поэтому для изучения были взяты гены с длиной более 1200 нуклеотидов, чтобы уменьшить влияние концевых эффектов на способность выявлять сдвиг фазы триплетной периодичности.

Всего таких генов в изучаемых геномах было 17220. Среди этих генов мы определяли число генов с $mZ_{1k} > Z_0$. Всего было выявлено 1526 генов со вставками вида $3n + 1$ и 1283 гена со вставками вида $3n + 2$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, для которых $mZ_{1k} > Z_0$, т.е. всего 2809 генов. Это составляет 16,3% от изученных генов с длиной более или равной 1200 символам. Одновременно с этим анализировались случайные последовательности из этих геномов, для которых удалось выявить 622 последовательности с $mZ_{1k} > Z_0$. Проведенный анализ показывает, что число false positives в этом случае не превышает 22%. Рассмотрим пример найденных вставок, где $mZ_{12} > Z_0$ (рис. 1). На этом примере показано, что ген, кодирующий *ubiquinone oxidoreductase, chain G* из генома *E.coli*, имеет $x_1^0 \approx 850$, а $x_2^0 \approx 1100$, т.е. размер вставки составляет около 250 нуклеотидов. Этот ген имеет вставку вида $3n + 2$, $n \approx 83$.

Список литературы

[1] *Korotkov E. V., Korotkova M. A.* Study of the triplet periodicity phase shifts in genes // Journal of Integrative Bioinformatics. — 2010. — V. 7, № 3. — P. 131–141.

Фрактальные методы оценки пробега автомобиля в системах спутникового мониторинга

В. В. Костерин

waksoft@gmail.com

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Введение

Использование глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), таких как NAVSTAR (больше известной, как GPS из США), ГЛОНАСС (Россия), Galileo (Европейское сообщество), Beidou/Compass (Китай), для real-time определения местоположения подвижных объектов на практике доказывает эффективность спутникового мониторинга СМ при эксплуатации автотранспорта. Сроки окупаемости довольно дорогостоящих проектов по внедрению СМ составляют от 2 месяцев до полугода, что с точки зрения экономики очень хороший показатель. Однако этот оптимистичный показатель следует относить сегодня не к техническому совершенству и возможностям СМ, а, скорее, к психологическому воздействию на водителей факта непрерывного контроля перемещения автомобиля на маршруте и, как следствие, к повышению дисциплины, более строгому соблюдению скоростного режима и графика движения.

Главным аргументом противников «считать деньги из космоса» остаётся значительное расхождение показаний традиционных средств измерения пробега (спидометр, тахеометр, курвиметр) с измерениями ГНСС. Длительные наблюдения с помощью подобной системы за маршрутом Магнитогорск–Челябинск–Магнитогорск (около 670 км) показали, что разброс спутниковых измерений пробега может превышать 10% (> 80 км), что даёт повод порассуждать о точности, недостаточной для автоматизации расчётов экономических показателей, повод задуматься о погрешностях системы измерений и способах борьбы с ними. Простейшая, казалось бы, задача определения пробега оказывается совсем не так проста, как к ней привыкли относиться, не уделяя должного внимания.

Пробег. Проблемы оценки real-time измерений

Имея координатный ряд, пробег, пройденное расстояние традиционно вычисляют как сумму расстояний между двумя соседними измерениями, т. е. как сумму решений обратной геодезической задачи [1], которая заключается в следующем: даны геодезические координаты B_1, L_1 и B_2, L_2 (широта и долгота) двух точек Q_1, Q_2; требуется найти кратчайшее расстояние S (длину геодезической линии) между заданными точками, а также прямой и обратный азимуты в точках Q_1 и Q_2.

Хорошо известны итерационные методы решения этой задачи: точный метод Бесселя; способ В. Е. Ольховского; способы Висента; метод Андуайе; метод Содано и другие [1], требующие значительных вычислительных ресурсов.

С учётом «скромности» ресурсов автомобильных ГНСС-приемников на практике геодезические координаты преобразуются в прямоугольные [2]:

$$X = (N + H)\cos B \cos L, \quad Y = (N + H)\cos B \sin L,$$

$$Z = \big((1 - e^2)N + H\big)\sin B,$$

где X, Y, Z — прямоугольные координаты точки; B, L, H — геодезические координаты точки (соответственно широта, долгота в радианах и высота в метрах); N — радиус кривизны первого вертикала, м; e — эксцентриситет эллипсоида,

$$N = \frac{A}{\sqrt{1 - e^2(\sin B)^2}}, \quad e^2 = 2a - a^2,$$

где A — большая полуось эллипсоида, равная 6378137 м или 6378245 м; a — сжатие эллипсоида, равное 1/298,257223563 или 1/298,3 соответственно для эллипсоида GRS80 (датум WGS84) и эллипсоида Красовского (1940).

Зная прямоугольные координаты, нетрудно вычислить расстояние между двумя точками — длину прямолинейного элементарного отрезка траектории без учета кривизны в силу его малости. По существу, это обычное интегрирование по Риману без учёта неопределённости при определении координат границ отрезка.

Физические принципы спутниковой навигации предполагают неизбежность ошибок местоопределения приёмников сигналов ГНСС. Источники погрешности известны, немногочисленны, а при развитом наземном секторе и предсказуемы. Действительно, при запасе времени для измерений одной точки (20–40 мин), наличии многочастотной дорогостоящей аппаратуры и наземного сектора для дифференциальной коррекции достигается субсантиметровая точность [3]. Но для мгновенных real-time измерений СМ автотранспорта, практическом отсутствии единого национального координатно-временного и навигационного обеспечения в 95% определения местоположения RMS (среднеквадратическое отклонение) составляет порядка 5,5 м, а с учётом погрешности эфимериса, погрешностей часов спутников, эффектов тропо- и ионосферы, отражения радиосигнала и погрешностей самого приёмника реальная погрешность оценивается в 13–15 м [4].

При движении со скоростью 60 км/ч и квантовании 5 секунд такой элементарный отрезок траектории должен иметь длину порядка 80 м. Точность определения координат концов отрезка 15 м соизмерима с вычисляемой длиной. При мгновенных измерениях, когда значения перечисленных выше погрешностей ГНСС изменяются непрерывно, совместно и труднопредсказуемо, гипотеза о гауссовом законе распределения весьма сомнительна, что подверждается экспериментами и требует в детальном анализе использования непараметрических методов статистики, значительно усложняющих решение задачи точного вычисления пробега.

Таким образом, имеются реализации траекторий с множествами координат точек, координаты которых — случайная величина с неизвестным законом распределения и погрешностью определения, соизмеримой с расстоянием между ними. С учетом объёмов реализаций, описанный факт требует совершенного иного, отличного от принятого, подхода для вычисления пробега и оценки точности.

Фрактальная размерность и пробег

Сейчас наиболее остро стоит вопрос оценки не абсолютной величины пробега, а точности вычисления этой величины, которая характеризует степень доверия к данным СМ при принятии решения об использовании этих данных в корпоративной информационной системе. Проведена серия опытов по исследованию влияния значения квантования на результат вычисления длины траекторной линии, которые привели к, казалось бы, парадоксальному результату — уменьшение времени приводит к непропорциональному увеличению пробега. Объяснение этому факту было найдено в трудах Б. Мандельброта [5] и М. Шредера [6], в которых обсуждаются вопросы измерений в различных пространствах с использованием теории фракталов.

Воспользовавшись стандартной процедурой и окружив каждую измеренную координату кругом радиуса ε и квадратом со стороной ε, и устремив ε к нулю, мы провели вычисления размерности Минковского D_M и размерности Хаусдорфа D. Полученные значения для указанного маршрута равны

$$D_M = 1{,}1387 \text{ и } D = 1{,}1298,$$

что больше топологической размерности $D_T = 1$ кривой. Длина кривой, топологическая размерность которой $D_T = 1$, и есть тот самый пробег, который мы ищем, а десятичная добавка в размерностях Минковского (0,1387) и Хаусдорфа (0,1298) может служить оценкой степени доверия к полученным СМ-данным.

Размерности Минковского D_M и Хаусдорфа D в наших опытах не совпадают, что очень интересно и даёт дополнительную пищу для размышлений о спутниковых измерениях.

Список литературы

[1] *Комаровский Ю. А.* Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении. Учеб. пособие. Изд. второе, перераб. и дополн. — Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2005. — С. 79–95.

[2] ГОСТ Р 51794-2001. Аппаратура радионавигационная глобальной навигационной спутниковой системы и глобальной системы позиционирования. Системы преобразования координат. Методы преобразования координат определяемых точек. — М.: Госстандарт России, 2001.

[3] *Hakli P.* Practical Test on Accuracy and Usability of Virtual Reference Station Method in Finland // FIG Working Week 2004. — Athens, Greece, May 22–27, 2004. — P. 32–48.

[4] Основы спутниковой навигации. Теория и принципы. Системы и обзор приложений. — Thalwil, Switzerland: UBlox, 2007. — С. 48–61.

[5] *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — С. 46–58.

[6] *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — С. 73–78.

Некоторые оценки сложности вентильных схем с кратными путями для недоопределенных матриц

В. В. Кочергин

vvkoch@yandex.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Механико-математический факультет

В данной работе исследуется сложность недоопределенных матриц, т. е. матриц, у которых вместо некоторых элементов стоит символ $*$, при реализации вентильными схемами с кратными путями. Помимо естественным образом возникающего интереса к задаче о сложности реализации невсюду определенных объектов (см., например, [1]), дополнительный интерес в данном случае связан с возможностью посмотреть под несколько другим углом на задачу о сложности индивидуальных последовательностей всюду определенных матриц с целью исследования асиптотики роста сложности — для этой задачи найдено [2] асимптотически точное решение только в случае матриц, состоящих из не более чем двух строк (столбцов), и матриц размера 3×3.

Следуя Н. Пиппенджеру [3], рассмотрим возникающую, например, при изучении сложности вычисления систем одночленов следующую модификацию классических вентильных схем [4].

Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$ с неотрицательными элементами. Ориентированный граф S без ориентированных циклов будем называть *вентильной схемой с кратными путями* (или *вентильной схемой с предписанным числом путей*), *реализующей матрицу* A, если: в S выделено p вершин — входных полюсов и q вершин — выходных полюсов; в S нет ориентированных путей от одного входа к другому, от одного выхода к другому, от выхода к входу; для любой пары (i, j), $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant q$, число ориентированных путей от i-го входа к j-му выходу равно в точности a_{ij}. Через $L(S)$ обозначим число ребер (вентилей) схемы S и положим $L(A) = \min L(S)$, где минимум берется по всем схемам, реализующим матрицу A.

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ — матрица, элементами которой являются целые неотрицательные числа и элементы $*$ (символ $*$ соответствует неопределенному элементу). Такую матрицу будем называть *невсюду определенной* или *недоопределенной* (отметим, что формально полностью определенные матрицы являются частным случаем недоопределенных). Матрица $B = (b_{ij})$ называется *доопределением* матрицы $A = (a_{ij})$ такого же размера, если в матрице B все элементы определены (нет символов $*$) и для любого определенного элемента a_{ij} матрицы A справедливо равенство $a_{ij} = b_{ij}$.

Пусть A — недоопределенная матрица, в которой все определенные элементы целочисленны и неотрицательны. Положим $L(A) = \inf L(B)$, где инфимум берется по всем доопределениям B матрицы A до целочисленной матрицы с неотрицательными элементами. Очевидно, что инфимум достигается. Без ограничения общности можно считать, что в матрицах нет ни строк, ни столбцов, полностью состоящих из нулей и символов $*$.

Утверждение 1. *Пусть последовательность $\{A_n\}$ недоопределенных матриц размера $p \times q$ с полностью определенными последними столбцами $(a_{1q}(n), a_{2q}(n), \ldots, a_{pq}(n))^T$ удовлетворяет при $n \to \infty$ условию $\sum a_{ij}(n) \to \infty$ (сумма берется по всем определенным элементам матрицы $A(n)$). Тогда для последовательности матриц $\{A'_n\}$, где A'_n — матрица, получающаяся из матрицы A_n путем приписывания в качестве $(p+1)$-й строки вектора $(*, \ldots, *, a_{p+1,q}(n))$, выполняется соотношение*

$$L(A'_n) \sim L(A_n) + 3\log_3\left(\max\left(\frac{a_{p+1,q}(n)}{\max(a_{1q}(n), a_{2q}(n), \ldots, a_{pq}(n), 1)}, 1\right)\right).$$

Доказательство. Верхняя оценка является следствием теоремы 2 из [5] — достаточно доопределить последнюю строку пропорционально строке, содержащей максимальный из элементов $a_{1q}(n), a_{2q}(n), \ldots, a_{pq}(n)$.

Нижняя оценка. Требуемая нижняя оценка очевидна в случае справедливости неравенства $a_{p+1,q} \leqslant \max(a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}, 1)$. Пусть теперь выполняется условие $a_{p+1,q} > \max(a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}, 1)$.

Рассмотрим минимальную вентильную схему S, реализующую матрицу A'_n (точнее говоря, некоторое доопределение матрицы A'_n). Выделим в схеме S подсхему S_0, состоящую из всех вершин и ребер, входящих хотя бы в один путь, ведущий от входов к первым p выходам.

Очевидно, что вентильная схема S_0 реализует некоторое доопределение матрицы A_n. Поэтому $L(S_0) \geqslant L(A_n)$.

Для произвольной вершины v вентильной схемы S обозначим через $a_q(v)$ число различных путей, ведущих в вершину v от q-го входа.

Легко понять, что для любой вершины v схемы S_0 выполняется неравенство $a_q(v) \leqslant \max(a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}, 1)$.

Схему S можно получить из схемы S_0 путем последовательного добавления новых вершин и ребер. Покажем, что при добавлении к схеме S_0 не более чем l ребер (и некоторого количества вершин) для любой вершины v получившейся схемы выполняется неравенство $a_q(v) \leqslant 3^{l/3} \max(a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}, 1)$.

Докажем этот факт индукцией по числу вершин, в которые входит хотя бы одно добавленное ребро. Такие вершины будем называть помеченными. Помеченные вершины пронумеруем естественным образом (чтобы не было путей от вершин с большими номерами к вершинам с меньшими).

Если не помечено ни одной вершины, то утверждение очевидно. На каждом шаге обрабатываем очередную помеченную вершину v, в которую ведут ребра из вершин $v_1, \ldots, v_r$ (эти вершины могут повторяться). Используя предположение индукции, получаем:

$$a_q(v) = \sum_{i=1}^{r} a_1(v_i) \leqslant r3^{(l-r)/3} \max(a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}, 1) =$$

$$= 3^{l/3}\max(a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}, 1) \left(\frac{r^3}{3^r}\right)^{1/3} \leqslant 3^{l/3}\max(a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}, 1).$$

При добавлении не более чем $L(S) - L(S_0)$ ребер получим вершину v_0, соответствующую $(p+1)$-му выходу схемы S, для которой справедливо равенство $a_q(v_0) = a_{p+1,q}$. Таким образом, величина $L(S) - L(S_0)$ не меньше, чем $3\log_3\left(\frac{a_{p+1,q}}{\max(a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{pq}, 1)}\right)$. ∎

С помощью утверждения 1 устанавливается асимптотика роста сложности недоопределенных матриц, состоящих либо из двух столбцов, либо из двух строк [6].

Кроме того, утверждение 1 помогает при исследовании асимптотики роста сложности недоопределенных матриц размера 3×3, в частности в следующем случае расположения определенных и неопределенных элементов (с точностью до перестановки строк и столбцов это единственный нетривиальный случай при наличии не менее пяти неопределенных элементов).

Утверждение 2. *Пусть последовательность недоопределенных матриц*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & * \\ * & a_{22}(n) & * \\ * & * & a_{33}(n) \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяет условию $a_{11}(n) + a_{12}(n) + a_{22}(n) + a_{33}(n) \to \infty$. *Тогда*

$$L(A_n) \sim 3 \log_3 \left(\max \left(a_{11}(n), a_{12}(n), a_{22}(n), a_{33}(n), \frac{a_{11}(n) a_{22}(n)}{\max(a_{12}(n), 1)} \right) \right).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11–01–00508.

Список литературы

[1] *Нечипорук Э. И.* О сложности вентильных схем, реализующих булевские матрицы с неопределенными элементами // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 163, № 1. — С. 40–42.

[2] *Кочергин В. В.* О сложности вентильных схем с кратным числом путей // Материалы XVIII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» им. акад. О. Б. Лупанова (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2009. — С. 51–56.

[3] *Pippenger N.* The mimimum number of edges in graphs with prescribed paths // Math. Systems Theory. — 1979. — V. 12, № 4. — P. 325–346.

[4] *Лупанов О. Б.* О вентильных и контактно-вентильных схемах // Доклады АН СССР. — 1956. — Т. 111, № 6. — С. 1171–1174.

[5] *Кочергин В. В.* О сложности вычисления систем одночленов и систем целочисленных линейных форм // Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций. Выпуск III. — М.: Изд-во ИПМ РАН, 2007. — С. 3–63.

[6] *Кочергин В. В.* О сложности вентильных схем: булев и общий случаи // Синтаксис и семантика логических систем: Материалы 3-й Российской школы-семинара, посвященной 80-летию со дня рождения А. И. Кокорина (Иркутск, 10–14 августа 2010 г.). — Иркутск: Изд-во ГОУ ВПО ВСГАО, 2010. — С. 50–53.

Модели и задачи структурного распознавания в исследованиях социальных сетей

А. А. Кочкаров, Л. И. Сенникова

akochkar@rtisystems.ru, s-ludhen@yandex.ru

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Задача построения структур с заданными характеристиками появляется там, где требуется объединить элементы, часто различной природы, в целостную функционирующую систему. В настоящее время, в эпоху «больших задач», создание структур с большой размерностью (с большим числом элементов) имеет особое значение. Эта задача является одной из основополагающих так называемой «сетевой науки» (Network Science) [1]. Развитие глобальных сетей (информационных, социальных, технических) и накопление за последние десятилетия эмпирического материала спровоцировали новый виток изучения сложных многоэлементных сетевых структур [2].

Социальные сети в широком смысле и их виртуальные аналоги — сложноструктурированные системы с определенными правилами взаимодействий между их участниками (агентами, элементами, индивидами). Социальные сети с большим числом участников имеют сложную многоэлементную структуру с нетривиальным набором связей, что существенно усложняет их исследование. В современной науке успешно развивается направление, посвященное анализу социальных сетей (*Social Network Analysis*) [3]. Процессы роста и разрушения в социальных сетях на сегодня практически не изучены, поэтому проблема математического моделирования социальных сетей с помощью всего инструментария дискретной математики и теории графов является актуальной, а положительный опыт применения теоретико-графового подхода к моделированию технических сетевых систем со сложной структурой дает основания предполагать его эффективность и для социальных сетей. Формализовав структуру социальной сети в виде графа с особым видом иерархии, можно ставить задачу распознавания нерегулярных иерархических графов. Необходимо также решать не только задачу распознавания структуры уже существующей сети, но и задачу распознавания самого процесса развития-изменения структуры социальной сети — *задачу структурного распознавания*.

В настоящей работе определен особый класс нерегулярных иерархических графов — *предфрактальный граф* [4], порождаемый множеством затравок с чередованием. Именно этот класс предфрактальных графов может наиболее адекватно описывать структуры сложных многоэлементных сетевых систем при построении моделей. В настоящей работе предложен и обоснован алгоритм распознавания предфрактального графа, порожденного двумя полными затравками с чередованием.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L — множество вершин графа, а E_L — множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = \{1, 2, \dots L-1\}$ графе G_l каждую его вершину связной затравкой $H = (W, Q)$. На первом этапе предфрактальному графу соответствует затравка. При этом об описанном процессе говорят, что предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожден затравкой $H = (W, Q)$.

Процесс построения предфрактального графа, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов, которую и назовем *траекторией*. Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является такой случай, когда вместо единственной затравки H используется множество затравок $H = \{H_t\} = \{H_1, H_2, \dots, H_t, \dots, H_T\}$, $T \geqslant 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t \in H$, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры. Если при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина графа G_{l-1} замещается одной конкретной случайно выбранной затравкой $H_{t*} \in H$, то будем говорить, что *предфрактальный граф* G_L *порожден множеством затравок* $H = \{H_t\}, t = 1, 2, \dots, T, T \geqslant 2$, *с чередованием*. Если при порождении предфрактального графа с чередованием для замещения вершин на последующих шагах порождения выбираются затравки с возрастанием числа вершин, то такой предфрактальный граф будем называть *порожденным с упорядоченным возрастанием затравок*.

Рассмотрим задачу, когда требуется распознать предфрактальный граф, порожденный парой полных затравок с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер.

Переход в траектории $G_1, G_2, \ldots, G_r, \ldots, G_L$ графа с чередованием затравок от текущего графа $G_r = (V_r, E_r)$ к следующему графу G_{r+1} всякий раз подчиняется основным правилам порождения предфрактального графа с чередованием затравок при сохранении смежности старых ребер.

Распознавание предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$ с числом вершин m_1 и m_2 $(m_1 < m_2)$, соответственно, с возрастанием и при сохранении смежности старых ребер, можно осуществить алгоритмом β. Суть алгоритма β заключается в идентификации графов $F_1 = (V_1, E_1)$, $F_2 = (V_2, E_2)$ как затравок предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, а также идентификации траектории самого предфрактального графа.

Теорема. *Всякий предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный парой полных затравок $F_1 = (V_1, E_1)$ и $F_2 = (V_2, E_2)$, $|V_1| = m_1$ и $|V_2| = m_2$ $(m_1 > m_2)$, с упорядоченным возрастанием и сохранением смежности старых ребер, распознается алгоритмом β с полиномиальной трудоемкостью $O(|E_L| + L|V_L|)$.*

Список литературы

[1] *Евин И.А.* Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 121–141.

[2] *Newman M.E.J.* Networks: an introduction. — New York: Oxford University Press, 2010.

[3] *Wasserman S., Faust K.* Social network analysis: methods and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[4] *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. — 2004. — Т. 44, № 6. — С. 1147–1152.

Оценки сложности 1-самокорректирующихся схем для одной последовательности булевых функций

В. М. Краснов

vmkrasnoff@ya.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Введение

Рассматриваются схемы из надежных и ненадежных функциональных элементов [1]. Схема называется 1-*самокорректирующейся*, если при переходе в неисправное состояние одного произвольного ненадежного элемента она реализует ту же самую функцию, что и при правильной работе всех ее элементов. Всякий надежный элемент имеет вес p ($p > 0$) и всегда реализует некоторую приписанную ему функцию из базиса. Каждый ненадежный элемент имеет вес 1 и в исправном состоянии реализует некоторую приписанную ему функцию из базиса, а в неисправном состоянии — булеву константу 0. Пусть $L^B_{1,0}(f)$ — наименьшая из сложностей 1-самокорректирующихся схем в базисе B, реализующих булеву функцию f; под сложностью схемы понимается сумма весов всех элементов этой схемы. Для монотонных симметрических булевых функций $f^n_2(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$ в бесконечном базисе $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \& x_2 \& x_3, \ldots; x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \ldots\}$ установлены оценки

$$\log_3 n - 1 < L^B_{1,0}(f^n_2) \leqslant 3\lceil \log_2 n \rceil + 3 + p,$$

выполняющиеся при $n \geqslant 10$.

Конструктивная верхняя оценка для $L^B_{1,0}(f^n_2)$

Теорема 1. *Для любого натурального $n \geqslant 3$ выполнено неравенство*

$$L^B_{1,0}(f^n_2) \leqslant 3\lceil \log_2 n \rceil + 3 + p.$$

Доказательство. Входы схемы $x_1, \ldots, x_n$ (то есть входы, на которые подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$) пронумеруем соответственно числами $0, 1, \ldots, n-1$ в двоичной записи. Разобьем номера всех входов на две группы k способами. При i-м способе разбиения ($i = 1, \ldots, k$)

номера всех входов с единицей в i-м разряде поместим в первую группу, с нулем в i-м разряде — во вторую группу. Рассмотрим еще «корректирующий» способ разбиения, при котором все номера с четным числом единиц отнесем к первой группе, а с нечетным числом единиц — ко второй.

В соответствии с первым способом разбиения входы одного дизъюнктора соединим со входами схемы с номерами из первой группы, входы другого дизъюнктора соединим со входами схемы с номерами из второй группы. Выходы дизъюнкторов подадим на входы двухвходового конъюнктора. Получим подсхему S_1. Функцию, реализуемую подсхемой S_1, очевидно, можно представить формулой вида $\bigvee x_i x_j$, где x_i отвечает номеру входа из первой группы, x_j — номеру входа из второй группы, а дизъюнкция берется по всевозможным парам (x_i, x_j), отвечающим указанным условиям. Аналогичное построение выполним применительно к другим способам разбиения. Получим подсхемы $S_1, S_2, \ldots, S_{k+1}$. Выходы конъюнкторов подадим на входы надежного $(k+1)$-входового дизъюнктора. В итоге получим некоторую схему S. На выходе схемы S реализуется функция g вида $\bigvee x_i x_j$ (дизъюнкция осуществляется по некоторому множеству пар (i, j), где $i \neq j$), что следует из построения. Значит, выполняется неравенство $g \leqslant f_2^n$.

Предположим $f_2^n > g$ (имеется в виду, что для любого набора $\widetilde{\sigma}$ выполняется неравенство $f_2^n(\widetilde{\sigma}) \geqslant g(\widetilde{\sigma})$ и существует хотя бы один набор $\widetilde{\sigma}'$ такой, что $f_2^n(\widetilde{\sigma}') > g(\widetilde{\sigma}')$), тогда формула, соответствующая функции g, не содержит $x_i x_j$ для какого-то $i \neq j$. Значит, при всех способах разбиения номера i и j находились в одной группе, а это означает, что числа i и j не отличаются ни по одному двоичному разряду, то есть $i = j$. Получили противоречие. Следовательно, $f_2^n \equiv g$.

Методом от противного докажем, что наша схема является 1-самокорректирующейся относительно ошибок типа 0 на выходах элементов. Предположим, что при неисправности какого-то элемента E схема S реализует некоторую нетривиальную функцию неисправности g. Учитывая характер неисправности и тот факт, что в схеме присутствуют только дизъюнкторы и конъюнкторы (реализующие монотонные функции), нетрудно заметить, что при переходе в неисправное состояние элемента E значение на выходе схемы (на любом наборе значений входных переменных) может только уменьшиться.

Следовательно $f_2^n > g$. Это значит, что схема, реализующая функцию g, выдает 0 на каком-то наборе $\widetilde{\sigma}$, содержащем, по крайней мере, две единицы в i-м и j-м разрядах.

Предположим, что номера i и j отличаются в двух или более двоичных разрядах. В этом случае $x_i x_j$ содержится в формулах, соответствующих двум или более способам разделения по отличительным разрядам номеров i и j. Хотя бы одна из подсхем, отвечающих этим формулам, будет исправна при наличии в схеме одного неисправного элемента; и схема выдаст 1 на наборе $\widetilde{\sigma}$.

Пусть номера i и j отличаются в одном двоичном разряде. В этом случае $x_i x_j$ содержится в формулах, соответствующих двум способам разделения. Одна из них отвечает способу разделения по отличительному разряду, а вторая — «корректирующему» способу. Хотя бы одна из подсхем, отвечающих этим формулам, будет исправна при переходе в неисправное состояние одного элемента (подсхемы не имеют общих элементов). Значит, на входном наборе $\widetilde{\sigma}$ получим $g(\widetilde{\sigma}) = 1$. В итоге получаем, что построенная таким образом схема является 1-самокорректирующейся. ∎

Нижняя оценка

Будем рассматривать минимальные схемы, реализующие f_2^n в базисе $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \& x_2 \& x_3, \dots; x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \dots\}$. Для доказательства нижней оценки введем понятие совершенной минимальной схемы, а также опишем процедуру преобразования произвольной минимальной схемы к совершенному виду.

Назовем конъюнктор *ненасыщенным*, если хотя бы на один из его входов подается выход другого конъюнктора.

Назовем дизъюнктор *ненасыщенным*, если хотя бы на один из его входов подается выход другого дизъюнктора.

Будем говорить, что минимальная схема *совершенна*, если в ней нет ненасыщенных элементов.

Теперь опишем процедуру насыщения, которая преобразует схему, не увеличивая ее сложности, однако уменьшает число ненасыщенных элементов.

Введем в схеме S монотонную нумерацию вершин таким образом, чтобы для любой дуги номер начала дуги был меньше номера ее конца [2]. Рассмотрим ненасыщенный элемент E_1 с минимальным номером. Без ограничения общности будем считать, что это конъюнктор. Пусть $E_2, \ldots, E_k$ — это все конъюнкторы, выходы которых подаются на входы элемента E_1. Преобразуем схему следующим образом: на входы E_1 вместо выходов элементов $E_2, \ldots, E_k$ подадим все то, что подается на их входы. Заметим, что E_1 теперь не может быть ненасыщенным, а новых ненасыщенных элементов не появилось. При этом новая схема реализует прежнюю функцию.

Будем проводить данное преобразование, пока не кончатся ненасыщенные элементы. Если после этого появятся «висячие» элементы, то есть элементы, выходы которых не подаются ни на один элемент и не являются выходом схемы, то их можно просто удалить из схемы.

Конъюнктор E назовем *x_i-конъюнктором*, если его вход соединен со входом схемы x_i.

Теорема 2. *Для любого натурального $n \geqslant 6$ выполнено неравенство*

$$L^B_{1,0}(f^n_2) \geqslant 1 + L^B_{1,0}(f_2^{n-\lceil 2n/3 \rceil}).$$

Теорема 3. *Для любого натурального $n \geqslant 10$ выполнено неравенство*

$$L^B_{1,0}(f^n_2) > \log_3 n - 1.$$

Выражаю признательность Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

[2] *Редькин Н. П.* Дискретная математика. — М.: Физматлит, 2009.

О конъюнкторной сложности самокорректирующихся схем для одной последовательности булевых функций

Т. И. Краснова

kotovati@ya.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Механико-математический факультет

Для монотонных симметрических булевых функций

$$f_2^n(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

при растущем n автором была установлена асимптотика

$$L_k^-(f_2^n)\sim n\cdot\min\{k+1,p\},$$

где $L_k^-(f_2^n)$ — инверсионная сложность реализации функции f_2^n в классе k-самокорректирующихся схем в базисе $B=\{\&,-\}$ [1, 2]. Предполагалось, что каждый надежный инвертор имеет вес $p\geqslant 1$, вес каждого ненадежного инвертора равен 1, а все конъюнкторы надежны и имееют нулевые веса. При $p\geqslant k+2$ устанавливается асимптотика

$$L_k^{\&}(f_2^n)\sim (k+2)n,$$

где $L_k^{\&}(f_2^n)$ — конъюнкторная сложность реализации функции f_2^n в том же классе и базисе; здесь предполагается, что вес надежного конъюнктора равен p, ненадежного — единице, а инверторы — надежные и имеют нулевые веса.

Если принять во внимание полученные соотношения, то при $p\geqslant k+2$ получается нижняя оценка:

$$L_k(f_2^n)\geqslant L_k^-(f_2^n)+L_k^{\&}(f_2^n)\sim (k+1)n+(k+2)n=(2k+3)n,$$

где $L_k(f_2^n)$ — сложность реализации функции f_2^n в том же классе схем и в том же базисе при ненулевых весах элементов (вес каждого надежного элемента — как инвертора, так и конъюнктора — равен p, а вес каждого ненадежного равен единице).

Также доказывается асимптотическая верхняя оценка

$$L_k(f_2^n) \lesssim (2k+4)n.$$

Таким образом, имеем $(2k+3)n \lesssim L_k(f_2^n) \lesssim (2k+4)n$.

В работе [3] была установлена асимптотика $L(f_2^n) \sim 3n$ для сложности реализации функции f_2^n в классе обычных схем из функциональных элементов в базисе $B = \{\&, -\}$.

Рассматриваем схемы из функциональных элементов в базисе $B = \{\&, -\}$, реализующие булеву функцию $f(\widetilde{x})$ [1, 2].

Возьмем произвольную схему S в базисе B. Элемент E^- назовем x_i-*блокиратором*, если E^- — единственный инвертор в каком-то пути Z из входа x_i (т. е. входа схемы, отвечающего переменной x_i) в E^-; все остальные элементы из Z (т.е. конъюнкторы), отличные от E^-, будем считать x_i-*предблокираторными*.

Лемма 1. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ не представима в виде*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = x_i \& g(x_1, \ldots, x_m), \tag{1}$$

то любой путь из входа x_i в выход (т. е. в выходной элемент) схемы содержит x_i-блокиратор.

Лемма 2. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ не представима в виде*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \overline{x_i \& g(x_1, \ldots, x_m)}, \tag{2}$$

то ни один x_i-блокиратор не может быть выходным элементом схемы.

Блокираторы в самокорректирующихся схемах

Рассматриваем схемы из надежных и ненадежных функциональных элементов в базисе $B = \{\&, -\}$. Схема называется k-*самокорректирующейся*, если при переходе в неисправное состояние не более чем k произвольных ненадежных элементов она реализует ту же самую функцию, что и в исправном состоянии всех ее элементов [4]. Каждый надежный элемент имеет вес p, где $p \geqslant k+1$, и всегда реализует одну и ту же приписанную ему функцию из базиса. Каждый ненадежный элемент имеет вес 1 и в исправном состоянии реализует некоторую приписанную ему функцию из базиса, а в неисправном состоянии — булеву константу δ (эта константа предполагается фиксированной и заранее известной). Пусть $L_k(f)$ — наименьшая из сложностей k-самокорректирующихся схем, реализующих булеву функцию f; под сложностью схемы понимается сумма весов всех элементов этой схемы.

Лемма 3. *Если k-самокорректирующаяся схема S реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_m)$, существенно зависящую от переменной x_i и непредставимую в виде (1), то общий вес x_i-блокираторов в S не меньше, чем $k+1$.*

Лемма 4. *Если k-самокорректирующаяся схема S реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_m)$, существенно зависящую от переменной x_i и непредставимую в виде (1) или (2), то сумма весов всех элементов, следующих за x_i-блокираторами в S, не меньше $k+1$.*

Нижняя оценка конъюнкторной сложности

Под *конъюнкторной сложностью* $L_k^{\&}(S)$ *схемы* S понимается сумма весов всех конъюнкторов в S (при этом можно считать, что все инверторы имеют нулевые веса). Для любой схемы S, как нетрудно заметить, существует эквивалентная ей схема S', которая содержит те же конъюнкторы, что и S, и в которой нет цепей из двух и более инверторов; именно такие схемы будем рассматривать ниже. Пусть $p \geqslant k+2$, а $L_k^{\&}(f)$ — наименьшая из конъюнкторных сложностей k-самокорректирующихся схем, реализующих булеву функцию f.

Рассмотрим реализацию монотонных симметрических булевых функций $f_2^n(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$ (т. е. пороговых симметрических функций с порогом 2) k-самокорректирующимися схемами из функциональных элементов в базисе B. Заметим, что f_n^2 существенно зависит от всех своих переменных и не представима в виде (1) или (2).

Нижние оценки будем доказывать в предположении, что на входы схем наряду с переменными подаются константы 0 и 1. Ясно, что получаемые оценки справедливы и для случая, когда на входы схем разрешается подавать только переменные. При этом предположении любая схема в рассматриваемом базисе обладает свойствами [5].

Лемма 5. *При $n \geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$L_k^{\&}(f_n^2) \geqslant L_k^{\&}(f_{n-1}^2) + k + 2.$$

Верхняя оценка конъюнкторной сложности

Для доказательства верхних оценок воспользуемся обобщенной конструкцией М. И. Гринчука [6] из работы Н. П. Редькина [5].

Теорема 6. *При растущем n выполняется соотношение*

$$L_k^{\&}(f_2^n) \sim (k+2)n.$$

Теорема 7. *При $p \geqslant k+2$ имеет место соотношение*

$$L_k(f_2^n) \lesssim (2k+4)n.$$

Выражаю признательность Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[2] *Редькин Н. П.* Дискретная математика. — М.: Физматлит, 2009.

[3] *Краснова Т. И.* Асимптотически минимальные схемы для одной последовательности булевых функций // Вестник Московского университета. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика.— 2009. — № 3. — С. 53–56.

[4] *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

[5] *Редькин Н. П.* Асимптотически минимальные самокорректирующиеся схемы для одной последовательности булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, № 2. — С. 62–79.

[6] *Гринчук М. И.* О монотонной сложности пороговых функций // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности: Сб. науч. тр. — Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992. Вып. 52.— С. 41–48.

Онлайновая упаковка прямоугольников в полосы

Н. Н. Кузюрин

nnkuz@ispras.ru

Институт системного программирования РАН, Москва

Задача упаковки прямоугольников в несколько полос заключается в следующем. Входом является конечная последовательность открытых прямоугольников $T = \{T_1, \dots, T_n\}$, где $h(T_j)$ и $w(T_j)$ — соответственно высота и ширина прямоугольника T_j, $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ — множество полубесконечных вертикальных полос, где w_i — ширина i-й полосы.

Требуется найти ортогональное размещение последовательности прямоугольников T по этим полосам (без вращений и пересечений, стороны прямоугольников параллельны сторонам полос), минимизирующее полную высоту этого размещения, то есть максимум по всем прямоугольникам и по всем полосам расстояния от дна полосы до верхней границы прямоугольника.

Даже для случая одной полосы рассматриваемая задача является NP-трудной, поскольку ее частными случаями являются задача об упаковке в контейнеры (bin packing). Поэтому целесообразно изучать приближённые алгоритмы для этой задачи. Особый интерес представляют так называемые онлайновые алгоритмы (алгоритмы, работающие в режиме on-line). Это означает, что множество T рассматривается как последовательность, члены которой подаются на вход алгоритма один за другим, причем размещение очередного прямоугольника из T в полосах из C проводится без какой-либо информации о последующих членах последовательности.

Наиболее исследованы онлайновые алгоритмы для случая одной полосы (см. например [1, 2]). Задачу об упаковке прямоугольников в несколько полос начали исследовать сравнительно недавно. Первые эффективные c-приближенные алгоритмы для этой задачи (где c — конкретная константа) были получены в [3].

Один частный случай задачи, в котором все полосы имеют одинаковую ширину (можно считать, что она равна 1), недавно привлек внимание ряда исследователей и получил название Multiple Strip Packing (MSP) [4].

Именно эта задача рассматривается в данной заметке, причем для нее предлагается алгоритм, работающий в режиме on-line, и проводится его вероятностный анализ. Отметим, что вероятностному анализу различных эвристик одно- и двумерной упаковки посвящено много работ. Целевой функцией в таком анализе обычно является величина незаполненной площади от дна полос до верхней грани прямоугольников.

Опишем так называемую стандартную вероятностную модель для этого класса задач. Будем считать, что для каждого прямоугольника высота h_i и ширина w_i имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Будем предполагать, что все случайные величины w_i, h_i независимы в совокупности, и обозначать через Σ математическое ожидание площади, не заполненной прямоугольниками, между основанием полос и верхней границей самого верхнего шельфа. Будем предполагать, что число прямоугольников n — бесконечно большая величина ($n \to \infty$).

Нами предложен некоторый полиномиальный алгоритм A для задачи MSP, работающий в режиме on-line, и проведен его вероятностный анализ для описанной выше вероятностной модели. Доказано, что для любого фиксированного m математическое ожидание незаполненной площади есть величина $O(n^{2/3})$. При этом предполагается, что алгоритм не знает числа прямоугольников n (так называемые open-end on-line алгоритмы).

Более формально, справедлива следующая

Теорема. *Существует полиномиальный алгоритм для задачи MSP, работающий в режиме on-line, для которого при $n \to \infty$ справедлива оценка: в стандартной вероятностной модели для любого фиксированного m*

$$\Sigma = O\left(n^{2/3}\right).$$

Для случая $m = 1$ сходный результат был получен в [5], однако при условии, что алгоритм заранее знает число n. Таким образом, наш результат усиливает и обобщает аналогичный результат из [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00768.

Список литературы

[1] *Csirik J., Woeginger G. J.* Shelf algorithms for on-line strip packing // Inf. Process. Lett. — 1997. — V. 63, № 4. — P. 171–175.

[2] *Кузюрин Н. Н., Поспелов А. И.* Вероятностный анализ шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу // Дискретная математика. — 2006. — Т. 18, № 1. — С. 76–90.

[3] *Жук С. Н.* Приближенные алгоритмы упаковки прямоугольников в несколько полос // Дискретная математика. — 2006. — Т. 18, № 1. — С. 91–105.

[4] *Ye D., Han X., Zhang G.* Online multiple strip packing // Theor. Computer Science. — 2011. — V. 412, № 3. — P. 233–239.

[5] *Coffman E. G., Shor P. W.* Packings in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms // Algorithmica. — 1993. — V. 9. — P. 253–277.

Сведение двух подклассов систем линейных неравенств к задачам распределения ресурсов

Е. А. Куликова

kate.kulikova@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В работе рассматриваются признаки сводимости двух подклассов систем линейных двусторонних неравенств транспортного типа к задачам распределения ресурсов в древовидной иерархической структуре или к задачам поиска допустимой циркуляции в транспортной сети.

Известны классические результаты линейной алгебры, позволяющие решать системы линейных неравенств: это, например, теорема Александрова – Фань Цзы или теорема Черникова [1]. В настоящее время развиваются алгоритмы решения систем линейных равенств и неравенств, основанные на теоремах об альтернативах, представленные в работах Голикова и Евтушенко [2]. Также к подобным системам применяется сведение к задачам линейного программирования и их решение, например, методом Кармаркара с оценкой вычислительной сложности $O(n^{3,5}L)$, где n — число неизвестных, а L — длина битового входа задачи, или модификацией метода Кармаркара [3] из класса алгоритмов внутренних точек с оценкой вычислительной сложности $O(n^3L)$.

Рассмотрим систему линейных двусторонних неравенств транспортного типа с n неизвестными и m ограничениями:

$$\mathbf{b} \leqslant A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{c},\ x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$\mathbf{b} \in R^m,\ \mathbf{c} \in R^m,\ A = \|a_{ij}\|_{m\times n},\ a_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Поставим следующий вопрос: при каких условиях на форму матрицы A подобные системы неравенств могут быть сведены к задачам распределения ресурсов, для которых существуют сильнополиномиальные алгоритмы решения? В работе [4] изучается подкласс многоиндексных систем линейных неравенств, которые сводятся к задаче поиска допустимой циркуляции в транспортной сети. В данной работе для произвольной системы неравенств транспортного типа (1) разработан признак сводимости к задачам распределения ресурсов в древовидной иерархической структуре либо к задаче поиска допустимой циркуляции в транспортной сети.

Для различных вектор-строк $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ и $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ матрицы A строку $\mathbf{a}_i$ будем называть *вложенной* в строку $\mathbf{a}_j$, если $a_{ik} \leqslant a_{jk}$, $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$. Также назовём вектор-строки $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ и $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ матрицы A *дополнительными*, если $a_{ik} + a_{jk} \leqslant 1$, $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$.

Будем говорить, что матрица A *удовлетворяет свойству* 1, если для любых двух строк этой матрицы одна из них либо вложена в другую, либо дополнительна с ней. Определим также, что матрица A *удовлетворяет свойству* 2, если множество её строк может быть разбито на два непересекающихся подмножества, каждое из которых удовлетворяет свойству 1.

Теорема 1. *Если матрица A системы неравенств* (1) *удовлетворяет свойству* 1, *то для неё можно построить эквивалентную древовидную иерархическую структуру, решение задачи распределения ресурсов в которой определяет допустимое решение системы* (1).

Задачи распределения ресурсов в древовидных иерархических структурах изучены в работе [5], где для их решения предложен метод приведённых границ, имеющий вычислительную сложность $O(m)$, где m — число элементов структуры. Значения количества ресурса на листовых элементах структуры в допустимом решении задачи распределения ресурса будут определять значения переменных в решении исходной системы линейных неравенств.

Теорема 2. *Если матрица A системы* (1) *удовлетворяет свойству* 2, *то для неё может быть построена задача поиска допустимой циркуляции в транспортной сети, такая, что подмножество компонент её решения определяет допустимое решение исходной системы неравенств.*

В работе предложен конструктивный алгоритм построения транспортной сети с двусторонними пропускными способностями дуг, соответствующей системе неравенств транспортного типа (1), удовлетворяющей свойству 2. Для поиска допустимой циркуляции в транспортной сети можно применить алгоритм Карзанова [6], который при рассматриваемом сведении имеет вычислительную сложность $O((n+m)^3)$.

Таким образом, для систем неравенств, удовлетворяющих свойствам 1 или 2, в которых $m = O(n)$, рассматриваемое сведение позволяет значительно сократить время поиска допустимого решения, так как методы построения эквивалентных задач и алгоритмы их решения имеют эффективные полиномиальные оценки с вычислительной сложностью меньшей, чем для общих методов линейной алгебры. Для систем линейных двусторонних неравенств транспортного типа, удовлетворяющих свойству 1, поиск допустимого решения имеет вычислительную сложность $O(nm^2)$, а для систем, удовлетворяющих свойству 2, — $O((n+m)^3)$.

Список литературы

[1] *Черников С. Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.

[2] *Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г.* Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств // Докл. РАН. — 2001. — Т. 381, № 4. — С. 444–447.

[3] *Ye Y.* An $O(n^3L)$ potential reduction algorithm for linear programming // Mathematical Programming. — 1991. — P. 239–258.

[4] *Афраймович Л. Г., Прилуцкий М. Х.* Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 6. — С. 194–205.

[5] *Прилуцкий М. Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 2. — С. 149–156.

[6] *Карзанов А. В.* Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков // ДАН СССР. — 1974. — Т. 215, № 1. — С. 49–52.

Связь вычислительных и динамических свойств коллективов автоматов в дискретной среде

А. Н. Курганский

topologia@mail.ru

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Введение

Рассматриваются коллективы автоматов с одним состоянием, взаимодействующих со средой, заданной в виде графа. Такой коллектив рассматривается как цельный динамический вычислительный автоматоподобный объект, распределенный по среде. В отличие от конечных автоматов, где мера изменения состояния равна одному состоянию в единицу времени, для рассматриваемой модели возможны разные подходы к определению этой меры. Предлагаемый подход основывается на следующих рассуждениях. Во-первых, так как элементарной частью коллектива является автомат с одним состоянием, то состояние всего коллектива естественно определять его геометрией. Во-вторых, всякое вычисление некоторым объектом невозможно без изменений в этом объекте, поэтому вычисление коллективом автоматов должно быть связано с изменениями его геометрии. Проиллюстрируем сказанное на примере шахматной доски с несколькими пешками. Пусть пешки могут делать движение на одну клетку в любом из четырех направлений в один такт дискретного времени. Введем на доске естественным образом двумерную систему координат. Составим из пешек на доске какую-нибудь фигуру, например, букву «О», и посмотрим на эти пешки как один цельный объект. Для него определяем скорость перемещения по шахматной доске как среднюю скорость составляющих его пешек. Пусть теперь объект движется с максимальной скоростью «одна клетка в единицу времени» в одном направлении. Может ли объект при этом перестроиться из буквы «О», например, в букву «Т»? Очевидно, что нет. То есть при максимальной скорости в примере в объекте невозможны вычисления. Эта идея, взятая из [1], применяется к коллективам автоматов для определения связи между скоростью w изменения состояния коллектива (вычислительное свойство) и скоростью v перемещения (динамическое свойство). Подчеркивая физические аналогии, в работе используется для краткости слово «тело» как синоним «коллектива автоматов».

Основные результаты

Назовем $D = \{1, 2, \ldots, m\}$ множеством актуальных пространственных направлений. Среда — ориентированный граф. Каждой дуге графа приписано направление из D. Если различные дуги входят в одну вершину, то говорим, что они пересекаются. Считаем, что граф вложен в n-мерное аффинное метрическое пространство E так, что дуги среды являются отрезками прямых, имеют длину $\frac{1}{n+1}$ и дуги одного направления лежат на параллельных прямых. Зафиксируем систему отсчета в E. Тогда каждая вершина и каждая точка дуг получают n-мерную координату в E. Пространство E назовем абсолютным, а координаты в нем абсолютными пространственными координатами.

Элементарным телом назовем автомат Мили с одним состоянием. Для удобства говорим, что изоморфные элементарные тела имеют одинаковые цвета, неизоморфные — разные. Предполагаем, что используются r различных цветов, пронумерованных целыми от 1 до r. В каждый целочисленный момент времени t элементарное тело b находится на какой-либо одной дуге $b(t)$ среды. Входным сигналом тела b, находящегося на дуге e, входящей в вершину v, является упорядоченный набор чисел $(p_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant |D|, 1 \leqslant j \leqslant r}$, где p_{ij} — число элементарных тел цвета j, находящихся на дуге направления i входящей в вершину v. Выходом тела b является направление из D. Если выходом тела b, находящегося в момент t на дуге, входящей в вершину v, является направление i, то в момент $t+1$ он находится на дуге направления i, исходящей из вершины v. Если направления дуг $b(t)$ и $b(t+1)$ совпадают, то говорим, что *внешнее состояние* тела b не изменилось и оно движется прямолинейно. Иначе говорим, что внешнее состояние b изменилось. Полагаем, что элементарное тело движется прямолинейно, если все пересекающие дуги пусты.

Представим теперь дискретную динамику b на графе непрерывной динамикой в пространстве E. Координату b в момент t обозначим через $x_b(t)$. Пусть $b(t) = (v_0, v_1)$, $t \in Z$, и n-мерные координаты вершин v_0 и v_1 равны x_0 и x_1 соответственно, тогда $x_b(t+\lambda) = x_0 + (x_1 - x_0)\cdot\lambda$, $0 \leqslant \lambda < 1$.

Обозначим через $\tau_b(t)$ меру изменений внешнего состояния b, состоявшихся к моменту времени t. По определению, если с t_1 до t_2 b двигалось прямолинейно, то $\tau_b(t_1) = \tau_b(t_2)$. Величину $\tau_b(t)$ назовем собственным временем, а $w_b(t) = \tau_b(t+1) - \tau_b(t)$ скоростью собственного времени b. Величину $v_b(t) = x_b(t+1) - x_b(t)$ назовем абсолютной скоростью перемещения b.

Пару (x,t) пространственных координат $x \in E$ и времени t называем пространственно-временной координатой в абсолютной системе отсчета O.

Пусть D является множеством векторов $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{m}\}$ в пространстве E. Обозначим $e_i = (\mathbf{i}, 1)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Назовем $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ множеством *актуальных пространственно-временных* направлений, которые образуют абсолютную *актуальную систему отсчета* Q. В общем случае $m \geqslant n$.

Определение 1. *Тело — конечное множество элементарных тел.*

Пусть тело $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Тогда абсолютной (средней) координатой тела B в момент абсолютного времени t называется $x_B(t) = (x_1(t) + \cdots + x_k(t))/k$. Назовем $v_B(t) = x_B(t+1) - x_B(t)$ абсолютной скоростью перемещения тела B. Обозначим через $\tau = \tau_B(t)$ меру изменения внешнего состояния тела B и назовем её собственным временем B. Величину $w_B(t) = \tau_B(t+1) - \tau_B(t)$ назовем скоростью собственного времени тела B.

Определение 2. *Для любого тела B $w_B(t) = 0 \Leftrightarrow \forall_{b\in\ B} w_b(t) = 0$.*

Следствие 1. *Для любого тела B, если $|v_B(t)| = 1$, то $w_B(t) = 0$.*

Естественно ставить вопрос о структурной эквивалентности тел. Поскольку два тела с различной скоростью заведомо находятся в различных внешних состояниях, понятие внешнего состояния не позволяет сравнивать такие тела. Чтобы уметь это делать, введем понятие систем отсчета, связанных с телом так, что внешнее состояние тела будет представлено как скорость тела и его *внутреннее состояние*, независящее от скорости.

Обозначим через $x_{AB}(\tau_B)$, $v_{AB}(\tau_B)$, $w_{AB}(\tau_B)$ и $\tau_{AB}(\tau_B)$ соответственно координату, скорость перемещения, скорость собственного времени и собственное время тела A в момент времени τ_B в системе отсчета O_B, связанной с телом B. По определению: $x_{BB}(\tau_B) \equiv 0$, $v_{BB}(\tau_B) \equiv 0$ и $w_{BB}(\tau_B) \equiv 1$.

Определение 3. *Тела A и B аффинно изоморфны (находятся в одном внутреннем состоянии) в моменты собственного времени τ_A и τ_B соответственно, если $\{(b, x_{bA}(\tau_A)) \mid b \in A\} = \{(\varphi(b), x_{bB}(\tau_B)) \mid b \in B\}$ для некоторой биекции $\varphi : A \to B$, такой, что $b \in A$ и $\varphi(b) \in B$ изоморфны.*

Тело B назовем инерциальным в системе отсчета O_A тела A, если $v_{BA}(\tau_A)$ и $w_{BA}(\tau_A)$ константы. Здесь рассматриваются только инерциальные тела. Система отсчета, связанная с инерциальным телом, называется инерциальной.

По определению пространственно-временные координаты одних и тех же событий в разных инерциальных системах отсчета связаны аффинным преобразованием. Обозначим через $L_{BA} : O_B \to O_A$ аффинное преобразование такое, что всякое событие (x, τ_B) в O_B совпадает с событием $L_{BA}(x, \tau_B)$ в O_A.

Не ограничивая общности, полагаем $x_{BA}(0) = 0$ и $\tau_{BA}(0) = 0$. Тогда L_{BA} является линейным преобразованием. Очевидно следующее утверждение.

Лемма 1. *$\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ являются собственными векторами L_{BA}.*

Выберем в $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ линейно-независимое подмножество размерности $n+1$. Тогда мы можем пользоваться наряду с координатами $(x_1, \dots, x_n, t)$ в O_A также координатами $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ в Q_A. Пусть $M_A : Q_A \to O_A$ преобразование, связывающее координаты в Q_A и O_A. По определению $M_A = M_B$ для всех тел A и B. Пусть $\Lambda_{BA} : Q_B \to Q_A$ преобразование, связывающее координаты в системах отсчета Q_B и Q_A. Из определений следует

Теорема 2. $L_{BA} = M \cdot \Lambda_{BA} \cdot M^{-1}$.

Λ_{BA} имеет диагональный вид, поэтому число собственных векторов L_{BA} равно $n+1$. Отсюда получаем:

Следствие 2. *Если $|D| \neq n+1$, то в общем случае не существует L_{BA}.*

Чтобы однозначно определить τ_B, достаточно определить M и Λ_{BA}, т. е. задать масштаб и эталон. По определению, например, можно положить, что точка $(x_1, \dots, x_n, \tau_A) = (0, \dots, 0, 1)$ в O_A совпадает с $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = (1, \dots, 1)$ в Q_A. Отсюда следует утверждение.

Теорема 3. *Для 1-мерной среды*

$$L_{BA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_{BA}} & \frac{v_{BA}}{w_{BA}} \\ \frac{v_{BA}}{w_{BA}} & \frac{1}{w_{BA}} \end{pmatrix}.$$

Следствие 3. $v_{AB} = -v_{BA}$ *и* $w_{AB} \cdot w_{BA} = 1 - v_{AB}^2 = 1 - v_{BA}^2$.

Список литературы

[1] *Пуанкаре А.* О науке. — М.: Наука, 1983.

[2] *Kurgansky O.* A state of a dynamic computational structure distributed in an environment: a model and its corollaries // e-Print arXiv: 1007.3836. — 2010.

Построение квадрангуляций поверхностей с заданными свойствами

С. А. Лавренченко

lawrencenko@hotmail.com, http://lawrencenko.ru

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва

Строится класс так называемых позвоночных квадрангуляций замкнутых ориентируемых поверхностей. Свойства позвоночных квадрангуляций предопределены их позвоночниками; в частности, род g позвоночной квадрангуляции сферы Σ_g с g ручками равен 1-му числу Бетти ее позвоночника. Этот ключевой результат лежит в основе так называемого спинального метода генерирования квадрангуляций с предписанными свойствами путем манипуляций с позвоночником. Спинальный метод позволяет контролировать род, число вершин и хроматические числа строящейся квадрангуляции путем подходящего выбора графа в качестве ее позвоночника. Например, любое нетривиальное дерево является позвоночником некоторой бихроматической квадрангуляции сферы. Попутно получены простые доказательства одного результата Уайта [1], а также результатов Хартсфилд и Рингеля [2] о минимальных квадрангуляциях. Подход в [2] основан на довольно сложном и утомительном в применении методе графов токов. В противоположность тому методу спинальный метод прост и позволяет генерировать много больше минимальных квадрангуляций.

Сначала сформулируем одну гомологическую лемму. Пусть P — топологический полиэдр (возможно, несвязный) в евклидовом пространстве E^3. Обозначим через $N^3(P)$ 3-мерную окрестность у P малого радиуса. Поскольку $N^3(P)$ представляет собой 3-мерное тело, его граница $\partial N^3(P)$ является объединением некоторого числа непересекающихся топологических сфер с ручками. Обозначим общее число тех сфер через $\#\mathrm{comp}\,\partial N^3(P)$ и общее число ручек у них через $\#\mathrm{hand}\,\partial N^3(P)$. Пусть $\beta_k(P)$ обозначает k-е число Бетти у P.

Лемма 1 [3]. *Для любого топологического полиэдра P в E^3 размерности* 0, 1 *или* 2, *возможно, состоящего из несвязных компонент, справедливы следующие равенства:* $\#\mathrm{comp}\,\partial N^3(P) = \beta_0(P) + \beta_2(P)$ *и* $\#\mathrm{hand}\,\partial N^3(P) = \beta_1(P)$.

Рассматриваются только *простые* графы, т. е. без петель и без кратных ребер. Под *квадрангуляцией* сферы Σ_g с g ручками с графом G подразумевается *четырехугольная укладка* $G \hookrightarrow \Sigma_g$, т. е. каждая грань ограничена (простым) циклом длины 4.

Заготовим две непересекающиеся копии G' и G'' графа G. Вершина v' в G' и соответствующая вершина v'' в G'' называются *близнецами* друг друга. Каждую вершину в G' соединим ребрами со всеми соседями ее близнеца в G'', но не с самим близнецом. Получаемый таким образом граф известен как *композиция* графа G с графом $\overline{K_2}$ — несвязным графом с двумя изолированными вершинами. Будем обозначать такую специальную композицию графов как $G[:]$ и называть ее *плетенным удвоением* графа G.

Лемма 2. *Для любого графа G без изолированных вершин его плетенное удвоение $G[:]$ квадрангулирует поверхность $\partial N^3(G)$, т. е. можно уложить $G[:]$ на эту поверхность так, что каждая грань будет четырехугольной.*

В случае когда в G нет циклов длины 3, граф $G[:]$ не может быть уложен на поверхность с меньшим числом ручек, чем у квадрангуляции $G[:] \hookrightarrow \partial N^3(G)$. Из комбинации лемм 1 и 2 попутно получаем известный результат Уайта [1]:

Следствие 1. *Если граф G не содержит изолированных вершин и не содержит циклов длины 3, то род графа $G[:]$ равен $\beta_1(G)$.*

Далее будем предполагать, что G — связный граф, и поэтому $\partial N^3(G) = \Sigma_g$ для некоторого g. *Позвоночная квадрангуляция с позвоночником* G обозначается $Q = Q(G[:])$ и определяется как четырехугольная укладка $G[:] \hookrightarrow \Sigma_g$. Число ручек g называется *родом квадрангуляции* Q. Из комбинации лемм 1 и 2 следует ключевой результат:

Теорема 3. *Род позвоночной квадрангуляции равен* 1-му *числу Бетти ее позвоночника.*

Вершинное (соответственно, *граневое*) *хроматическое число* графа G (соответственно, квадрангуляции Q) определяется как наименьшее число цветов, достаточное для раскраски вершин у G (соответственно, граней у Q) так, чтобы никакие две смежные вершины (соответственно, грани) не были раскрашены в одинаковый цвет.

Следствие 2. *Для каждого целого* $n \geqslant 2$ *плетенное удвоение* $K_n[:]$ *полного графа* K_n *квадрангулирует* Σ_g *при* $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *с вершинным и граневым хроматическими числами, равными* n.

Доказательство. Спинальный метод работает так. Вычисляем

$$\beta_1(K_n) = \#\text{ребер} - \#\text{вершин} + 1 = \frac{n(n-1)}{2} - n + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

и видим, что утверждение теперь следует из теоремы 3. ∎

Два следствия ниже также доказываются спинальным методом.

Следствие 3. *Пусть* n *— целое число,* $n \geqslant 3$, *и пусть* $K_n - e$ *— граф, полученный из* K_n *удаленирем одного ребра (но не инцидентных с ним вершин). Тогда* $(K_n - e)[:]$ *квадрангулирует* Σ_g *при* $g = \frac{1}{2}\left[(n-1)(n-2) - 2\right]$ *с вершинным и граневым хроматическими числами, равными* $n - 1$.

Квадрангуляции из следствий 2 и 3 были ранее открыты Хартсфилд и Рингелем в [2], где также была установлена их минимальность (по отношению к числу граней или, что эквивалентно, к числу вершин) на сфере с соответствующим числом ручек. Применение спинального метода позволяет пойти дальше и обобщить результаты [2] путем генерирования много большего числа минимальных квадрангуляций.

Следствие 4. *Пусть* $n \geqslant 2$ *и* $m \leqslant n - 1$ *— положительные целые числа и пусть* $K_n - K_m$ *— граф, полученный из* K_n *удалением ребер (но не вершин) некоторого подграфа* K_m. *Тогда*

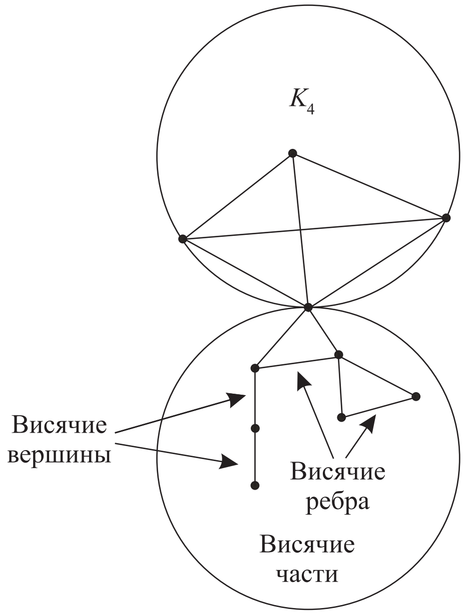


Рис. 1

плетенное удвоение $(K_n - K_m)[:]$ *квадрангулирует* Σ_g *при* $g = \frac{1}{2}[(n-1)(n-2) - m(m-1)]$ *с вершинным и граневым хроматическими числами, равными* $n-m+1$. *Более того, если* $n > 4+2m(m-1)$, *то получающаяся квадрангуляция минимальна на* Σ_g.

Следующая теорема обобщает результат Харари, Коржика и автора [4] со случая триангуляций на случай квадрангуляций.

Теорема 4. *Для любых неотрицательных целых чисел* g, p *и* q, *таких, что* p *четно,* $p \geqslant 2g+4$ *и* $2 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}(3+\sqrt{1+8g})$, *существует позвоночная квадрангуляция сферы* Σ_g *с* g *ручками, имеющая* p *вершин, у которой и вершинное, и граневое хроматические числа равны* q.

Доказательство. По теореме 3, чтобы удовлетворить требованию на число ручек, достаточно взять в качестве позвоночника любой граф G с $\beta_1(G) = g$. Начнем построение позвоночника с полного графа K_q; можно проверить, что тогда $\beta_1(K_q) \leqslant g$. Если $\beta_1(K_q) = g$, мы берем K_q в качестве позвоночника и получаем $Q(K_q[:])$ в качестве квадрангуляции заданного рода, в силу следствия 2. Если же $\beta_1(K_q) < g$, последовательно подвешиваем к K_q ребра, чтобы всего стало g независимых циклов (длины 3), как требуется. Наконец, при необходимости мы последовательно подвешиваем вершины до тех пор, пока не достигнем требуемого общего числа $p/2$ вершин в позвоночнике. Конструкция иллюстрируется на рис. 1, где показан возможный позвоночник для набора $g = 5$, $p = 20$, $q = 4$. ∎

Список литературы

[1] *White A. T.* On the genus of the composition of two graphs // Pacific J. Math. — 1972. — V. 41, № 1. — P. 275–279.

[2] *Hartsfield N., Ringel G.* Minimal quadrangulations of orientable surfaces // J. Combin. Theory. Series B. — 1989. — V. 46, № 1. — P. 84–95.

[3] *Лавренченко С. А.* Об одной интересной поверхности, ассоциированной с данным полиэдром // Сборник тезисов Международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харьков, 17–22 апреля 2011 г.). — Харьков: ХНУ, 2011.

[4] *Harary F., Lawrencenko S., Korzhik V.* Realizing the chromatic numbers of triangulations of surfaces // Discrete Math. — 1993. — V. 122, № 1–3. — P. 197–204.

О надструктуре некоторых классов функций k-значной логики

В. Б. Ларионов

VitalyBLarionov@yandex.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики

Данная работа посвящена одной из известных проблем дискретной математики — описанию решетки замкнутых классов функций многозначной логики.

Обозначим через E_k множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией k-значной логики* ($k \geqslant 2$), если она определена на E_k^n и все ее значения принадлежат E_k.

Будем использовать следующие стандартные обозначения. Множество всех функций k-значной логики обозначим P_k. Для любого подмножества A из P_k через $[A]$ будем обозначать замыкание относительно операции суперпозиции (для функций далее везде будет идти речь именно об этом типе замыкания).

Яновым и Мучником в [3] было показано, что при $k \geqslant 3$ множество всех замкнутых классов функций из P_k имеет мощность континуум. В связи с этим особенный интерес представляет изучение именно фрагментов решетки замкнутых классов функций из P_k.

Определение. Для данного класса A *надструктурой* будем называть множество классов, строго содержащих класс A.

Ранее автором была описана надструктура замкнутых классов самодвойственных функций [1], которые по своим свойствам близки к предполным классам [2]. Было показано, что произвольный замкнутый класс самодвойственных функций всегда обладает конечным множеством содержащих его замкнутых классов. В работе вводится новое семейство квазисамодвойственных функций и изучается надструктура классов из указанного семейства.

Одним из способов описания замкнутых классов являются предикаты.

Определение. Пусть $p(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторый предикат, определенный на E_k^m, $f(y_1, \ldots, y_n)$ — функция из множества P_k. Будем говорить, что функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ *сохраняет предикат* $p(x_1, \ldots, x_m)$, если для любых n наборов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, удовлетворяющих предикату p, набор $f(a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, f(a_{1m}, \ldots, a_{nm})$ также удовлетворяет предикату p. По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.

Обозначим через $Pol(p)$ множество функций, сохраняющих предикат p.

Пусть A и B — произвольные непустые подмножества E_k, имеющие равную мощность. Обозначим через F_{AB} множество всех различных взаимно-однозначных отображений множества A в множество B, а через F_k — объединение множеств F_{AB} для всевозможных пар подмножеств A и B указанного вида. Область определения отображения f обозначим через $D(f)$ (справедливо $D(f) = A$ для всех $f \in F_{AB}$).

Для произвольного отображения $f \in F_k$ обозначим через $R_f(x_1, x_2)$ предикат, истинный на всех парах $(a, f(a))$, где $a \in D(f)$, и только на них.

Определение. Замкнутые классы функций $S_f = Pol(R_f)$, где $f \in F_k$, $D(f) \subset E_k$, и существует элемент $a \in D(f)$, такой, что $f(a) \neq a$ (f не является тождественным отображением), будем называть классами квазисамодвойственных функций, а сами функции, входящие в указанные классы, — квазисамодвойственными функциями.

Отметим, что если в последнем определении положить $D(f) = E_k$, мы получим определение самодвойственных функций [2].

Рассмотрим строение отображений $f \in F_{AB}$. Сопоставим каждому такому отображению ориентированный граф G_f по следующему правилу. Множество вершин графа — $\{v_0, \ldots, v_{k-1}\}$. Будем говорить, что вершина v_i соответствует элементу $i \in E_k$. В графе G_f есть ориентированное ребро (v_i, v_j) тогда и только тогда, когда справедливо $i \in D(f)$ и $f(i) = j$. Заметим, что граф G_f состоит из компонент связности, представляющих собой ориентированные циклы (в том числе циклы длины один — петли) или ориентированные пути (в том числе пути длины нуль — изолированные вершины, у которых отсутствуют инцидентные им ребра). Обозначим множество элементов E_k, соответствующих вершинам, входящим в компоненты связности первого типа (циклы), через $L_1(f)$, множество оставшихся элементов — через $L_2(f)$.

Если $L_2(f) = \varnothing$, то получаем обычные классы самодвойственных функций. При этом циклы графа G_f соответствуют циклам подстановки f.

Пусть теперь $L_2(f) \neq \varnothing$ и отображение f_0 таково, что в графе G_{f_0} все ориентированные пути имеют длину нуль. При этом получаем, что $A = B$, и f_0 представляет собой подстановку на множестве A, строго содержащемся в множестве E_k. В работе [1] было показано, что классы S_{f_0} для указанных отображений f_0 входят в надструктуру классов самодвойственных функций S_σ, где σ — подстановка на всем множестве E_k, получающаяся доопределением отображения f_0. Поэтому полное описание надрешетки классов S_{f_0} известно.

Образуем теперь всевозможные отображения $f \in F_k$ из f_0 составлением произвольных ориентированных цепей из элементов множества $L_2(f_0)$. Оказывается, что все такие классы S_f будут находиться в решетке замкнутых классов под классом S_{f_0}. Таким образом, любой класс квазисамодвойственных функций S_f будет содержаться в некотором классе S_{f_0}, где f_0 получается разрушением всех цепей в графе G_f.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Любой класс квазисамодвойственных функций имеет конечную надструктуру.*

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

Список литературы

[1] *Ларионов В. Б.* О положении самодвойственных k-значных функций в решетке замкнутых классов // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. — 2009. — Вып. 6. — С. 90–105.

[2] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.

[3] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.

Параметры Чоу

В. К. Леонтьев

vkleontiev@mtu-net.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Пусть $B = \{0,1\}$ и $B^n = \{0,1\}^n$. Для произвольного множества $A \subseteq B^n$ рассмотрим матрицу H_A, строками которой являются все элементы множества A. Если t_k — сумма элементов k-го столбца матрицы A, то вектор $t_A = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ называется вектором параметров Чоу или просто *вектором Чоу* множества A. Таким образом, Ч-вектор (вектор Чоу) — это целочисленный вектор $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, координаты которого удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant t_k \leqslant m, \quad k = \overline{1,n} \tag{1}$$

и $m = |A|$.

Ясно, однако, что не любой целочисленный вектор с условием (1) является вектором Чоу некоторого множества $A \subseteq B^n$ с $m = |A|$.

Легко проверяются следующие свойства Ч-векторов.

Лемма 1. $t(A \cup B) = t(A) + t(B) - t(A \cap B)$ *для* $A, B \in B^n$.

Лемма 2. $t(A \times B) = t(A) \times t(B)$ *для* $A \in B^p$, $B \in B^q$.

Определение 1. *Состав* вектора $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — это вектор $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, где λ_i — число координат вектора t, равных i. Этот вектор обозначим через $\lambda_m(t)$.

Определение 2. Вектор t называется Ч-реализуемым, если существует (0,1)-матрица H порядка $n \times N$, удовлетворяющая условиям:

а) строки H различны;
б) Ч-вектор H совпадает с t.

Ясно, что из Ч-реализуемости вектора t следует Ч-реализуемость вектора $t_g = (t_{g(1)}, \ldots, t_{g(n)})$, где g — любая перестановка из симметрической группы S_n. Поэтому Ч-реализуемость вектора t определяется его *составом*.

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}_4^{m+1}$ всех Ч-реализуемых векторов, определяемых своим составом. Если $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — характеристическая функция множества $\mathbb{Z}_4^{m+1}$, то справедливо следующее утверждение. Рассмотрим частичный порядок на $\mathbb{Z}_4^{m+1}$, положив

$$\lambda \leqslant \nu \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k \leqslant \nu_k \text{ для } k = \overline{0, m}. \tag{2}$$

Лемма 3. *Функция* $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *является монотонной по частичному порядку* (2).

Отсюда следует, что для описания множества Ч-реализуемых векторов достаточно описать все нижние единицы монотонной функции $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Определение 3. Булева матрица $A = \|\alpha_{ij}\|$ с *разными строками* называется *экстремальной*, если удаление из A любого столбца приводит к матрице, у которой есть одинаковые строки.

Лемма 4. *Если A — экстремальная матрица, то ей соответствует нижняя единица функции $\chi(\lambda)$, и если λ_0 — нижняя единица функции $\chi(\lambda)$, то ей соответствует хотя бы одна экстремальная матрица.*

Пусть H_m — матрица размера $m \times 2^m$, столбцами которой служат все двоичные наборы длины n.

Теорема. *Любая экстремальная матрица из m строк может быть получена из H_m удалением некоторого числа столбцов.*

Пример 1. Для $m = 2$ все нижние единицы функции $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ — это точка (010).

Пример 2. Для $m = 3$ все нижние единицы монотонной функции $\chi(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — это точки $a_1 = (0110)$, $a_2 = (0200)$, $a_3 = (0020)$.

Теорема позволяет построить все Ч-реализуемые векторы из $\mathbb{Z}_4^{m+1}$, исходя из экстремальных подматриц матрицы H_m. При этом построение состоит в произвольном увеличении компонент экстремальных матриц.

В заключение отметим, что параметры Чоу играют существенную роль в целом ряде проблем, связанных с пороговыми функциями и корректирующими кодами [1].

Работа поддержана РФФИ, проект № 11-01-00398-а.

Список литературы

[1] *Зуев Ю. А.* Пороговые функции и пороговые представления булевых функций // Мат. вопросы кибернетики. Вып. 5. — М.: Наука, 1994. — С. 5–61.

Нелинейная управляемая задача Гурса–Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости и их применения

И. В. Лисаченко, В. И. Сумин

i_lisach@mail.ru, v_sumin@mail.ru

Нижегородский государственный
технический университет им. Р. Е. Алексеева;
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Управляемая задача Гурса–Дарбу — одна из тех управляемых систем, с обстоятельного изучения оптимизационных задач для которых начиналось в свое время создание математической теории оптимального управления распределенными системами (см., например, [1, с. 442–450], [2, с. 333–345, с. 449–450]). И вот уже более сорока лет эта задача занимает особое место в теории оптимизации распределенных систем, являясь ее своего рода «пробным камнем» (см., например, [3, с. 591–595], краткий обзор [4, с. 5–6]). Именно для задачи Гурса–Дарбу были в [5, 6] найдены первые достаточно общие условия *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) нелинейных распределенных систем; историю вопроса см. в [7]. Проблема УСГР неизбежно возникает при выводе любых необходимых условий оптимальности методами вариаций, при обосновании численных методов оптимизации типа методов возможных направлений, при изучении задач с приближенно известными данными и во многих других разделах теории оптимального управления (см., например, [6, 7], [8, с. 12–14]). В докладе дается обзор полученных авторами достаточных условий УСГР нелинейной управляемой задачи Гурса–Дарбу, их применений в теории оптимального управления.

В [5, 6] рассматривались абсолютно непрерывные решения задачи Гурса–Дарбу с ограниченными смешанной и первыми частными производными (более общие условия УСГР в этом случае были затем получены в [9], [8, с. 68–70]). В последние годы наблюдается устойчивый интерес (см., например, [10, 12, 11]) к задачам оптимизации систем типа Гурса–Дарбу, рассматриваемых в классах AC_p абсолютно непрерывных функций с суммируемыми в некоторой степени p смешанной и первыми производными; видимо, первые теоремы УСГР здесь получены в [13, 14] (их применение см., например, в [15]). Этот случай, в отличие от преимущественно изучавшегося до недавнего времени случая решений с ограниченными производными, многовариантен — он допускает различные естественные варианты условий на нелинейную управляемую систему, отличающиеся друг от друга используемой в них априорной информацией о предполагаемом решении. В [13, 14] рассматривались грубые варианты таких условий — в них учитывается лишь вытекающая непосредственно из определения класса AC_p принадлежность смешанной и первых производных решения этого класса пространству L_p. Однако первые производные такого решения принадлежат существенно более узким, чем L_p, «лебеговым пространствам со смешанной нормой» (см. ниже). В [16] с помощью техники вольтерровых функционально-операторных уравнений [17, 8, 18] (см. также [7]) вопрос об условиях УСГР управляемой задачи Гурса–Дарбу решается с учетом этой, в определенном смысле полной, априорной информации о решении класса AC_p. Сформулируем, для примера, следствие общей теоремы УСГР из [16].

Рассмотрим управляемую задачу Гурса–Дарбу

$$x''_{t^1t^2}(t) = g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), u(t)), t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi \equiv [0,1]^2, \quad (1)$$

$$x(t^1, 0) = \varphi_1(t^1),\ x(0, t^2) = \varphi_2(t^2),\ t^1 \in [0,1],\ t^2 \in [0,1], \quad (2)$$

где $g(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l, v)\colon \Pi \times \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ ($l = \{l_0, l_1, l_2\}$) и $\varphi_i(t^i)\colon [0,1] \to \mathbf{R}^n$ ($i = 1,2$) заданы, $u(t)\colon \Pi \to \mathbf{R}^m$ — управление. Считаем: g дифференцируема по l при каждом v для почти всех t, а вместе с производной g'_l измерима по t при любых $\{l, v\}$ и непрерывна по $\{l, v\}$ для почти каждого t; φ_i абсолютно непрерывна, $\varphi'_i \in L^n_p[0,1]$ при заданном $p \in (1, \infty)$ ($i = 1,2$), $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$; допустимы управления из некоторого $D \subset L^m_s \equiv L^m_s(\Pi)$, $s \in [1, \infty]$. Пусть: $f(t, l, v) \equiv g(t, l_0 + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), l_1 + \varphi'_1(t_1), l_2 + \varphi'_2(t_2), v)$; $L_{q(j)}$ — пространство $L_q[0,1]$ функций переменной t_j, $j \in \{1,2\}$, $q \in [1,\infty]$; $L_{q(j),r(i)}$ — пространство функций $z(t)$, $t \in \Pi$, со смешанной нормой $\|z\|_{q(j),r(i)} \equiv \big\| \|z(t_1,t_2)\|_{L_{q(j)}} \big\|_{L_{r(i)}}$ ($i, j \in \{1,2\},\ i \neq j;\ q, r \in [1,\infty]$). Положим $\mathfrak{M} \equiv L^n_\infty \times L^n_{\infty(2),p(1)} \times L^n_{\infty(1),p(2)}$, $\mathfrak{N} \equiv L^{n\times n}_p \times L^{n\times n}_{p(2),\infty(1)} \times L^{n\times n}_{p(1),\infty(2)}$ ($X^{n\times n}$ — пространство $(n\times n)$-матриц-функций, составленных из функций пространства X).

Пусть g такова, что формулы $F[y,u](t) \equiv f(t, y(t), u(t))$, $\Phi[y,u](t) \equiv f'_l(t, y(t), u(t))$ определяют оператор $F[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{M} \times D \to L^n_p$ и ограниченный оператор $\Phi[\cdot,\cdot]\colon\ \mathfrak{M} \times D \to \mathfrak{N}$. Тогда естественно рассматривать решения (1), (2) из класса AC^n_p. Каждому $u \in D$ может отвечать не более одного такого решения. Пусть Ω — множество тех $u \in D$, каждому из которых отвечает глобальное решение из AC^n_p. Введем обозначения: $A_0[z](t) \equiv \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} z(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2$, $A_1[z](t) \equiv \int\limits_0^{t_2} z(t_1,\xi)d\xi$, $A_2[z](t) \equiv \int\limits_0^{t_1} z(\xi,t_2)d\xi$, $A[z](t) \equiv \{A_0[z](t), A_1[z](t), A_2[z](t)\}$, $t \in \Pi$, $z \in L^n_p$; $J[x](t) \equiv \{x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t)\}$, $t \in \Pi$, $x \in AC^n_p$. Для $u \in D$, $u_0 \in \Omega$ положим $r(u,u_0) \equiv \|A[\Delta_u g]\|_{\mathfrak{M}}$, где $\Delta_u g(\cdot) \equiv g(\cdot, x_0(\cdot), x'_{0t_1}(\cdot), x'_{0t_2}(\cdot), u(\cdot)) - g(\cdot, x_0(\cdot), x'_{0t_1}(\cdot), x'_{0t_2}(\cdot), u_0(\cdot))$, $x_0 \in AC^n_p$ — глобальное решение, отвечающее u_0.

Теорема. *Пусть фиксированы $u_0 \in \Omega$, $d_0 > 0$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что если $u \in D$, $\|u - u_0\|_{L^m_s} < d_0$, $r(u,u_0) < \delta$, то $u \in \Omega$;*

для любого $M_0 > 0$ *существует* $C > 0$ *такое, что если* $x \in AC_p^n$ — *отвечающее* $u \in \Omega$ *глобальное решение, причем* $\|u - u_0\|_{L_s^m} < d_0$, $\|J\,[x - x_0]\|_{\mathfrak{M}} \leqslant M_0$, *то* $\|J\,[x - x_0]\|_{\mathfrak{M}} \leqslant Cr(u, u_0)$, $\|(x - x_0)''_{t_1 t_2}\|_{L_p^n} \leqslant C\|\Delta_u g\|_{L_p^n}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (проект НК-13П-13) и АЦВП «Развитие потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер проекта 2.1.1/3927).

Список литературы

[1] *Егоров А. И.* Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004.

[2] *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.

[3] *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Факториал, 2002.

[4] *Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А.* Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1990.

[5] *Плотников В. И., Сумин В. И.* Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 5. — С. 845–856.

[6] *Плотников В. И., Сумин В. И.* Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 61–77.

[7] *Сумин В. И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. — 2003. № 1. — С. 91–108.

[8] *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

[9] *Сумин В. И.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 12. — С. 2097–2109.

[10] *Толстоногов А. А.* Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса–Дарбу без предположения выпуклости // Изв. РАН. Сер. матем. — 2000. — Т. 64, № 4. — С. 163–182.

[11] *Погодаев Н. И.* О решениях системы Гурса–Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1116–1126.

[12] *Idczak D., Majewski M., Walczak S.* Stability analysis of solutions to an optimal control problem associated with a Goursat–Darboux problem // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. — 2003. — V. 13, № 1. — С. 29–44.

[13] *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Управляемая задача Гурса–Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной. II // Вестник ННГУ. Математика. — 2006. — № 1. — С. 65–80.

[14] *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Гурса–Дарбу // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2006. — № 2. — С. 64–81.

[15] *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестник Удмуртского государственного университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — № 2.

[16] *Лисаченко И. В.* Нелинейная задача Гурса–Дарбу с возмущаемыми правой частью и граничными функциями // Вестник ННГУ. — 2008. — № 5. — С. 107–112.

[17] *Сумин В. И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. — 1989. — Т. 305, № 5. — С. 1056–1059.

[18] *Сумин В. И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 1998. — № 2. — С. 138–151.

ρ-уравновешенные булевы функции и их свойства

О. А. Логачев, С. В. Смышляев, В. В. Ященко

logol@iisi.msu.ru, smyshsv@gmail.com, iisi@iisi.msu.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Введение

Одним из важнейших свойств кодирующих устройств, построенных с помощью регистров сдвига и булевых функций, является возможность получения на выходе произвольных двоичных последовательностей. Данное свойство, как было показано Сумароковым [1], эквивалентно понятию совершенной уравновешенности булевых функций.

В настоящей работе вводится и исследуется свойство ρ-уравновешенности булевых функций для фиксированного ρ, обобщающее, в определенном смысле, свойство совершенной уравновешенности. Формулируется и доказывается критерий ρ-уравновешенности в терминах коэффициентов Уолша–Адамара, важный для получения соотношений между коэффициентами Уолша–Адамара совершенно уравновешенных булевых функций.

Доказывается утверждение о том, что множество ρ-уравновешенных булевых функций при определенном классе ρ строго вложено в множество совершенно уравновешенных функций. Данное утверждение опровергает полученный в работе [2] критерий совершенной уравновешенности, а также его ослабленный вариант.

Определения и предварительные результаты

Для любого натурального n множество двоичных наборов длины n будем обозначать через $V_n = \{0,1\}^n$; множество булевых функций от n переменных — через $\mathcal{F}_n$.

Определение 1. Преобразованием Уолша—Адамара булевой функции f называется целочисленная функция на V_n, определяемая следующим равенством: $W_f(\mathbf{u}) = \sum\limits_{\mathbf{x}\in V_n} (-1)^{f(\mathbf{x})\oplus\langle \mathbf{x},\mathbf{u}\rangle}$.

Обозначим через ρ набор целых положительных чисел $\rho = \{k; d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, где $d_1 = 1$, $d_{i+1} > d_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Определим поднабор $\mathbf{y}_\rho \in V_k$ двоичной последовательности $\mathbf{y} \in V_\infty$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$, равенством $\mathbf{y}_\rho = (y_{d_1}, y_{d_2}, \ldots, y_{d_k})$.

Обозначим для функции $f \in \mathcal{F}_n$ и ρ через f_ρ следующее отображение из V_{d_k+n-1} в V_k: $f_\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{d_k+n-1}) = (f(x_1, x_2, \ldots, x_n), f(x_{d_2}, x_{d_2+1}, \ldots, x_{d_2+n-1}), \ldots, f(x_{d_k}, x_{d_k+1}, \ldots, x_{d_k+n-1}))$.

Определение 2. Функция $f \in \mathcal{F}_n$ называется ρ-уравновешенной, если все поднаборы $\mathbf{y}_\rho \in V_k$ имеют равное число прообразов относительно отображения f_ρ.

Определение 3. Булева функция $f \in \mathcal{F}_n$ называется совершенно уравновешенной, если она является ρ-уравновешенной для любого ρ.

Нетрудно показать, что данное определение является эквивалентным традиционному определению совершенной уравновешенности булевой функции в том виде, в котором оно представлено в работах [1, 2, 3] и др.

Основные результаты

Критерий совершенной уравновешенности. В работе [4] рассмотрено понятие сводимости свойств булевых отображений к свойствам координатных функций и показано, что свойство уравновешенности булевых отображений является сводимым. Из этого вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Функция* $f \in \mathcal{F}_n$ *является* ρ*-уравновешенной тогда и только тогда, когда для любого ненулевого набора* $\gamma = (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(k)}) \in V_k$ *булева функция* $\sum_\gamma f_\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{d_k+n-1}) = \gamma^{(1)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus \gamma^{(2)} f(x_{d_2}, x_{d_2+1}, \ldots, x_{d_2+n-1}) \oplus \ldots \oplus \gamma^{(k)} f(x_{d_k}, x_{d_k+1}, \ldots, x_{d_k+n-1})$ *является уравновешенной.*

Введем N множеств пар индексов по следующему правилу:

$$J_k = \{(i,s) \mid i \in \{1,2,\ldots,m\},\ s \in \{0,1,\ldots,n-1\},\ l_i + s = k\}.$$

Теорема 2. *Булева функция* $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} f(x_{l_i}, x_{l_i+1}, \ldots, x_{l_i+n-1})$ *уравновешена тогда и только тогда, когда коэффициенты Уолша–Адамара функции* f *удовлетворяют следующему условию:*

$$\sum \prod_{i=1}^{m} W_f(\alpha^{(p_i,0)}, \alpha^{(p_i,1)}, \ldots, \alpha^{(p_i,n-1)}) = 0, \tag{1}$$

где суммирование ведется по всем наборам mn *булевых переменных* $\alpha^{(p_i,s)}$, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $s \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, *которые удовлетворяют следующим* N *линейным соотношениям:* $\bigoplus\limits_{(i,s)\in J_k} \alpha^{(p_i,s)} = 0, k \in \{1,2,\ldots,N\}$.

Пример 1. Функция $f \in \mathcal{F}_4$ является $\rho(3;1,2,3)$-уравновешенной тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

$$W_f(0,0,0,0) = 0;$$

$$\sum_{(a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)})\in V_3} W_f(0,a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)})\cdot W_f(a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)},0)=0;$$

$$\sum_{(a^{(1)},a^{(2)})\in V_2} W_f(0,0,a^{(1)},a^{(2)})\cdot W_f(a^{(1)},a^{(2)},0,0)=0;$$

$$\sum_{(a^{(1)},\ldots,a^{(6)})\in V_6} W_f(0,a^{(1)},a^{(3)}\oplus a^{(4)},a^{(5)}\oplus a^{(6)})\times$$
$$\times W_f(a^{(1)},a^{(3)},a^{(5)},a^{(2)})\cdot W_f(a^{(4)},a^{(6)},a^{(2)},0)=0.$$

Справедлив следующий новый критерий совершенной уравновешенности.

Теорема 3. *Функция $f\in\mathcal{F}_n$ является совершенно уравновешенной тогда и только тогда, когда ее коэффициенты Уолша–Адамара удовлетворяют соотношению (1) для любого натурального m и любого набора номеров аргументов для суммы $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} f(x_{l_i},x_{l_i+1},\ldots,x_{l_i+n-1})$, такого, что выполнены следующие соотношения:*

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\{l_i,l_i+1,\ldots,l_i+n-1\}=\{1,2,\ldots,N\}$;
2. $l_i\neq l_j$ *для любых* $i\neq j$;
3. *для любого* $i\in\{2,3,\ldots,m\}$ *найдется по крайней мере одно* j *такое, что* $l_i\in\{l_j,l_j+1,\ldots,l_j+n-1\}$.

Совершенная уравновешенность и ρ_M-уравновешенность. Введем для всякого $M\in\mathbb{N}$ обозначение $\rho_M=\{M;1,2,\ldots,M\}$. Очевидно, что ρ_1-уравновешенность булевых функций — это уравновешенность.

Для фиксированного n интересен вопрос о том, при каком наименьшем M ρ_M-уравновешенность булевой функции означает ее совершенную уравновешенность. В работе [5] доказано, что в качестве обладающего таким свойством M можно выбрать $M=2^{n-2}\cdot(2^{n-1}-1)+n$.

В работе [2] Голичем было доказано утверждение о том, что в качестве M можно выбрать $M=n$. В доказательстве утверждения в [2] содержится существенный пробел, однако контрпримеров ранее получено не было.

Лемма 4 [2]. *Булева функция* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ *совершенно уравновешена тогда и только тогда, когда она является* ρ_n*-уравновешенной.*

Из следующей леммы и теоремы вытекает, что ни для какого сколь угодно большого $c \in \mathbb{N}$ ослабленный вариант леммы 4 с условием на ρ_{n+c}-уравновешенность (вместо ρ_n-уравновешенности) не является верным.

Лемма 5. *Пусть* $f \in \mathcal{F}_n$. *Функция*

$$f^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_{kn-k+1}) = f(x_1, x_{k+1}, x_{2k+1}, \ldots, x_{(n-1)k+1})$$

является ρ_{kM}*-уравновешенной тогда и только тогда, когда функция* f *является* ρ_M*-уравновешенной.*

Теорема 6. *Для любого* $c \in \mathbb{N}$ *существует* $n \in \mathbb{N}$ *и функция* $f \in \mathcal{F}_n$, *которая является* ρ_{n+c}*-уравновешенной и не является совершенно уравновешенной.*

Работа поддержана РФФИ, проекты № 09-01-00653-а, № 10-01-00475-а.

Список литературы

[1] *Сумароков С. Н.* Запреты двоичных функций и обратимость для одного класса кодирующих устройств // Вестник МГУ. Серия Математика. — 1997. — Т. 1, № 1. — С. 33–55.

[2] *Golic J. Dj.* On the Security of Nonlinear Filter Generators // Proceedings of Fast Software Encryption, LNCS. V. 1039. — Heidelberg: Springer, 1996. — P. 173–188.

[3] *Логачев О. А., Смышляев С. В., Ященко В. В.* Новые методы изучения совершенно уравновешенных булевых функций // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21, № 2. — С. 51–74.

[4] *Ященко В. В.* Свойства булевых отображений, сводимые к свойствам их координатных функций // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1994. — № 4. — С. 11–13.

[5] *Бабаш А. В.* Запреты автоматов и двоичных функций // Труды по дискретной математике. — 2006. — Т. 9. — С. 7–20.

Поведение функции Шеннона для задержки в одной модели схем из функциональных элементов

С. А. Ложкин, Б. Р. Данилов

lozhkin@cs.msu.su, brdanilov@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Рассматриваются формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ) над произвольным конечным полным базисом Б $= \{E_1, E_2, \ldots, E_b\}$, где функциональный элемент (ФЭ) E_i $(i = 1, \ldots, b)$ имеет k_i $(k_i \geqslant 1)$ входов и реализует функцию алгебры логики (ФАЛ) $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geqslant 2$ существенно зависит от всех своих булевых переменных (БП). При этом, как обычно, формулами считаются те одновыходные СФЭ, в которых выход любого ФЭ либо поступает на вход ровно одного (другого) ФЭ, либо является выходом схемы.

В статье [1] вводится модель задержки, которая обобщает ряд других, изучавшихся ранее, моделей (см., например, [2, 3]), рассматривая отдельно *глубины* $\widetilde{T}_i^j$ (где $\widetilde{T}_i^j$ — действительные положительные числа) *ФЭ* E_i *по входам* x_j $(j = 1, \ldots, k_i)$. Как обычно, *цепью* ω назовём СФЭ, составленную из цепочки последовательно соединённых ФЭ $E_{i_1}, \ldots, E_{i_w}$. Назовём цепь *инициальной*, если у этой цепи выделен один из входов её первого ФЭ E_{i_1}. Назовём *глубиной* $\widetilde{T}(\omega)$ *инициальной цепи* ω сумму глубин ФЭ цепи по соединяющим их входам и выделенному входу первого ФЭ. Подсхему СФЭ Σ, являющуюся инициальной цепью, выделенный вход которой является входом Σ и которая оканчивается на одном из её выходных ФЭ (т. е. ФЭ, выход которых поступает на выход схемы), будем называть *главной цепью СФЭ* Σ. В такой модели *глубиной схемы* назовём наибольшую глубину её главных цепей.

Рассматриваемая в данной статье модель задержки СФЭ над Б обобщает понятие глубины следующим образом. Будем считать, что для каждого ФЭ E_i $(i = 1, \ldots, b)$, каждого j $(j = 1, \ldots, k_i)$ и каждого булева набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_k)$, такого, что $\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{k_i}) \not\equiv \mathrm{const}$, определена положительная *задержка* $T_i^{(j,\alpha)}$ *ФЭ* E_i *по входу* x_j *на наборе* α, которая в случае

$k_i = 1$ имеет вид $T_i^1 = \widetilde{T}_i^1$. При этом будем считать, что модель задержки обобщает предыдущую модель глубины таким образом, что глубиной $\widetilde{T}_i^j$ ФЭ E_i по входу x_j в случае $k_i \geqslant 2$ является наименьшая из задержек $T_i^{(j,\alpha)}$ по всевозможным указанным наборам α. Далее, для СФЭ Σ и набора $\alpha \in \{0,1\}^n$ значений её входных БП $x_1, \ldots, x_n$ *существенной на α цепью* Σ назовём такую её инициальную цепь, что после подстановки набора α в схему, отсоединения выделенной дуги цепи и подачи по этой дуге новой БП x_0 на выходе каждого ФЭ цепи реализуется ФАЛ x_0 или $\overline{x}_0$. При этом *задержкой* существенной цепи ω на наборе α назовём величину $T^{\alpha}(\omega)$, равную сумме задержек первого ФЭ цепи по выделенному входу и остальных ФЭ цепи по входам, соединяющим эти элементы между собой, при условии, когда на невыделенные входы цепи поступают значения, реализуемые схемой на наборе α. Множество существенных на α главных цепей СФЭ Σ обозначим через $\Omega_{\alpha}(\Sigma)$. Под *задержкой $T(\Sigma)$ схемы* Σ в рассматриваемой модели понимается величина

$$T(\Sigma) = \max_{\alpha \in \{0,1\}^n} \max_{\omega \in \Omega_{\alpha}(\Sigma) \neq \varnothing} T^{\alpha}(\omega),$$

которая считается неопределённой, если $\Omega_{\alpha}(\Sigma)$ пусто для всех $\alpha \in \{0,1\}^n$. *Задержка ФАЛ* и *функция Шеннона* $T_{\text{Б}}(n)$ для задержки ФАЛ от n БП в классе СФЭ над Б определяются обычным образом.

Описанная модель задержки такова, что поднятие ветвлений выходов ФЭ к входам схемы не изменяет её задержки. Отсюда, аналогично [4], следует, что для каждой СФЭ найдётся формула (система формул) в том же базисе, задержка которой совпадёт с задержкой исходной СФЭ, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением формул в базисе Б. Множество формул над Б обозначим через $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$.

Рассмотрим не пустое (в силу полноты Б) множество Б$'$, состоящее из ФЭ базиса Б, имеющих не менее двух входов. Без ограничения общности предположим, что Б$' = \{E_1, \ldots, E_{b'}\}$. Для ФЭ E_i $(i = 1, \ldots, b')$ определим его *приведённую задержку* τ_i' равенством $\tau_i' = 1/\log_2 x_i$, где x_i $(x_i > 1)$ — единственный корень характеристического уравнения

$$\sum_{j=1}^{k_i} x^{-\widetilde{T}_i^j} = 1,$$

рассматриваемого на положительной полуоси. Определим *приведённую задержку базиса* Б равенством $\tau'_{\text{Б}} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant b'} \tau'_i$.

Нижняя оценка функции Шеннона

Нижняя оценка функции Шеннона получается стандартным образом на основе следующих лемм.

Лемма 1. *Для всякой формулы $\mathcal{F}(x_1, ..., x_n) \in \mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, в которой каждая главная цепь существенна, верно*

$$R(\mathcal{F}) \leqslant 2^{T(\mathcal{F})/\tau'_{\text{Б}}}.$$

Лемма 2. *Для любого $T \geqslant 0$ и любого натурального n число попарно не эквивалентных формул над* Б*, которые зависят от n БП и задержка которых не больше T, не превосходит*[1] $(c_1 n)^{2^{T/\tau'_{\text{Б}}}}$.

Теорема 1. *Для всех натуральных n выполняется неравенство*

$$T_{\text{Б}}(n) \geqslant \tau'_{\text{Б}}(n - \log\log n) - c_2.$$

Верхняя оценка функции Шеннона

Следующая лемма является аналогом утверждения о существовании формулы в виде квазиполного дерева с минимальной глубиной при данном числе входов в модели [2].

Лемма 3. *Если $\tau'_{\text{Б}}$ достигается на ФЭ E_t, т. е. $\tau'_t = \tau'_{\text{Б}}$, то для всяких натуральных чисел p и r, связанных соотношением $p = r(k_t - 1) + 1$, существует бесповторная формула $\mathcal{F} \in \mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$ с p входами, состоящая из r ФЭ E_t, для которой справедливо*

$$\widetilde{T}(\mathcal{F}) \leqslant \tau'_{\text{Б}} \log p + c_3.$$

Пусть $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ — разбиение куба $\{0,1\}^n$ от БП $x = (x_1, \ldots, x_n)$. *Обобщённой мультиплексорной ФАЛ* $\mu_\Delta(x, y_1, \ldots, y_p)$, соответствующей разбиению Δ, назовём ФАЛ, равную y_i $(i = 1, \ldots, p)$, когда $x \in \delta_i$. *Мультиплексорной ФАЛ* μ_n называется ФАЛ μ_Δ, соответствующая тривиальному разбиению.

[1] Буквой c с индексами обозначаются различные константы, зависящие от базиса Б.

Лемма 4. *Для любой существенной ФАЛ* $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ *и любого разбиения* $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$, *куба* $\{0,1\}^n$ *от БП* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *существуют ФАЛ* $g_i(x, y_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$, *которые монотонно или антимонотонно зависят от БП* $y_1, \ldots, y_p$, *такие, что* $\varphi(g_1, \ldots, g_p) = \mu_\Delta(x, y_1, \ldots, y_p)$.

Следующее утверждение доказывается применением леммы 4 и техники так называемых «врезок» к формуле $\mathcal{F}$ из утверждения леммы 3.

Лемма 5. *Для натурального* n *мультиплексорную ФАЛ* μ_n *можно реализовать бесповторной по информационным БП формулой* $\mathcal{M}_n \in \mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, *такой, что*

$$T(\mathcal{M}_n) \leqslant \tau'_{\text{Б}} n + O(\log n).$$

Теорема 2. *Для любой ФАЛ* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *существует реализующая её формула* $\mathcal{F} \in \mathfrak{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, *такая, что*

$$T(\mathcal{F}) \leqslant \tau'_{\text{Б}} n + O(\log n).$$

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая асимптотика функции Шеннона:

$$T(\mathcal{F}) \sim \tau'_{\text{Б}} n.$$

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-01-00817-а.

Список литературы

[1] *Ложкин С. А.* Поведение функции Шеннона для задержки схем из функциональных элементов в некоторых моделях // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XII Межд. конф. (Нижний Новгород, 17–22 мая 1999 г.). Часть II. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 139.

[2] *Лупанов О. Б.* О схемах функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. — Вып. 23 — М.: Наука, 1970. — С. 43–82.

[3] *Ложкин С. А.* О задержке мультиплексорной функции в произвольном базисе // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Межд. конф. (Казань, 2–7 июня 2008 г.). — Казань: Отечество, 2008. — С. 75.

[4] *Ложкин С. А.* Основы кибернетики. — М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004.

О синтезе и сложности формул с ограниченной глубиной альтернирования

С. А. Ложкин, В. А. Коноводов

lozhkin@cs.msu.su, vkonovodov@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Рассматриваются (см., например, [1]) схемы из функциональных элементов (СФЭ) и формулы в стандартном базисе Б_0, состоящем из функциональных элементов (ФЭ) &, $\vee$ и $\neg$ веса 1, которые реализуют функции алгебры логики (ФАЛ) $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $\bar{x}_1$ соответственно. При этом, как обычно, формулами считаются те одновыходные СФЭ, в которых выход любого ФЭ либо поступает на вход ровно одного (другого) ФЭ, либо является выходом схемы.

Под сложностью $L(S)$ СФЭ или формулы S понимается, как обычно, число ФЭ в ней. Формулу C, которая состоит из r, $r \geqslant 1$, ФЭ $\mathcal{E}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}^{(r)}$ и в которой выход ФЭ $\mathcal{E}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, r-1$, является входом ФЭ $\mathcal{E}^{(i+1)}$, будем называть *нетривиальной цепью*, а число r — её *длиной* или *глубиной*. Если при этом последовательность $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(r)}$, где $\varphi^{(i)} \in \text{Б}_0$ — тип базисного ФЭ $\mathcal{E}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, r$, имеет вид $\varphi_1, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_2, \ldots, \varphi_a, \ldots, \varphi_a$, где $\varphi_j \neq \varphi_{j+1}$ при всех j, $j = 1, \ldots, a-1$, а число c равно 1 в случае $\varphi_1 = \neg$ и равно 0 в остальных случаях, то разность $a - c$ будем называть *глубиной альтернирования* указанной цепи C. Формулу, которая состоит из единственной вершины, являющейся как её входом, так и её выходом, будем считать *тривиальной цепью*, а глубину и глубину альтернирования такой цепи положим равными 0.

Для СФЭ S определим её глубину $D(S)$ (глубину альтернирования $A(S)$) как максимальную глубину (соответственно глубину альтернирования) цепей, являющихся подсхемами S.

Отметим, что в ряде работ величина $A(\mathcal{F})$ называлась глубиной формулы $\mathcal{F}$ (см., например, [2]), при этом в работе [1] величина $(A(\mathcal{F}) - 1)$ называлась альтернированием формулы $\mathcal{F}$. Что же касается величины $D(\mathcal{F})$, то в большинстве работ, так же как и в данной работе, она считается глубиной формулы $\mathcal{F}$.

Заметим, что любая элементарная конъюнкция (элементарная дизъюнкция), то есть конъюнкция (соответственно дизъюнкция) переменных или их отрицаний, имеет глубину альтернирования 1. При этом глубина альтернирования любой КНФ или ДНФ, которая отлична как от элементарной конъюнкции, так и от элементарной дизъюнкции, равна 2.

Для любого $a \geqslant 2$ определим сложность $L^{(a)}(f)$ ФАЛ f как минимальную из сложностей тех реализующих её формул, глубина альтернирования которых не больше, чем a. Введем далее функцию Шеннона $L^{(a)}(n)$ как максимальную из сложностей $L^{(a)}(f)$, где максимум берется по всем ФАЛ от булевых переменных (БП) $x_1, \ldots, x_n$. Известно, что (см., например, [1]) $L^{(2)}(n) = \frac{3}{2} n \cdot 2^{n-1} - 1$. При этом в работе [2] доказано, что при любом $a \geqslant 3$ справедливы неравенства (здесь и далее все логарифмы — двоичные)[1]

$$\frac{2^n}{\log n}\left(1 - O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right) \leqslant L^{(a)}(n) \leqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{2\log\log n + O(1)}{\log n}\right),$$

которые устанавливают поведение функции Шеннона $L^{(a)}(n)$ с относительной погрешностью вида $O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)$. Основным результатом данной работы является получение при любом фиксированном a, $a \geqslant 3$, асимптотических оценок высокой степени точности для функции Шеннона $L^{(a)}(n)$, устанавливающих её поведение с относительной погрешностью $O\left(\frac{1}{\log n}\right)$. Пусть $\log^{[a]} x \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\log \ldots \log}_{a \text{ раз}} x$.

Теорема 1. *При любых a, $a \geqslant 3$, и достаточно больших n*

$$L^{(a)}(n) = \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{\log^{[a-1]} n \pm O(1)}{\log n}\right).$$

Пусть $\log^* x$ — итерированный логарифм числа x, то есть такое наименьшее k, что $\log^{[k]} x \leqslant 1$.

Лемма 1. *Пусть $a \geqslant 3$, тогда при достаточно больших n и любом натуральном L, таком, что $\log^*(L+1) \geqslant a$ и $\log^{[a-1]}(L+1) \leqslant n$, число попарно не эквивалентных формул сложности не больше чем L, имеющих глубину альтернирования не больше чем a и реализующих*

[1] Верхняя оценка получена при более точной оценке сложности построенных формул.

функции от БП $x_1, \ldots, x_n$, *не превосходит величины*

$$\left(\frac{c_a n}{\log^{[a-1]}(L+1)}\right)^{L+1},$$

где c_a *— некоторое число, зависящее только от* a.

Применением мощностного метода с использованием этой леммы устанавливается

Лемма 2. *Для всех* a, $a \geqslant 3$, *при достаточно больших* n

$$L^{(a)}(n) \geqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{\log^{[a-1]} n - O(1)}{\log n}\right).$$

Пусть $B = \{0,1\}$ и B^n, $n = 1, 2, \ldots$, — единичный n-мерный куб, а $P_2(n)$ — множество всех ФАЛ $f = f(x_1, \ldots, x_n) : B^n \xrightarrow{f} B$.

Рассмотрим разбиение Δ куба $B^q(x_1, \ldots, x_q)$ на непересекающиеся подмножества $\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}}$, где m и q — натуральные числа ($m \leqslant q$). Будем говорить, что разбиение Δ моделирует функции из множества G, $G \subseteq P_2(m)$, с помощью булевых переменных или их отрицаний тогда и только тогда, когда для любой функции g, $g \in G$, и для каждого i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, существует переменная x_j, где $1 \leqslant j \leqslant q$, и константа σ, $\sigma \in B$, такие, что $g \equiv x_j^{\sigma}$ на компоненте δ_i. При этом δ_i — «хорошая» компонента, если для каждой такой функции g указанная константа σ равна 1.

Пусть f — произвольная ФАЛ из $P_2(n)$ и пусть $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$. Для получения верхней оценки рассматриваются специальные разбиения куба $B^q(x')$ на компоненты $\delta'_1, \ldots, \delta'_{2^{q-m}}$, а куба $B^{n-q}(x'')$ — на компоненты $\delta''_1, \ldots, \delta''_{2^{n-q-t}}$. При этом все элементарные дизъюнкции от переменных x'' моделируются переменными или отрицаниями переменных на любой компоненте куба $B^{n-q}(x'')$, а каждая подфункция функции f от переменных x' на компонентах куба $B^q(x')$ моделируется специальной формулой $\mathcal{F}_{\varphi}(x_{j_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{j_N}^{\sigma_N})$ от некоторых переменных или их отрицаний, имеющей ограниченную глубину альтернирования. Во втором случае разбиения строятся так, что почти все компоненты — «хорошие». Тогда функция f

представима в виде формулы

$$\mathcal{F}_f = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \bigvee_{j=1}^{2^{n-q-t}} \mathfrak{B}_{\mathfrak{i}}(x')\mathfrak{B}_{\mathfrak{j}}(x'') \mathop{\&}_{\sigma'' \in \delta''_j} \left(x_k^\tau \vee \mathcal{F}_\varphi(x_{j_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{j_N}^{\sigma_N})\right),$$

где $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_N \in \{0,1\}$, $\mathfrak{B}_i$ и $\mathfrak{B}_j$ — КНФ характеристических функций компонент разбиения δ'_i и δ''_j соответственно, а k, τ, $j_1, \ldots, j_N$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ зависят от i, j, σ''. С помощью указанного разложения доказывается справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *При достаточно больших n для любой функции $f \in P_2(n)$ и любого a, $a \geqslant 3$, существует формула $\mathcal{F}_f$, $A(\mathcal{F}_f) = a$, реализующая эту функцию, такая, что*

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{\log^{[a-1]} n + O(1)}{\log n}\right).$$

Теорема 1 следует непосредственно из лемм 2 и 3.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00817-а.

Список литературы

[1] *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики: Учебное пособие. — М.: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004.

[2] *Лупанов О. Б.* О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\&, \vee, \neg$ // Проблемы кибернетики. Вып. 6. — 1961. — С. 5–14.

Условия непрерывной реберной раскрашиваемости ассоциированных графов

А. М. Магомедов

magomedtagir1@yandex.ru

Дагестанский государственный университет, Махачкала

1. Рассматривается следующая задача теории расписаний. Исходные данные к составлению расписания обслуживания множества требований $N = \{1, \ldots, n\}$ в системе приборов $L = \{1, \ldots, l\}$ представлены в виде семейства предписаний $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$, где каждое

ω_i содержит точно два элемента из N (необязательно различных), $r_{i,j}$ — количество вхождений требования $j \in N$ в предписание $\omega_i \in \Omega$, $m = \max\limits_{j\in L} \sum\limits_{i=1}^{l} r_{i,j}$, $m > 2$. Каждый прибор $i \in L$ должен выполнить с каждым требованием $j \in N$ точно $r_{i,j}$ операций; длительность каждой операции равна единице, условия предшествования отсутствуют, в любой момент времени каждый прибор и каждое требование могут участвовать лишь в одной операции.

Расписание обслуживания длительности m будем называть *непрерывным*, если каждый прибор выполняет операции в последовательные моменты времени. Вопрос: существует ли непрерывное расписание?

2. Двудольный граф $G = (X, Y, E)$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$, где вершины $x_j \in X$ и $y_i \in Y$ соединены $r_{i,j}$ ребрами, будем называть *ассоциированным* с семейством Ω. Очевидно, наибольшая степень вершин множества X равна m, степень каждой вершины множества Y равна 2. Сюръекцию $f\colon E \to \{1, \dots, m\}$ будем называть *правильной* рёберной раскраской графа G, если $f(a) \neq f(b)$ для любых смежных рёбер a и b. Правильную рёберную раскраску графа G будем называть *непрерывной*, если для каждой вершины из Y инцидентные рёбра a и b удовлетворяют условию:

$$|f(a) - f(b)| = 1.$$

Задача о существовании непрерывного расписания и задача о существовании непрерывной рёберной раскраски ассоциированного графа эквивалентны.

3. В [1] показано, что в случае чётного m непрерывное расписание всегда существует. Для $m = 5$ задача рассмотрена в [2]. В формулировке следующей теоремы $\Gamma(S)$ — множество вершин, смежных с вершинами S.

Теорема 1. *При нечётном m для существования непрерывной раскраски ассоциированного графа $G = (X, Y, E)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$|S| \leqslant \lfloor m/2 \rfloor \cdot |\Gamma(S)| \ \ \forall\ S \subseteq Y. \tag{1}$$

Теорема 2. *Проверка условий (1) осуществима за полиномиальное время.*

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» № 2010–1.3.2–111–017/12.

Список литературы

[1] *Магомедов А. М.* Матрица расписания с двумя ненулевыми элементами в строке // Вестник ДГУ. — 1999. — Вып. 4.

[2] *Магомедов А. М., Сапоженко А. А.* Условия существования непрерывных расписаний длительности пять // Вестник МГУ, сер. Вычислительная математика и кибернетика. — 2010. — Т. 34, № 1. — С. 39–44.

О стационарных классах функций трехзначной логики

А. А. Мазуров

anat-mazurov@mail.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Булевы и k-значные функции широко применяются в кибернетике и криптографии. Исследованию их свойств посвящено множество работ. В работах [1] и [2] исследовано преобразование между двумя представлениями булевых функций: в виде вектора значений и в виде полинома Жегалкина. В настоящей работе представлено обобщение некоторых полученных в [1] и [2] результатов на случай трехзначной логики.

Пусть k – натуральное число, $k \geqslant 2$. Множество всех натуральных чисел от 0 до $k-1$ обозначим E_k: $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$. *Функцией* k-значной логики от n переменных называется отображение $\varphi:\ E_k^n \to E_k$.

Множество всех функций k-значной логики от n переменных обозначается $P_k(n)$. Множество всех функций k-значной логики (от любого количества переменных) обозначается P_k.

Вектором значений функции f, зависящей от переменных $x_1, \ldots, x_n$, называется последовательность значений функции на всех наборах от $(0, \ldots, 0)$ до $(k-1, \ldots, k-1)$ в лексикографическом порядке.

Полиномом в k-значной логике называется формула вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\tilde{\alpha} \in E_k^n} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \pmod{k},$$

где

$$x^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\alpha}, & \alpha \neq 0, \end{cases} \qquad c_\alpha \in E_k, \qquad \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Здесь и далее сложение и умножение элементов из E_k (а именно, значений переменых и значений функций, коэффициентов полинома) ведется по модулю k. Числа c_α называются *коэффициентами полинома. Вектором коэффициентов* полинома функции называется последовательность

$$c_{(0,\dots,0)}, \dots, c_{(k-1,\dots,k-1)},$$

где индексы расположены в лексикографическом порядке.

Для любого простого числа k и любой функции $f \in P_k$ существует и единственно представление этой функции в виде полинома с точностью до перестановки слагаемых [3].

Преобразование Мёбиуса — это отображение, переводящее вектор значений функции в вектор коэффициентов соответствующего ей полинома.

Преобразование Мёбиуса — это линейное преобразование в пространстве векторов размерности k^n [4].

Теорема 1 [4, 3]. *В P_k преобразование Мёбиуса обратимо, если k — простое, причем в P_2 $\mu^{-1}(f) \equiv \mu(f)$.*

Функцию $f \in P_k$ назовем *стационарной функцией относительно μ^p, $p \geqslant 1$, с константой m*, если $\mu^p(f) = m \cdot f$, где $m \in E_k \backslash \{0\}$.

Стационарным классом (функций n переменных) с константой m относительно μ^p назовем множество всех стационарных функций k-значной логики (зависящих от n переменных) с константой m относительно μ^p.

Обозначим $Q_m^p(n) = \{f \in P_3(n) \mid \mu^p(f) \equiv m \cdot f\}$.

В результате исследования получены следующие результаты.

Иерархия стационарных классов

Теорема 2. $\forall f \in P_3 \quad \mu^8(f) \equiv f$.

Из этого следует, что достаточно рассмотреть только преобразования μ в степенях от 1 до 8.

Теорема 3. *В* P_3

$$Q_1^8(n) = P_3(n),$$

$$Q_2^8(n) = \varnothing,$$

$$Q_1(n) = Q_1^3(n) = Q_1^5(n) = Q_1^7(n),$$

$$Q_2(n) = Q_2^3(n) = Q_2^5(n) = Q_2^7(n),$$

$$Q_1^2(n) = Q_1^6(n),$$

$$Q_2^2(n) = Q_2^6(n).$$

Теорема 4.

$$Q_1(n) \subset Q_1^2(n) \subset Q_1^4(n) \subset Q_1^8(n) = P_3(n),$$

$$Q_2(n) \subset Q_1^2(n),$$

$$Q_2^2(n) \subset Q_1^4(n),$$

$$Q_1^4(n) \subset Q_1^8(n) = P_3(n).$$

Теорема 5. *В* P_3

$$|Q_1^4(n)| = 3^{3^{n-1}} \times |Q_2^4(n-1)|,$$

$$|Q_2^4(n)| = 3^{3^{n-1}} \times |Q_1^4(n-1)|.$$

Следствие 1. *В трехзначной логике*

$$|Q_1^4(n)| = \begin{cases} 3^{\frac{1}{2}(3^n-1)}, \text{ если } n \text{ — нечетное,} \\ 3^{\frac{1}{2}(3^n+1)}, \text{ если } n \text{ — четное,} \end{cases}$$

$$|Q_2^4(n)| = \begin{cases} 3^{\frac{1}{2}(3^n-1)}, \text{ если } n \text{ — четное,} \\ 3^{\frac{1}{2}(3^n+1)}, \text{ если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Теорема 6. *В трехзначной логике для любого натурального* n

$$|Q_1^2(n)| = |Q_2^4(n-1)| \times |Q_1^2(n-1)|.$$

Теорема 7. *В трехзначной логике для любого натурального* n

$$|Q_2^2(n)| = |Q_2^4(n-1)| \times |Q_2^2(n-1)|.$$

Следствие 2. *В трехзначной логике*

$$|Q_1^2(n)| = \begin{cases} 3^{\frac{1}{4}(3^n+1)}, & \text{если } n \text{ — нечетное,} \\ 3^{\frac{1}{4}(3^n+5)}, & \text{если } n \text{ — четное,} \end{cases}$$

$$|Q_2^2(n)| = \begin{cases} 3^{\frac{1}{4}(3^n-3)}, & \text{если } n \text{ — нечетное,} \\ 3^{\frac{1}{4}(3^n+1)}, & \text{если } n \text{ — четное.} \end{cases}$$

Обозначим $P_i(n) = \{f \in P_3(n) \mid \mu^2(f) + i\mu(f) = f\}$, где $i = 0, 1, 2$.

Теорема 8. *В трехзначной логике для любого натурального* n

$$|Q_1(n)| = |Q_1(n-1)| \times |P_1(n-1)|.$$

Теорема 9. *В трехзначной логике для любого натурального* n

$$|Q_2(n)| = |Q_2(n-1)| \times |P_2(n-1)|.$$

Список литературы

[1] *Josef Pieprzyk, Xian-Mo Zhang.* Computing möbius transforms of boolean functions and characterising coincident boolean functions // Boolean Functions: Cryptography and Applications, 2007 (BFCA'07).

[2] *Josef Pieprzyk, Huaxiong Wang, Xian-Mo Zhang.* Möbius-α commutative functions and partially coincident functions // Boolean Functions: Cryptography and Applications, 2008 (BFCA'08).

[3] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

[4] *Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В.* Булевы функции в кодированиии и криптологии. — М.: МЦНМО, 2004.

Исследование метода главных компонент с дополнительными метрическими ограничениями

А. И. Майсурадзе

maysuradze@cs.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Для работы с классическими признаковыми описаниями объектов предложены различные подходы, в числе которых выделяют методы понижения размерности описаний. Один из наиболее известных — это метод главных компонент. Классический МГК [1] может быть сформулирован как задача аппроксимации числовых признаковых описаний объектов, причем на признаки не накладываются никакие дополнительные ограничения.

Описание конечного набора объектов набором метрик называется метрическим. При этом возникают и требуют решения проблемы, аналогичные проблемам признаковых описаний (например, см. [2]). Предлагается, формализуется и исследуется метод сокращения размерности метрических описаний объектов, названный метрическим МГК. Формализация метода аналогична классическому методу главных компонент с дополнительными метрическими требованиями. Доказано, что наложение дополнительных требований не ухудшает качества аппроксимации и не нарушает полезные свойства МГК.

Основные обозначения, формализация задачи метода

Через q обозначим число объектов обрабатываемой выборки. Через $[1, q]$ обозначим множество натуральных чисел от 1 до q.

Определение. Функция $\hat{r} : [1, q]^2 \to \mathbb{R}$ называется *конфигурацией сходства*, если для любых x и y из $[1, q]$ она удовлетворяет условиям $\hat{r}(x, x) = 0$ и $\hat{r}(x, y) = \hat{r}(y, x)$.

Можно считать, что конфигурация сходства $\hat{r}$ — вектор размерности $t = \binom{q}{2} = q(q-1)/2$, $\hat{r} \in \mathbb{R}^t$. Признак $\mathbf{f}$ — вектор размерности q, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^q$.

В работе используются стандартные определения метрики и полуметрики. Если для конфигурации сходства $\hat{r}$ выполнены все аксиомы полуметрики, то говорим, что конфигурация удовлетворяет метрическим требованиям, и пишем $\hat{r} \in \mathrm{MET}$. Через $\hat{1}$ обозначим метрическую конфигурацию, соответствующую метрике пространства изолированных точек, т. е. расстояние между любыми объектами равно 1.

При работе с признаковыми описаниями один объект описывается вектором значений разных признаков. При работе с метрическими описаниями пара объектов описывается вектором различных расстояний [3]. Через n обозначим число конфигураций сходства в метрических описаниях. Метрические описания выборки представляются матрицей данных вида $Y = (\hat{\rho}_1 \dots \hat{\rho}_n) = (\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_t)'$, где конфигурация сходства $\hat{\rho}_j \in \mathbb{R}^t$ и метрическое описание пары объектов $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^n$.

Задача (метрического МГК). Для заданной матрицы метрических описаний Y требуется найти такие $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$, определяющие линейное многообразие

$$L_k = \{\mathbf{a}_0 + g_1\mathbf{a}_1 + \dots + g_k\mathbf{a}_k \mid g_1, \dots, g_k \in \mathbb{R}\},$$

и такие $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_k \in \mathrm{MET}$, которые доставляют минимум функционалу ошибки аппроксимации

$$Q = \left\|(\hat{\rho}_1 \dots \hat{\rho}_n) - (\hat{1}\hat{r}_1 \dots \hat{r}_k) \times (\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k)'\right\|_2^2.$$

Конфигурации $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_k$ называются новыми конфигурациями сходства и составляют новое метрическое описание. Вектор $\mathbf{a}_0$ называется свободным членом модели, векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ называются главными компонентами.

Необходимость свободного члена

Если свободный член в модели классического МГК отсутствует, то возникают сложности с определением подходящей размерности многообразия, а главные компоненты существенно реагируют на направление на начало координат. В общем случае при работе с признаковыми описаниями нет основания считать нулевое описание (начало координат) типичным представителем искомого многообразия и, следовательно, нецелесообразно пренебрегать свободным членом.

Однако при работе с метрическими описаниями возникает гипотеза, что свободный член не оказывает существенного влияния на результат факторизации. Действительно, нулевое метрическое описание можно считать типичным, поскольку оно соответствует парам совпадающих объектов. Эксперименты на модельных наборах и реальных данных подтвердили, что наличие свободного члена в модели МГК практически не влияет на результаты применения МГК к метрическим описаниям.

Основные результаты

Результаты работы классического МГК обладают рядом важных свойств.

1. Решение задачи оптимизации известно в аналитическом виде. Нет необходимости применять численную оптимизацию и бороться с проблемами локальных оптимумов.
2. Решение в определённом смысле может быть получено сразу для всех размерностей аппроксимации. Главные компоненты упорядочиваются, и оптимальным решением для любой размерности будет выбор первых компонент.
3. Главные компоненты ортонормированы. Это очень важно, поскольку позволяет построить формулы перехода от старых описаний к новым без знания всех компонент. Можно вычислять не все главные компоненты.
4. Можно в ходе оптимизации вычислять лишь главные компоненты, после чего новые признаковые описания будут получены быстро и однозначно.
5. Есть вычислительно эффективные методы расчёта лишь нескольких первых компонент.
6. Новые признаки ортогональны. Это интерпретируется как декорреляция признаков. Можно быть уверенными в линейной независимости новых признаков.

В задаче метрического МГК введены дополнительные требования. Следовательно, можно опасаться, что качество аппроксимации упадёт, а решение утратит перечисленные свойства. Последнее свойство (6) будет утрачено неминуемо. В [4] показано, что ортогональность несовместима с метрическими требованиями.

Теорема 1. *Метрический МГК даёт ту же самую аппроксимацию исходных метрических описаний, что и классический МГК.*

Следовательно, качество аппроксимации не ухудшается. Сами новые метрические описания будут отличаться, поскольку результат классического МГК ортогонален.

Теорема 2. *Решение, даваемое метрическим МГК, содержит те же самые главные компоненты* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, *что и решение, даваемое классическим МГК. Следовательно, свойства* (3) *и* (5) *сохраняются.*

Свойство (1) сохраняется. Вид решения известен, есть процедура прямого вычисления оптимального решения. Свойство (2) практически сохраняется. Разница заключается в том, что если требуется пригодный для всех размерностей набор главных компонент $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n$, то придётся вычислить и все новые конфигурации сходства. Свойство (4) сохраняется частично. В ходе оптимизации можно искать лишь главные компоненты. Новые конфигурации сходства можно получить потом и однозначно, однако процедура их получения требует больших вычислительных затрат.

Выводы

Хотя в задачу МГК были добавлены метрические требования, качество аппроксимации не ухудшилось, а из всех важных полезных свойств решения классического МГК было утрачено лишь то, которое было неминуемо утратить. Вычислительные затраты возросли.

Как и в классическом МГК, решение метрического МГК неоднозначно. Это позволяет исследовать возможность введения в задачу метрического МГК других дополнительных ограничений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-01-00131-а.

Список литературы

[1] *Jolliffe T.* Principal Component Analysis (2nd ed.). — New York: Springer-Verlag Inc, 2002.

[2] *Майсурадзе А. И.* О поиске оптимального коллективного слагаемого для набора метрических конфигураций // Искусственный интеллект. — 2006, № 2. — С. 146–150.

[3] *Майсурадзе А. И.* О оптимальных разложениях конечных метрических конфигураций в задачах распознавания образов // ЖВМ и МФ. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1697–1707.

[4] *Майсурадзе А. И.* Гомогенные и ранговые базисы в пространствах метрических конфигураций // ЖВМ и МФ. — 2006. — Т. 46, № 2. — С. 344–361.

Об универсальных свойствах многогранника разрезов

А. Н. Максименко

maksimenko_a_n@mail.ru

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Семейство многогранников разрезов является одним из наиболее хорошо исследованных в классе комбинаторных многогранников. В частности, описанию свойств и приложений этого семейства посвящена монография [1] объемом более 700 страниц.

Приведем формулировку классической задачи о максимальном разрезе. Пусть $G(V, E)$ — полный граф с вершинами $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и ребрами $E = \{e_{ij} = (v_i, v_j) : \ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Рассмотрим произвольное подмножество вершин $W \subseteq V$ (W может быть пустым). *Разрезом* $\mathrm{cut}(W)$ называется множество всех таких ребер графа G, для каждого из которых ровно одна инцидентная ему вершина принадлежит множеству W, а другая, соответственно, — множеству $V \setminus W$. (Следовательно, $\mathrm{cut}(W) = \mathrm{cut}(V \setminus W)$.)

Задача о максимальном разрезе. Дан граф $G(V, E)$, ребрам e_{ij} которого приписаны веса $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Требуется найти подмножество вершин $W \subseteq V$, такое, чтобы разрез $\mathrm{cut}(W)$ был максимален по суммарному весу входящих в него ребер.

Многогранник, ассоциированный с задачей о максимальном разрезе, определяется следующим образом. Каждому ребру e_{ij} графа G сопоставим координату x_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, вектора $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^m$, $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Каждому разрезу $\mathrm{cut}(W)$ графа G поставим в соответствие вектор $x(W)$ с координатами

$$x_{ij}(W) = \begin{cases} 1, & \text{если } e_{ij} \in \mathrm{cut}(W), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Выпуклая оболочка всех таких векторов называется *многогранником разрезов*:

$$CUT_n = \mathrm{conv}\{x(W) : \ W \subseteq V\}.$$

По аналогии с многогранником CUT_n определяются и многие другие многогранники, ассоциированные с оптимизационными задачами на графах. Это прежде всего задача коммивояжера, задача о длиннейшем (кратчайшем) пути, задача о назначениях, задача о дереве Штейнера и многие другие. Исследованию свойств их многогранников уделяется зачастую не менее пристальное внимание. Другой тип комбинаторных многогранников связан с задачами, допускающими более естественную переформулировку в виде задачи целочисленного линейного программирования. Это, в первую очередь, задача о рюкзаке, задачи о покрытиях, разбиениях и упаковках множества, задача о вершинном покрытии в графе и некоторые другие.

В качестве примера приведем описание многогранника упаковок [2]. Пусть $\mathbf{A}$ — 0/1-матрица размера $m \times d$, $\bar{1}$ — m-мерный вектор, все координаты которого равны 1. Выпуклая оболочка множества всех векторов $x \in \{0,1\}^d$, удовлетворяющих неравенству $\mathbf{A}x \leqslant \bar{1}$, называется *многогранником упаковок*.

С целью сравнения комбинаторных характеристик упомянутых выше многогранников введем для них отношение порядка.

Определение 1. В случаях когда многогранник p аффинно эквивалентен либо самому многограннику q, либо некоторой его грани, будем говорить, что p *не сложнее* q. Обозначение: $p \leqslant q$.

Заметим, что если $p \leqslant q$, то

1) число вершин p не превосходит числа вершин q,
2) граф многогранника p является подграфом графа многогранника q,
3) число фасет p не превосходит числа фасет q.

Если же требуется сравнивать семейства комбинаторных многогранников, то полезным оказывается понятие аффинной сводимости.

Определение 2. Семейство многогранников P *аффинно сводится* к семейству многогранников Q, если при некотором $r > 0$ для каждого многогранника $p \in P$ найдется $q \in Q$, такой, что $p \leqslant q$, причем $\dim q = O\left((\dim p)^r\right)$. Обозначение: $P \propto_A Q$.

Отметим, что это определение отличается от определения аффинной сводимости, введенного ранее в работе [3], в сторону усиления условий. Перечислим некоторые свойства нового понятия.

Пусть $P \propto_A Q$, тогда семейство Q наследует от P:

1) суперполиномиальное число вершин и фасет,
2) NP-полноту проверки несмежности вершин,
3) суперполиномиальное кликовое число графа.

Ранее (см. [4]) для нескольких семейств многогранников, обладающих свойством 2, были установлены следующие зависимости.

Теорема 1 [4]. *Многогранники двойных покрытий аффинно сводятся к многогранникам коммивояжера, многогранникам задачи о рюкзаке, многогранникам покрытий, многогранникам задачи* 3-*выполнимости и многогранникам кубических подграфов.*

Кроме того, нетрудно показать, что многогранники разрезов аффинно сводятся к многогранникам двойных покрытий. Причем так как задача распознавания несмежности вершин для CUT_n тривиальна (каждые две его вершины образуют собственное ребро многогранника [1, 3]), то ни одно из перечисленных в теореме 1 семейств не может быть аффинно сведено к многогранникам разрезов. Оказывается, те же рассуждения справедливы и в отношении многих других известных комбинаторных многогранников. Объединяя их с теоремой 1, получаем:

Теорема 2. *Многогранники разрезов аффинно сводятся к многогранникам покрытий, разбиений и упаковок множества, многогранникам коммивояжера, многогранникам задачи о рюкзаке, многогранникам задачи* 3-*выполнимости, многогранникам кубических подграфов, многогранникам вершинных покрытий, многогранникам* 3-*сочетаний, многогранникам раскрасок графа, многогранникам деревьев Штейнера.*

Причем, по указанным выше причинам, аффинное сведение в обратную сторону невозможно. Эти обстоятельства позволяют говорить о многогранниках разрезов как о наиболее простых (в смысле комбинаторных свойств) среди многогранников, ассоциированных с труднорешаемыми задачами.

Работа проводилась при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

Список литературы

[1] *Деза М. М., Лоран М.* Геометрия разрезов и метрик. — М.: МЦНМО, 2001.

[2] *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981.

[3] *Бондаренко В. А., Максименко А. Н.* Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. — М.: ЛКИ, 2008.

[4] *Максименко А. Н.* О комбинаторных свойствах многогранника двойных покрытий // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования № 12 (Тезисы докладов XIV Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения»). — Екатеринбург: УрО РАН, 2011. — С. 197–198.

Конечно определенные минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании

Д. С. Малышев

dsmalyshev@rambler.ru

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики» (Нижегородский филиал);
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Исследуются элементы границы между «простыми» и «сложными» классами графов для некоторой задачи в семействе *наследственных классов графов*, т. е. классов графов, замкнутых относительно удаления вершин.

Формализуем понятия «простого» и «сложного» класса графов. Пусть Π — какая-либо NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов назовем Π-*простым*, если задача Π для графов из этого класса полиномиально разрешима, и Π-*сложным* в противном случае. Далее везде предполагаем справедливость неравенства $P \neq NP$ и не включаем его явно в формулировки полученных результатов.

Естественной идеей решения задачи демаркации является поиск *максимальных* Π-*простых* и *минимальных* Π-*сложных классов*, т. е. тупиковых классов графов соответствующей сложности из рассматриваемой решетки. К сожалению, использование понятия максимального простого класса графов оказывается безрезультатным. Так, В. Е. Алексеев в работе [1] установил, что ни один Π-простой класс не является максимальным простым (правда, в [1] это утверждается только про задачу о независимом множестве, но все рассуждения из данной работы легко переносятся на общий случай). Вместе с тем, до недавнего времени про минимальные сложные классы ничего не было известно.

Первый результат для подобного рода классов был получен автором в работе [2]. Там рассматривалась задача распознавания принадлежности наследственному классу графов $\mathbf{X}$ (задача РП[$\mathbf{X}$]) и было доказано следующее утверждение: *для любого наследственного класса* $\mathbf{X}$ *минимальных* РП[$\mathbf{X}$]*-сложных классов не существует.* С другой стороны, в работах [2, 3, 4] было показано, что определенные классы графов являются минимальными сложными для некоторых обобщений задач о раскраске — задач о списковом ранжировании (реберного и вершинного вариантов). В этой публикации исследуются минимальные сложные классы для задачи о реберном списковом ранжировании.

Задача о реберном списковом ранжировании (далее — задача РСР) заключается в следующем. Пусть заданы граф G с множеством ребер E и множество $\mathcal{L} = \{L(e) : \ e \in E\}$, где каждое $L(e)$ — конечное множество натуральных чисел (цветов, в которые разрешается покрасить ребро e). *$\mathcal{L}$-ранжированием ребер* графа G называется такая раскраска c его вершин, что:

1) $c(e) \in L(e)$ для каждого ребра e;
2) если $c(e_1) = c(e_2)$, $e_1 \neq e_2$, то каждый путь, соединяющий e_1 и e_2, содержит такое ребро e_3, что $c(e_3) > c(e_1)$.

Задача РСР состоит в том, чтобы по данным G и $\mathcal{L}$ определить, существует ли $\mathcal{L}$-ранжирование ребер графа G. Уточним, что под РСР-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача РСР решается для графов из этого класса за полиномиальное время при любом множестве $\mathcal{L}$. В формулировке задачи о вершинном списковом ранжировании слово «ребро» заменено словом «вершина».

К настоящему времени полное описание множества минимальных РСР-сложных классов неизвестно. Вместе с тем, по-видимому, движение к получению результата такого рода предполагает изучение минимальных РСР-сложных классов с дополнительными ограничениями. В качестве такого ограничения в настоящей статье предлагается рассмотреть количество запрещенных порожденных подграфов. Напомним, что любой наследственный класс графов $\mathbf{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathbf{S}$, при этом принята запись $\mathbf{X} = Free(\mathbf{S})$. Минимальное по включению множество $\mathbf{S}$ с таким свойством существует, единственно и обозначается через $Forb(\mathbf{X})$. Если $Forb(\mathbf{X})$ конечно, то $\mathbf{X}$ называется *конечно определенным*, а если $|Forb(\mathbf{X})| = k$, то $\mathbf{X}$ называется *k-определенным*.

Итак, целью данной работы является исследование строения множества минимальных PCP-сложных классов, определяемых наименьшим количеством запрещенных порожденных подграфов, затем определяемых следующим за этим наименьшим количеством таких подграфов и т. д. Первый результат такого рода был получен в работе [5].

Теорема 1. *Класс полных графов* **Clique** *является единственным 1-определенным минимальным PCP-сложным классом.*

В той же работе [5] было установлено, что существует единственный минимальный PCP-сложный подкласс класса всех полных двудольных графов **BComplete**. Обозначим этот подкласс через **BC**. Хотя остается неизвестным, совпадает ли **BC** с **BComplete**, можно с уверенностью утверждать, что **BC** либо 2-определенный, либо 3-определенный. Имеет место следующее утверждение [5].

Теорема 2. *Множество 2-определенных минимальных PCP-сложных классов либо пусто, либо состоит из одного класса* **CBiparite**. *Существует минимальный PCP-сложный класс, определяемый двумя или тремя запрещенными порожденными подграфами.*

Интерес к исследованию минимальных сложных классов именно для реберного варианта задачи о списковом ранжировании (а не для вершинного) обусловлен следующим фактором. При некотором специальном преобразовании (называемом продолжением), введенном в работе [6], сохраняется *NP*-полнота задачи PCP. Вполне возможно, что полученный при такой операции класс будет либо минимальным PCP-сложным, либо близким к PCP-минимальному. Класс $\mathbf{Y}$ называется *продолжением* класса $\mathbf{X}$, если выполняются следующие два условия:

— для любого графа $G \in \mathbf{X}$ существует такой граф $H \in \mathbf{Y}$, что G является остовным подграфом графа H;
— в любом графе из $\mathbf{Y}$ существует остовный подграф, принадлежащий классу $\mathbf{X}$.

В статье [6] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{Y}$ *— произвольный класс графов, являющийся продолжением класса* $\mathbf{X}$ *с NP-полной задачей PCP. Тогда задача PCP NP-полна в классе* $\mathbf{Y}$.

Очевидно, что из теоремы 3 незамедлительно следует *NP*-полнота задачи PCP в классе **Clique**. Вместе с тем, продолжение не сохраняет *NP*-полноту задачи о вершинном списковом ранжировании, поскольку для полных графов она полиномиально разрешима (методом поиска наибольшего паросочетания в двудольном графе). Теорема 3 также позволяет получать новые k-определенные минимальные PCP-сложные классы при больших значениях k. Например, в [6] получен (путем применения теоремы 3 к классу $\mathbf{X} = \mathbf{Star}$) минимальный PCP-сложный класс **Camomile**, определенный семью запрещенными порожденными подграфами. Класс **Star** — совокупность графов, являющихся порожденными подграфами для графов из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{S_i\}$ (S_i — граф, получаемый подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$). Класс **Camomile** составляют графы, являющиеся порожденными подграфами в графах из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{Camomile(i)\}$, где $Camomile(i)$ получается из S_i добавлением всех ребер, инцидентных вершине степени i и всем листьям. Более того, в этой работе доказано, что, применяя теорему 3 к классу графов $\mathbf{X} = \mathbf{Star}$, можно получить только минимальные PCP-сложные классы **Clique**, **BC**, **Camomile**.

Работа поддержана РФФИ, проекты № 10-01-00357-а и № 11-01-00107-а, и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2012 гг., № ГК 16.740.11.0310.

Список литературы

[1] *Alekseev V. E.* On easy and hard classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. — 2004. — V. 132, № 3. — P. 17–26.

[2] *Малышев Д. С.* О минимальных сложных классах графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 43–51.

[3] *Малышев Д. С.* О минимальных сложных элементах решетки наследственных классов графов // Материалы VII молодежной научной шко-

лы по дискретной математике и ее приложениям. Часть II. — М.: ИПМ РАН, 2009. — С. 12–16.

[4] *Малышев Д. С.* О тупиковых по вычислительной сложности наследственных классах графов // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2010. — С. 314–316.

[5] *Малышев Д. С.* Последовательные минимумы решетки наследственных классов графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Вестник Нижегородского университета им. Н .И. Лобачевского. — 2010. — № 4. — С. 70–76.

[6] *Малышев Д. С.* Минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Дискетный анализ и исследование операций. — 2011. — Т. 17, № 1. — С. 133–136.

О сложности периодических функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов

Н. К. Маркелов

nord_rk@bk.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики

В настоящей заметке предложены семейства периодических функций трехзначной логики, которые являются сложными в классе поляризованных полиномов.

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *функцией k-значной логики*, если на каждом наборе $\tilde{\alpha} \in E_k^n$ ее значение содержится в E_k. Множество всех функций k-значной логики от n переменных обозначается P_k^n.

Поляризованным по вектору поляризации $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_k^n$ *полиномом* назовем выражение вида

$$\sum_{\alpha=(a_1,\ldots,a_n)\in E_k^n} c_f^{\sigma}(\tilde{\alpha}) \cdot (x_1+\sigma_1)^{a_1} \cdot \cdots \cdot (x_n+\sigma_n)^{a_n},$$

в котором $c_f^\sigma(\alpha) \in E_k$ — некоторые коэффициенты, $(x_i + \sigma_i)^{a_i}$ — степени, то есть

$$(x_i + \sigma_i)^{a_i} = \underbrace{(x_i + \sigma_i) \cdot (x_i + \sigma_i) \cdot \dots \cdot (x_i + \sigma_i)}_{a_i \text{ раз}}, \quad (x_i + \sigma_i)^0 = 1,$$

все суммы и произведения берутся по $\bmod k$.

Если и только если число k – простое, для каждого вектора поляризации $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n$ для каждой функции $f(\tilde{x}^n) \in P_k^n$ существует однозначный поляризованный по вектору σ полином, ее задающий [1, 2].

Введем характеристику сложности функций k-значной логики в классе поляризованных полиномов. *Сложностью $l(P^\sigma)$ полинома P^σ*, поляризованного по вектору σ, назовем число его слагаемых с ненулевыми коэффициентами. *Сложность функции* k-значной логики f в классе поляризованных полиномов определяется как минимальная по всем поляризациям сложность полинома, реализующего эту функцию: $L(f) = \min\limits_{\sigma \in E_k^n, P^\sigma = f} l(P^\sigma)$. *Функция Шеннона* сложности k-значных функций в классе поляризованных полиномов $L_k(n)$ определяется как сложность самой сложной функции k-значной логики от n переменных: $L_k(n) = \max\limits_{f \in P_k^n} L(f)$.

Известны следующие оценки функций Шеннона сложности k-значных функций в классах поляризованных полиномов:

$L_2(n) = \left[\frac{2^{n+1}}{3}\right]$ [3];
$L_k(n) \leqslant \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n$ при простых $k \geqslant 3$ [2];
$L_k(n) \gtrsim \frac{k-1}{k} k^n$ при простых $k \geqslant 3$ [4].

В настоящей заметке предлагаются семейства сложных в классе поляризованных полиномов функций трехзначной логики.

Функция $k-$значной логики $f(\tilde{x}^n) \in P_k^n$ называется *периодической периода* $T < k^n$, если ее вектор значений $\tilde{\alpha}_f$ обладает следующим свойством:

$$\alpha_i = \alpha_{i+T} \ (i = 0, \dots, k^n - T).$$

С каждой периодической функцией от n переменных однозначно связывается вектор $(\alpha_0, \dots, \alpha_{T-1}) \in E_k^T$, который назовем ее *периодом*.

Теорема 1. *Пусть* $f_i(\tilde{x}^n) \in P_3^n$, $i = 1, \ldots, 4$, – *периодические функции с периодами* $p_i \in E_3^4$, *где*

$$p_1 = (1122),\ p_2 = (2211),\ p_3 = (1221),\ p_4 = (2112).$$

Тогда $L(f_i) \geqslant \frac{3}{4}3^n - \frac{1}{4}$.

Соответствующая нижняя оценка сложности функций f_i, $i = 1, \ldots, 4$, для значений $n \leqslant 10$ была найдена экспериментально Е. Н. Денисовым [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00731-а.

Список литературы

[1] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — Высшая школа, 2001. — С. 9–42.

[2] *Селезнева С. Н.* О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14, вып. 2. — С. 48–53.

[3] *Перязев Н. А.* Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. — 1995 — Т. 34, вып. 3. — С. 323–326.

[4] *Алексеев В. Б., Селезнева С. Н., Вороненко А. А.* О сложности реализации функций k-значной логики поляризованными полиномами // Труды V Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Ратмино, 26–29 мая 2003 г.). — М., МГУ. — 2003. — С. 8-9.

[5] *Денисов Е. Н.* О сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов. Дипломная работа, кафедра математической кибернетики, ВМиК МГУ, 2006.

Аффинные преобразования геометрических образов конечных автоматов

Д. О. Матов

dmitrymatov@gmail.com

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Задание поведения конечных детерминированных автоматов геометрическими образами дает новые инструменты для решения различных задач [1]. Значительный интерес представляет взаимосвязь геометрических преобразований образов и свойств автоматов в их классическом представлении. В данной статье представлены некоторые результаты исследования применения аффинных преобразований к геометрическим образам, порождаемым некоторыми классами автоматов. Эти исследования были начаты при рассмотрении поведения динамических систем, определяемых геометрическими образами автоматов [2]. Однако сейчас данные вопросы рассматриваются с точки зрения их последующего применения для построения различных композиций автоматов с использованием языка геометрических образов.

Пусть автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S — множество состояний, X, Y — входной и выходной алфавиты, $\delta : S \times X \to S$, $\lambda : S \times X \to Y$ — функции переходов и выходов соответственно. Пусть $|X| = n$, $|Y| = m$. С инициальным автоматом (A, s), $s \in S$, связано автоматное отображение $\Lambda_A^s : X^* \to Y^*$. Геометрическое пространство Γ для автомата (A, s) определяется по следующему алгоритму [1]:

1. Сопоставим элементам множества X натуральные числа от 1 до n, т. е. осуществим взаимно-однозначное отображение $f : X \to \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. Определим координатную ось абсцисс $\tilde{X}$ для пространства Γ как отрезок числовой оси $[0, n+1]$.
3. Каждому слову $p = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ поставим в соответствие вектор $\omega = \big(f(x_{i_1}), \ldots, f(x_{i_k})\big)$, т. е. осуществим взаимно-однозначное соответствие $g : X^* \to V_N$, где V_N — пространство конечномерных векторов, элементами которых являются натуральные числа.
4. Каждому такому вектору $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ взаимно-однозначно сопоставим точку $\tilde{x} \in Q$ на оси абсцисс:

$$\tilde{x} = \frac{\omega_1}{(n+1)^0} + \frac{\omega_2}{(n+1)^1} + \frac{\omega_3}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{\omega_k}{(n+1)^{k-1}}.$$

Аналогично определяются нумерация элементов множества Y, ось ординат $\tilde{Y}$ пространства Γ и отображение $h : Y^* \to V_N$. Каждой паре $(p, q) \in \Lambda_A^s$ в пространстве Γ сопоставляется точка с координатами $(\tilde{x}, \tilde{y})$, где

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}, \quad (c_1, c_2, \ldots, c_{|p|}) = g(p),$$

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{|q|} \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}, \quad (b_1, b_2, \ldots, b_{|q|}) = h(q).$$

Множество таких пар $(\tilde{x}, \tilde{y})$ понимается под геометрическим образом Ω_A^s автомата (A, s).

Класс автоматов, у которых $|S| = N$, $|X| = L$ и $|Y| = M$, будем обозначать $K(N, L, M)$.

Два геометрических образа называются *аффинно-эквивалентными*, если множество точек одного образа может быть преобразовано в множество точек другого образа некоторым поточечным аффинным преобразованием. Аффинное преобразование задается формулами

$$\tilde{x}' = c_{11}\tilde{x} + c_{12}\tilde{y} + r_1, \quad \tilde{y}' = c_{21}\tilde{x} + c_{22}\tilde{y} + r_2, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

выражающими для каждой данной точки $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ координаты преобразованной точки $M'(\tilde{x}', \tilde{y}')$ (в той же системе координат).

Зафиксируем некоторый класс автоматов $K(N, L, M)$ и рассмотрим множество Ω геометрических образов всевозможных инициальных автоматов из данного класса. Будем рассматривать те аффинные преобразования образов, путем применения которых можно некоторый образ $\Omega_i \in \Omega$ преобразовать в другой образ $\Omega_j \in \Omega$. В этой статье рассматривается следующее аффинное преобразование: параллельный перенос вдоль оси ординат одновременно с растяжением или сжатием относительно оси абсцисс. Данное преобразование имеет вид:

$$\tilde{x}' = \tilde{x}, \quad \tilde{y}' = a\tilde{y} + b. \tag{1}$$

Будем говорить, что образы Ω_i, Ω_j *совместимы* выбранным видом аффинного преобразования, если при применении преобразования (1) ко всем точкам из Ω_i получается Ω_j.

Рассмотрим бинарное отношение $\rho \subset \Omega^2$, образованное парами совместимых образов. Легко показать, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, поэтому является отношением эквивалентности на множестве Ω и задает разбиение этого множества на классы эквивалентности. Множество всех различных геометрических образов всевозможных инициальных автоматов из класса $K(N, L, M)$ будем обозначать $\Omega(N, L, M)$. Множество пар коэффициентов преобразований образов из $\Omega(N, L, M)$ будем обозначать $F(N, L, M)$.

Для выбранного вида аффинного преобразования был сформулирован и доказан критерий аффинной эквивалентности пары геометрических образов:

Теорема 1. *Геометрические образы $\Omega_A, \Omega_B \in \Omega(N, L, M)$ совместимы преобразованием вида (1) тогда и только тогда, когда преобразованием этого вида совместимы их конечные части, составленные из точек, относящимся к входным и выходным словам длины не более N^2.*

Этот критерий дает способ эффективной непосредственной проверки аффинной эквивалентности.

Следующие две теоремы первоначально были сформулированы и доказаны для автономных автоматов [3], а затем их удалось обобщить и на случай произвольной мощности входного алфавита.

Теорема 2. *Если $(a, b) \in F(N, L, M)$, то*

$$a = \frac{p_a}{q_a}, \quad b = \frac{p_b}{q_b}, \quad p_a, q_a, p_b, q_b \in Z,$$

$$1 \leqslant p_a \leqslant M, \quad 1 \leqslant q_a \leqslant M, \quad 0 \leqslant |p_b| \leqslant M^2 - 1, \quad 1 \leqslant q_b \leqslant M.$$

Следствие. $|F(N, L, M)| \leqslant 2M^5$.

Эту оценку можно улучшить до следующей: $|F(N, L, M)| \leqslant M^4$.

Теорема 3.

$$F(N, L, M) = F(2, 1, M)\ \forall N \geqslant 2,\ \forall L \geqslant 1.$$

Список литературы

[1] *Тяпаев Л. Б.* Решение некоторых задач для конечных автоматов на основе анализа их поведения // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2006. — Т. 6, вып. 2. — С. 121–133.

[2] *Тяпаев Л. Б., Матов Д. О.* Базисы геометрических образов для динамических систем, определяемых некоторыми классами автоматов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч.конф. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. — С. 201–204.

[3] *Матов Д. О.* Классы аффинной эквивалентности геометрических образов автономных автоматов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы науч. конф. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. — С. 103–108.

Оценка обобщающей способности для монотонных алгоритмов классификации

Г. А. Махина

gmakhina@yandex.ru

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

Предлагается один метод доопределения частично заданной монотонной булевой функции. В терминах теории обучения машин данный метод решает задачу классификации на два непересекающихся класса, в которой объекты описываются n бинарными признаками. Требование монотонности накладывается на алгоритм классификации в тех случаях, когда имеется априорная информация о монотонном характере зависимости класса от признаков [1] либо когда строится монотонная корректирующая операция [2]. Верхняя оценка обобщающей способности для произвольных монотонных алгоритмов классификации была получена в [1]. В данной работе предлагается точная оценка для монотонных алгоритмов классификации, основанных на принципе ближайшего соседа.

Определения и обозначения

Множество всех наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, таких, что $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, называется *n-мерным единичным кубом* и обозначается через B^n. Будем говорить, что вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ предшествует вектору $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ или $\alpha \preceq \beta$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i\colon 1 \leqslant i \leqslant n$. Булева функция $f\colon B^n \to B^1$ называется *монотонной*, если для любых двух векторов α и β, таких, что $\alpha \preceq \beta$, выполняется отношение $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Пусть задано множество $X^L = \{x_i \in B^n\}_{i=1}^{L}$, называемое *генеральной выборкой*, и бинарная функция $y(x)$, возвращающая истинный класс объекта x. Обозначим $y_i = y(x_i)$. Будем полагать, что $y(x)$ является монотонной булевой функцией. Введём *множество нулей* $X_0^L = \{x_i \in X^L\colon y_i = 0\}$ и *множество единиц* $X_1^L = \{x_i \in X^L\colon y_i = 1\}$.

Пусть $A = \big\{a\colon B^n \to B^1\big\}$ — множество монотонных булевых функций; будем называть их *алгоритмами классификации* или *классификаторами.* Зададим бинарную функцию $I\colon A \times X^L \to \{0, 1\}$, называемую *индикатором ошибки*: $I(a, x_i) = 1$, если $a(x_i) \neq y_i$. Для каждого алгоритма $a \in A$ определим частоту его ошибок ν на произвольной выборке $X \subseteq X^L$: $\nu(a, X) = \frac{1}{|X|} \sum\limits_{x \in X} I(a, X)$.

Пусть ℓ — фиксированное натуральное число $\ell < L$. Обозначим через $[X]^\ell$ множество всех ℓ-элементных подмножеств генеральной выборки X^L, $\bigl|[X]^\ell\bigr| = \binom{L}{\ell}$. Методом обучения называется отображение $\mu\colon [X]^\ell \to A$, которое произвольной обучающей выборке $X \in [X]^\ell$ ставит в соответствие некоторый алгоритм $a \in A$. Выборка $\bar{X} = X^L \setminus X$ называется контрольной.

Монотонный классификатор, основанный на принципе ближайшего соседа

Нижней тенью набора α будем называть множество $\{x \in B^n\colon x \preceq \alpha\}$. *Верхней тенью* набора α будем называть множество $\{x \in B^n\colon x \succeq \alpha\}$. Определим расстояние $R_{\mathrm{up}}(\alpha, u)$ от набора α до верхней тени набора u как минимальное число нулевых координат набора α, которые надо инвертировать, чтобы полученный в результате набор α' попал в верхнюю тень u, т. е. $R_{\mathrm{up}}(\alpha, u) = \|\alpha \vee u\| - \|\alpha\|$. Определим расстояние $R_{\mathrm{dn}}(\alpha, z)$ от набора α до нижней тени набора z как минимальное число единичных координат набора α, которые надо инвертировать, чтобы полученный в результате данного преобразования набор α' попал в нижнюю тень z, т. е. $R_{\mathrm{dn}}(\alpha, z) = \|\alpha\| - \|\alpha \wedge z\|$.

Рассмотрим алгоритм классификации $a(x; X)$, основанный на принципе ближайшего соседа

$$a(x; X) = y(\arg\min_{x' \in X} \rho(x, x')) \text{ для всех } x \in X, \tag{1}$$

где функция расстояния ρ определяется через расстояния до верхних теней объектов из множества X_1^L и нижних теней объектов из множества X_0^L:

$$\rho(x, x') = \begin{cases} \|x \vee x'\| - \|x\|, & \text{если } x' \in X_1^L; \\ \|x\| - \|x \wedge x'\|, & \text{если } x' \in X_0^L. \end{cases} \tag{2}$$

Метод обучения μ является в данном случае *ленивым* (lazy learning), т. е. сводится к запоминанию обучающей выборки X, которая затем может быть использована для классификации произвольных объектов x по формуле (1).

При условии монотонности исходной выборки результатом применения метода ближайшего соседа является монотонный алгоритм. Доказательство этого факта можно найти в [2].

Оценка обобщающей способности

Обобщающая способность метода обучения μ на конечной генеральной выборке X^L характеризуется функционалом полного скользящего контроля (complete cross-validation, CCV) [3], который определяется как средняя по всем разбиениям $X \bigcup \bar{X} = X^L$ частота ошибок на контрольной выборке:

$$\mathrm{CCV}(\mu, X^L) = \frac{1}{\binom{L}{\ell}} \sum_{X \in [X]^\ell} \nu(\mu(X), \bar{X}).$$

Лемма. *Для произвольных μ и X^L*

$$\mathrm{CCV}(\mu, X^L) = \frac{1}{k\binom{L}{\ell}} \sum_{i=1}^{L} N_i^\ell, \qquad N_i^\ell = \sum_{X \in [X]^\ell} [x_i \in \bar{X}]\, I(\mu(X), x_i), \quad (3)$$

где N_i^ℓ — число разбиений генеральной выборки X^L на обучающую X и контрольную $\bar{X}$, при которых объект x_i оказывается в контрольной выборке и алгоритм μX допускает на нем ошибку.

Доказательство леммы можно найти в [3].

Каждому объекту $x_i \in X^L$ сопоставим две функции: $t_i(m)$ есть число объектов $x' \in X^L$, таких, что $\rho(x_i, x') < m$ и $x' \neq x_i$; $s_i(m)$ есть число объектов $x' \in X^L$, таких, что $\rho(x_i, x') = m$ и $y(x') \neq y(x_i)$ для всех $m = 0, \ldots, n$.

Алгоритмы вида (1), примененные к монотонной выборке, отличаются классификацией только объектов, равноудаленных от классов единиц и нулей. Для получения верхней оценки $\mathrm{CCV}(\mu, X^L)$ возьмём пессимистичный метод обучения μ_p, который по любой выборке X строит алгоритм $\mu_p(X)$, неправильно классифицирующий все такие объекты.

Теорема. *Пусть X^L — монотонная выборка, $\mu_p(X)$ — пессимистичный алгоритм вида $(1), (2)$. Тогда*

$\mathrm{CCV}(\mu_p, X^L) =$

$$= \frac{1}{k} \frac{1}{\binom{L}{\ell}} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{n} \left(\binom{L - t_i(m) - 1}{\ell} - \binom{L - t_i(m) - s_i(m) - 1}{\ell} \right).$$

Доказательство. Предположим, что пессимистичный алгоритм μ_p допускает ошибку на объекте x_i и расстояние до ближайшего объекта равно m. Это значит, что все объекты с $\rho(x_i, x') < m$ вошли в контрольную выборку, а в обучающей выборке присутствует по крайней мере один объект с $\rho(x_i, x') = m$ из противоположного класса. Число разбиений генеральной выборки, удовлетворяющих требуемому условию, равно

$$N_{im}^{l} = \binom{L - t_i(m) - 1}{\ell} - \binom{L - t_i(m) - s_i(m) - 1}{\ell}.$$

Пробегая по всем возможным расстояниям, получаем $N_i^l = \sum\limits_{m=0}^{n} N_{im}^l$. Подставляя это значение N_i^l в (3), получаем требуемое. ∎

Сложность вычисления CCV не превышает $O(nL^2)$ операций.

Автор выражает признательность д.ф.-м.н. К. В. Воронцову за постановку проблемы и ценные замечания.

Список литературы

[1] *Воронцов К. В.* Комбинаторный подход к оценке качества обучаемых алгоритмов // Матем. вопр. кибернетики. — 2004. — Вып. 13. — С. 5–36.

[2] *Воронцов К. В.* Оптимизационные методы линейной и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания // ЖВМ и МФ. — 2000. — Т. 40, № 1. — С. 166–176.

[3] *Mullin M., Sukthankar R.* Complete cross-validation for nearest neighbour classifiers // Proceedings of International Conference on Machine Learning. — 2000. — P. 639–646.

Итерации конечных языков и недетерминированные конечные автоматы

Б. Ф. Мельников

B.Melnikov@tltsu.ru

Тольяттинский государственный университет

Введение. Равенство бесконечных итераций языков

В работе [1] рассматривались бесконечные итерации конечных языков. А именно, мы рассматривали ω-языки вида A^ω, где A – конечный язык над заданным алфавитом Σ. (Мы предполагаем, что $|\Sigma| \geqslant 2$ и $A \not\ni \varepsilon$.) Для двух конечных языков A и B мы рассматривали их равенство $A^\omega = B^\omega$, которое равносильно выполнению специального отношения эквивалентности, также определённого в [1]: $A^* \equiv_\infty B^*$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} (\forall\, u \in A^*)\ (\exists\, v \in B^*)\ (u \in \mathrm{Pref}\,(v)) \\ (\forall\, v \in B^*)\ (\exists\, u \in A^*)\ (v \in \mathrm{Pref}\,(u)) \,. \end{cases} \tag{1}$$

(Здесь $\mathrm{Pref}\,(u)$ – множество всех префиксов слова u, включая ε и u. Аналогично для языков: $\mathrm{Pref}\,(A) = \{\, u \,|\, u \in \mathrm{Pref}\,(v),\ v \in A \,\}$.) Ниже будем писать $A \equiv B$ вместо обозначения $A^* \equiv_\infty B^*$, использовавшегося в [1].

Достаточное условие равенства

Достаточное условие равенства $A \equiv B$ формулируется в виде следующих 3 шагов.

1. Рассматриваем *новый* конечный алфавит Δ и некоторый максимальный префиксный код [2] над этим алфавитом. При этом условие $A \equiv B$ выполнено, поскольку $A^\omega = B^\omega = \Delta^\omega$.
   В качестве примера рассмотрим алфавит $\Delta = \{\, 0, 1 \,\}$ и два таких языка: $A = \{\, 0, 10, 11 \,\}$ и $B = \{\, 00, 01, 1 \,\}$.
2. Добавляем некоторые слова к языкам A и B. (Для A при этом достаточно рассматривать только такие слова u, для которых $u \notin \mathrm{Pref}\,(A)$; аналогично для B.) При этом равенство $A \equiv B$ тоже выполняется. Заметим, что полученные языки, вообще говоря, не являются префиксными.

В качестве продолжения предыдущего примера рассмотрим языки $A = \{ 0, 10, 11, 1101 \}$ и $B = \{ 00, 01, 1, 111, 1110 \}$.

3. Для полученных языков рассмотрим морфизм $h : \Delta^* \to \Sigma^*$; заметим, что язык $h(\Delta) = \{ h(c) \,|\, c \in \Delta \}$ тоже, вообще говоря, не является префиксным. Для полученных языков (их тоже будем обозначать A и B) условие $A \equiv B$ также выполняется.

   Продолжим рассматривать предыдущий пример. Для (непрефиксного) морфизма $h(0) = ab$, $h(1) = aba$ получаем следующие языки:

$$A = \{ ab, \quad aba\,ab, \quad aba\,aba, \quad aba\,aba\,ab\,aba \} \quad \text{и}$$
$$B = \{ ab\,ab, \quad ab\,aba, \quad aba, \quad aba\,aba\,aba, \quad aba\,aba\,aba\,ab \}$$

Итак, очевидное достаточное условие таково: если языки A и B получены описанным здесь способом, то $A \equiv B$.

Формулировка необходимого условия равенства

Теорема 1. *Сформулированное в предыдущем разделе достаточное условие является необходимым и достаточным.*

То есть *каждая* пара конечных языков A и B, для которых выполнено условие $A \equiv B$, может быть сконструирована с помощью алгоритма, описанного в предыдущем разделе.

Приведённая нами формулировка близка к доказанной в [1] теореме 1. Иными словами, это утверждение для рассматриваемых языков A и B (таких, что $A \equiv B$) может быть переформулировано следующим образом. Существует конечный язык D (пусть $D = \{ u_1, \ldots, u_n \}$), для которого выполняется следующее условие. Для некоторого нового алфавита $\Delta = \{ c_1, \ldots, c_n \}$ существуют (конечные) языки $A', B' \subseteq \Delta^*$, такие, что:

— A' и B' содержат (вообще говоря, различные) максимальные префиксные коды над Δ;

— для морфизма

$$h : \Delta^* \to \Sigma^*, \quad \text{где} \quad h(c_1) = u_1\,, \ \ldots, \ h(c_n) = u_n\,,$$

  выполнены условия $h(A') = A$ и $h(B') = B$.

Этот язык D (для некоторого рассматриваемого нами языка A) будем называть «минимальным».

Итерации языков и конечные автоматы

В этом разделе рассмотрим несложный алгоритм свéдения рассмотренной выше проблемы равенства ω-языков вида A^ω к конечным автоматам. (Автоматы и связанные с ними объекты определяются согласно [3].) Отметим, что альтернативный алгоритм для проверки равенства (1) рассмотрен в [4].

Для языка $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$, где $u_i = a_{i,1} \ldots a_{i,l_i}$ для $i = 1, \ldots, n$, рассмотрим недетерминированный конечный автомат $\mathcal{K}(A) = (Q, \Sigma, \delta, \{s\}, Q)$, где

$$Q = \{s\} \cup \bigcup_{i \leqslant n,\ j < l_i} q_{i,j}\,,$$

со следующей функцией переходов δ (мы рассматриваем приведённые далее определения для каждого $i = 1, \ldots, n$). Если $|u_i| = 1$, то $\delta(s, a_{i,1}) \ni s$; иначе

$$\delta(s, a_{i,1}) \ni q_{i,1}\,, \qquad \delta(q_{i,l_i-1}, a_{i,l_i}) = \{s\}$$
$$\text{и} \quad \delta(q_{i,j-1}, a_{i,j}) = \{q_{i,j}\} \quad \text{для каждого возможного} \quad j \leqslant l_i - 1\,.$$

Очевидно, что такой автомат определяет язык $\mathrm{Pref}\,(A^*)$; поэтому условие (1) можно проверить, ответив на вопрос об эквивалентности автоматов $\mathcal{K}(A)$ и $\mathcal{K}(B)$.

Для ответа на этот вопрс мы можем использовать канонические автоматы, эквивалентные $\mathcal{K}(A)$ и $\mathcal{K}(B)$ и определённые согласно [3]. Однако основной аргумент для рассмотрения канонических автоматов такой: *каждое* состояние соответствующего канонического автомата соответствует некоторому подмножеству множества состояний рассматриваемого автомата, например автомата $\mathcal{K}(A)$.

Такое соответствие также может быть построено на основе [3]. Фактически им является рассматриваемая в той статье функция $(\varphi^{in})^{-1}$. Это соответствие означает следующее. Для некоторого состояния $\widetilde{q}$ канонического автомата и некоторого слова v входного языка этого состояния (т. е. $\mathcal{L}^{in}(\widetilde{q})$) существуют некоторые состояния $q_1, \ldots, q_m$ автомата $\mathcal{K}(A)$, такие, что

$$v \in \mathcal{L}^{in}(q_1),\ \ldots,\ v \in \mathcal{L}^{in}(q_m)\,.$$

Поэтому если для «минимального» языка D и некоторого слова $v \notin D^*$ выполнено условие $D \equiv D \cup \{v\}$, то

$$q_i \neq s \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m\,; \qquad \text{а также} \qquad \bigcup_{i \leqslant m} \mathcal{L}^{out}(q_i) \supseteq \mathrm{Pref}\,(D^*).$$

План возможного доказательства равенства P=NP

Вследствие изложенного выше, для доказательства равенства P=NP достаточно доказать два следующих факта.

1. Проблема определения эквивалентности определённых выше автоматов $\mathcal{K}(A)$ и $\mathcal{K}(B)$ (для заданных конечных языков A и B) принадлежит классу NP. (По-видимому, доказательство этого факта может быть получено аналогично проблемам AL1 и AL9 монографии [5].)
2. Существует полиномиальный алгоритм «построения инверсного морфизма». То есть для заданного конечного языка $A \in \Sigma^*$ можно за полиномиальное время получить «минимальный» (в сформулированном выше смысле) язык D, такой, что $A \equiv D$.

Список литературы

[1] *Melnikov B.* The equality condition for infinite catenations of two sets of finite words // Int. J. of Found. of Comp. Sci. — 1993. — V. 4, № 3. — P. 267–274.

[2] *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. — М.: Мир, 1985.

[3] *Melnikov B.* Once more on the edge-minimization of nondeterministic finite automata and the connected problems // Fundamenta Informaticae. — 2010. — Vol. 104, № 3. — P. 267–283.

[4] *Мельников Б.* Алгоритм проверки равенства бесконечных итераций конечных языков // Вестник Московского унив. Сер. 15. — 1996. — № 4. — С. 25–28.

[5] *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.

О вычислении сложности по Арнольду двоичных слов

Ю. В. Мерекин

merekin@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Для двоичных слов длины 2^n, $n \geqslant 1$, покажем возможность ускоренного вычисления сложности по Арнольду.

Пусть $w = x_1x_2\dots x_{2^n}$, $w \neq v^k$, $k \geqslant 2$, — произвольное непериодическое двоичное слово длины $|w| = 2^n$, $n \geqslant 1$. Через (w) обозначим бесконечное периодическое слово $(w) = ww\dots$. Далее под термином «слово (w)» мы будем понимать бесконечное периодическое слово (w).

Рассмотрим схему (цепочку слов)

$$(w) = (w_1), (w_2),\ \dots\ , (w_s) = (v), \tag{1}$$

в которой первое слово произвольно, а каждое слово $(w_i) = y_1y_2\dots$ порождает очередное слово $(w_{i+1}) = z_1z_2\dots$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$, с помощью оператора

$$F(\cdot, h_i) : (w_i) \mapsto (w_{i+1}) :\ z_j = y_j \oplus y_{j+h_i}, \tag{2}$$

где $j \geqslant 1$, $1 \leqslant h_i = 2^{n_i}$, $0 \leqslant n_i \leqslant n$, $\oplus$ является сложением по модулю два, то есть $F(w_i, h_i) = (w_{i+1})$. Число h_i назовём *рангом оператора* (2), а число s — *длиной схемы* (1).

Тип схемы, в которой (w) — первое, (v) — последнее слово, h — максимальный ранг используемых операторов, s — длина схемы, обозначим через $S(w, v, h, s)$. Для всякого (w) существует такое минимальное s, что в схеме $S(w, 0, 1, s)$ все слова попарно различны и $F(v, 1) = (0)$. Такую схему назовём *сложностной схемой.* Любое слово (w) имеет единственную сложностную схему. Число $s-1$ назовём *сложностью* двоичного слова (w) и обозначим через $A(w)$. Это понятие введено В. И. Арнольдом в более общем виде [1]. Оно совпадает с нашим определением сложности для слов длины 2^n. Сложность периодического слова (w) равна сложности конечного слова w.

В произвольной схеме $S(w, v, 1, s)$ выделим цепочку слов

$$(w) = (w_1), (w_{1+l_1}),\ \dots\ , (w_{1+l_1+\dots+l_t}) = (v), \tag{3}$$

где $l_i \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant t \leqslant s-1$. Если в (3) каждое слово $(w_{1+l_1+\ldots+l_i})$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$, совпадает с $F(w_{1+l_1+\ldots+l_{i-1}}, h_i)$, $h_i = l_i$, то цепочка слов (3) является схемой $S(w, v, h, s_t)$, $s_t = 1+t$, которую назовём *эквивалентной* схеме $S(w, v, 1, s)$. В работе [2] доказана

Теорема 1. *Любая схема $S(w, v, 1, 2^r+1)$, $r \geqslant 0$, эквивалентна схеме $S(w, v, 2^r, 2)$.*

В слове $w = x_1x_2\ldots x_{2^n}$, $n \geqslant 1$, выделим 2^{n-m}, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, позиций, таких, что расстояние между двумя соседними выделенными позициями одинаково и равняется 2^m. Используя выделенные позиции, образуем слово $u = x_ix_{i+2^m}\ldots x_{i+2^n-2^m}$ длины 2^{n-m}. Бесконечное слово $(u) = uu\ldots$ обозначим через $(w)^{x_i}_{2^{n-m}}$ и назовём *прореженным словом*. Число 2^{n-m} назовём *шагом* прореженного слова $(w)^{x_i}_{2^{n-m}}$. Заметим, что каждое прореженное слово является линейно упорядоченным множеством номеров позиций слова w.

Для любого слова (w) при фиксированном значении m существуют 2^m различных прореженных слов

$$(w)^{x_1}_{2^{n-m}}, (w)^{x_2}_{2^{n-m}}, \ \ldots\ , (w)^{x_{2^m}}_{2^{n-m}}, \quad n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1. \quad (4)$$

Определим операцию объединения прореженных слов, которую будем обозначать через «$*$». Из определения прореженного слова следует, что каждая из позиций $x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}$ встречается в прореженных словах (4) один и только один раз, поскольку является объединением арифметических прогрессий с разностями степени двойки. Справедливо представление слова (w) в виде

$$(w) = (w)^{x_1}_{2^{n-m}} * (w)^{x_2}_{2^{n-m}} * \ldots * (w)^{x_{2^m}}_{2^{n-m}}, \quad n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1. \quad (5)$$

Для произвольного слова (w) определим его принадлежность к одному из типов слов: чётному или нечётному. Слово $(w) = ww\ldots$, где $w = x_1x_2\ldots x_{2^n}$, $x_i \in \{0,1\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, $n \geqslant 0$, назовём *чётным*, если $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{2^n} = 0$, и *нечётным*, если $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{2^n} = 1$. Существует простой алгоритм вычисления чётности всех прореженных слов $(w)^{x_i}_{2^{n-m}}$, $|w| = 2^n$, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, слова $(x_1x_2\ldots x_{2^n})$.

Например, для $n = 3$ имеем:

$$(w)^{x_1}_{2^3} = (x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8), \qquad m = 0;$$

$$(w)^{x_1}_{2^{3-1}} = (x_1x_3x_5x_7), \quad (w)^{x_2}_{2^{3-1}} = (x_2x_4x_6x_8), \qquad m = 1;$$

$$(w)^{x_1}_{2^{3-2}} = (x_1x_5), \quad (w)^{x_2}_{2^{3-2}} = (x_2x_6),$$
$$(w)^{x_3}_{2^{3-2}} = (x_3x_7), \quad (w)^{x_4}_{2^{3-2}} = (x_4x_8), \qquad m = 2.$$

Теорема 2. *Для любого двоичного слова (w), длина периода которого равна 2^n, $n \geqslant 1$, все прореженные слова $(w)^{x_i}_{2^{n-m}}$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, $1 \leqslant i \leqslant 2^m$, нечётны тогда и только тогда, когда сложность слова (w) равна $A(w) = 2^n - 2^m + 1$.*

Рассмотрим пример вычисления сложности $A(w)$, в котором используются теорема 1 и теорема 2. Слова (w), $|w| = 2^n$, $n \geqslant 1$, расположены на вершинах ориентированного двоичного дерева (см. рис. 1).

На каждом ярусе дерева расположены все слова, сложность которых равна номеру яруса. В этом дереве выделим некоторый ориентированный путь, содержащий $A(w)$ рёбер и заканчивающийся в вершине нулевого яруса.

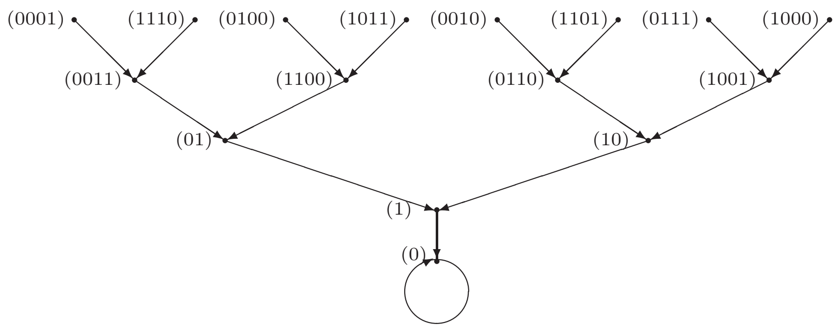


Рис. 1

Например, путь из вершины 16-го яруса: $(w_{16}) \mapsto (w_{15}) \mapsto \ldots \mapsto (w_1) \mapsto (w_0)$.

Для слов $(w_{16}), (w_{15}), (w_{13}), (w_9), (w_8), (w_7), (w_5), (w_4), (w_3), (w_2)$ значение сложности $A(w_i)$ согласно теореме 2 вычисляется подсчётом чётности прореженных слов.

Для слов $(w_{14}), (w_{12}), (w_{11}), (w_{10}), (w_6)$ используем теорему 1, согласно которой применение оператора вида (2) ранга 2^r, $r \geqslant 0$, эквивалентно движению по выделенному пути на 2^r ярусов.

В таблице 1 приведены результаты вычисления сложности $A(w)$ для всех слов (w), $|w| = 2^n$, $1 \leqslant n \leqslant 4$.

Таблица 1

(w_i)	$A(w_i)$	$F(w_i, 2^r) : (w_i) \mapsto (w_j)$	$A(w_j)$	$A(w_i) = 2^r + A(w_j)$
(w_{16})	$2^4 - 2^0 + 1$			
(w_{15})	$2^4 - 2^1 + 1$			
(w_{14})		$F(w_{14}, 2^0) : (w_{14}) \mapsto (w_{13})$	$A(w_{13}) = 2^4 - 2^2 + 1$	$A(w_{14}) = 2^0 + (2^4 - 2^2 + 1)$
(w_{13})	$2^4 - 2^2 + 1$			
(w_{12})		$F(w_{12}, 2^2) : (w_{12}) \mapsto (w_8)$	$A(w_8) = 2^3 - 2^0 + 1$	$A(w_{12}) = 2^2 + (2^4 - 2^2 + 1)$
(w_{11})		$F(w_{11}, 2^1) : (w_{11}) \mapsto (w_9)$	$A(w_9) = 2^4 - 2^3 + 1$	$A(w_{11}) = 2^1 + (2^4 - 2^3 + 1)$
(w_{10})		$F(w_{10}, 2^0) : (w_{10}) \mapsto (w_9)$	$A(w_9) = 2^4 - 2^3 + 1$	$A(w_{10}) = 2^0 + (2^4 - 2^3 + 1)$
(w_9)	$2^4 - 2^3 + 1$			
(w_8)	$2^3 - 2^0 + 1$			
(w_7)	$2^3 - 2^1 + 1$			
(w_6)		$F(w_6, 2^0) : (w_6) \mapsto (w_5)$	$A(w_5) = 2^3 - 2^2 + 1$	$A(w_6) = 2^0 + (2^3 - 2^2 + 1)$
(w_5)	$2^3 - 2^2 + 1$			
(w_4)	$2^2 - 2^0 + 1$			
(w_3)	$2^2 - 2^1 + 1$			
(w_2)	$2^1 - 2^0 + 1$			
(w_1)	2^0			

Следовательно, для вычисления сложности по Арнольду любого из 2^{2^4} слов, сложность которых не превосходит величины 2^4, достаточно применить оператор (2) не более одного раза.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11–01–00997.

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Топология и статистика формул арифметики // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, № 4. — С. 1–26.

[2] *Merekin Yu. V.* On the Computational Complexity of the Arnold Complexity of Binary Words // Asian-European Journal of Mathematics. — 2009. — V. 2, № 4. — P. 641–648.

О замкнутых классах функций трехзначной логики, порожденных периодическими симметрическими функциями

А. В. Михайлович

avmikhailovich@gmail.com

Московский государственный университет леса

Рассматривается задача базируемости и конечной порожденности для классов функций трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями. Известно [1], что все замкнутые классы булевых функций имеют конечный базис. В [2] показано, что при всех $k \geqslant 3$ в P_k существуют как замкнутые классы со счетным базисом, так и классы, не имеющие базиса. В [3, 4] рассмотрены некоторые семейства замкнутых классов, порожденных симметрическими функциями; для них приведены критерии базируемости и конечной порожденности. В данной работе рассматриваются классы, порожденные периодическими симметрическими функциями. Показано, что такой класс имеет базис тогда и только тогда, когда порождающая система содержит лишь конечное число функций. Все необходимые определения можно найти в [3–5].

Обозначим через R множество всех функций из P_3, принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$ и равных нулю на наборах, содержащих хотя бы одну нулевую компоненту. Нетрудно показать, что для функций из множества R выполняется следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть Φ — некоторая формула над* R, Φ_1 — *произвольная нетривиальная подформула формулы* Φ, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ — *наборы из* E^n, *такие, что* $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 0$, $\Phi(\widetilde{\beta}) = 1$. *Тогда* $\Phi(\widetilde{\alpha}) = 0$ *и* $\Phi_1(\widetilde{\beta}) = 1$.

Пусть $\widetilde{\alpha} \subseteq \{1, 2\}^n$. Число единиц в наборе $\widetilde{\alpha}$ обозначим через $|\widetilde{\alpha}|$. Пусть $f \subseteq$ R. Будем обозначать через N_f множество всех наборов из E_3^n, на которых функция f принимает значение 1. Число единиц и число двоек в слое с наибольшим числом единиц из N_f обозначим через e_f и d_f соответственно. Пусть Φ — формула над R. Множество всех функций, функциональные символы которых используются при построении формулы Φ, обозначим через $\Theta(\Phi)$. Множество всех наборов из E_3^n, которые получаются друг из друга перестановкой компонент, называется слоем. Слой из $\{1, 2\}^n$, содержащий e единиц и d двоек, $e + d = n$, обозначим через $\mathcal{L}(e, d)$. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из R называется периодической симметрической функцией с периодом t, если для некоторых e_f, d_f, таких, что $e_f + d_f = n$, $0 \leqslant d_f < t$, выполняется соотношение $N_f = \bigcup \mathcal{L}(e_f - it, d_f + it)$, где объединение берется по всем i, $0 \leqslant i \leqslant (n - d_f)/t$. Множество всех периодических симметрических функций будем обозначать PS. Множество всех периодических симметрических функций с периодом t будем обозначать PS^t. Обозначим через $i_n(x_1, \dots, x_n)$, $n \geqslant 1$, функцию из PS, принимающую значение 1 на всех наборах из $\{1, 2\}^n$. Легко видеть, что $\mathrm{PS}^1 = \cup\{i_n\}$, где объединение берется по всем $n > 0$. Отметим следующее свойство множества PS^1.

Утверждение 2. *Для любого* $n \geqslant 2$ *выполняется равенство*

$$\mathrm{PS}^1 = [\{i_n\}].$$

Для доказательства основного результата нам потребуются утверждения 3–5.

Утверждение 3. *Пусть* $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{PS}^t$, $t > 1$, *существует набор* $\widetilde{\alpha} \in N_f$, *такой, что* $0 < |\widetilde{\alpha}| < n$. *Пусть* Φ — *формула над* R, *реализующая функцию* f, Φ_1 — *подформула формулы* Φ, *имеющая вид* $g(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$, *где* $g \in \mathrm{PS}^r$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ — *формулы над* R. *Пусть среди* $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ *символы переменных* $x_1, \dots, x_n$ *встречаются* $q_1, \dots, q_n$ *раз соответственно,* $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Z}^+$. *Тогда для любых* i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *существует* $l \in \mathbb{Z}^+$, *такое, что* $|q_i - q_j| = lr$.

Для доказательства утверждения 3 достаточно рассмотреть значения формул Φ_1, $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ на паре наборов из одного слоя из N_f, различающихся в i-й и j-й компонентах.

Утверждение 4. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{PS}^t$, $t > 1$, Φ — *формула над* R, *реализующая функцию* f, Φ_1 — *подформула формулы* Φ, *имеющая вид* $g(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)$, *где* $g \in \mathrm{PS}^r$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ — *формулы над* R. *Если существуют такие* i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $k_i \in \mathbb{Z}^+$, *что среди формул* $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ *переменная* x_i *встречается* $k_i r$ *раз, то формула* Φ_1 *эквивалентна формуле* $i_m(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)$.

Действительно, используя утверждение 3 получаем, что для каждого $j = 1, \ldots, n$ существует $k_j \in \mathbb{Z}^+$, такое, что среди формул $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ переменная x_j встречается $k_j r$ раз. Эквивалентность формул Φ_1 и $i_m(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)$ доказывается с помощью утверждения 1.

Следствие 1. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{PS}^t$, $t > 1$, $G^+ = \{g(x_1, \ldots, x_m) \mid m \geqslant n\}$, $G^- = \{g(x_1, \ldots, x_m) \mid m < n\}$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{PS} \cap [G]$. *Тогда* $f \in [G^+ \cup \mathrm{PS}^1]$ *и* $f \notin [G^- \cup \mathrm{PS}^1]$.

Следствие 2. *Пусть* G — *конечное множество функций из* PS^t. *Тогда множество* $[G] \cap (\mathrm{PS} \setminus \mathrm{PS}^1)$ *содержит лишь конечное число попарно неконгруэнтных функций.*

Утверждение 5. *Пусть* $t > 1$, $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{PS}^t$, $d_f = d_g$ *и существует такое* $k \in \mathbb{Z}^+$, *что* $m - n = kt$. *Тогда* $f \in [\{g\}]$.

Это утверждение следует из равенства

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{kt+1}).$$

Теорема. *Пусть* $t > 1$, G — *множество попарно неконгруэнтных функций из* PS^t, $F = [G]$. *Следующие условия равносильны:*

1) *множество* G *конечно;*
2) *класс* F *имеет конечный базис;*
3) *класс* F *имеет базис.*

Доказательство. Очевидно, что из 1) следует 2) и из 2) следует 3). Покажем, что из 3) следует 1).

Пусть F имеет базис $\mathfrak{A}$. Предположим, что множество G содержит счетное число попарно неконгруэнтных функций. Для каждой функции f из $\mathfrak{A}$ зафиксируем некоторую формулу Υ_f над G, реализующую функцию f. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всех таких функций g из G, что для любой функции h из G, отличной от g, выполняется соотношение $g \notin [\{h\}]$. Используя утверждение 5, легко показать, что множество $\mathfrak{B}$ содержит не более t^2+1 различных функций. Следовательно, существует конечное множество $\mathfrak{A}_B \subseteq \mathfrak{A}$, такое, что $\mathfrak{B} \subseteq [\mathfrak{A}_B]$. Положим $G_B = (G \backslash \mathrm{PS}^1) \cap [\mathfrak{B}]$. В силу следствия 2 множество G_B конечно.

Рассмотрим множество $F \cap \mathrm{PS}^1$. В силу утверждения 2 существует конечное множество $\mathfrak{A}_I$, такое, что $F \cap \mathrm{PS}^1 \subseteq [\mathfrak{A}_I]$.

Положим $\widehat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_B \cup \mathfrak{A}_I$, $\widehat{G} = \cup \Theta(\Upsilon_h)$, где объединение берется по всем функциям h из множества $\widehat{\mathfrak{A}}$. Покажем, что $\mathfrak{A} \subseteq \widehat{\mathfrak{A}}$. Предположим, что существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A} \backslash \widehat{\mathfrak{A}}$. Обозначим через n_0 максимальное число существенных переменных у функций из множества $\widehat{G} \cup \Theta(\Upsilon_f)$. Пусть Υ_f — формула над G, реализующая функцию f. Если для любой функции $g \in \Theta(\Upsilon_f)$ выполняется соотношение $g \in G_B$, то $f \in [\mathfrak{A}_B] \subseteq \mathfrak{A} \backslash \{f\}$, что противоречит определению базиса.

Рассмотрим функцию $g \in \Theta(\Upsilon_f) \backslash G_B$. Поскольку $g \notin \mathfrak{B}$ и множество G содержит счетное число попарно неконгруэнтных функций, то существует функция $h(x_1, \ldots, x_s) \in G$, такая, что $g \in [\{h\}]$ и $s > n_0$. В силу следствия 1 выполняется соотношение $h \notin [\widehat{G}]$. Следовательно, $h \notin [\widehat{\mathfrak{A}} \cup \{f\}]$. А значит, $h \in [\mathfrak{A} \backslash (\widehat{\mathfrak{A}} \cup \{f\})]$. Поэтому $f \in [\mathfrak{A} \backslash \{f\}]$. Это противоречит тому, что $\mathfrak{A}$ — базис. ∎

Автор выражает благодарность проф. А. Б. Угольникову за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11–01–00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

Список литературы

[1] *Post E. L.* The two-valued iterative systems of mathematical logic. — Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press, 1941.

[2] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.

[3] *Михайлович А. В.* О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2008. — № 4. — С. 54–57.

[4] *Михайлович А. В.* О классах трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2009. — № 1. — С. 33–37.

[5] *Михайлович А. В.* О замкнутых классах многозначной логики, порожденных функциями со специальными свойствами // Материалы XVII Междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Новосибирск, 27 октября – 1 ноября 2008 г.) — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2008. — С. 117–122.

Метод принятия решения комитетом нейронных сетей при решении плохо обусловленных задач восстановления функциональных зависимостей

О. А. Мишулина, И. А. Круглов

mishulina@gmail.com, i-kruglov@yandex.ru

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

Постановка задачи

В работе рассматривается задача оценивания значений параметров объекта по результатам измерений. Допустим, имеется некоторый исследуемый объект (например, физический процесс или явление), интересующие свойства которого могут быть описаны двумя различными векторами характеристик. Обозначим их $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Как правило, один из векторов является более удобным и доступным для измерений (будем считать, что это $\mathbf{y}$), а второй — для описания теоретических свойств объекта. В качестве конкретного примера задачи такого класса можно привести определение значений механических характеристик металла [1] ($\mathbf{x}$) по диаграмме индентирования ($\mathbf{y}$) [2]. Поскольку оба вектора характеристик описывают один и тот же объект, можно определить два отображения $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, представляющие собой *прямую* и *обратную* задачи оценивания параметров объекта соответственно. Будем считать, что оба отображения существуют и являются взаимно-однозначными. Однако их строгий теоретический вид на практике может быть неизвестен. Мы остановимся именно на этом случае, когда требуется определить зависимость между параметрами объекта $\mathbf{x}$ и определяемыми по результатам наблюдений параметрами $\mathbf{y}$ (т.е. решить обратную задачу) на основе имеющейся выборки полученных экспериментально пар значений $\left(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(p)}\right)$, $p = 1, 2, \ldots, P$. В данной ситуации наиболее целесообразным является использование моделей на основе нейронных сетей [3]. Особый интерес представляет собой случай, когда обратная задача является плохо обусловленной (или некорректной) [4]. Следуя критериям, приведенным в монографии [4], в данной работе под плохой обусловленностью обратной задачи будем понимать большие ошибки определения значений вектора $\mathbf{x}$ при незначительных ошибках измерения вектора $\mathbf{y}$. В такой ситуации использование единственной нейронной сети для построения модели зависимости $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ является недостаточным из-за недопустимо большой погрешности получаемого решения. В предыдущей работе авторов [5] для повышения точности нейросетевого решения плохо обусловленной обратной задачи было предложено применить комитет нейронных сетей [6], использующий решение прямой задачи. Целью настоящей работы является совершенствование метода принятия решения на основании результатов обработки данных нейросетями комитета.

Метод принятия решения в комитете нейронных сетей

Описание работы комитета. Комитет нейронных сетей, реализующий отображение $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, включает $K \in \mathbb{N}$ многослойных нейронных сетей (МНС), каждая из которых решает обратную задачу оценивания параметров $\mathbf{x}$, одну МНС, решающую прямую задачу, и модуль принятия решения. Первая группа сетей реализует преобразование

$$\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)} = \widetilde{\mathbf{f}}_k^{-1}(\mathbf{y}), \quad k = 1, 2, \ldots, K,$$

где $\widetilde{\mathbf{f}}_k^{-1}(\mathbf{y})$ — функция, моделируемая k-й сетью решения обратной задачи. Это преобразование может быть представлено в виде

$$\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) + \varepsilon_k(\mathbf{y}), \quad k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1}$$

где $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ — истинное (неизвестное) решение обратной задачи, а $\varepsilon_k(\mathbf{y})$ — ошибка нейросетевого решения обратной задачи. Все сети первой группы обучаются независимо друг от друга на отдельных (возможно, пересекающихся) выборках данных. В связи с этим при предъявлении комитету конкретного входного вектора признаков $\mathbf{y}$ некоторые из значений $\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}$ будут ближе к искомому вектору $\mathbf{x}$, чем другие. Поэтому возникает необходимость в определении оценки ошибки значений $\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}$ для выборки наиболее точных из них. Для этих целей используется нейросетевое решение хорошо обусловленной прямой задачи, которое может быть применено для любой оценки $\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, K$:

$$\widetilde{\mathbf{y}}^{(k)} = \widetilde{\mathbf{f}}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}) = \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}) + \delta(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}), \tag{2}$$

где $\mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)})$ — истинное (неизвестное) решение прямой задачи, $\delta(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)})$ — ошибка нейросетевого решения прямой задачи.

Метод принятия решения. Рассмотрим идеальную ситуацию, в которой отсутствуют ошибки работы сетей, т.е. $\varepsilon_k(\mathbf{y}) = \delta(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}) = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, K$. В таком случае моделируемые сетями функции являются истинными решениями обратной и прямой задач, что приводит к $\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{x}$ и $\widetilde{\mathbf{y}}^{(k)} = \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Таким образом, если ввести в рассмотрение метрику ρ, с помощью которой будет измеряться расстояние между векторами $\widetilde{\mathbf{y}}^{(k)}$ и $\mathbf{y}$, то в данной ситуации $\rho\left(\widetilde{\mathbf{y}}^{(k)}, \mathbf{y}\right) = 0$. В реальных условиях мы всегда имеем $\varepsilon_k(\mathbf{y}) \neq 0$ и $\delta(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}) \neq 0$. Однако, используя разложение в ряд Тейлора до первого члена в окрестности $\mathbf{y}$ и учитывая (1) и (2), нетрудно показать, что $\rho\left(\widetilde{\mathbf{y}}^{(k)}, \mathbf{y}\right) \propto \varepsilon_k(\mathbf{y}) + \delta(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)})$. Причём из-за того, что обратная задача является плохо обусловленной, величина $\varepsilon_k(\mathbf{y})$ значительно превосходит $\delta(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)})$, поэтому последней можно пренебречь. Таким образом, получаем, что величина ошибки $\varepsilon_k(\mathbf{y})$ k-й ($k = 1, 2, \ldots, K$) сети, решающей обратную задачу, может быть оценена при помощи значения $\rho\left(\widetilde{\mathbf{y}}^{(k)}, \mathbf{y}\right)$. Изложенный подход к оцениванию ошибки работы нейронных сетей первой группы лежит в основе предлагаемого метода принятия решения в комитете нейронных сетей.

Этапы обучения блока принятия решения комитетом нейросетей:

1. Для каждого обучающего примера, состоящего из пар значений $\left(\mathbf{y}^{(p)}, \mathbf{x}^{(p)}\right)$, $p = 1, 2, \ldots, P$ (P — число обучающих примеров), определить значения $\widetilde{\mathbf{x}}^{(k,p)}$, $k = 1, 2, \ldots, K$, формируемые сетями, решающими обратную задачу.

2. Вычислить $\rho_0^{(p)} = \rho\left(\mathbf{y}^{(p)}, \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{(p)}\right)$ для $p = 1, 2, \ldots, P$, которые отражают степень неточности результатов, формируемых сетью решения прямой задачи.
3. Используя значения $\rho\left(\mathbf{y}^{(p)}, \widetilde{\mathbf{f}}\left(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k,p)}\right)\right)$, $k = 1, 2, \ldots, K$, построить эмпирическую функцию распределения вероятности $F_p^*(\rho)$ и вычислить её значение при $\rho = \rho_0^{(p)}$: $\alpha^{(p)} = F_p^*(\rho_0^{(p)})$.
4. Наконец, определить значение $\alpha = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P}\alpha^{(p)}$.

Функционирование обученного блока принятия решения комитетом:

1. Для заданного входного вектора $\mathbf{y}$ при помощи сетей решения обратной задачи определить значения $\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, K$.
2. Построить эмпирическую функцию распределения $F_p^*(\rho)$ по значениям $\rho\left(\mathbf{y}, \widetilde{\mathbf{f}}\left(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}\right)\right)$, $k = 1, 2, \ldots, K$, и рассчитать ρ_α из условия $F_p^*(\rho_\alpha) = \alpha$.
3. Вычислить решение комитета $\mathbf{x}^{(k^*)}$, где

$$k^* = \arg\min\left|\rho\left(\mathbf{y}, \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{(k)})\right) - \rho_\alpha\right|.$$

Работа комитета с предложенным статистическим методом принятия решения была проверена на примере задачи определения значений двух прочностных характеристик ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$) группы сталей по результатам кинетического индентирования. Было установлено, что комитет позволяет добиться существенного повышения точности по сравнению с одиночными МНС даже на зашумленных данных (см. таблицу 1).

Таблица 1 Результаты тестирования для данных с наложенным шумом амплитудой в 5% от незашумленного значения

Относительная ошибка	Одиночная МНС		Комитет	
	x_1	x_2	x_1	x_2
Средняя	14.0%	23.4%	10.4%	16.5%
Максимальная	47.8%	110.8%	26.4%	45.7%

Список литературы

[1] *Tabor D.* The hardness of metals. — Oxford University Press, 2000. — 175 p.

[2] *Бакиров М. Б., Потапов В. В., Фролов И. В.* Разработка расчётно-экспериментальных методик получения механических характеристик на основе метода кинетического индентирования // Мир измерений. — 2006. — № 8. — С. 5–11.

[3] *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс, 2-е издание. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. — 1104 с.

[4] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. Изд. 3-е, испр. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

[5] *Мишулина О. А., Бакиров М. Б., Круглов И. А.* Анализ точности нейросетевого решения задачи восстановления механических характеристик металла // XIII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2011». Сборник научных трудов. Часть 2. — М: НИЯУ МИФИ, 2010. — С. 163–171.

[6] *Терехов С. А.* Гениальные комитеты умных машин // IX Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2007». Лекции по нейроинформатике. Часть 2.— М: МИФИ, 2007. — С. 11–42.

Упаковки и покрытия 3-путей

Д. Б. Мокеев

MokeevDB@mail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Характеризуется класс графов, у которых максимальное число непересекающихся порожденных подграфов P_3 равно минимальному числу вершин, представляющих все такие подграфы, и это равенство наследуется всеми порожденными подграфами.

Введение

Пусть $\mathbf{X}$ — множество графов. $\mathbf{X}$-*упаковкой* графа G называется множество его непересекающихся порожденных подграфов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь графу из $\mathbf{X}$. Наибольшее число подграфов в $\mathbf{X}$-упаковке графа G будем обозначать через $pack(\mathbf{X}; G)$. $\mathbf{X}$-*покрытием* графа G называется множество вершин, после удаления которых получается граф, не содержащий порожденных подграфов, принадлежащих $\mathbf{X}$. Наименьшее число вершин в $\mathbf{X}$-покрытии графа G будем обозначать через $cover(\mathbf{X}; G)$. В случае когда $\mathbf{X}$ состоит из единственного графа H, будем говорить просто об H-покрытии и H-упаковке. В частности, K_2-упаковки — это паросочетания, а K_2-покрытия известны как вершинные покрытия.

Очевидно неравенство $pack(\mathbf{X}; G) \leqslant cover(\mathbf{X}; G)$. Теорема Кёнига утверждает, что для двудольных графов имеет место равенство $pack(P_2; G) = cover(P_2; G)$. Верно и в известном смысле обратное утверждение: если это равенство выполняется для графа G и любого его порожденного подграфа, то этот граф — двудольный.

Граф G будем называть *кёниговым* графом относительно множества $\mathbf{X}$, если для любого его порожденного подграфа H выполняется равенство $pack(\mathbf{X}; H) = cover(\mathbf{X}; H)$. Класс всех кёниговых графов относительно $\mathbf{X}$ обозначим через $\mathbf{K}(\mathbf{X})$.

Класс $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ при любом $\mathbf{X}$ является наследственным и, следовательно, может быть описан множеством минимальных запрещенных (порожденных) подграфов. Для P_2 такую характеризацию дает теорема Кёнига вместе с известным критерием двудольности. Кроме этой классической теоремы нам известен еще только один результат такого рода для обыкновенных графов — в работе [1] описаны все запрещенные подграфы для класса $\mathbf{K}(\mathbf{C})$, где $\mathbf{C}$ — множество всех простых циклов.

Цель настоящей работы — охарактеризовать класс $\mathbf{K}(P_3)$. Мы применяем «конструктивный» подход к описанию этого класса: показываем, как можно построить любой граф из этого класса с помощью операций подразбиения ребер и замены вершин кликами.

Далее вместо $pack(P_3; G)$ и $cover(P_3; G)$ пишем просто $pack(G)$ и $cover(G)$ соответственно, под покрытием и упаковкой подразумеваем P_3-покрытие и P_3-упаковку, а под кёниговым графом — кёнигов граф относительно P_3.

Расширение графов

Заметим, что граф кёнигов тогда и только тогда, когда каждая его компонента связности — кёнигов граф. Поэтому мы будем рассматривать только связные графы.

Операция замены вершины x t-кликой состоит в том, что эта вершина удаляется из графа, к нему добавляются t новых вершин, все они попарно соединяются между собой и каждая из них соединяется ребром с каждой вершиной, с которой была смежна x. Граф, получаемый из графа G заменой некоторых его вершин степени 1 и 2 кликами (возможно, разного размера), назовем расширением графа G, а клики, на которые были заменены вершины, будем называть секциями. Каждая вершина, не подвергавшаяся замене, считается отдельной секцией.

Лемма 1. *Каждое наименьшее покрытие любого расширения любого графа состоит из целых секций.*

Лемма 2. *Любое расширение любого дерева является кёниговым графом.*

Два подкласса кёниговых графов

Связные графы из класса $\mathbf{K}(P_3)$ удобно разделить на две категории: расширенные циклы и все остальные графы (их будем называть ординарными). Множество расширенных циклов, принадлежащих $\mathbf{K}(P_3)$, обозначим через $\mathbf{KC}$, а множество ординарных графов — через $\mathbf{KR}$.

Пусть H — мультиграф без петель. Каждое цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу) этого мультиграфа подразобьем двумя вершинами. Эти вершины будем называть новыми. Заменим каждую новую вершину и каждую вершину степени 1 или 2, не принадлежащую циклу, какой-нибудь кликой. Полученный таким образом граф будем называть 2-расширением исходного мультиграфа.

Теорема 3. *Следующие утверждения равносильны для связного графа G:*

1) *G — ординарный кёнигов граф;*
2) *G является 2-расширением некоторого мультиграфа, отличного от простого цикла.*

Что касается расширения циклов, то для них задача полного описания остаётся нерешенной. Можно, однако, сформулировать теорему для случаев, когда в расширяемом цикле не более 9 вершин:

Теорема 4. *Любое расширение циклов C_6 и C_9 является кёниговым графом.*

Список литературы

[1] *Ding G., Xu Z., Zang W.* Packing cycles in graphs. II // J. Combinatorial Theory. Ser. B. — 2003. — V. 87. — P. 244–253.

О тестах относительно локальных линейных слипаний входов схем

Е. В. Морозов, Д. С. Романов

antake@yandex.ru, romanov@cs.msu.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики

Пусть n, k — натуральные числа ($2 \leqslant k \leqslant n$), $f(\tilde{x}^n)$ — булева функция и $\Phi = \Phi(\tilde{y}^k) = \{\varphi_i(\tilde{y}^k) | i = 1, \ldots, 2^{k+1}\}$ — система всевозможных попарно неравных линейных булевых функций k переменных. Обозначим через $\Psi = \Psi_{n,k,f}(\tilde{x}^n)$ систему функций, в которую входит функция $f(\tilde{x}^n)$ и всевозможные функции

$$\psi_{j,i}(\tilde{x}^n) =$$
$$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \underbrace{\varphi_i(x_j, \ldots, x_{j+k-1}, \ldots, \varphi_i(x_j, \ldots, x_{j+k-1}}_{k \text{ раз}}, x_{j+k}, \ldots, x_n),$$

где $1 \leqslant j \leqslant n - k + 1$, $i \in \{1, \ldots, 2^{k+1}\}$. Тест для системы $\Psi_{n,k,f}(\tilde{x}^n)$ будем называть полным тестом относительно локальных k-кратных линейных слипаний переменных функции f (не введенные в этой работе понятия можно найти, например, в [1, 2]). Длину теста T (число наборов в нем) будем обозначать через $l(T)$ или $|T|$. Традиционным образом введем функции Шеннона $L_k^{\text{check}}(n)$ и $L_k^{\text{diagn}}(n)$ длины полного проверяющего и полного диагностического (соответственно) теста относительно локальных k-кратных линейных слипаний переменных как максимум по всем булевым функциям $f(\tilde{x}^n)$ минимальной длины теста требуемого типа для булевой функции f. В настоящей работе приводятся оценки для этих функций Шеннона.

Таблицу с 2^k строками и 2^{k+1} столбцами, состоящую из столбцов значений всех функций из Φ, обозначим через $M(\Phi)$, а поэлементное отрицание этой таблицы через $\overline{M(\Phi)}$. Подкубом $B_{k,j}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$, где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})$, а $\tilde{\beta} = (\beta_{j+k}, \ldots, \beta_n)$, будем называть грань Γ_γ, где $\gamma = (\tilde{\alpha}, 2, \ldots, 2, \tilde{\beta})$, двойки стоят на местах переменных $x_j, \ldots, x_{j+k-1}$ и обозначают произвольность значений этих переменных. Зафиксируем число j $(1 \leqslant j \leqslant n-k+1)$. Рассмотрим таблицу неисправностей, построенную для произвольной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ на всех (следующих в лексикографическом порядке) наборах подкуба $B^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}_{k,j} = (\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{2}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1})$. Вектор значений функции $f'(\tilde{x}^n)$ на подкубе $B^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}_{k,j}$ обозначим через $f'(B^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}_{k,j})$. Заметим, что если $f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{0}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}) = f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{1}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}) = \sigma$, то для любой функции $\psi_{j,i}$ вектор $\psi_{j,i}(B^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}_{k,j})$ равен $(\tilde{\sigma}^{2^k}) = (\sigma, \ldots, \sigma)$. При этом, если существует такой булев набор $\tilde{\delta}^k$, что $f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{\delta}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}) \neq \sigma$, то этот набор проверяет все функции неисправностей $\psi_{j,1}(\tilde{x}^n), \ldots, \psi_{j,2^{k+1}}(\tilde{x}^n)$. В этом случае тройку наборов $(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{0}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1})$, $(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{1}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1})$, $(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{\delta}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1})$, такую, что

$$f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{0}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}) = f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{1}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}) \neq f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{\delta}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}),$$

назовем замечательной тройкой для x_j, а набор $(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{\delta}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1})$ — особым набором для x_j. Проверкой переменной x_j назовем процесс построения множества наборов, обнаруживающих всевозможные линейные локальные k-кратные слипания переменных $x_j, \ldots, x_{j+k-1}$. Если $f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{0}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}) = 0$, $f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{1}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}) = 1$, то фрагмент таблицы неисправностей, связанный с проверкой переменной x_j, на подкубе $B^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}_{k,j}$ имеет вид $M(\Phi)$. Если же $f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{0}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}) = 1$, $f(\tilde{\alpha}^{j-1}, \tilde{1}^k, \tilde{\beta}^{n-j-k+1}) = 0$, то фрагмент таблицы неисправностей, связанный с проверкой переменной x_j на подкубе $B^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}_{k,j}$, имеет вид $\overline{M(\Phi)}$. В последних двух случаях для проверки функций неисправностей $\psi_{j,1}, \ldots, \psi_{j,2^{k+1}}(\tilde{x}^n)$ достаточно взять некоторые $(k+1)$ наборов подкуба $B^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}_{k,j}$ и еще один некоторый набор. Вектор $f[B^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}_{k,j}] = (\xi_1, \ldots, \xi_{2^k})$ (где $\xi_1 \neq \xi_{2^k}$) назовем перспективным, если в нем найдутся две неравные компоненты, отстоящие друг от друга на 2^{k-1}; соответствующую этим компонентам пару входных наборов функции f назовем перспективной парой.

Теорема 1. $n - k + 1 + \left\lceil \frac{n-k+1}{k-1} \right\rceil \leqslant L^{\mathrm{check}}_k(n) \leqslant \left\lceil \frac{n-k+1}{k} \right\rceil 4k.$

Доказательство. Пусть проверяется переменная x_j. Рассмотрим различные случаи.

1. Для переменной x_j существует замечательная тройка. Тогда особый набор из нее включаем в тест, переходим к следующему шагу.

2. Замечательных троек нет, но есть перспективная пара наборов. Рассмотрим k подкубов $B_{k,j}^{\tilde{\alpha}^{(1)},\tilde{\beta}^{(1)}}, \ldots, B_{k,j-k+1}^{\tilde{\alpha}^{(k)},\tilde{\beta}^{(k)}}$, содержащих эту пару. Каждый подкуб имеет неконстантный вектор. Подкуб с нижним индексом (k,m) будем использовать для проверки переменной x_m. Выберем набор $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, принадлежащий всем подкубам. Добавим в тест его и все соседние наборы по переменным $x_{j-k+1}, \ldots, x_{j+k-1}$. Тогда для любой линейной функции, подающейся вместо переменных $x_m, \ldots, x_{m+k-1}$, $m = \overline{j-k+1, j}$, в тесте будут $(k+1)$ наборов, позволяющих отличить эту функцию от других линейных функций k переменных. Добавим еще по одному некоторому набору для каждой из переменных $x_{j-k+1}, \ldots, x_j$. Итого, сделано k шагов, не более $3k$ наборов добавлено в тест.

Можно показать, что и во всех остальных случаях за каждые k шагов в тест добавляется не более чем $4k$ наборов. Подытоживая, получаем верхнюю оценку.

Докажем теперь нижнюю оценку. Будем рассматривать функцию $h(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \cdots x_n$. Пусть T — некоторое неупорядоченное множество наборов, $1 \leqslant j \leqslant n-k+1$. Всякий булев набор вида $(1, \ldots, 1, \alpha_{j-k+1}, \ldots, \alpha_j, 1, \ldots, 1)$ назовем x_j-набором. Пусть $\chi(\tilde{\alpha})$ есть число тех переменных x_j, для которых набор $\tilde{\alpha} \in B^n$ является x_j-набором. Пусть, далее, $\nu_j(T)$ есть число различных x_j-наборов, входящих в множество T. Нетрудно показать, что если найдется $j' \in \{1, 2, \ldots, n-k+1\}$, такое, что $\nu_{j'}(T) < k+2$, то T не является полным проверяющим тестом относительно локальных линейных k-кратных слипаний переменных для $h(\tilde{x}^n)$. Обозначим $\hat{\nu}_j(T) = \min(\nu_j(T), k+2)$. Тогда ясно, что для того чтобы множество T было тестом указанного типа, необходимо, чтобы величина $I(T) = \sum\limits_{j=1}^{n-k+1} \hat{\nu}_j(T)$ была бы не меньше $(n-k+1)(k+2)$. А следовательно, и величина $J(T) = \sum\limits_{\tilde{\alpha} \in T} \chi(\tilde{\alpha})$ должна быть не меньше $(n-k+1)(k+2)$ (так как $J(T) = \sum\limits_{j=1}^{n-k+1} \nu_j(T)$). Заметим, что $\chi(\tilde{1}^n) = n-k+1$, что при любом j $(1 \leqslant j \leqslant n-k+1)$ $\chi(\tilde{1}^{j-1}, 0, \tilde{1}^{n-j}) = k$ и что для всех остальных наборов $\tilde{\alpha} \in B^n$: $\chi(\tilde{\alpha}) \leqslant k-1$. Теперь легко видеть, что для выполнения неравенства $J(T) \geqslant (n-k+1)(k+2)$ необходимо, чтобы $|T| \geqslant (n-k+1) + \left\lceil \frac{(n-k+1)(k+2)-(n-k+1)k-(n-k+1)}{k-1} \right\rceil = n-k+1+\left\lceil \frac{n-k+1}{k-1} \right\rceil$. ∎

Теорема 2 [3]. *Пусть $n, k \in N$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Пусть, далее, $l(\Phi)$ — длина минимального диагностического теста для матрицы, составленной из всех столбцов системы Φ. Тогда, начиная с некоторого n, имеет место неравенство $L_k^{\mathrm{diagn}}(n) \geqslant (l(\Phi)-1)(n-k+1)$.*

В случае линейных локальных слипаний $l(\Phi) = k+1$. Поэтому получаем нижнюю оценку функции Шеннона $L_k^{\mathrm{diagn}}(n) \geqslant k(n-k+1)$.

Лемма [1]. *Если строки теста T для матрицы M линейно зависимы относительно операций покоординатного сложения строк по модулю 2 и умножения строки на число 0 или 1, то тест T не является тупиковым.*

Через $M^+(\Phi)$ будем обозначать матрицу, полученную из $M(\Phi)$ добавлением снизу строки из единиц, через $w(M)$ — максимальное число линейно независимых строк M.

Теорема 3. *Пусть $n, k \in N$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Тогда имеет место неравенство $L_k^{\mathrm{diagn}}(n) \leqslant w(M^+(\Phi))(n-k+1)+1$.*

Доказательство. Образуем линейное пространство R как линейную оболочку всех строк матрицы $M^+(\Phi)$ относительно операций покоординатного сложения строк по модулю 2 и умножения строки на число 0 или 1, а линейное пространство r — как пространство из двух элементов $0, 1$ относительно тех же операций. Ясно, что $\dim R = w(M^+(\Phi))$, $\dim r = 1$. Рассмотрим произвольную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$. Легко видеть, что каждая строка таблицы неисправностей имеет вид $(\theta, \tilde{\xi}^{(1)}, \ldots, \tilde{\xi}^{(1)})$, где $\theta \in r$, $\tilde{\xi}^{(j)} \in R$ $(j = \overline{1; n-k+1})$. Можно показать, что размерность линейной оболочки строк такого вида равна $1 + w(M^+(\Phi))(n-k+1)$, откуда с учетом предыдущей леммы следует требуемое. ∎

Теперь из двух предыдущих теорем имеем:

Теорема 4. $k(n-k+1) \leqslant L_k^{\mathrm{diagn}}(n) \leqslant (k+1)(n-k+1)+1$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

Список литературы

[1] *Соловьев Н. А.* Тесты (теория, построение, применение). — Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1978. — 192 с.

[2] *Кузнецов И. А., Романов Д. С.* О полных проверяющих тестах относительно локальных слипаний переменных в булевых функциях // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. — 2009. — Т. 151, книга 2. — С. 90–97.

[3] *Романов Д. С., Казачёк А. Е.* Об оценках функций Шеннона длин локальных тестов относительно слипаний // Материалы XVI Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2006. — С. 91–97.

.

О сложности некоторых функций для вероятностных вычислений

Р. Г. Мубаракзянов

rustam@ksu.ru

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Рассматриваются различные модели вероятностных вычислений булевых функций. Показана иерархия классов сложности.

Определения

Ветвящейся программой [1] на переменных X называется ориентированный ациклический граф с одной начальной вершиной (корнем) и двумя финальными вершинами, помеченными 0 и 1. Каждая нефинальная вершина этого графа помечена переменной из X, и из нее выходят ровно 2 дуги, помеченные 0 и 1. Процесс вычисления при фиксировании значений переменных из X сводится к следующему. Вычисление начинается в корне s программы. Значение вычисляемой программой функции – пометка той финальной вершины, в которую приводит вычисление. Если на каждом вычислительном пути любая переменная читается не более одного раза, программа называется *один раз читающей* ($BP1$), если при этом переменные читаются в соответствии с фиксированным порядком, то программа называется *упорядоченной один раз читающей*, или $OBDD$.

Вероятностная ветвящаяся программа имеет в дополнение к детерминированным вероятностные узлы, помеченные дополнительными переменными. Значение такой переменной выбирается случайно, с одинаковой вероятностью 1/2 — значение 0 или 1. Для такой программы B значения детерминированных переменных $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ определяют вероятность $c_B(a_1, a_2, \dots, a_n)$ попадания в финальную 1-вершину. Как и в классическом случае, различают несколько типов вероятностных вычислений. Вероятностная бинарная программа B вычисляет функцию f:

1) *без ограничения на ошибку*, если

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow c_B(a_1, a_2, \dots, a_n) > 1/2,$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \Leftrightarrow c_B(a_1, a_2, \dots, a_n) < 1/2;$$

2) *с ограничением на ошибку*, если существует константа $\varepsilon < 1/2$, такая, что

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow c_B(a_1, a_2, \dots, a_n) \geqslant 1 - \varepsilon,$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \Leftrightarrow c_B(a_1, a_2, \dots, a_n) \leqslant \varepsilon.$$

Количество вершин ветвящейся программы называется ее *сложностью*, или размером.

Результаты

Лемма. *Вычисление конечным вероятностным автоматом (КВА) [2] является частным случаем вычисления вероятностной $OBDD$.*

Теорема 1. *Класс функций, вычислимых вероятностными с ограничением на ошибку $OBDD$ полиномиального размера, является строгим подмножеством класса функций, вычислимых вероятностными без ограничения на ошибку $OBDD$ полиномиального размера.*

Доказательство основано на представлении функции, для вычисления которой существует вероятностная без ограничения на ошибку $OBDD$ линейного размера, а любая вычисляющая ее вероятностная с ограничением на ошибку $OBDD$ имеет экспоненциальный размер.

Теорема 2. *Класс функций, вычислимых вероятностными с ограничением на ошибку $OBDD$ полиномиального размера, является строгим подмножеством класса функций, вычислимых вероятностными без ограничения на ошибку $BP1$ полиномиального размера.*

Список литературы

[1] *Wegener I.* Branching Programs and Binary Desicion Diagrams: Theory and Applications. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. — Philadelphia, 2000.

[2] *Бухараев Р. Г.* Основы теории вероятностных автоматов. — М.: Наука, 1985.

О свойствах теоретико-множественных операций над предполными классами трехзначной логики

А. С. Нагорный

anagorny@list.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики

Введение

Пусть k — натуральное число, $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех конечноместных функций на E_k. Элементы множества P_k будем называть функциями k-значной логики или k-значными функциями.

Определения используемых ниже операции суперпозиции, понятий замыкания, замкнутого класса, полноты и базиса можно найти в [1, §§ 2–7].

Замкнутый (относительно суперпозиции) класс H функций k-значной логики назовем предполным в P_k, если $H \neq P_k$, но для любой функции $f \in P_k \setminus H$ замыкание множества $H \cup \{f\}$ совпадает с P_k.

Все 5 предполных классов в P_2 были найдены Э. Постом в [2, 3], все 18 предполных классов в P_3 были описаны С. В. Яблонским в [4]. Затем С. В. Яблонским и А. В. Кузнецовым было установлено, что для любого $k \geqslant 3$ число предполных в P_k классов конечно [5, § 10].

Пусть $k \geqslant 2$. Обозначим через q_k количество предполных классов в P_k. Пронумеруем эти предполные классы числами от 1 до q_k в некотором порядке. Каждой k-значной функции f можно поставить в соответствие строку $\tilde{\gamma}^f = (\gamma_1^f, \gamma_2^f, \ldots, \gamma_{q_k}^f)$, состоящую из «плюсов» и «минусов», такую, что $\gamma_i^f =$ «$-$» тогда и только тогда, когда f не лежит в i-м предполном классе. Строку $\tilde{\gamma}^f$ назовем *строкой принадлежности* функции f.

Коротко о свойствах предполных классов в P_2

Пусть $k = 2$. Поскольку в P_2 ровно 5 предполных классов (это классы Поста T_0, T_1, L, S и M), строка принадлежности каждой двузначной (булевой) функции состоит из 5 элементов. Ограничения на комбинации знаков «+» и «−» в строках принадлежности булевых функций полностью описываются следующим утверждением (это прямое следствие результатов Э. Поста [2, 3]).

Теорема 1. *В P_2 справедливы следующие вложения:*

$$\begin{array}{ll} M \subseteq T_0 \cup T_1, & M \subseteq L \cup (T_0 \cap T_1), \\ S \cap T_1 \subseteq T_0, & S \cap T_0 \subseteq T_1, \\ L \cap T_0 \cap T_1 \subseteq S, & L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup S, \end{array}$$

причем строка из 5 знаков «+» и «−» является строкой принадлежности некоторой булевой функции тогда и только тогда, когда эта строка удовлетворяет перечисленным выше свойствам.

Данный факт позволяет, например, легко доказать, что любой базис в P_2 содержит не более 4 функций.

Некоторые свойства предполных классов функций трехзначной логики

Пусть теперь $k = 3$. Обозначим 18 предполных классов трехзначной логики следующим образом:

S — класс функций, самодвойственных относительно перестановки (120);

M_0, M_1, M_2 — классы функций, монотонных относительно порядка $2 < 0 < 1$, $0 < 1 < 2$ и $1 < 2 < 0$ соответственно;

L — класс линейных функций (над полем $GF(3)$);

U_0, U_1, U_2 — классы функций, сохраняющих разбиение $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 0\}\}$ и $\{\{2\}, \{0, 1\}\}$, соответственно;

T_0, T_1, T_2 — классы функций, сохраняющих константу 0, 1 и 2, соответственно;

T_{12}, T_{02}, T_{01} — классы функций, сохраняющих множество $\{1, 2\}$, $\{0, 2\}$ и $\{0, 1\}$, соответственно;

C_0, C_1, C_2, где C_σ — класс функций, сохраняющих 2-местный предикат $((x = y) \vee \sigma \in \{x, y\})$, для любого $\sigma \in E_3$;

B — класс Слупецкого (все трехзначные функции, имеющие не более одной существенной переменной либо принимающие не более двух значений).

В P_3, как и в P_2, не любая комбинация знаков «+» и «−» в строках принадлежности возможна.

Теорема 2. *В P_3 справедливы следующие включения:*

$$\begin{aligned}
&M_1 \cap M_2 \cap C_1 \cap C_2 \subseteq M_0,\\
&L \cap (M_1 \cup M_2) \subseteq M_0,\\
&U_1 \cap U_2 \cap (M_1 \cup M_2 \cup L \cup U_0) \subseteq M_0,\\
&(M_1 \cup M_2) \cap (U_1 \cap C_1 \cup U_2 \cap C_2) \subseteq M_0,\\
&L \cap U_0 \cap (U_1 \cup U_2) \subseteq M_0,\\
&L \cap U_0 \cap (C_1 \cup C_2) \subseteq M_0,\\
&L \cap C_0 \cap (U_1 \cup U_2) \subseteq M_0,\\
&L \cap (U_1 \cap C_2 \cup U_2 \cap C_1) \subseteq M_0,\\
&L \cap (C_0 \cap C_1 \cup C_0 \cap C_2 \cup C_1 \cap C_2) \subseteq M_0,\\
&U_0 \cap C_0 \cap (U_1 \cap C_1 \cup U_2 \cap C_2) \subseteq M_0,\\
&C_1 \cap C_2 \cap (U_1 \cap U_2 \cup C_0) \subseteq M_0.
\end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть A — замкнутый класс функций трехзначной логики, содержащийся в классе M_0. Тогда A является пересечением некоторых предполных классов из множества $\{M_1, M_2, L, U_0, U_1, U_2, C_0, C_1, C_2\}$ тогда и только тогда, когда A совпадает с одним из 7 следующих классов функций из P_3:*

1) $M_0 \cap M_1 \cap U_2 \cap C_2$,
2) $M_0 \cap M_2 \cap U_1 \cap C_1$,
3) $M_0 \cap M_1 \cap U_0 \cap U_2 \cap C_1 \cap C_2$,
4) $M_0 \cap M_2 \cap U_0 \cap U_1 \cap C_1 \cap C_2$,
5) $M_0 \cap M_1 \cap U_1 \cap U_2 \cap C_0 \cap C_2$,
6) $M_0 \cap M_2 \cap U_1 \cap U_2 \cap C_0 \cap C_1$,
7) $M_0 \cap M_1 \cap M_2 \cap L \cap U_0 \cap U_1 \cap U_2 \cap C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap B$.

Теорема 4. *В P_3 справедливы следующие включения:*

$$\begin{aligned}
&M_0 \cap (M_1 \cap C_1 \cup M_2 \cap C_2) \subseteq U_0,\\
&L \cap (M_0 \cup M_1 \cup M_2) \subseteq U_0,\\
&M_1 \cap M_2 \subseteq U_0,\\
&M_1 \cap U_1 \cap C_1 \cup M_2 \cap U_2 \cap C_2 \subseteq U_0,\\
&L \cap U_1 \cap U_2 \subseteq U_0,\\
&L \cap (U_1 \cap C_2 \cup U_2 \cap C_1) \subseteq U_0,\\
&L \cap C_0 \subseteq U_0,\\
&C_1 \cap C_2 \subseteq U_0.
\end{aligned}$$

Теорема 5. *Пусть A — замкнутый класс функций трехзначной логики, содержащийся в классе U_0. Тогда A является пересечением некоторых предполных классов из множества $\{M_0, M_1, M_2, L, U_1, U_2, C_0, C_1, C_2\}$ тогда и только тогда, когда A совпадает с одним из 13 следующих классов функций из P_3 :*

1) $U_0 \cap C_1 \cap C_2$,
2) $M_0 \cap U_0 \cap C_1 \cap C_2$,
3) $M_1 \cap U_0 \cap C_1 \cap C_2$,
4) $M_2 \cap U_0 \cap C_1 \cap C_2$,
5) $U_0 \cap U_1 \cap C_1 \cap C_2$,
6) $U_0 \cap U_2 \cap C_1 \cap C_2$,
7) $M_0 \cap M_2 \cap U_0 \cap U_1 \cap C_1 \cap C_2$,
8) $M_0 \cap M_1 \cap U_0 \cap U_2 \cap C_1 \cap C_2$,
9) $M_1 \cap M_2 \cap U_0 \cap C_0$,
10) $M_1 \cap M_2 \cap U_0 \cap U_1 \cap C_0 \cap C_2$,
11) $M_1 \cap M_2 \cap U_0 \cap U_2 \cap C_0 \cap C_1$,
12) $L \cap U_0 \cap C_0 \cap B$,
13) $M_0 \cap M_1 \cap M_2 \cap L \cap U_0 \cap U_1 \cap U_2 \cap C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap B$.

Вложения в двойственные классы M_σ и U_σ $(\sigma \in \{1,2\})$ аналогичны.

Доказав еще ряд свойств для предполных классов S, L, T_σ, T_{ij}, C_σ и B, автору удалось полностью построить решетку (по вложению) всех замкнутых классов в P_3, которые являются пересечениями некоторых предполных классов, а также получить в качестве следствия известный результат о том, что максимальный базис в P_3 содержит 6 функций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00701.

Список литературы

[1] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

[2] *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. — 1921. — V. 43, № 4. — P. 163–185.

[3] *Post E. L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press, 1941. — V. 5.

[4] *Яблонский С. В.* О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. — 1954. — Т. 95, № 6. — С. 1153–1156.

[5] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.

О применении антиунификации подстановок для проверки эквивалентности программ

Т. А. Новикова, В. А. Захаров

taniaelf@mail.ru, zakh@cs.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Одна из задач реорганизации программ (program refactoring) — это поиск подобных фрагментов программ и выделение процедуры, реализующей эти фрагменты (см. [1]). Эту задачу можно сформулировать так: для пары программ, реализующих функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, требуется построить такую программу, реализующую функцию $F_0(x)$, для которой равенства $F_1(x) = \psi_1(F_0(\varphi_1(x)))$ и $F_2(x) = \psi_2(F_0(\varphi_2(x)))$ выполняются для некоторых функций $\varphi_i, \psi_i,\ i = 1, 2$, вычислимых очень простыми программами.

Задача «обобщения» программ, родственная задаче выделения процедуры, возникала ранее при построении суперкомпиляторов [2], и для ее решения были предложены алгоритмы антиунификации (см., например, [2, 3]), вычисляющие наиболее специальные общие шаблоны выражений (термов, формул). Однако для решения обеих задач необходимо иметь эффективные средства сравнения функций, вычисляемых программами, что является трудной (вообще говоря, алгоритмически неразрешимой) проблемой. Для преодоления этой трудности предлагается следующий подход.

1. Выбрать такую формальную модель программ, в которой функциональной характеристикой каждой программы является регулярное множество выражений, допускающих применение к ним операции антиунификации.
2. Используя упомянутые операции, разработать алгоритм проверки эквивалентности программ в выбранной модели.
3. Модифицировать предложенный алгоритм проверки эквивалентности программ для вычисления наиболее общего примера (унификация) и наиболее специального шаблона (антиунификация) двух программ.

В настоящей заметке изложены результаты выполнения двух первых пунктов предложенного подхода.

Пусть X — некоторое множество переменных, σ — некоторая сигнатура языка логики предикатов первого порядка. Над сигнатурой σ обычным образом определяются множество термов $Term$ и атомарных формул $Atom$. Подстановкой называется всякое отображение $\theta : X \to Term$. Множество всех подстановок обозначим записью $Subst$. Обычным образом определяется операция $E\theta$ применения подстановки θ к выражению (терму или атому) E и операция композиции $\theta\eta$ подстановок θ и η так, что $E(\theta\eta) = (E\theta)\eta$. На множестве $Subst$ определяется отношение сравнения $\preceq$: $\theta \preceq \eta$ тогда и только тогда, когда для некоторой подстановки ρ выполняется равенство $\eta = \theta\rho$. В статье [4] показано, что $(Subst, \preceq)$ является полной квазирешеткой, обладающей свойством обрыва возрастающих цепей. Обозначим символом $\vee$ операцию антиунификации, вычисляющую точную нижнюю грань $\theta_1 \vee \theta_2$ подстановок θ_1 и θ_2. В [4] показано, что композиция подстановок дистрибутивна относительно операции антиунификации: $\theta(\eta_1 \vee \eta_2) = (\theta\eta_1) \vee (\theta\eta_2)$.

Моделями программ служат конечные размеченные системы переходов $\pi(X) = \langle V, entry, exit, B, T\rangle$, в которых V — непустое множество точек программы, $entry$ и $exit$ — точки входа и выхода, $B : V \to Atom$ — функция разметки, $T : (V \setminus \{exit\}) \times \{0,1\} \to (V \setminus \{entry\}) \times Subst$ — функция переходов. Если $B(v) = A$, $T(v,0) = (u_0, \theta_0)$ и $T(v,1) = (u_1, \theta_1)$, то это означает, что в точке v реализован оператор ветвления **if** A **then** $\{\theta_1;$ **goto** $u_1\}$ **else** $\{\theta_0;$ **goto** $u_0\}$. Все стандартные схемы программ моделируются системами переходов указанного вида. Далее для обозначения атома $B(v)$, приписанного точке v, будем использовать запись A_v, а для изображения переходов из точки v будет использоваться запись $v \xrightarrow{\delta,\theta} u$ в случае $T(v,\delta) = (u,\theta)$. Не ограничивая общности, будем предполагать также, что через каждую точку программы проходит маршрут из точки $entry$ в точку $exit$.

Любой маршрут $tr = entry \xrightarrow{\delta_0,\theta_0} v_1 \xrightarrow{\delta_1,\theta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1},\theta_{n-1}} v_n \xrightarrow{\delta_n,\theta_n} exit$ назовем трассой в программе $\pi(X)$. История трассы tr — это последовательность пар

$$lth(tr) = (A_{entry}, \delta_0), (A_{v_1}\eta_1, \delta_1), \dots, (A_{v_n}\eta_n, \delta_n), (A_{exit}\eta_{n+1}, 0),$$

где $\eta_i = \theta_{i-1} \cdots \theta_1\theta_0$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Каждая пара в истории $lth(tr)$ состоит из примера атома $A_{v_i}\eta_i$, приписанного точке v_i этой трассы, и пометки δ_i дуги, по которой совершен переход. Детерминантом $\det(\pi(X))$ программы $\pi(X)$ называется множество историй всех трасс этой программы. Две программы $\pi_1(X)$ и $\pi_2(X)$ считаются логико-термально (л.-т.) эквивалентными, если $\det(\pi_1(X)) = \det(\pi_2(X))$. В статье [5] предложен алгоритм полиномиальной сложности, проверяющий л.-т. эквивалентность последовательных программ.

Мы предлагаем гораздо более простой алгоритм проверки л.-т. эквивалентности, опирающийся лишь на операции с подстановками. Сначала в анализируемой паре программ $\pi_1(X)$ и $\pi_2(X)$, где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, проводится переименование переменных для того, чтобы получить пару программ $\pi_1(X')$ и $\pi_2(X'')$ с непересекающимися, но соответствующими друг другу множествами переменных X' и X''. Далее строится граф совместных вычислений Γ_{π_1,π_2} следующего вида. Вершинами этого графа являются пары точек (v_1, v_2) анализируемых программ. Для любой пары точек v_1, v_2 в программах $\pi_1(X')$ и $\pi_2(X'')$ и для любого δ, $\delta \in \{0,1\}$, если $T_1(v_1,\delta) = (\theta', u_1)$ и $T_2(v_2,\delta) = (\theta'', u_2)$, то в графе Γ_{π_1,π_2} из вершины (v_1, v_2) исходит дуга e в вершину (u_1, u_2), помеченная подстановкой $\theta_e = \theta' \cup \theta''$. Для каждого пути α, исходящего из вершины $(entry, entry)$ в графе Γ_{π_1,π_2} и проходящего по дугам $e_1, e_2, \dots, e_n$, обозначим записью $\theta[\alpha]$ композицию подстановок $\theta_{e_n} \dots \theta_{e_2}\theta_{e_1}\lambda_0$, где θ_{e_i} — подстановка, приписанная дуге e_i, а $\lambda_0 = \{x'_1/x_1, \dots, x'_n/x_n, x''_1/x_1, \dots, x''_n/x_n\}$ — переименование, отождествляющее соответствующие переменные программ $\pi_1(X')$ и $\pi_2(X'')$. Множество всех маршрутов в графе Γ_{π_1,π_2}, ведущих из вершины $(entry, entry)$ в вершину (v_1, v_2), обозначим записью $Pt(v_1, v_2)$.

Теорема 1. *Программы $\pi_1(X)$ и $\pi_2(X)$ не являются л.-т. эквивалентными тогда и только тогда, когда в графе совместных вычислений Γ_{π_1,π_2} существует вершина $w = (v_1, v_2)$, удовлетворяющая одному из следующих двух условий:*

A: $Pt(w) \neq \varnothing$ и при этом лишь одна из точек v_1, v_2 является точкой выхода $exit$;

B: существует такой маршрут α, $\alpha \in Pt(w)$, что $A_{v_1}\theta[\alpha] \neq A_{v_2}\theta[\alpha]$.

Для каждой вершины w в графе совместных вычислений Γ_{π_1,π_2} рассмотрим подстановку $\eta[w] = \bigvee_{\alpha \in Pt(w)} \theta[\alpha]$, являющуюся точной нижней гранью множества подстановок, вычислимых на всех маршрутах, ведущих из вершины $(entry, entry)$ в вершину w.

Теорема 2. *Условие B теоремы 1 выполняется для вершины $w = (v_1, v_2)$ в том и только том случае, если выполняется соотношение $A_{v_1}\eta[w] \neq A_{v_2}\eta[w]$.*

Таким образом, проверка л.-т. эквивалентности программ сводится к задаче вычисления подстановок $\eta[w]$ в графе совместных вычислений Γ_{π_1,π_2}. Для решения этой задачи каждой вершине w графа сопоставим переменную Z_w, принимающую значения из множества $Subst$, а также выделим множество $In(w)$ пар вида (u, θ): пара (u, θ) входит в $In(w)$ тогда и только тогда, когда из вершины u в вершину w ведет дуга e, помеченная подстановкой θ_e. Далее для каждой вершины w, $w \neq (entry, entry)$, графа Γ_{π_1,π_2} сформируем уравнение $\mathcal{E}_w : \ Z_w = \bigvee_{(u,\theta) \in In(w)} \theta Z_u$. Уравнение $\mathcal{E}_{(entry,entry)}$, соответствующее вершине $(entry, entry)$ графа Γ_{π_1,π_2}, имеет вид $Z_{(entry,entry)} = \lambda_0$, где λ_0 — упомянутое выше переименование переменных.

Теорема 3. *Система уравнений $\{\mathcal{E}_w : w$ — вершина графа $\Gamma_{\pi_1,\pi_2}\}$ всегда имеет решение, и множество подстановок $\{\eta[w] : w$ — вершина графа $\Gamma_{\pi_1,\pi_2}\}$ является ее единственным решением.*

Решение системы уравнений, указанной в теореме 3, можно осуществить итеративно, методом последовательных приближений, выбрав в качестве начального значения каждой переменной Z_w наибольший элемент τ квазирешетки $(Subst, \preceq)$. Закон дистрибутивности $\theta_0(\theta_1 \vee \theta_2) = (\theta_0\theta_1) \vee (\theta_0\theta_2)$ обеспечивает корректность, а свойство обрыва убывающих цепей гарантирует завершаемость итеративной процедуры уточнения последовательных приближений решений системы. Используя алгоритм антиунификации, предложенный в [3], при помощи такой процедуры можно получить решение рассматриваемой в теореме 3 системы уравнений за время, полиномиальное относительно размеров анализируемых программ $\pi_1(X)$ и $\pi_2(X)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00277.

Список литературы

[1] *Komondoor R., Horwitz S.* Semantics-preserving procedure extraction // Proc. 27-th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages. — 2000. — P. 155–169.

[2] *Sorensen M. H., Gluck R.* An algorithm of generalization in positive supercompilation // Proc. 1995 International Symposium on Logic Programming. — MIT Press, 1995. — P. 465–479.

[3] *Bulychev P. E., Kostylev E. V., Zakharov V. A.* Anti-unification algorithms and their applications in program analysis // LNCS. V. 5947. — 2009.

[4] *Eder E.* Properties of substitutions and unifications // J. Symbolic Computations. — V. 1. — 1985. — P. 31–46.

[5] *Сабельфельд В. К.* Полиномиальная оценка сложности распознавания логико-термальной эквивалентности // ДАН СССР. — 1979. — Т. 249, № 4. — С. 793–796.

Распознавание подклассов марковских автоматов на основе последовательностей состояний конечной длины

А. Р. Нурутдинова, С. В. Шалагин

alsu124@mail.ru, Sshalagin@mail.ru

Казанский государственный технический университет им. А. Н. Туполева

Цепи Маркова (ЦМ) используются для моделирования реальных процессов, событий, явлений, имеющих вероятностную (стохастическую) природу [1, 2]. ЦМ можно рассматривать как процессы, получаемые на выходе вероятностных моделей автоматного типа [3, 4].

Необходимость в задачах распознавания этих объектов возникает при решении вопросов анализа эффективности функционирования марковских моделей сложных систем, статистического распознавания автоматов, передачи и защиты информации и т. п. В данной работе ставится и решается задача распознавания марковского автомата (МА), определенного на основе эргодических стохастических матриц класса циклических, не приведенных к нормальному виду [2], по реализуемым ими ЦМ. Признаки распознавания сформированы на базе характеристического признака циклической стохастической матрицы и позволяют определить вероятность принадлежности МА к заданному подклассу на основе последовательности определенной длины, генерируемой МА.

Определим основные понятия, на основе которых будет осуществляться исследование МА.

Определение 4. *Простая однородная цепь Маркова задана в виде* [1]

$$(S,\ P,\ \pi_0)\,. \tag{1}$$

Определение 5. *Автономным вероятностным автоматом будем называть систему* [3]

$$\left(\bar{U},\ S,\ P,\ \delta(u,\ s)\right), \tag{2}$$

где $\bar{U}$ — дискретная случайная величина, принимающая на входе значения $u_0,\ u_1, ...,\ u_{h-1}$ с распределением $\bar{p} = (p_0, p_1, ..., p_{h-1})$, h — размер имплицирующего вектора, $\sum\limits_{i=0}^{l-1} p_i = 1,\ \ 0 \leqslant p_i \leqslant 1$; $\delta(u,\ s)$ — функция переходов, ставящая в соответствие паре $(u,\ s)$ однозначно новое состояние $s' \in S$.

Модель устройства, заданного на базе (1) и (2), определена как АММ.

АММ реализуема в виде последовательной композиции [4] — генератора дискретной случайных величин $\bar{U}=\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_l\}$ и конечного детерминированного автомата (КДА). КДА реализует функцию перехода $\delta(u, s)$ в соответствии с ЭСМ P, таким образом, позволяя моделировать ЦМ вида (1)

Рассмотрим класс АММ SC_r, определенных на базе ЦСМ_r. Пусть $\left(\overline{S}_1, \overline{S}_2, ..., \overline{S}_r\right)$ — некоторое разбиение множества S, определенного в

(1), на r непересекающихся подмножеств, такое, что ЦМ, находясь в какой-либо момент времени в состоянии подмножества $\overline{S}_k$, в следующий момент неизбежно переходит в группу $\overline{S}_{k+1}$ или, находясь в группе $\overline{S}_r$ переходит в группу$\overline{S}_1$. Обозначим n-размерность ЦСМ$_r$ через n_i, $n_i = \left|\overline{S}_i\right|$, $i = \overline{1, r}$, $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = n$.

Пусть для ЦМ, заданной согласно (1), справедливо следующее:

$$\forall t : t \bmod r = l, \left(\sum_{i:\mathrm{S}_i \in \overline{S}_l} \pi_i(t) = 1 \right) \& \left(\sum_{j:\mathrm{S}_j \in \overline{S}_{l-1}} \pi_i(t-1) = 1 \right), \quad (3)$$

где π_i — i-й элемент вектора распределения вероятности состояния ЦМ (1) в момент времени t.

ЭСМ P из (1), для которой справедливо условие (3), является ЦСМ$_r$ [2].

Рассматривая АММ, определенные на основе ЦСМ$_r$, как объекты исследования, решена задача распознавания МА, заданного на базе ЦСМ$_r$, не приведенного к нормальному циклическому виду [2], принадлежащего к подклассу SC$_r$. Для решения задачи требуется определить признаки для распознавания МА на основе реализаций ЦМ конечной длины N.

Обозначим r возможных групп вариантов последовательностей, генерируемых на основе ЦСМ$_r$, $\chi_k = \left\{ s^k_{i_1}, s^k_{i_2}, \ldots, s^k_{i_r} \right\}$, $s^k_{i_l} \in \overline{S}_{l+k}$, $l = \overline{1,\ r-k}$, $s^k_{i_{r-k+1}} \in \overline{S}_j$, $j = \overline{1,\ k}$, $k = \overline{0,\ r-1}$.

Характеристический признак ЦСМ$_r$, определяемый индексом r – c_r, $r > 1$, позволяет определить признаки, представленных в виде функционалов на ЦМ — $\tilde{c}_r$.

Если ЦСМ$_r$ имеет индекс r, $r > 1$, то признак c_r, позволяющий распознать АММ вида (2), заданную ЦСМ$_r$, определяется выражением:

$$c_r = \begin{cases} 1, \text{ если } \bigvee\limits_{i=0}^{r-1} \left(\mathop{\&}\limits_{j=0}^{m-1} s_{t_{i+j+1}} \in \overline{S}_{(i+j) \bmod r+1} \right) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad m = \overline{1,\ r}. \quad (4)$$

Признаки c_r, определенные согласно (4), являются теоретическими оценками величин $\tilde{c}_r$ вычисление которых производится путем подсчета циклически повторяющихся подмножеств состояний ЦМ определенной длины N:

$$\tilde{c}_r = \begin{cases} \alpha, \text{ если} \bigvee\limits_{i=0}^{r-1} \left(\mathop{\&}\limits_{j=0}^{m-1} \left(s_{t_{i+j+1}} \in \overline{S}_{(i+j) \bmod r+1} \right) \right) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}, \quad m = \overline{1,\ r}.$$

где α — вероятность отнесения ЦМ к заданному подклассу SC_r. Пусть величина D, $D{>}0$, на основе которой заданы элементы ЦСМ_r $p_{ij} = D \cdot z$, где z — целое положительное число, есть дискретность положительных элементов ЭСМ.

Тогда минимальная вероятность того, что в момент времени t ЦМ, определяемая ЦСМ_r, находясь в состоянии $s \in \overline{S_i}$, в следующий момент времени $(t+1)$ перейдет в состоянии $s \in \overline{S_p}$,

$$p = \begin{cases} 1 : i = r \\ i+1 : i < r \end{cases},$$

равна $\frac{D}{n}$.

Максимальная вероятность того, что ЦМ единичной длины будет ошибочно отнесена к классу SC_r, равна $\overline{p}^{(r)}_{\max} = 1 - \frac{D}{n} = \frac{n-1}{n}D$.

Для ЦМ длины N максимальная вероятность ее ошибочного отнесения к классу SC_r равна $\overline{p}^{(r)}_{\max} = \left(\frac{n-1}{n}D\right)^N$.

На основе вышеизложенного справедливо

Утверждение 1. *Минимальная вероятность безошибочного распознавания ЦМ вида (1), $|\,S\,| = n$ и длины N, определяемой на основе ЦСМ_r, положительные элементы которой определены с дискретностью D, равна:*

$$\alpha = 1 - \overline{p}^{(r)}_{\max} = 1 - \left(\frac{n-1}{n}D\right)^N.$$

Обозначим $\mathrm{A}(\chi_k)$ — КДА, распознающий последовательность χ_k, либо ее первые m элементов, $k = \overline{0, (r-1)}$. Выход $\mathrm{A}(\chi_k)$ определен значением булевой переменной

$$\mathop{\&}\limits_{j=0}^{m-1} \left(s_{t_{i+j+1}} \in \overline{S}_{(i+j) \bmod r+1} \right).$$

Задача оценки сложность распознавания принадлежности АММ вида (1) к подклассу SC_r сводится к определению количества автоматов типа $\mathrm{A}(\chi_k)$, распознающих всевозможные варианты последовательностей χ_k, $k=\overline{0,(r-1)}$. Оценку временной сложности работы автомата $\mathrm{A}(\chi_k)$ обозначим T, а оценку его емкостной сложности — Q. Примем величины T и Q в качестве мер временной и емкостной сложности, соответственно

Количество способов разбиения множества из n состояний на r непустых подмножеств определяем по формуле числа Стирлинга второго рода [5]:

$$S(n,r)=\frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r+j}\cdot S\left(r,j\right)\cdot j^{n},$$

$$S(j+1,\ 0)=0,\quad S(j,\ j)=1,\quad j=\overline{0,\ r}.$$

На основе вышеизложенного сформулировано

Утверждение 2. *Оценки временной и емкостной сложности распознавания принадлежности АММ вида (1), заданной на основе ЦСМr, не приведенной к нормальному циклическому виду, к подклассу SC_r, равны, соответственно: T и $Q=rS(n,k)$.*

Список литературы

[1] *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970.

[2] *Романовский В. И.* Дискретные цепи Маркова. — М.: Гостехиздат, 1949.

[3] *Бухараев Р. Г.* Основы теории вероятностных автоматов. — М.: Наука, 1985.

[4] *Поспелов Д. А.* Вероятностные автоматы. — М.: Энергия, 1970.

[5] *Андерсон Джеймс А.* Дискретная математика и комбинаторика: пер. с англ. — М.: Вильямс, 2003.

О некоторых свойствах одноместных монотонных функций многозначной логики

Д. Ю. Панин

pank.dm@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет

Рассматривается некоторое множество одноместных функций многозначной логики, монотонных относительно частичного порядка специального вида, и замыкание этого множества относительно операции суперпозиции [1, 2]. Получен критерий полноты для рассматриваемой функциональной системы (см. также [3]). Подобные вопросы возникают при изучении свойств предполных классов монотонных функций, не имеющих конечных порождающих систем [4–7], а также при решении задачи о полноте систем функций многозначной логики (см., например, [8–10]).

Пусть $n \geqslant 1$. Положим $Q_k = \{0, a_1, a'_1, \ldots, a_k, a'_k\}$, где $0 \leqslant k \leqslant n$, $Q = Q_n$, $a_0 = a'_0 = 0$. Введем на элементах множества Q отношение частичного порядка $\leqslant$ следующим образом:

1) $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_j$ для всех $\varepsilon_i, \varepsilon_j$, таких, что $\varepsilon_i \in \{a_i, a'_i\}$, $\varepsilon_j \in \{a_j, a'_j\}$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$;
2) $\varepsilon \leqslant \varepsilon$ для всех $\varepsilon \in Q$.

Пусть $\alpha, \beta \in Q$. Если для этих элементов выполняется по крайней мере одно из соотношений $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \alpha$, то эти элементы называются *сравнимыми*, в противном случае — *несравнимыми*.

Будем обозначать через F множество всех функций $f(x)$, определенных на множестве Q, принимающих значения из Q, монотонных относительно частичного порядка $\leqslant$ и таких, что $f(\delta) \leqslant \delta$ для всех $\delta \in Q$. Введем на множестве F операцию композиции. Пусть $f(x)$, $g(x) \in F$. *Композицией функций f и g* будем называть функцию $(f \circ g)(x)$, значение которой на любом элементе $\alpha \in Q$ определяется равенством $(f \circ g)(\alpha) = f(g(\alpha))$.

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq F$. Определим по индукции понятие *формулы над* $\mathfrak{A}$, а также понятие *функции, реализуемой формулой*.

1. Выражение вида $f(x)$, где $f(x) \in \mathfrak{A}$, является формулой над $\mathfrak{A}$. Такая формула называется *тривиальной* и реализует функцию $f(x)$.
2. Пусть Φ_1 — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $f_1(x)$, а Φ_2 — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $f_2(x)$. Тогда выражение $\Phi_1 \circ \Phi_2$ является формулой над $\mathfrak{A}$ и реализует функцию $(f_1 \circ f_2)(x)$.
3. Для удобства будем считать, что пустая формула реализует функцию $e(x)$, такую, что $e(\alpha) = \alpha$ для всех $\alpha \in Q$.

При этом предполагается, что других формул над $\mathfrak{A}$ нет.

Замыканием множества $\mathfrak{A} \subseteq F$ будем называть множество всех функций, которые могут быть реализованы формулами над $\mathfrak{A}$ (обозначение $[\mathfrak{A}]$). Очевидно, что $[\mathfrak{A}] \subseteq F$. Систему $\mathfrak{A}$ будем называть *полной*, если $[\mathfrak{A}] = F$.

Цепью длины m, $1 \leqslant m \leqslant n+1$, будем называть последовательность элементов $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1} \in Q$, таких, что $b_0 = 0$, $b_i \in \{a_i, a_i'\}$ для всех $i = 1, \ldots, m-1$.

Пусть $\Omega \subseteq Q$. Положим

$$S_\Omega = \{f \in F \mid f(\delta) = \delta \text{ для всех } \delta \in \Omega\}.$$

В частности, $S_{\{a_n\}}$ — множество всех функций из F, сохраняющих элемент a_n.

Будем обозначать через G_1 множество всех функций g из F, для которых найдутся номер k, $2 \leqslant k \leqslant n$, и цепь Ω длины $k-1$, такие, что выполнены следующие условия:

1) $g \in S_\Omega$,
2) $\{g(a_k'), g(a_k)\} = \{a_{k-1}, a_{k-1}'\}$.

Будем обозначать через G_2 множество всех функций g из F, для которых найдутся номер k, $1 \leqslant k \leqslant n$, элементы $\varepsilon, \varepsilon' \in Q$ и цепь Ω длины $k-1$, такие, что выполнены следующие условия:

1) $\{\varepsilon, \varepsilon'\} = \{a_k, a_k'\}$,
2) $g \in S_\Omega$,
3) $g(\alpha) = \alpha$ для всех $\alpha \in Q$, таких, что $\varepsilon \leqslant \alpha$,
4) $g(\varepsilon') \neq \varepsilon'$.

Будем обозначать через $H(m, d)$, $0 \leqslant d < m \leqslant n$, множество всех функций из F, для которых выполнены следующие условия:

1) $\{f(a_m), f(a'_m)\} = \{a_{m-d}, a'_{m-d}\}$;
2) элементы $f(a_j)$ и $f(a'_j)$ сравнимы для всех $j = 1, \ldots, m-1$.

Имеет место следующий критерий полноты для систем функций из F.

Теорема. *Система $G \subseteq F$ является полной тогда и только тогда, когда $G_1 \subseteq G$ и $G_2 \subseteq G$.*

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $f_1, f_2 \in F$, $g \in G_1 \cup G_2$ и $g = f_2 \circ f_1$; тогда $f_2 = g$ или $f_1 = g$.*

Лемма 2. *Пусть $h \in H(m, d)$, где $2 \leqslant d < m \leqslant n$. Тогда существуют функции $h_0 \in H(m, 0)$, $g \in H(m, 1)$ и $f \in H(m-1, d-1)$, такие, что $h = f \circ (g \circ h_0)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-00508) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

[1] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2008.

[2] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды Математического института АН СССР. Т. 51. — 1958. — С. 5–142.

[3] *Панин Д. Ю.* О порождении одноместных монотонных функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Математика. Механика. — 2010. — № 6. — С. 52–55.

[4] *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. — 1986. — V. 3. — P. 211–218.

[5] *Lau D.* Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory — Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, 2006.

[6] *Дудакова О. С.* О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17 — М.: Физматлит, 2008. — С. 13–104.

[7] *Дудакова О. С.* О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестник Московского университета. Математика. Механика. — 2008. — № 1. — С. 31–37.

[8] *Slupecki J.* Kriterium pelnosci wielwartosciowych systemow logiki zdańi // C.R. Séanc. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III. — 1939. — V. 32. — P. 102–109.

[9] *Salomaa A.* Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain I, II // Turun Ylopiston Jalkaisuja Annales Universitatis Turkuensis, sarja A 53. — 1962. — P. 1–9; A 63. — 1963. — P. 1–19. (Русский перевод: *Саломаа А.* Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Вып. 8. — М.: Мир, — 1964. — С. 7–32.)

[10] *Мальцев А. И.* Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского // Алгебра и логика. — 1967. — Т. 6, № 3. — С. 61–74.

Об одной последовательности мультиклонов

В. И. Пантелеев

v_panteleyev@mail.ru

Восточно-Сибирская государственная академия образования, Иркутск

Пусть A — конечное множество, содержащее k элементов; n-местной мультифункцией на множестве A называется отображение $f : A^n \to 2^A$, а n-местной мультипроекцией — отображение $e_n^i : (x_1, \dots, x_n) \to \{x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Суперпозиция $f(f_1, \dots, f_m)$ с внешней мультифункцией f и внутренними мультифункциями $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ определяет мультифункцию $h_1(x_1, \dots, x_n)$ следующим образом:

$$h_1(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если существует } i \in \{1, \dots, m\}, \text{ такое,} \\ & \text{что } f_i(a_1, \dots, a_n) = \varnothing; \\ \bigcup\limits_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_n)} f(b_1, \dots, b_m) & \text{иначе} \end{cases} .$$

Замечание 1. Определение суперпозиции мультифункций фактически определяет вложение множества всех мультифункций на множестве A в множество функций 2^k-значной логики, поэтому n-местную мультифункцию можно рассматривать как n-местную функцию 2^k-значной логики, однозначно определяемую своими значениями на наборах, построенных из одноэлементных подмножеств.

С учетом замечания 1, во-первых, отождествляется одноэлементное подмножество с элементом этого подмножества, а во-вторых, понятие сохранения предиката функцией k-значной логики естественным образом распространяется на мультифункции (предикаты при этом задаются на множестве всех подмножеств множества A).

Замечание 2. Множество мультифункций, сохраняющих некоторый предикат, не обязательно является замкнутым относительно суперпозиции.

Мультиклоном (частичным гиперклоном) называется множество мультифункций, содержащее все мультипроекции и замкнутое относительно суперпозиции. Замыкание множества мультифункций и максимальные мультиклоны определяются обычным образом.

Определим m-местный предикат G_m $(m \geqslant 1)$ следующим образом: G_m состоит из всех наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ длины m, таких, что либо для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется $\alpha_i = \varnothing$, либо для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется $\alpha_i \in A$ и при этом $\alpha_i \neq \alpha_j$, если $i \neq j$.

Пусть F_m — множество мультифункций, сохраняющих предикат G_m.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*
1) F_m — *мультиклон;*
2) $F_m \subseteq F_n$ *при* $m \leqslant n$*;*
3) F_k — *максимальный мультиклон.*

Доказательство. Приведем основные идеи доказательства. Справедливость первого утверждения следует из равенства:

$$f(f_1, \ldots, f_m)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, f_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)),$$

справедливого для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из A^n, и из того, что любой набор, содержащий $\varnothing$, принадлежит предикату.

Справедливость второго утверждения получается несложным образом из определения предиката.

Для доказательства того, что F_k — максимальный мультиклон, заметим, что этому множеству принадлежат, во-первых, одноместные мультифункции, принимающие в качестве своих значений все элементы множества A, во-вторых, одноместные мультифункции, принимающие при одном значении переменной $\varnothing$ и равные некоторому непустому подмножеству при всех остальных значениях переменной.

Пусть теперь некоторая функция f не сохраняет G_k, т. е. на некоторых наборах из предиката она возвращает набор $(A_1, \ldots, A_k)^t$, не принадлежащий предикату. Тогда найдется элемент d из A, такой, что d не принадлежит ни одному из тех A_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, мощность которых равна 1. Используя одноместную функцию $h(x)$, которая равна $\varnothing$ при $x = d$ и 0 при остальных значениях переменной, а также одноместную функцию $g(x) = (A_1, \ldots, A_k)$, можно получить константу 0.

Подставив в трехместную функцию $u(x, y, z)$, которая равна $max(y, z) + 1$ при $x = 0$ и $\varnothing$ при остальных значениях переменной, константу 0, получим базис мультифункций, принимающих в качестве своих значений только элементы множества A.

Затем можно получить все мультифункции, принимающие в качестве своих значений пустое множество или элементы множества A, и после этого — все мультифункции.

Заметим, что при $m > k$ множество F_m совпадает с множеством всех мультифункций. ∎

Максимальными мультиклонами являются также множества мультифункций T_E [1]:

$$T_E = \{f \mid f(a_1, \ldots, a_n) = B,\ a_i \in E,\ B \subseteq E\},$$

где E — непустое подмножество множества A, и $T^*_\alpha (\alpha \in A)$ [2]:

$$T^*_\alpha = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid \alpha \in f(\alpha, \ldots, \alpha) \text{ или } f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \varnothing\}.$$

Список литературы

[1] *Пантелеев В. И.* О некоторых максимальных частичных гипер- и ультраклонах // Материалы XVIII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» имени академика О. Б. Лупанова (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.) / Под ред. О. М. Касим-Заде. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2009. — С. 73–75.

[2] *Пантелеев В. И.* Об одном семействе максимальных частичных гиперклонов // Материалы 3-й Российской школы-семинара, посвященной 80-летию со дня рождения профессора А. И. Кокорина (Иркутск, 10–14 августа 2010 г.). — Иркутск: Изд-во ГОУ ВПО «Восточно-Сибирская государственная академия образования», 2010. — С. 74–75.

Применение дополнений паросочетаниями для задачи коммивояжера

А. В. Панюков, Т. А. Панюкова

a_panyukov@mail.ru, qwark@mail.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Введение

В статье изложен подход к приближенному решению задачи коммивояжера, основанный на дополнении частичного тура паросочетаниями подграфа открытых вершин. Проведено аналитическое исследование, показавшее, что алгоритм, основанный на непосредственном применении данного подхода, во-первых, имеет вычислительную сложность не более $O(n^3)$, n — число городов, во-вторых, не улучшает гарантированные оценки точности известных алгоритмов. Предложена модификация алгоритма Сердюкова, имеющая оценку вычислительной сложности $O(n^3)$ и наилучшую гарантированную оценку точности. Представлены результаты вычислительного эксперимента, позволяющие выдвинуть гипотезу об асимптотической точности алгоритма для достаточно широкого класса задач.

Пусть $G = (V, E)$ — полный неориентированный граф с множеством вершин $V : |V| = n$ и множеством ребер E. Пусть для каждого ребра $e \in E$ задан его вес $c(e)$. Для множества ребер $E' \subseteq E$ будем обозначать $c(E') = \sum_{e \in E'} c(e)$. Гамильтонов цикл — это цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. Задача коммивояжера на максимум (MAX TSP) заключается в нахождении в графе G гамильтонова цикла максимального веса.

В данной работе для решения задачи MAX TSP представлены анонсированные ранее алгоритм дополнения паросочетаниями и его применение в модификации алгоритма Сердюкова [1, 2]. Данные алгоритмы предварительно строят специальные частичные туры, а затем дополняют их до гамильтонова цикла паросочетаниями подграфов открытых вершин. Гарантированные оценки точности предложенного алгоритма: $2/3$ — для симметрической TSP и $7/9$ — для метрической. Оценка точности модификации алгоритма Сердюкова — $3/4$ для симметрической TSP и $5/6$ — для метрической. Вычислительная сложность всех алгоритмов не превосходит величины $O(n^3)$.

Алгоритм дополнения паросочетаниями

В основе разработанного алгоритма лежит идея дополнения частичного тура до гамильтонова цикла ребрами паросочетаний подграфа на открытых вершинах.

Поясним эту идею. Первым шагом алгоритма является построение 2-фактора максимального веса. После этого производится разрыв полученных циклов удалением ребра минимального веса. Далее выполняется процедура дополнения полученного частичного тура паросочетанием максимального веса на подграфе графа G индуцированным множеством открытых вершин этого частичного тура. В результате будет получен 2-фактор с числом компонент связности, по крайней мере в 2 раза меньшим, чем у первоначального 2-фактора. Алгоритм выполняет указанную процедуру до тех пор, пока очередной 2-фактор не будет иметь одну компоненту связности. В этом случае полученный цикл будет гамильтоновым.

Алгоритм A1 (Алгоритм дополнения паросочетаниями).

Вход: полный неориентированный граф $G = (V, E)$ с весовой функцией c.

Выход: гамильтонов цикл.

Шаг 1. Вычислить 2-фактор максимального веса $C = C_1, \ldots, C_s$.

Шаг 2. Если $s = 1$, *вернуть* C_1.

Шаг 3. Для каждого C_i, $i = 1, \ldots, s$, найти $e_i = \{u_i, v_i\} = \arg\min\limits_{e \in C_i} c(e)$. Положить $C_i = C_i \setminus \{e_i\}$.

Шаг 4. Пусть множество $S = \bigcup_{i=1,\ldots,s}\{u_i, v_i\}$. Пусть H — подграф графа G, образованный вершинами множества S. Положить $E(H) = E(H) \setminus \left(\bigcup_{i=1,\ldots,s} e_i\right)$.

Шаг 5. Найти в графе H паросочетание максимального веса M.

Шаг 6. Пусть $C = C \cup M$. Обозначить непересекающиеся циклы, образованные ребрами множества C, через $C_1, \ldots, C_s$. Перейти на *Шаг* 2.

Вычислительная сложность алгоритма

В наихудшем случае 2-фактор будет состоять из наибольшего возможного числа циклов длины 3, и после разрыва получится $\lfloor 2 \cdot n/3 \rfloor$ вершины, которым инцидентно только одно ребро частичного тура (так называемые открытые вершины). В этом случае количество компонент связности частичного тура равно $\lfloor n/3 \rfloor$. В наихудшем случае в результате одной процедуры построения дополнительного графа количество открытых вершин будет уменьшено лишь вдвое. Так как алгоритм заканчивает работу, когда не останется открытых вершин, то количество выполнения шагов 3–5 алгоритма будет не более $\lceil \log_2 \lfloor 2 \cdot n/3 \rfloor \rceil$. Поскольку при каждом последующем выполнении шагов 3–5 размерность задачи понижается как минимум в два раза, то время выполнения этих шагов не будет превосходить величины

$$\sum_{k=1}^{\lceil \log_2 \lfloor 2 \cdot n/3 \rfloor \rceil} O\left(\frac{n}{2^k}\right)^3 = O(n^3).$$

Таким образом, алгоритм **A1** является полиномиальным и при эффективной реализации подзадач нахождения максимальных паросочетаний и 2-фактора имеет вычислительную сложность $O(n^3)$.

Оценка точности алгоритма

Теорема 1. *Пусть* opt *— вес оптимального гамильтонова цикла в неориентированном взвешенном графе* G *при решении задачи на максимум, а* T *— цикл, найденный с помощью алгоритма* **A1** *дополнения подграфами. Тогда выполняется следующее неравенство:* $c(T) \geqslant 2/3 \cdot opt$. *Данная оценка неулучшаема.*

Теорема 2. *Пусть* opt *— вес оптимального гамильтонова цикла в метрическом неориентированном взвешенном графе* G *при решении задачи на максимум, пусть* T *— цикл, найденный с помощью алгоритма* **A1**. *Тогда выполняется следующее неравенство:*

$$c(T) > \frac{7}{9} \cdot opt.$$

Данный алгоритм может быть эффективно использован вместе со многими другими алгоритмами для дополнения частичного тура до гамильтонова, в частности, в модификации алгоритма Сердюкова.

Заключение

Предложенный в статье алгоритм приближенного решения задачи коммивояжера на максимум, основанный на дополнении частичного тура паросочетаниями подграфа открытых вершин, имеет вычислительную сложность $O(n^3)$ и оценки точности $2/3$ для симметрической MAX TSP и $7/9$ — для метрической. Несмотря на то, что известные гарантированные оценки не улучшены, вычислительный эксперимент показал, что получаемые данным алгоритмом решения являются одними из самых точных среди приближенных алгоритмов. В связи с этим достаточно эффективной оказалась связка разработанного алгоритма с алгоритмом, имеющим наиболее высокую из известных гарантированную оценку точности, — алгоритмом Сердюкова. Предложенная в работе модификация алгоритма Сердюкова по результатам вычислительного эксперимента показала наилучшие результаты среди известных полиномиальных алгоритмов для MAX TSP. Полученные результаты вычислительного эксперимента позволяют выдвинуть гипотезу об асимптотической точности алгоритма для достаточно широкого класса задач.

Список литературы

[1] *Гимади Э. Х., Сердюков А. И.* О некоторых результатах для задачи коммивояжера на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. — 2001. — №1. — С. 22–39.

[2] *Гимади Э. Х., Тычинин С. А.* Исследование реализаций алгоритма Сердюкова для задачи MAX TSP // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Материалы конф. (Владивосток, 7–14 сентября 2007). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007. — С. 132.

Теория Галуа для клонов и суперклонов

Н. А. Перязев

nikolai.baikal@gmail.com

Восточно-Сибирская государственная академия образования, Иркутск

Исследования замкнутых классов функциональных систем в нашей стране начал С. В. Яблонский [1]. Алгебраический подход к изучению функциональных систем впервые был предложен А. И. Мальцевым [2].

Среди алгебр функций наибольшее распространение получили клоны — алгебры операций, замкнутые относительно суперпозиции и содержащие операции проекций. В работах [3] устанавливается связь Галуа для клонов и ко-клонов — алгебр отношений.

Рассматривая алгебры над множествами мультиопераций с одной дополнительной операцией разрешимости простейшего уравнения, получаем алгебру, называемую суперклоном. Так как решетки суперклонов и ко-клонов изоморфны [4], то должна существовать связь Галуа для клонов и суперклонов. В данной работе эта связь устанавливается.

Предварительные результаты

В дальнейшем будем предполагать, что A — фиксированное конечное множество. Отображение из A^n в A называется n-местной операцией на A (будем допускать случай $n = 0$). Множество всех n-местных операций на A обозначаем через P_A^n, а множество всех операций на A через

$$P_A = \bigcup_{n \geqslant 0} P_A^n.$$

Пусть $F \subseteq P_A$. Алгебра $\mathfrak{F} = \langle F; *, \zeta, \tau, \Delta, \varepsilon \rangle$ типа $\langle 2, 1, 1, 1, 0 \rangle$ с ниже определенными операциями подстановки $(f * g)$, циклической перестановки аргументов (ζf), транспозиции аргументов (τf), отождествления аргументов (Δf) и операцией ε, выделяющей операцию $e_1^2 \in P_A^2$, называется *клоном* над A.

Если $f \in F \cap P_A^n$ и $g \in F \cap P_A^m$, то

$$(f * g)(a_1, ..., a_{n+m-1}) = f(g(a_1, ..., a_m), a_{m+1}, ..., a_{n+m-1}) \text{ при } n \geqslant 1;$$

$$(f * g)(a_1, ..., a_m) = f \text{ при } n = 0;$$

$$(\zeta f)(a_1, ..., a_n) = f(a_2, ..., a_n, a_1) \text{ при } n > 1 \text{ и } (\zeta f) = f \text{ при } n \leqslant 1;$$

$$(\tau f)(a_1, ..., a_n) = f(a_2, a_1, a_3, ..., a_n) \text{ при } n > 1 \text{ и } (\tau f) = f \text{ при } n \leqslant 1;$$

$$(\Delta f)(a_1, ..., a_{n-1}) = f(a_1, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \text{ при } n > 1;$$

$$(\Delta f) = b, \text{ если } f(a) = b \text{ для всех } a \in A, \text{ иначе } (\Delta f) = f \text{ при } n = 1;$$

$$(\Delta f) = f \text{ при } n = 0;$$

$$\varepsilon = e^2_1, \text{ где } e^2_1(a_1, a_2) = a_1.$$

Пусть $B(A)$ — множество всех подмножеств A, в том числе $\varnothing$. Отображение из A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A (будем допускать случай $n = 0$). Для множества всех n-местных мультиопераций на A используем обозначение M^n_A, а для множества всех мультиопераций на A обозначение

$$M_A = \bigcup_{n \geqslant 0} M^n_A.$$

Пусть $S \subseteq M_A$. Алгебра $\mathscr{S} = \langle S; *, \zeta, \tau, \Delta, \mu, \varepsilon \rangle$ типа $\langle 2, 1, 1, 1, 1, 0 \rangle$ с ниже определенными операциями подстановки $(f * g)$, циклической перестановки аргументов (ζf), транспозиции аргументов (τf), отождествления аргументов (Δf), разрешимости (μf) и операцией ε, выделяющей бинарную мультиоперацию — проекцию по первому аргументу, называется *суперклоном* над A.

Если $f \in S \cap M^n_A$ и $g \in S \cap M^m_A$, то

$$\begin{aligned}(f * g)(a_1, \ldots, a_{n+m-1}) = \{a \mid & \text{ существует } a_0 \in g(a_1, \ldots, a_m) \\ & \text{такой, что } a \in f(a_0, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n-1})\} \text{ при } n \geqslant 1;\end{aligned}$$

$$(f * g)(a_1, \ldots, a_m) = f(), \text{ если } g(a_1, \ldots, a_m) \neq \varnothing \text{ и}$$

$$(f * g)(a_1, \ldots, a_m) = \varnothing, \text{ если } g(a_1, \ldots, a_m) = \varnothing \text{ при } n = 0;$$

$$(\zeta f)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_2, \ldots, a_n, a_1) \text{ при } n > 1, (\zeta f) = f \text{ при } n \leqslant 1;$$

$$(\tau f)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n) \text{ при } n > 1, (\tau f) = f \text{ при } n \leqslant 1;$$

$$(\Delta f)(a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(a_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \text{ при } n > 1;$$

$$(\Delta f) = \{a | a \in f(a)\} \text{ при } n = 1, (\Delta f) = f \text{ при } n = 0;$$

$$(\mu f)(a_1, \ldots, a_n) = \{a | a_1 \in f(a, a_2, \ldots, a_n)\} \text{ при } n \geqslant 1;$$

$$(\mu f) = \varnothing \text{ при } n = 0;$$

$$\varepsilon = e,\ \text{ где } e(a_1, a_2) = \{a_1\}.$$

Мультиоперации на всех наборах, равные одноэлементным множествам, ничем не отличаются от операций. Поэтому такие мультиоперации будем отождествлять с соответствующими им операциями.

Используя главные операции суперклона, можно определить частичную операцию суперпозиции

$$(f * (f_1, \ldots, f_n))(a_1, \ldots, a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_m)} f(b_1, \ldots, b_n).$$

При этом если $f, f_1, \ldots, f_n$ являются операциями, то получается общепринятое понятие суперпозиции операций.

Лемма. *Для суперпозиции мультиопераций выполняется полутождество суперассоциативности*

$$(g_0 * (g_1, ..., g_s)) * (h_1, ..., h_m) \subseteq g_0 * (g_1 * (h_1, ..., h_m), ..., g_s * (h_1, ..., h_m)).$$

Если $h_1, \ldots, h_m$ — операции, то выполняется тождество суперассоциативности

$$(g_0 * (g_1, ..., g_s)) * (h_1, ..., h_m) = g_0 * (g_1 * (h_1, ..., h_m), ..., g_s * (h_1, ..., h_m)).$$

Эта лемма используется в доказательстве основных результатов.

Основные результаты

Если для любых элементов $a_1^1, \ldots, a_m^1, \ldots, a_1^n, \ldots, a_m^n$ из A выполняется включение

$$f * (g(a_1^1, ..., a_m^1), ..., g(a_1^n, ..., a_m^n)) \subseteq g * (f(a_1^1, ..., a_1^n), ..., f(a_m^1, ..., a_m^n)),$$

то говорим, что для f и g верно *полутождество перестановочности*, а также, что f *стабильна относительно* g, а g *нормальна относительно* f.

Если $g \in M_A$, то

$$S(g) = \{f \mid f \in P_A \text{ и } f \text{ стабильна относительно } g\}$$

называется *стабилизатором* g.

Если $f \in P_A$, то

$$N(f) = \{g \mid g \in M_A \text{ и } g \text{ нормальна относительно } f\}$$

называется *нормализатором* f.

Если $R \subseteq M_A$, то $S(R) = \bigcap\limits_{g \in R} S(g)$ — *стабилизатор* множества мультиопераций R.

Если $K \subseteq P_A$, то $N(P) = \bigcap\limits_{f \in K} N(f)$ — *нормализатор* множества K.

Теорема 1.
а) *Стабилизатор $S(R)$ является клоном для любого $R \subseteq M_A$.*
б) *Нормализатор $N(K)$ является суперклоном для любого $K \subseteq P_A$.*

Стандартным образом определяется алгебраическое замыкание множества операций K и множества мультиопераций R:

$[\,K\,] = \bigcap\limits_{K \subseteq K_i} K_i$, где K_i являются клонами;

$\langle\, R\,\rangle = \bigcap\limits_{R \subseteq R_i} R_i$, где R_i являются суперклонами.

Замыканием Галуа множества операций K и множества мультиопераций R называются, соответственно, $S(N(K))$ и $N(S(R))$.

Теорема 2. *Алгебраические замыкания совпадают с замыканиями Галуа:*
а) $[\,K\,] = S(N(K))$*;*
б) $\langle\, R\,\rangle = N(S(R))$.

Теорема 3. *Отображения $S(x)$ и $N(x)$ являются взаимно-обратными антиизоморфизмами решетки клонов и решетки суперклонов.*

Таким образом, отображения $S(x)$ и $N(x)$ определяют совершенную связь Галуа [5] между клонами и суперклонами.

Стабилизатор множества операций будем называть *централизатором*. При этом вместо полутождества перестановочности получаем тождество перестановочности [2]. Отметим, что централизатор определяет на множестве клонов двойственное себе соответствие Галуа [5], которое не является совершенным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00476.

Список литературы

[1] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.

[2] *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры Поста. — Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1976.

[3] *Бондарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В.Н., Ромов Б. А.* Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10; № 5. — С. 1–9.

[4] *Перязев Н. А.* Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. — Казань, 2009. — Т. 151. Книга 2. — С. 120–125.

[5] *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1980.

Построение графов-обструкций ограниченного ориентируемого рода

В. И. Петренюк

petrenjukvi@rambler.ru

Кировоградский национальный технический университет

Задача. Построить из нескольких простых графов новые графы G ограниченного ориентируемого рода $\gamma(G)$, у которых все рёбра существенны относительно рода при операции удаления произвольного ребра u, $\gamma(G\backslash u) = \gamma(G)-1$, т. е. графы-обструкции ограниченного эйлерова рода $\gamma(G)$. В [3, 4] исследованы свойства графов G без вершин степени 2, с заданным эйлеровым родом $\gamma(G)$ и заданным разбиением на два 2-связных подграфа G_i меньшего рода γ_i, $i = 1, 2$. Граф G будем называть apex-m-склейкой графов G_i, полагая, что граф G_2 с $\{e_i\}_1^m$ ребрами подобен квазизвезде $St_m(G_2)$ с графом G_2 вместо центральной вершины и m рёбрами-лучами, инцидентными висячим вершинам g_i. Будем полагать, что такая квазизвезда приклеивается к графу G_1 путём отождествления пар точек (g_i, a_i) в вершину a_i^* графа G, где подмножества $M_1 = \{a_i\}_1^m$, $M_2 = \{g_i\}_1^m$ принадлежат графам G_1, $St_m(G_2)$, соответственно.

Результат решения задачи аналогичен приведенной в [2] оценке рода apex-графа G, представленного как φ-образ графа $(G\backslash v) +$

$St_n(v)$ при φ-преобразовании путём попарного отождествления каждой вершины, инцидентной v, с концевыми вершинами звезды $St_n(v)$, где v — произвольная вершина графа G. Использовался метод φ-преобразований графов, предложенный в 1973 г. Н. П. Хоменко. Им было введено число достижимости $t_G(X)$, $t_G(X) = t$, некоторого множества X точек графа G как наименьшее число 2-клеток s_j, $j = 1, \ldots, t$, на границы которых выходят все точки из X, где под точкой понимаем либо вершину, либо внутреннюю точку ребра. Для множества $\{s_j\}_{j=1}^t$ в [1] были предложены две новые характеристики $\theta, \partial\theta$ множества точек X графа G, роль которых заключается в измерении циклической и цепочной структур дуального графа.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть имеют место следующие соотношения* А, Б, В*:*

А. *Каждое ребро u 2-связного графа G_i, $i = 1, 2$, удовлетворяет только одному из следующих условий:*
   1. *Существенно относительно рода $\gamma(G_i)$ при операции удаления ребра u, где $0 \leqslant \gamma(G_i \backslash u) < \gamma(G_i)$;*
   2. *Существенно относительно числа $t_{G_i}(M_i)$ при операции удаления ребра u, причём $\theta_{G_i \backslash u}(M_i) = \theta_{G_i}(M_i)$, $\partial\theta_{G_i \backslash u}(M_i) = \partial\theta_{G_i}(M_i)$, где $t_{G_i}(M_i) \geqslant 1$, $i = 1, 2$;*

Б. *Для каждого элемента x множества $x \in M_i$, где $M_1 = \{a_j\}_1^{m_1}$, $M_2 = \{g_j\}_1^{m_2}$, и хотя бы одного k, $k \in \{1, 2\}$, имеет место следующее неравенство: $t_{G_k}(M_k \backslash \{x\}) = t_{G_k}(M_k) - 1$;*

В. *Граф G представлен как φ-образ графа $G_1 + St_{m_2}(G_2)$, где $St_{m_2}(G_2)$ — квазизвезда с графом G_2 вместо центральной вершины с висячими рёбрами $(g_j, g_j^{'})$, где $g_j^{'}$ — висячие вершины, $M_2 = \{g_j\}_1^{m_2}$, при φ-преобразовании, заданном на множестве упорядоченных пар точек $(a_i, g_j^{'})$ из множеств M_1, M_2, соответственно, путём отождествления пары точек $(a_i, g_j^{'})$ в вершину a_{ij}^* для тех $i \in \{1, 2 ... m_1\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m_2\}$, что не порождают на множестве $\{a_{ij}^*\} \cup \{g_j^{'}\}$ новых частичных подграфов графа G, гомеоморфных графам K_4, $K_{2,3}$.*

Тогда имеют место следующие утверждения:

1) *каждое ребро u графа G существенно при операции удаления ребра относительно рода $\gamma(G)$;*

2) *род* $\gamma(G)$ *графа* G *удовлетворяет неравенству*

$$\gamma(G) \leqslant \sum_{i=1}^{2} \gamma(G_i) + \sum_{i=1}^{2} \big((t_{G_i}(M_i) - 1) - \theta_{G_i}(M_i) - \partial\theta_{G_i}(M_i)\big).$$

Доказательство. Рассмотрим минимальные вложения f_i графа G_i в замкнутое ориентируемое 2-многообразие σ_i рода $\gamma(G_i)$, при которых множества точек $M_i = \{a_j\}_1^{m_i}$ графа G_i, $i = 1, 2$, располагаются на границах 2-клеток из множества $S_{G_i}(M_i)$, где $S_{G_i}(M_i) = \sigma_i \backslash\ f_i(G_i)$, состоящего из $t_{G_i}(M_i)$ 2-клеток, причём циклическая и цепочная структуры множества $S_{G_i}(M_i)$ имеют числовые характеристики $\theta_{G_i}(M_i)$, $\partial\theta_{G_i}(M_i)$, соответственно. Выполним операции [2] присоединения к элементам множества $S_{G_i}(M_i)$ 2-ручек в количестве $t_{G_i}(M_i){-}1{-}\theta_{G_i}(M_i){-}\partial\theta_{G_i}(M_i)$ штук. Получим для $i = 1, 2$ два новых вложения $f_i^{'}$ графа G_i в замкнутое ориентируемое 2-многообразие $\sigma_i^{'}$ рода $\gamma_i^{'}$, где $\gamma_i^{'} = \gamma(G_i) + t_{G_i}(M_i) - 1 - \theta_{G_i}(M_i) - \partial\theta_{G_i}(M_i)$, реализующие расположение на границе некоторой клетки s_i множества $f_i^{'}(M_i)$, где $s_i \in \sigma_i^{'} \backslash\ f_i^{'}(G_i)$. Выполним стандартную операцию по отождествлению границ пары дисков d_i из клеток s_i при условии, что их границы не имеют общих точек. В результате получим склеенные по границам регулярных клеток 2-многообразия $\sigma_i^{'}$ рода $\gamma_i^{'}$ в 2-многообразие $\sigma^{''}$ и вложение $f, f = f_1^{'} + f_2^{'}$, графа $\sum\limits_{i=1}^{2} G_i$ в замкнутое ориентируемое 2-многообразие $\sigma^{''}$ рода

$$\sum_{i=1}^{2} \gamma(G_i) + \sum_{i=1}^{2} ((t_{G_i}(M_i) - 1) - \theta_{G_i}(M_i) - \partial\theta_{G_i}(M_i)),$$

причём множество точек $\sum\limits_{i=1}^{2} f_i^{'}(M_i)$ будет вкладываться на границу ∂s клетки s, склеенной из клеток s_1, s_2, подобной плоскому кольцу.

Согласно соотношения B отождествим (приклеим) висячие вершины $g_j^{'}$ графа $St_{m_2}(G_2)$ с точками a_j графа G_1, где $j \in \{1, 2, \ldots, m_2\}$, $a_i \in M_1$, так, чтобы на множестве из всех отождествлённых вершин a_{ij}^{*} для $i \in \{1, 2...m_1\}$, $j \in \{1, 2...m_2\}$, не порождались частичные подграфы, гомеоморфные графам K_4,$K_{2,3}$. В результате получим граф G, у которого в силу соотношения B ориентируемый род $\gamma(G)$ удовлетворяет неравенству

$$\gamma(G) \leqslant \sum_{i=1}^{2} \gamma(G_i) + \sum_{i=1}^{2} ((t_{G_i}(M_i) - 1) - \theta_{G_i}(M_i) - \partial\theta_{G_i}(M_i)).$$

Покажем, что каждое ребро u графа G существенно относительно рода $\gamma(G)$ при операции удаления ребра. Действительно, имеют место только два следующих варианта.

Вариант 1. Если φ-прообраз ребра u принадлежит одному из графов G_i, то в силу соотношения А при операции удаления ребра либо уменьшится на 1 род $\gamma(G_i)$, либо уменьшится на 1 число $t_{G_i}(M_i)$, без изменений остаются характеристики $\theta_{G_i}(M_i)$, $\partial\theta_{G_i}(M_i)$.

Вариант 2. Если φ-прообраз ребра u не принадлежит ни одному из графов G_i, то это висячее ребро $(g_j, g_j^{'})$ из $St_{m_2}(G_2)$, а в силу соотношения Б для каждого элемента x множества $x \in M_i$ имеем либо $x = g_j$, либо $x = a_{ij}^*$, уменьшение на 1 числа $t_{G_k}(M_k)$. В каждом из вариантов 1, 2 получим уменьшение на 1 верхней оценки для числа $\gamma(G)\backslash u$, что означает существенность каждого ребра u графа G при операции удаления ребра относительно рода $\gamma(G)$. ∎

Следствие 1. *Если граф G_2 вырождается в точку g_0 и каждое ребро u графа G_1 либо существенно относительно рода $\gamma(G_1)$, либо существенно относительно числа $t_{G_1}(M_1)$, $t_{G_1}(M_1) > 1$ при операции удаления ребра u и для каждого элемента x множества $x \in M_i$ имеет место неравенство $t_{G_i}(M_i) = t_{G_i}(M_i) - 1$, при условии, что $M_1 = \{a_i\}_1^m$, $St_m(g_0)\backslash\{g_0\} = M_2 = \{g_i\}_1^m$, а граф G представлен как φ-образ графа $(G_1 + St_m(g_0)$ при φ-преобразовании, заданном путём попарного отождествления пар точек (a_i, g_i) в вершину a_i^* для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, то каждое ребро u графа G существенно при операции удаления ребра относительно рода $\gamma(G)$, удовлетворяющего неравенству $\gamma(G) \leqslant \gamma(G_1) + t_{G_1}(M_1) - \theta_{G_1}(M_1) - \partial\theta_{G_1}(M_1) - 1$.*

Следствие 2. *Пусть граф G построен так, как указано в формулировке теоремы 1. Если граф G имеет ориентированный род $\gamma(G)$, такой, что $\gamma(G) = \sum\limits_{i=1}^{2} \gamma(G_i) + \sum\limits_{i=1}^{2} ((t_{G_i}(M_i) - 1) - \theta_{G_i}(M_i) - \partial\theta_{G_i}(M_i))$, то каждое ребро u графа G существенно относительно рода при операции удаления ребра u.*

Следствие 3. *Пусть граф G построен так, как указано в формулировке следствия 1. Если граф G имеет ориентированный род $\gamma(G)$, такой, что $\gamma(G) = \gamma(G_1) + t_{G_1}(M_1) - \theta_{G_1}(M_1) - \partial\theta_{G_1}(M_1) - 1$, то каждое ребро u графа G существенно относительно рода при операции удаления ребра u.*

Для иллюстрации приведём следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим граф G, построенный из трёх копий графа K_5 без одного ребра путём отождествления троек несмежных вершин в пару несмежных вершин. Применим теорему 1 к этой известной обструкции для тора. Нетрудно убедиться в справедливости соотношений А, Б, В, а именно в том, что граф G_1, построенный из двух копий графа K_5 без одного ребра e, $e = (1, 2)$, путём отождествления i-й пары несмежных вершин в вершину v_i, где $i = 1, 2$, имеет род $\gamma(G_1)$, $\gamma(G_1) = 1$, и множество M_1, $M_1 = \{v_1, v_2\}$, имеет только одну ненулевую характеристику $t_{G_1}(M_1)$, $t_{G_1}(M_1) = 1$; третью копию графа K_5 без одного ребра графа G_2 сделаем центром квазизвезды $St_2(G_2)$ с двумя висячими рёбрами (i, g_i), где $i = 1, 2$, множество M_2, $M_2 = \{1, 2\}$, имеет только одну ненулевую характеристику $t_{G_2}(M_2) = 2$. Пары (v_i, g_i) висячих вершин и v_i отождествим в вершину v_i^*, где $i = 1, 2$, и получим граф G. Тогда $\gamma(G) \leqslant 1+0+(1-1)+2-1$. Сжимая в точку рёбра (i, g_i), получим упомянутую выше известную обструкцию для тора.

Пример 2. Для графа из примера 1 можно применить следствие 1. Рассмотрим граф G, построенный из графа G_1 и звезды $St_9(v)$ путём отождествления каждой пары вершин (v_i, g_i) в v_i^*, где $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Граф G_1 состоит из трёх копий графа K_4, склеенных по одной вершине в точку сочленения v^* с множеством M_1, $M_1 = \{v_i\}_{i=1}^{9}$, у которого характеристики $t_{G_1}(M_1) = 3$, $\theta_{G_1}(M_1) = \partial\theta_{G_1}(M_1) = 0$, удовлетворяют соотношениям А, Б, В теоремы 1. В силу следствия 1 имеем неравенство $\gamma(G) \leqslant 0 + 3 - 1$.

Список литературы

[1] *Петренюк В. И.* Две характеристики дуального графа плоского графа // Мат. Межд. конф. «Искусст. интеллект–2004». — Кацивели: Наука и освіта, 2004. — С. 230–231.

[2] *Петренюк В. И.* Обобщённая оценка рода простого графа // Искусст. интеллект. — 2004. — Т. 4. — С. 34–45.

[3] *Петренюк В. И.* Оценка рода apex-m-склейки простых графов // Материалы XV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». — М.: Издательство МГУ, 2008. — С. 34.

[4] *Mohar Bojan.* Face covers and the genus problem for apex graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. — 2001. — V. 82. — P. 102–117.

Конечные автоматы и алгебраические модели программ с позиции разрешимости проблемы эквивалентности

Р. И. Подловченко

rip@vvv.nivc.msu.ru

Научно-исследовательский вычислительный центр
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Рассматриваются два семейства математических моделей вычислений — конечные автоматы над конечными алфавитами и алгебраические модели программ. Первые берутся в их классическом определении, а вторые — в определении, данном в [1]. Для тех и других обсуждается проблема эквивалентности. Изучается методика решения этой проблемы для конечных автоматов, и демонстрируется ее влияние на методику распознавания эквивалентности в алгебраических моделях программ. Материалом для этого служат результаты исследований, выполненных в [2, 3].

Алгебраические модели программ строятся над двумя конечными алфавитами Y и P. Элементы алфавита Y называются операторными символами, а элементы алфавита P — логическими переменными, каждая из которых пробегает множество $\{0, 1\}$. Все алгебраические модели над Y и P имеют общее множество объектов, каковыми являются схемы программ, и одна модель отличается от другой отношением эквивалентности на множестве схем программ.

В [2] установлен следующий факт: проблема эквивалентности в любой алгебраической модели над Y, P сводится к проблеме эквивалентности в множестве матричных схем, принадлежащих модели. На этом основании в [2, 3] исследуется проблема эквивалентности в множестве матричных схем.

Матричная схема над Y, P представляет собой ориентированный и размеченный граф, вершины которого подразделяются на вход, выход, пустой цикл и преобразователи. Из каждой вершины, кроме выхода, исходят дуги в количестве, равном числу элементов в множестве X, где $X = \{x \mid x : P \to \{0,1\}\}$; каждая дуга помечена элементом из X, и разные дуги — различными элементами. Дуги из пустого цикла ведут в него же. Каждому преобразователю сопоставлен символ из Y.

Каждая матричная схема над Y, P является носителем отображения, в общем случае частичного, множества $\mathcal{L}$, состоящего из функций разметки над Y, P, в множество Y^*; элементы последнего называются операторными цепочками. Функцией разметки над Y, P называется всюду определенное отображение множества Y^* в множество X.

Реализуемое матричной схемой отображение осуществляется процедурой ее выполнения на функции μ из $\mathcal{L}$. Выполнение представляет собой обход схемы, который начинается в ее входе с пустой операторной цепочкой из Y^* и сопровождается накоплением операторной цепочки. Приход в преобразователь знаменуется приписыванием к текущей цепочке символа, сопоставленного преобразователю, и если h — полученная при этом цепочка из Y^*, то выход из преобразователя совершается по дуге с пометкой $\mu(h)$. При достижении выхода схемы ее выполнение на μ завершается, а результатом его считается операторная цепочка, с которой достигается выход.

Эквивалентность матричных схем индуцируется параметрами ν и L, где ν — эквивалентность в Y^*, а $L \subseteq \mathcal{L}$. По определению, две матричные схемы (ν, L)-эквивалентны тогда и только тогда, когда, какой бы ни была функция μ из L, всякий раз, когда одна из схем достигает на μ выхода, другая достигает тоже, и результаты их выполнений на μ — это ν-эквивалентные цепочки.

Множество матричных схем над Y, P с введенной в нем (ν, L)-эквивалентностью называется моделью $M(\nu, L)$. Эквивалентность ν всегда является разрешимой.

Обратимся теперь к методике распознавания эквивалентности конечных автоматов над алфавитом Σ. Ею предусматривается два этапа исследования.

Назначением первого этапа является следующее: сохраняя отношение эквивалентности автоматов, перейти от выполнения их на множестве всех слов над Σ к выполнению на конечном его подмножестве. В этих целях предписывается:

1) для любого натурального n ввести разрешимое отношение n-эквивалентности автоматов, удовлетворяющее требованию: при любом n из эквивалентности автоматов следует их n-эквивалентность;
2) для любой пары автоматов A_1, A_2 конструктивно определить такое число $N(A_1, A_2)$, что из $N(A_1, A_2)$-эквивалентности следует их эквивалентность.

Решение задачи 1) осуществляется так: n-эквивалентными считаются автоматы, принимающие одни те же слова длины, не превосходящей числа n.

При решении задачи 2) отыскивается такое n, что к n-эквивалентным автоматам применима техника следов. Последняя предписывает искать в маршрутах длины $n+1$, прокладываемых общим для автоматов словом, повторяющуюся пару вершин, равноудаленных от начала маршрутов, и сокращать маршруты на витки обнаруживаемых циклов. Оказалось, что $N(A_1, A_2) = n_1 n_2$, где n_i — число вершин в автомате A_i, $i = 1, 2$.

По выполнении первого этапа методики получаем алгоритм, разрешающий эквивалентность автоматов над Σ, но сложность этого алгоритма экспоненциальна относительно размеров сравниваемых автоматов.

Вторым этапом методики преследуется цель: построить алгоритм, разрешающий эквивалентность автоматов с полиномиальной сложностью. Для этого методикой предлагается следующее: при выполнении сравниваемых на эквивалентность автоматов A_1, A_2 перебор слов длины $n_1 n_2$ заменить анализом маршрутов, прокладываемых в автоматах словами. На этом пути и получен известный алгоритм Мура, сложность которого оценивается как $O(n^2 \log n)$, где $n = \max(n_1, n_2)$.

Изложенная методика стала руководящей при разработке методики распознавания эквивалентности в алгебраических моделях программ. Сохраняем оба этапа исследований с теми же предназначениями, что и в случае конечных автоматов.

На первом этапе при определении N-эквивалентности схем из $M(\nu, L)$ множество L заменяется множеством N-префиксов функций из L, которые определены на операторных цепочках длины N. Чтобы выполнялось предписание 1), на параметры ν и L налагаются ограничения: ν-эквивалентные цепочки должны иметь одинаковую длину, а L — состоять из всех функций из $\mathcal{L}$, сохраняющих свое значение на классах ν-эквивалентности цепочек. $M(\nu, L)$ тогда называется уравновешенной. Доказывается, что предписание 2) выполняется для уравновешенной модели $M(\nu, L)$ при дополнительных требованиях к ν: ν — это полугрупповая эквивалентность с левым сокращением. Последнее свойство заключается в том, что в ν-эквивалентных цепочках при ν-эквивалентности их префиксов являются ν-эквивалентными и их суффиксы. Итак, на первом этапе выявлены уравновешенные полугрупповые модели $M(\nu, L)$ с левым сокращением. В каждой из них разрешима проблема эквивалентности; сложность этого экспоненциальна.

Второй этап исследований преследует те же цели, что и в случае конечных автоматов, — искать приемлемые по сложности разрешающие алгоритмы. Сначала для любой из выявленных моделей построим тем же подходом, что и в случае конечных автоматов, алгоритм разрешения эквивалентности, альтернативный тому, что получен на первом этапе. Так как и он имеет экспоненциальную сложность, последовали дополнительные ограничения на параметр ν. Установлено, что альтернативный алгоритм легко модифицируется в алгоритм полиномиальной сложности, если ν-эквивалентные цепочки сохраняют ν-эквивалентность, будучи одинаково продолженными. Этим сделан прорыв к алгоритмам, разрешающим эквивалентность в $M(\nu, L)$ с приемлемой сложностью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00277.

Список литературы

[1] *Подловченко Р.И.* Иерархия моделей программ // Программирование. — 1981. — № 2. — С. 3–14.

[2] *Подловченко Р.И.* Техника следов в разрешении проблемы эквивалентности в алгебраических моделях программ // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 25–37.

[3] *Подловченко Р.И.* К вопросу о полиномиальной разрешимости проблемы эквивалентности в алгебраических моделях программ // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4.

О двухленточных машинах, описывающих полугруппы с левым сокращением

В. В. Подымов, В. А. Захаров

Valdus@yandex.ru, zakh@cs.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Для решения задач анализа, верификации и оптимизации программ в статьях [1, 2] была предложена абстрактная модель последовательных программ, семантика которых описывается при помощи полугрупп. Состояниями данных программ являются элементы полугруппы, а операторы программ выступают в роли образующих элементов полугруппы. Такой способ представления операционных семантик программ позволяет описывать алгебраические свойства программных операторов при помощи полугрупповых тождеств. В ряде последующих статей (см. [3, 4, 5]) было показано, что в подобных моделях программ можно построить эффективные алгоритмы решения задачи проверки эквивалентности программ.

В частности, в статье [6] был предложен один общий подход к решению этой задачи, опирающийся на описания полугрупп посредством детерминированных двухленточных машин (2-DM). Двухленточная машина представляет собой детерминированный автомат с конечным или бесконечным числом состояний, снабженный двумя считывающими головками, движущимися в одну сторону по двум лентам, на которых записана пара слов. Машины такого вида способны описывать бинарные отношения на множестве слов конечного алфавита, в т. ч. отношение равенства элементов полугруппы с конечным числом образующих. Основу предложенного метода проверки эквивалентности программ составляют следующие две теоремы из статьи [6].

Теорема 1. *Для любой полугруппы отношение равенства элементов полугруппы $x = y$ распознается некоторой 2-DM тогда и только тогда, когда полугруппа является упорядоченной* (*т. е. для любой пары ее элементов x, y верно соотношение $xy = x \;\Rightarrow\; y = e$, где e — нейтральный элемент*).

Теорема 2. *Если семантика программных операторов определяется полугруппой, отношение равенства элементов которой может быть* *описано 2-DM с рекурсивной функцией переходов и конечным множеством допускающих состояний, то проблема эквивалентности программ в указанной семантике разрешима.*

В частности, условиям теоремы 2 удовлетворяют упорядоченные полугруппы, обладающие свойством левого сокращения (т. е. для любой тройки элементов x, y, z верно соотношение $xy = xz \;\Rightarrow\; y = z$). Таким образом, теорема 2 обобщает результаты, полученные в [1, 4]. В статье [7] были установлены необходимые и достаточные условия, при которых семантика некоторых программных операторов удовлетворяет условиям теоремы 1.

Сложность проблемы эквивалентности программ, семантика операторов которых определяется упорядоченной полугруппой, существенно зависит от устройства 2-DM, описывающей отношение равенства элементов полугруппы. Поэтому важное значение придается задаче построения наиболее простых 2-DM, описывающих полугруппу с заданной системой определяющих соотношений (тождеств). Решению этой задачи посвящена настоящая заметка.

Пусть задана полугруппа с конечным множеством образующих Σ и множеством определяющих соотношений (тождеств) S. Для любой пары слов h_1, h_2 из Σ^* запись $h_1 =_{(\Sigma,S)} h_2$ обозначает равенство элементов полугруппы, порожденных этими словами. Символом $\circ$ далее будем обозначать полугрупповую операцию, а символом e — нейтральный элемент полугруппы.

Двухленточной машиной со вспомогательной памятью над алфавитом Σ (далее — 2-DM) будем называть систему $A = (Q_1, Q_2, Mem, \Delta, R, q_0, s_0, F)$, состоящую из двух конечных непересекающихся множеств состояний управления Q_1, Q_2, множества (возможно, бесконечного) состояний вспомогательной памяти Mem, функции переходов $\Delta : (Q_1 \cup Q_2) \times Mem \times \Sigma \to Q_1 \cup Q_2$ и функции преобразования памяти $R : (Q_1 \cup Q_2) \times Mem \times \Sigma \to Mem$. В машине выделены начальное состояние управления q_0, начальное состояние памяти s_0 и множество финальных состояний $F, F \subseteq (Q_1 \cup Q_2)$.

Функцию переходов Δ можно распространить на множество $\Sigma^* \times \Sigma^*$ пар слов в алфавите Σ следующим образом:

$$\Delta^*(q,s,h_1,h_2) = \begin{cases} q, \text{ если } h_1 = \lambda, h_2 = \lambda, \\ \Delta^*(\Delta(q,s,a), R(q,s,a), h'_1, h_2), \ q \in Q_1, \ h_1 = ah'_1, \\ \Delta^*(\Delta(q,s,a), R(q,s,a), h_1, h'_2), \ q \in Q_2, \ h_2 = ah'_2, \\ \text{не определено иначе.} \end{cases}$$

2-DM A описывает полугруппу (Σ, S), если для любой пары слов u, v из Σ^* верно соотношение $u =_{(\Sigma,S)} v \iff \Delta^*(q_0, s_0, u, v) \in F$.

Исследуемая задача состоит в том, чтобы для заданной полугруппы (Σ, S) определить 2-DM, описывающую эту полугруппу.

Рассмотрим полугруппу с расширенным множеством образующих $\Sigma \cup \overline{\Sigma}$, где $\overline{\Sigma} = \{\bar{a} : a \in \Sigma\}$, и множеством определяющих тождеств $\overline{S} = S \cup \{\bar{u} = \bar{v} : u = v \in S\} \cup \{\bar{a}a = e : a \in \Sigma\}$, где запись $\bar{h}$ для слова $h = a_1a_2\dots a_n \in \Sigma^*$ обозначает слово $\bar{a}_n \dots \bar{a}_2\bar{a}_1$.

Воспользуемся записями $N(h, \Sigma)$ и $N(h, \overline{\Sigma})$ для обозначения количества символов алфавитов Σ и $\overline{\Sigma}$, соответственно, в слове h, $h \in \Sigma \cup \overline{\Sigma}$, и для каждого элемента x полугруппы $(\Sigma \cup \overline{\Sigma}, \overline{S})$ положим

$$K(x, \Sigma) = \min\Big(N(h, \Sigma) \ : \ h \in (\Sigma \cup \overline{\Sigma})^*, \ h =_{\Sigma \cup \overline{\Sigma}, \overline{S}} x\Big).$$

Аналогичным образом определяется значение $K(x, \overline{\Sigma})$.

Тогда в качестве двухленточной машины, предназначенной для описания полугруппы (Σ, S), предлагается использовать следующую 2-DM $A_{(\Sigma,S)} = (Q_1, Q_2, Mem, \Delta, R, q_0, s_0, F)$, где

- $Q_1 = \{q_0^1, q_1^1\}$;
- $Q_2 = \{q_1^2\}$;
- множество состояний памяти Mem состоит из всех элементов полугруппы $(\Sigma \cup \overline{\Sigma}, \overline{S})$, представимых в виде $\bar{h}_1 h_2$, где $h_1, h_2 \in \Sigma^*$;
- функцию переходов Δ можно описать следующим образом:
  - $\Delta(q_0^1, e, a) = q_1^2$,
  - $\Delta(q_1^1, x, a) = q_1^1$, если $K(x \circ a, \overline{\Sigma}) > 0$,
  - $\Delta(q_1^1, x, a) = q_1^2$, если $K(x \circ a, \overline{\Sigma}) = 0$ и $K(x \circ a, \Sigma) > 0$,
  - $\Delta(q_1^1, x, a) = q_0^1$, если $K(x \circ a, \overline{\Sigma}) = K(x \circ a, \Sigma) = 0$,
  - $\Delta(q_1^2, x, a) = q_1^2$, если $K(\bar{a} \circ x, \Sigma) > 0$,
  - $\Delta(q_1^2, x, a) = q_1^1$, если $K(\bar{a} \circ x, \Sigma) = 0$ и $K(\bar{a} \circ x, \overline{\Sigma}) > 0$,

— $\Delta(q_1^2, x, a) = q_0^1$, если $K(\bar{a} \circ x, \Sigma) = K(\bar{a} \circ x, \overline{\Sigma}) = 0$;
— функцию преобразования памяти R можно описать следующим образом:
— $R(q_0^1, e, a) = a$,
— $R(q_1^1, x, a) = x \circ a$,
— $R(q_1^2, x, a) = \bar{a} \circ x$;
— $q_0 = q_0^1$;
— $s_0 = e$;
— $F = \{q_0^1\}$.

Теорема 3. *Если для произвольного конечного множества образующих Σ и множества тождеств S полугруппа (Σ, S) упорядочена и обладает свойством левого сокращения, то 2-DM $A_{(\Sigma,S)}$ описывает указанную полугруппу.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00277.

Список литературы

[1] *Глушков В. М., Летичевский А. А.* Теория дискретных преобразователей // Избранные вопросы алгебры и логики. — Новосибирск: Наука, 1973. — С. 5–39.

[2] *Подловченко Р. И.* Полугрупповые модели программ // Программирование. — 1981. — № 4. — С. 3–13.

[3] *Захаров В. А.* Быстрые алгоритмы разрешения эквивалентности пропозициональных операторных программ на упорядоченных полугрупповых шкалах // Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 1999. — № 3. — С. 29–35.

[4] *Летичевский А. А.* Эквивалентность автоматов относительно полугрупп с сокращением // Проблемы кибернетики. Вып.27. — М.: Наука, 1973. — С. 195–212.

[5] *Подловченко Р. И., Захаров В. А.* Полиномиальный по сложности алгоритм, распознающий коммутативную эквивалентность схем программ // Доклады РАН. — 1998. — Т. 362, № 6. — С. 27–31.

[6] *Захаров В. А.* Проверка эквивалентности программ при помощи двухленточных автоматов // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 4. — С. 39–48.

[7] *Подымов В. В., Захаров В. А.* Об одной полугрупповой модели программ, определяемой при помощи двухленточных автоматов // Научн. ведомости Белгородского гос. ун-та. Серия История. Политология. Экономика. Информатика. — 2010. — Вып. 14/1, №7. — С. 94–101.

О мощности компонент корреляционно-иммунных функций, совершенных раскрасок и кодов

В. Н. Потапов

vpotapov@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Введение

Обозначим через E^n множество упорядоченных двоичных наборов (вершин) длины n. Булев n-куб E^n естественным образом наделяется структурой векторного пространства над полем $GF(2)$. Пусть $S \subset E^n$, через χ^S будем обозначать характеристическую функцию множества S. Функция χ^S называется *корреляционно-иммунной порядка* $n - m$, если для любой грани размерности m её пересечения с множеством S имеют одинаковую мощность.

Сферой радиуса 1 с центром в вершине x называется множество $F(x) = \{y \in E^n : d(x, y) = 1\}$, где d — расстояние Хэмминга. *Совершенной раскраской* булева n-куба в k цветов называется отображение $Col : E^n \to \{1, \dots, k\}$, удовлетворяющее следующему условию: мощность пересечения $|Col^{-1}(i) \cap F(x)|$ зависит только от цветов i и $Col(x)$, но не от вершины $x \in E^n$. Каждой совершенной раскраске соответствует матрица параметров $A = \{a_{ij}\}$, где a_{ij} — число вершин цвета j в сфере радиуса 1 с центром в вершине цвета i. В дальнейшем речь пойдёт только о раскрасках в два цвета, причём для удобства изложения будем считать, что множество цветов есть $\{0, 1\}$. В этом случае функция Col является булевозначной и $Col = \chi^S$, где S — множество вершин цвета 1. *Совершенным кодом* с расстоянием 3 называется подмножество булева n-куба, пересекающееся с любым шаром радиуса 1 ровно по одной вершине. Нетрудно видеть, что характеристической функцией совершенного кода $C \subset E^n$ является совершенная раскраска χ^C с матрицей параметров вида $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$. *Компонентой* совершенной раскраски χ^S булева n-куба E^n называется такое множество $K \subset S$, что для некоторого множества $K' \subset E^n \setminus K$ функция $\chi^{(S \cap K') \setminus K}$ является совершенной раскраской с теми же параметрами, что и χ^S. Проще говоря, подмножество $K \subset S$ можно заменить на K' без изменения свойств раскраски χ^S. Аналогично определяются компоненты совершенных кодов и корреляционно-иммунных функций.

Вопрос о спектре мощностей компонент совершенных кодов был поставлен в статье [1] и рассматривался, в частности, в работах [2, 3, 4]. Минимальная мощность компоненты совершенного кода была известна ранее. Однако, проблема существования компонент мощности *промежуточной* между минимальной и удвоенной минимальной оставалась мало исследованной. Ниже на основе результатов статьи [5] установлены необходимые условия на промежуточную мощность компонент и при некоторых параметрах построены совершенные раскраски и корреляционно-иммунные функции с компонентами промежуточной мощности.

Основные результаты

Каждая булева функция $f : E^n \to E$ может быть представлена в виде *многочлена Жегалкина. Алгебраической степенью* $\deg(f)$ булевой функции f называется максимальная степень слагаемого в её многочлене Жегалкина. Алгебраической степенью множества $S \subset E^n$ будем называть алгебраическую степень его характеристической функции.

Справедливо, следующее

Утверждение 1 (см. [8]). *Пусть $f : E^n \to E$ — корреляционно-иммунная функция порядка $n - m$. Тогда $\deg(f) \leqslant m$ (неравенство Зигенталлера); алгебраическая степень компоненты корреляционно-иммунной функции f не превосходит m.*

Поскольку совершенная раскраска с матрицей параметров

$$\begin{pmatrix} n-b & b \\ c & n-c \end{pmatrix} \tag{1}$$

является корреляционно-иммунной функцией порядка $\frac{b+c}{2} - 1$ (см., например, [6, 7, 8]), а совершенный код длины n является корреляционно-иммунной функцией порядка $\frac{n-1}{2}$, из утверждения 1 вытекают (см. [9]) следствия.

Следствие 1. *Пусть $f : E^n \to E$ — совершенная раскраска с матрицей параметров (1). Тогда $\deg(f) \leqslant n - \frac{b+c}{2} + 1$; алгебраическая степень компоненты совершенной раскраски f не превосходит $n - \frac{b+c}{2} + 1$.*

Следствие 2. *Пусть $C \subset E^n$ — совершенный код. Тогда $\deg(\chi^C) \leqslant \frac{n+1}{2}$; алгебраическая степень компоненты совершенного кода C не превосходит $\frac{n+1}{2}$.*

Булевы функции $f : E^n \to E$ можно рассматривать как элементы булева куба размерности 2^n. Множество булевых функций алгебраической степени не выше m называется кодом Рида — Маллера типа $\mathcal{R}(m, n)$ в E^{2^n}. В [10] рассмотрен весовой спектр кодов Рида — Маллера и, в частности, имеются следующие утверждения.

Утверждение 2. [10, глава 13, теоремы 3 и 5] *Для любой булевой функции $f = \chi^S$ справедливо неравенство $|S| \geqslant 2^{n-\deg(f)}$. Если $|S| = 2^{n-\deg(f)}$, то множество S — линейный код.*

Утверждение 3. [5], [10, глава 15, теорема 10] *Пусть $f = \chi^S$ — булева функция в E^n, $\deg(f) \geqslant 2$ и $2^{n-\deg(f)+1} > |S| \geqslant 2^{n-\deg(f)}$. Тогда $|S| = 2^{n-\deg(f)+1} - 2^{n-\deg(f)+1-p}$, где $p \in \{1, \dots, \mu\}$, где $\mu = \max\{(n - \deg(f) + 2)/2, \min\{n - \deg(f), \deg(f)\}\}$.*

Из утверждений 1–3 и следствий 1–2 получаем

Следствие 3. *Пусть множество $S \subset E^n$ есть компонента корреляционно-иммунной функции порядка $n - m$ и $2^{n-m+1} > |S|$. Тогда $|S| = 2^{n-m+1} - 2^p$, где $p \in \{1, \dots, n - m\}$. Более того, компонента мощности 2^{n-m} является линейным кодом.*

Следствие 4. *Пусть f — совершенная раскраска с матрицей параметров $\begin{pmatrix} n-b & b \\ c & n-c \end{pmatrix}$, множество $S \subset E^n$ есть компонента f и $2^{\frac{b+c}{2}} > |S|$. Тогда $|S| = 2^{\frac{b+c}{2}} - 2^p$, где $p \in \{1, \dots, \frac{b+c}{2} - 1\}$. Более того, компонента мощности $2^{\frac{b+c}{2}-1}$ является линейным кодом.*

Следствие 5. *Пусть множество $S \subset E^n$ есть компонента совершенного кода $C \subset E^n$ и $2^{\frac{n+1}{2}} > |S|$. Тогда $|S| = 2^{\frac{n+1}{2}} - 2^p$, где $p \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$. Более того, компонента мощности $2^{\frac{n-1}{2}}$ является линейным кодом.*

Теорема 4. *Пусть $p \in \{0, \dots, km-1\}$, $n = (2^s-1)k$, $m = 2^{s-2}$, $s \geqslant 2$, $km \geqslant 3$. Существует совершенная раскраска f с матрицей параметров $\begin{pmatrix} k & k(2^s-2) \\ 2k & k(2^s-3) \end{pmatrix}$, имеющая компоненту мощности $(2^{km} - 2^p)2^{km}$.*

При $k = 1$ такую совершенную раскраску рассматривают как двукратный совершенный код. Из теоремы 4, подставляя $m = 1$, получаем

Следствие 6. *Пусть $n = 3k + n'$, $r = 2k + n' - 1$, $k \geqslant 3$. Для любого $p \in \{0, \dots, k-1\}$ найдётся корреляционно-иммунная функция $g : E^{n+n'} \to E$ порядка r, имеющая компоненту мощности $(2^k - 2^p)2^{k+n'}$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00424, 10-01-00616).

Список литературы

[1] *Etzion T., Vardy A.* Perfect binary codes and tilings: problems and solutions // SIAM J. Discrete Math. — 1998. — V. 11, № 2. — P. 205–223.

[2] *Avgustinovich S. V., Lobstein A. C., Soloveva F. I.* Intersection matrices for partitions by binary perfect codes // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2001. — V. 47, № 4. — P. 1621–1624.

[3] *Avgustinovich S. V., Heden O., Soloveva F. I.* On intersection problem for perfect binary codes // Des. Codes Cryptogr. — 2006. — V. 39, № 3. — P. 317–322.

[4] *Heden O., Soloveva F. I., Mogilnykh I. Yu.* Intersections of perfect binary codes // Proc. of IEEE Int. Conf. on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering. — Piscataway: IEEE, 2010. — P. 50–51.

[5] *Kasami T., Tokura N.* On the weight structure of Reed—Muller codes // IEEE Trans. Inform. Theory — 1970. — V. 16. — P. 752–759.

[6] *Фон-Дер-Флаасс Д. Г.* Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сибирский математический журнал — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 923–930.

[7] *Fon-Der-Flaass D. G.* A bound of correlation immunity // Siberian Electronic Mathematical Reports — 2007. — V. 4. — P. 133–135.

[8] *Таранников Ю. В.* О корреляционно-иммунных и устойчивых булевых функциях // Математические вопросы кибернетики — Выпуск 11, М.: Физматлит, 2002. — С. 91–148.

[9] *Потапов В. Н.* О совершенных раскрасках булева n-куба и корреляционно-иммунных функциях малой плотности // Сибирские электронные математические известия — 2010. — Т. 7. — С. 372–382.

[10] *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.

Алгебры языков, представимых в размеченных графах

Е. А. Пряничникова

pryanichnikovae@gmail.com

Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Донецк

Вводится система операций на формальных языках, которая, в частности, может использоваться в биологии, генетике, а также ДНК-вычислениях. Для этой системы операций вводится понятие регулярных выражений. Определяется понятие языка, допустимого в конечном автомате (в графе с отмеченными вершинами). Доказано, что язык L допустим в конечном автомате (в графе с отмеченными вершинами) тогда и только тогда, когда он описывается регулярным выражением во введенной системе операций.

Основные определения

Пусть X — конечный алфавит, X^* — множество всех слов конечной длины в алфавите X, X^+ — множество всех непустых слов конечной длины в алфавите X, X^n — множество всех слов длины n в алфавите X, $X^{\geqslant n}$ — множество всех слов конечной длины в алфавите X, длина которых больше или равна n , 2^{X^*} — множество всех языков в алфавите X. Обозначим пустое множество через $\varnothing$, пустое слово через λ. Конкатенацию двух слов $u \in X^+$ и $v \in X^+$ обозначим uv. Конкатенацию двух языков $L, R \in 2^{X^+}$ обозначим через $L \cdot R$ или LR и определим как $L \cdot R = \{uv | u \in L, v \in R\}$.

Определим на множестве X^* частичную бинарную операцию $\overset{n}{\circ}$ склеивания двух слов с параметром n следующим образом: для всех $w_1, w_2 \in X^*$

$$w_1 \overset{n}{\circ} w_2 = \begin{cases} xyz, & \text{если } w_1 = xy,\ w_2 = yz,\ y \in X^n; \\ \text{не определено}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае когда $n = 0$, введенная операция совпадает с операцией конкатенации слов.

Введем на языках L, $R \subseteq X^*$ следующие операции:

1) $L \cup R = \{w | w \in L \text{ или } w \in R\}$;

2) $L \overset{n}{\circ} R = \{w_1 \overset{n}{\circ} w_2 | w_1 \in L$ и $w_2 \in R\}$;
3) $L^{\overset{n}{+}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$, где $L^1 = L$; $L^{i+1} = L^i \overset{n}{\circ} L$ для всех $i \geqslant 1$;
4) $L^{\overset{n}{*}} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, где $L^0 = X^n$; $L^{i+1} = L^i \overset{n}{\circ} L$ для всех $i \geqslant 0$.

Введенные операции на формальных языках, в частности, могут использоваться в биологии, генетике, ДНК-вычислениях [1].

Операция $\overset{n}{\circ}$ ассоциативна при любом n, то есть $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ})$ и $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ})$ — полугруппы. Нейтральный элемент по операции $\overset{n}{\circ}$ существует тогда и только тогда, когда она определена на множестве языков, в которых нет слов с длиной меньше n. Если нейтральный элемент существует, то он равен X^n. Таким образом, полугруппа $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ})$ является моноидом только при $n = 0$.

Рассмотрим два семейства алгебр $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{+}, \varnothing)$ и $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$.

Все алгебры $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$ являются полукольцами. Алгебра $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{+}, \varnothing)$ будет иметь единицу по операции $\overset{n}{\circ}$ только в случае, когда $n = 0$ и операция $\overset{n}{\circ}$ совпадает с конкатенацией, а рассматриваемая алгебра является алгеброй регулярных языков. Во всех остальных случаях эти алгебры не будут полукольцами.

Регулярные выражения в алгебре $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$ определим рекурсивно следующим образом:

1) $\varnothing$ является регулярным выражением и представляет язык $L(\varnothing) = \varnothing$;
2) x является регулярным выражением и представляет язык $L(x) = \{x\}$ для всех $x \in X^n \cup X^{n+1}$;
3) если R и Q — регулярные выражения, представляющие языки $L(R)$ и $L(Q)$ соответственно, то выражения $(R \overset{n}{\circ} Q)$, $(R \cup Q)$, $(R^{\overset{n}{*}})$ также являются регулярными, причем $L(R \overset{n}{\circ} Q) = L(R) \overset{n}{\circ} L(Q)$, $L(R \cup Q) = L(R) \cup L(Q)$, $L(R^{\overset{n}{*}}) = (L(R))^{\overset{n}{*}}$.

Регулярные выражения в алгебре $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{+}, \varnothing)$ определим следующим образом:

1) $\varnothing$ является регулярным выражением и представляет язык $L(\varnothing) = \varnothing$;

2) x является регулярным выражением и представляет язык $L(x) = \{x\}$ для всех $x \in \bigcup\limits_{0\leqslant i\leqslant n+1} X^i$;
3) если R и Q — регулярные выражения, представляющие языки $L(R)$ и $L(Q)$ соответственно, то выражения $(R\overset{n}{\circ}Q)$, $(R\cup Q)$, $(R^{\overset{n}{+}})$ также являются регулярными, причем $L(R\overset{n}{\circ}Q) = L(R)\overset{n}{\circ}L(Q)$, $L(R\cup Q) = L(R)\cup L(Q)$, $L(R^{\overset{n}{+}}) = (L(R))^{\overset{n}{+}}$.

Графом с отмеченными дугами (конечным автоматом) назовем четверку $G = (Q, E, X, \mu)$, где Q — конечное множество вершин, $\mid Q \mid= n$, $E \subseteq Q \times Q$ — множество дуг, X — множество отметок, $\mu : E \to X$ — функция отметок дуг.

Графом с отмеченными вершинами назовем четверку $G = (Q, E, X, \mu)$, где Q — конечное множество вершин, $|Q| = n$, $E \subseteq Q\times Q$ — множество дуг, X — множество отметок вершин, $\mu : Q \to X$ — функция отметок вершин.

Пусть $I \subseteq Q$ — множество начальных вершин графа, $F \subseteq Q$ — множество финальных вершин. Множество отметок всех путей, начальной вершиной которых является вершина q_i, а конечная вершина $q_k \in F$, назовем языком, порожденным вершиной q_i. Отметки всех путей в графе G, начальные вершины которых принадлежат множеству I, а конечные — множеству F, назовем языком, допускаемым графом G, и обозначим $L(G)$.

В теории конечных автоматов одним из важнейших результатов является теорема Клини, в которой утверждается, что класс языков, распознаваемых конечными автоматами, совпадает с классом рациональных языков, представимых регулярными выражениями алгебры Клини [2]. Основная цель данной работы — доказать аналогичную теорему для более широкого класса размеченных графов и алгебр.

Основные результаты

Теорема 1. *Язык $L \subseteq X^*$ допустим в конечном автомате (в графе с отмеченными вершинами) тогда и только тогда, когда он описывается регулярным выражением любой алгебры из рассматриваемых двух семейств $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{+}, \varnothing)$ и $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$.*

Эта теорема в некотором смысле аналогична широко известной теореме Клини для конечных автоматов. В случае когда $n = 0$ и рассматриваются только графы с отмеченными дугами, теорема 1 совпадает с теоремой Клини. На основе доказательства теоремы разработаны методы анализа и синтеза языков, представимых в графах с отмеченными вершинами.

Поскольку для описания одного и того же класса графов можно использовать различные алгебры, представляет интерес вопрос о связи таких алгебр между собой.

Теорема 2. *Для двух полуколец* $(2^{X^{\geqslant n_1}}, \overset{n_1}{\circ}, \cup, \overset{n_1}{*}, X_1^n, \varnothing)$ *и* $(2^{X^{\geqslant n_2}}, \overset{n_2}{\circ}, \cup, \overset{n_2}{*}, X_2^n, \varnothing)$ *в случае, когда* $n_1 < n_2$ *, существует такое отображение* $\varphi : 2^{X^{\geqslant n_1}} \to 2^{X^{\geqslant n_2}}$*, которое является гомоморфизмом. Если* $n_2 > n_1$*, то гомоморфизма нет.*

Рассматриваемое в теореме отображение является сюръекцией, поэтому в случае, когда $n_1 < n_2$, полукольцо $(2^{X^{\geqslant n_1}}, \overset{n_1}{\circ}, \cup, \overset{n_1}{*}, X_1^n, \varnothing)$ изоморфно вложимо в полукольцо $(2^{X^{\geqslant n_2}}, \overset{n_2}{\circ}, \cup, \overset{n_2}{*}, X_2^n, \varnothing)$, причем образ φ является подполукольцом в $(2^{X^{\geqslant n_2}}, \overset{n_2}{\circ}, \cup, \overset{n_2}{*}, X_2^n, \varnothing)$, а значит, все рассматриваемые полукольца входят в одно квазимногообразие, в которое входит алгебра регулярных языков.

Теорема 3. *Пусть* $\Re(n)$ *— множество всех регулярных выражений алгебры* $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$. *Если* $n_1 < n_2$, *то существует такое отображение* $\psi : \Re(n_1) \to \Re(n_2)$, *которое сохраняет язык регулярного выражения, т. е. если* r *— регулярное выражение алгебры* $(2^{X^{\geqslant n_1}}, \overset{n_1}{\circ}, \cup, \overset{n_1}{*}, X_1^n, \varnothing)$, $L(r)$ *— язык, представляемый этим регулярным выражением, то* $\psi(r)$ *— это регулярное выражение алгебры* $(2^{X^{\geqslant n_2}}, \overset{n_2}{\circ}, \cup, \overset{n_2}{*}, X_2^n, \varnothing)$ *и* $L(\psi(r)) = L(r)$.

Заключение

В данной работе исследованы основные свойства семейства алгебр языков, допустимых в размеченных графах, найдена алгебраическая характеризация языков, представимых регулярными выражениями этих алгебр, разработаны методы анализа и синтеза рассматриваемых языков.

Список литературы

[1] *Anderson J.* Automata Theory with Modern Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[2] *Капитонова Ю. В., Летичевский А. А.* Математическая теория проектирования вычислительных систем. — М.: Наука, 1988.

Структурные свойства комбинаторных систем, описываемых субмодулярными функциями

А. М. Ревякин

Arevyakin@mail.ru

Московский государственный институт электронной техники

Пусть $P(S)$ — множество всех подмножеств конечного множества S. Система $\mathcal{I} \subseteq P(S)$ подмножеств из S называется матроидом $M = (S, \mathcal{I})$, а множества из $\mathcal{I}$ — независимыми, если выполняются следующие условия: (i1) $\oslash \in \mathcal{I}$; (i2) если $A \subseteq B$ и $B \in \mathcal{I}$, то $A \in \mathcal{I}$; (i3) если $A, B \in \mathcal{I}$ и $|A| > |B|$, то найдется $a \in A \setminus B$, такое, что $B \cup \{a\} \in \mathcal{I}$.

Ранговой функцией матроида M на множестве S называется целочисленная функция $r(A)$, определенная для всех $A \subseteq S$, такая, что $r(A) = \max\{|X| : X \subseteq A \text{ и } X \in \mathcal{I}\}$.

Пара (S, r), где r — целочисленная функция (ранг), определенная на подмножествах конечного множества S, образует матроид, если для всех $A, B \subseteq S$ и любых $a, b \in S$ выполняются либо свойства: (r1) $0 \leqslant r(A) \leqslant |A|$; (r2) если $A \subseteq B$, то $r(A) \leqslant r(B)$; (r3) $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leqslant r(A) + r(B)$; либо: (r4) $r(\varnothing) = 0$; (r5) $r(A) \leqslant r(A \cup \{a\}) \leqslant r(A) + 1$; (r6) если $r(A) = r(A \cup \{a\}) = r(A \cup \{b\})$, то $r(A) = r(A \cup \{a, b\})$. При этом семейство $\mathcal{I}$ подмножеств множества S, для которых $r(A) = |A|$, образует матроид $(S, \mathcal{I})$ с ранговой функцией r.

Конечное множество S с оператором замыкания $A \to \overline{A}$, определенным для всех $A \subseteq S$ (т.е. (cl1) $A \subseteq \overline{A}$ для всех $A \subseteq S$; (cl2) если $A, B \subseteq S$ и $A \subseteq B$, то $\overline{A} \subseteq \overline{B}$; (cl3) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ для всех $A \subseteq S$) и удовлетворяющим свойству замены: (cl4) для любых $x, y \in S$ и всякого $A \subseteq S$ из $y \in \overline{A \cup \{x\}}$ и $y \notin \overline{A}$ следует, что $x \in \overline{A \cup \{y\}}$, образует матроид $(S, \overline{})$. Причем семейство $\mathcal{I}$ подмножеств $A \subseteq S$, таких, что из $x \in A$ следует, что $x \notin A \setminus \{x\}$, образует матроид $M = (S, \mathcal{I})$.

Если $\overline{A} = A$, то A называется замкнутым (или поверхностью) в M. Пара $(S, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств (поверхностей) из S, образует матроид, если (f1) $S \in \mathcal{F}$; (f2) если $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, то

$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$; (f3) если $F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$ и F_i покрывает F (т. е. $F_i \supseteq F$ и не существует поверхности $F' \in \mathcal{F}$ такой, что $F_i \supset F' \supset F$) для всех $i, i = 1, 2, \ldots, k$, то $\{F_1 \setminus F, \ldots, F_k \setminus F\}$ — разбиение множества $S \setminus F$. Причем семейство $\mathcal{I}$ подмножеств $A \subseteq S$, таких, что для всех $a \in A$ найдется подмножество $F \in \mathcal{F}$, для которого $A \setminus F = \{a\}$, образует матроид $(S, \mathcal{I})$.

Если $G = (S, \overline{})$ — матроид и $\mathcal{L}(G)$ — множество всех его поверхностей, упорядоченных по включению, то $\mathcal{L}(G)$ является геометрической решеткой (см. [1, 2]), в которой $A \vee B = \overline{A \cup B}$ и $A \wedge B = A \cap B$, для всех $A, B \in \mathcal{L}(G)$.

Пусть K — дистрибутивная решетка с 0 (нулем) и 1 (единицей), где $x \vee y = \sup\{x; y\}$, $x \wedge y = \inf\{x; y\}$ для всех $x, y \in K$. Например, таковой является семейство всех подмножеств конечного множества S с операциями объединения и пересечения. Действительная функция μ, определенная на K, называется субмодулярной, если для всех x, y из K выполняется неравенство: $\mu(x) + \mu(y) \geqslant \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y)$. Если для всех x, y из K справедливо равенство: $\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y)$, то функция μ называется модулярной.

Субмодулярными функциями являются ранговые функции матроидов и полиматроидов, мощность множества, а модулярными — размерности подпространств в векторных пространствах и в проективных геометриях. Комбинаторные системы, описываемые в терминах субмодулярных функций, рассмотрены в [3, 4, 5].

Подрешетка L дистрибутивной решетки K называется μ-остовом, если субмодулярная функция μ, определенная на дистрибутивной решетке K, будет модулярной на L.

Пусть $\mu(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mu_i(x)$, где $\mu_i(x)$ — субмодулярные функции на дистрибутивной решетке K, c_i — положительные действительные коэффициенты и $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\mu(x)$ — также субмодулярная функция на K.

Рассмотрим задачу минимизации субмодулярной функции $\mu(x)$ на K. В таком виде, например, можно сформулировать задачи объединения и пересечения матроидов. Действительно, если (S, r_i) — матроиды на множестве S с ранговыми функциями r_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, то ранг объединения матроидов равен $\min\limits_{X\subseteq S}\{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(X)+|S\setminus X|\}$, а размер максимального независимого множества первых двух матроидов — $\min\limits_{X\subseteq S}\{r_1(X)+r_2(S\setminus X)\}$.

Теорема 1. *Семейство L всех элементов дистрибутивной решетки K, на которых субмодулярная функция μ достигает своего минимума, образует μ-остов решетки K. Более того, подрешетка L является также и μ_i-остовом решетки K для всех $i, i=1,2,\ldots,n$.*

Полученный остов L зависит не только от субмодулярных функций μ_i, но и от коэффициентов c_i. Обозначим остов L через $L(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, подчеркивая его зависимость от коэффициентов $c_1,c_2,\ldots,c_n$. Поскольку для всех $\lambda>0$ выполнено $L(\lambda\cdot c_1,\ldots,\lambda\cdot c_n)=L(c_1,\ldots,c_n)$, остов L можно рассматривать как функцию на $n-1$-мерном симплексе S^{n-1} со значениями в семействе подрешеток дистрибутивной решетки K. В случае когда μ_i являются монотонными, можно детальнее охарактеризовать структуру этого комплекса.

Теорема 2. *Пусть $\mu_1,\ldots,\mu_p$ — неубывающие, $\mu_{p+1},\ldots,\mu_q$ — невозрастающие субмодулярные функции, а $c_i\geqslant c_i{}'$ для $i=1,2,\ldots,p$, $c_i\leqslant c_i'$ для $i=p+1,p+2,\ldots,q$ и $c_i=c_i'$ для $i=q+1,q+2,\ldots,n$. Тогда если $y\in L(c_1,\ldots,c_n)$ и $y'\in L(c_1',\ldots,c_n')$, то $y\wedge y'\in L(c_1,\ldots,c_n)$, $y\vee y'\in L(c_1',\ldots,c_n')$ и для всех $i, i=1,2,\ldots,n$, имеет место равенство $\mu_i(y)+\mu_i(y')=\mu_i(y\vee y')+\mu_i(y\wedge y')$.*

Два интервала $[x,y]$ и $[x',y']$ решетки L называются транспонированными, если $[x,y]=[b,a\vee b]$ и $[x',y']=[a\wedge b,a]$ для некоторых a и $b\in L$. Транспонированные интервалы модулярной решетки изоморфны. Скажем, что интервалы $[x,y]$ и $[x',y']$ являются проективными (обозначение: $[x,y]\sim[x',y']$), если найдется конечная последовательность интервалов $[x,y]$, $[x_1,y_1]$, …, $[x_N,y_N]$, $[x',y']$, в которой два любых соседних интервала транспонированы.

Теорема 3. *Максимальные цепи, соединяющие наименьший и наибольший элементы конечной модулярной решетки, имеют одинаковую длину. Если $a_0,a_1,\ldots,a_n$ и $b_0=a_0,b_1,\ldots,b_n=a_n$ — пара таких максимальных цепей, то существует перестановка σ индексов $\{1,2,\ldots,n\}$, такая, что $[a_{i-1},a_i]\sim[b_{\sigma(i)-1},b_{\sigma(i)}]$ для $i=1,2,\ldots,n$. Кроме того, если рассматриваемая решетка является дистрибутивной, то перестановка σ однозначно определена.*

Таким образом, $\mathcal{F} = \{[a_{i-1}, a_i], i = 1, 2, \ldots, n\}$ — семейство интервалов максимальной цепи $a_0, a_1, \ldots, a_n$ конечной дистрибутивной решетки однозначно определено с точностью до проективности. На $\mathcal{F}$ можно ввести отношение порядка $\leqslant$: $[x, y] \leqslant [z, w]$, если для каждой максимальной цепи $a_0, a_1, \ldots, a_n$ найдутся p и q, такие, что $p \leqslant q$, $[a_p, a_{p+1}] \sim [x, y]$ и $[a_q, a_{q+1}] \sim [z, w]$.

Пусть μ — субмодулярная функция на дистрибутивной решетке K с 0 и 1, L — подрешетка решетки K с наименьшим элементом a и наибольшим b, а $\mathcal{F} = \{[a_i, a_{i+1}], i = 1, 2, \ldots, n-1\}$, где $a = a_1, a_2, \ldots, a_n = b$ — произвольная максимальная цепь из a в b в подрешетке L. На каждом интервале $\mathcal{F}$ зададим функцию φ_i, где $i = 1, 2, \ldots, n-1$, положив $\varphi_i(x) = \mu(x) - \mu(a_i)$ для всех $x \in [a_i, a_{i+1}]$. Если $[0, a]$ и $[b, 1]$ в K не пусты, то положим $\varphi_0(x) = \mu(x)$ для всех $x \in [0, a]$ и $\varphi_n(x) = \mu(x) - \mu(b)$ для всех $x \in [b, 1]$. Аналогично определим функцию ${\varphi_i}'(x) = \mu(x) - \mu({a_i}')$ для другой максимальной цепи $a = {a_1}', {a_2}', \ldots, a'_n = b$ из a в b. Очевидно, что так определенные функции φ_i и ${\varphi_i}'$ являются субмодулярными.

В силу теоремы 3 найдется определенная перестановка σ индексов $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, такая, что $[a_i, a_{i+1}] \sim [a'_{\sigma(i)}, a'_{\sigma(i+1)}]$ для всех $i, i = 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть $\pi_i : [a_i, a_{i+1}] \to [a'_{\sigma(i)}, a'_{\sigma(i+1)}]$ — естественный изоморфизм, обусловленный проективностью интервалов максимальных цепей. Скажем, что определение «новой» субмодулярной функции φ_i не зависит от выбора максимальной цепи из a в b в подрешетке L дистрибутивной решетки K, если $\varphi_i(x) = \mu(x) - \mu(a_i) = \mu(\pi_i(x)) - \mu(a'_{\sigma(i)}) = \varphi'_{\sigma(i)}(\pi_i(x))$ для всех $x \in [a_i, a_{i+1}]$, где $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Теорема 4. *Пусть L — подрешетка конечной дистрибутивной решетки K, μ — субмодулярная функция на K. Тогда μ не зависит от выбора максимальной цепи в том и только в том случае, когда L является μ-остовом решетки K.*

Булевы интерпретации сформулированных теорем полезны при наличии эффективных алгоритмов решения задач комбинаторной оптимизации [6, 7, 8].

Список литературы

[1] *Биркгоф Г.* Теория решеток. — М.: Наука, 1984.

[2] *Гретцер Г.* Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982.

[3] *Nakamura M., Iri M.* Fine structures om matroid intersections and their applications // Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Tokyo. — 1979. — P. 996–999.

[4] *Nakamura M.* Boolean sublattices connected with minimization problem on matroids // Math. Program. — 1982. — V. 22, № 1. — P. 117–120.

[5] *Fujishige S.* Submodular systems and relate topics // Math.Programm. Study. — 1984. — V. 22. — P. 113–131.

[6] Theory of matroids / Ed. N. White. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.

[7] *Oxley J. G.* Matroid theory. — N.Y.: Oxford Univ. Press, 2006.

[8] *Revyakin A. M.* Matroids // J. Math. Sci. — 2002. — V. 108, № 1. — P. 71–130.

Синтез стратегий выбора объектов в линейной зоне обслуживания двух mobile-процессоров

М. Б. Резников, А. И. Цветков

mikerez@mail.ru, tze@bk.ru

Волжская государственная академия водного транспорта, Нижний Новгород

Исследуется проблема управления обслуживанием потока объектов в рабочей зоне двух mobile-процессоров. Особенности функционирования подобных систем содержательно поясним на примере сервисных предприятий внутреннего водного транспорта, в деятельности которых всё большее распространение получает технология технического обслуживания судов «на ходу», при транзитном прохождении ими зоны ответственности сервисного предприятия. В качестве обслуживающего выступает специализированное судно, предназначенное для выполнения одного или некоторого фиксированного набора работ. Любое транзитное судно при вхождении в зону ответственности сервисного предприятия может запросить один или два различных вида обслуживания, последовательно их получить или не быть обслуженным вовсе. Основная задача диспетчера сервисного предприятия (лица, принимающего решения — ЛПР) заключается в выработке и последующем обеспечении реализации наиболее рациональной стратегии управления обслуживанием судов в условиях конкретной эксплуатационной обстановки. С позиций повышения эффективности функционирования сервисного предприятия интерес представляют суммарные доходы, интегрированные по видам обслуживания. Именно для такого обобщения математической модели [1, 2] ниже формулируется бикритериальная задача синтеза стратегий обслуживания и предлагается алгоритм синтеза оптимально-компромиссных стратегий, реализующий в рамках концепции Парето [3] идеологию динамического программирования [4, 5].

Пусть имеется детерминированный поток объектов $O(n) = \{o(1), o(2), \ldots, o(n)\}$, которые поступают в линейную рабочую зону Ξ двух независимых и невзаимозаменяемых процессоров P^1 и P^2, осуществляющих однофазное обслуживание объектов в процессе их безостановочного прохождения зоны Ξ. В дискретной идеализации рабочую зону представляем как упорядоченную последовательность элементарных участков с номерами $1, 2, \ldots, s-1, s$. Поток $O(n)$ обладает свойством бинарности, т. е. состоит из двух подпотоков O_1 и O_s, таких, что $O_1 \bigcup O_s = O(n)$ и $O_1 \bigcap O_s = \varnothing$. Объекты подпотока O_1 входят в зону через граничный участок с номером 1 и проходят её, двигаясь равномерно по направлению к участку с номером s; объекты подпотока O_s поступают в рабочую зону через участок с номером s и проходят ее аналогично в противоположном направлении. Соответственно объекты подпотока O_1 покидают зону через участок с номером s, а объекты подпотока O_s выходят из рабочей зоны через участок с номером 1.

Каждый объект $o(i)$, $i = \overline{1, n}$, характеризуется следующими целочисленными параметрами: $t(i)$ — момент поступления в зону Ξ; $d(i)$ — указатель принадлежности подпотоку O_1 или O_s ($d(i) = 1$, если $o(i) \in O_1$, и $d(i) = 0$, если $o(i) \in O_s$); $\chi(i)$ — норма времени пребывания объекта на элементарном участке; $w^1(i)$ ($w^2(i)$) — доход за обслуживание процессором P^1 (P^2) объекта $o(i)$ ($w^1(i) > 0, w^2(i) > 0$); $\tau^1(i)$ ($\tau^2(i)$) — норма длительности обслуживания объекта $o(i)$ процессором $P^1(P^2)$ ($\tau^1(i) \geqslant 0, \tau^2(i) \geqslant 0$).

В пределах зоны Ξ процессоры P^1 и P^2 могут перемещаться как автономно с постоянной скоростью в любом направлении, так и в паре с обслуживаемым объектом со скоростью последнего. Возможен также простой процессора P^1 (P^2) в ожидании подхода объекта, назначенного на обслуживание.

Движение процессоров характеризуется следующими целочисленными параметрами: z^k — номер элементарного участка, на котором расположен процессор P^k в начальный момент времени $t = 0$ ($z_k \in \{1, 2, \ldots, s\}$); T_1^k (T_s^k) — норма времени пребывания процессора P^k на элементарном участке в процессе автономного движения в направлении от участка с номером 1 к участку с номером s (от участка с номером s к участку с номером 1), $k = 1, 2$.

Стратегию обслуживания объектов потока определим в виде пары $\{\rho^1, \rho^2\}$, где ρ^k ($k = 1, 2$) представляет собой $m(k)$-элементный ($m(k) \in [0, n]$) кортеж

$$\rho = \begin{cases} (\varphi_1^k, \psi_1^k), (\varphi_2^k, \psi_2^k), \ldots, (\varphi_{m(k)}^k, \psi_{m(k)}^k) & \text{при } m(k) \geqslant 1, \\ \varnothing & \text{при } m(k) = 0, \end{cases}$$

в записи которого использованы обозначения: φ_j^k — идентификатор объекта $o(\varphi_j^k)$, обслуживаемого процессором P^k в очередь j ($\varphi_j^k \in [1, n], j = \overline{1, m(k)}$); ψ_j^k — участок начала обслуживания объекта $o(\varphi_j^k)$ в очередь j ($\psi_j^k \in [1, l]$).

Соответственно при реализации этой стратегии суммарный доход за обслуживание объектов потока $O(n)$ процессором P^k определяется выражением $W^k(\rho) = \sum_{j=1}^{m(k)} w^k(\varphi_j^k)$, $k = 1, 2$.

Общий подход к исследованию проблемы принятия решений при наличии двух и более критериев оценки основывается на концепции Парето и в условиях рассматриваемой двухпроцессорной модели обслуживания приводит к задаче $\{\max\limits_{\rho\in\Omega}(W^1(\rho)),\ \max\limits_{\rho\in\Omega}(W^2(\rho))\}$.

Поток объектов и обслуживающие их процессоры будем рассматривать как дискретную систему, на каждом этапе j управления которой для свободного процессора формируется управление $\{\upsilon_j, \omega_j\}$, где υ_j — номер назначенного на обслуживание объекта, а ω_j — номер участка начала его обслуживания.

Состояние ξ рассматриваемой системы характеризуется значениями набора параметров $(t, l, p, r, \theta, \Lambda^1, \Lambda^2)$, где t — дискретное время; l — номер свободного процессора ($l \in [1, 2]$); p — участок зоны Ξ, на котором расположен процессор P^s ($p \in [1; l]$); r — номер объекта, обслуживание которого производит процессор $P^{(3-l)}$; θ — число тактов времени, оставшегося до завершения обслуживания процессором $P^{(3-l)}$ объекта $o(r)$; Λ^k — множество обслуженных на момент t объектов процессором P^k $(k = 1, 2)$. На начальном этапе $\xi_0 = (0, 1, z^1, z^2, 0, \varnothing, \varnothing)$.

Множество $\Phi(j)$ допустимых управлений $\{\upsilon_j, \omega_j\}$ на этапе обслуживания j может быть получено из кинематических соображений. Пусть $\mathbf{x}$ — вектор, Y — множество векторов той же размерности. Через $\mathbf{x} \oplus Y$ обозначим совокупность всех векторов $\mathbf{v}$, представимых как $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ $(\mathbf{y} \in Y)$. Обозначим через M множество векторов-оценок, а через $\mathit{eff}\,(M)$ — максимальное по включению подмножество недоминируемых в M векторов.

Если на множестве $\Phi(j)$ выбрано некоторое управление $\{\upsilon_j, \omega_j\}$, приводящее к оценке $(a_j^1, a_j^2) = ((2-l)w^1(\upsilon_j), (l-1)w^2(\upsilon_j))$ и переводящее систему в состояние ξ_{j+1}, то, выделив из совокупности оценок эффективные, получим множество $B(\xi_{j+1})$. Выбранное управление обеспечивает любую оценку из совокупности $[(a_j^1, a_j^2) \oplus B(\xi_{j+1})]$. Тогда

$$B(\xi_j) = \mathit{eff}\left\{ \bigcup_{\{\upsilon_j, \omega_j\} \in \Phi(\xi_j)} [(a_j^1, a_j^2) \oplus B(\xi_{j+1})] \right\}. \tag{1}$$

На последнем этапе обслуживания h, переводящем систему в состояние, когда последний объект покинул зону Ξ, имеет место соотношение

$$B(\xi_h) = \{(0, 0)\}. \tag{2}$$

Алгоритмическая реализация соотношений динамического программирования (1), (2) позволяет реализовать синтез полной совокупности эффективных оценок и соответствующих им стратегий обслуживания.

Для иллюстрации рассмотрен пример при следующих значениях параметров: $n = 10$, $s = 30$, $z^1 = 18$, $z^2 = 22$, $T_1^1 = 13$, $T_1^2 = 15$, $T_s^1 = 15$, $T_s^2 = 17$; $t(i)$, $i = \overline{1, n}$: 0, 300, 800, 1000, 1400, 1800, 1900, 2300, 2600, 2900; $\tau^1(i)$, $i = \overline{1, n}$: 100, 200, 200, 200, 300, 200, 200, 100, 200, 200; $\tau^2(i)$, $i = \overline{1, n}$: 300, 200, 200, 200, 100, 200, 100, 300, 200, 200; $d(i)$, $i = \overline{1, n}$: 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0; $\chi(i)$, $i = \overline{1, n}$: 14, 12, 13, 15, 12, 14, 14, 17, 13, 14; $w^1(i)$, $i = \overline{1, n}$: 205, 219, 121, 297, 221, 199, 88, 148, 253, 84; $w^2(i)$, $i = \overline{1, n}$: 300, 212, 171, 208, 120, 178, 126, 97, 281, 297.

Множество эффективных оценок $(W^1(\rho),\ W^2(\rho))$ имеет следующую структуру: (1036, 1176), (815, 1296), (1339, 579), (1373, 578), (1120, 879), (1450, 417), (1255, 876). В частности, решению задачи выбора стратегии, обеспечивающей максимальный доход (суммарно по обоим процессорам) [2], соответствуют первая из приведенных оценок $(1036 + 1176 = 2212)$, $\rho^1 = \{(1,14),(3,1),(5,1),(7,6),(8,25),(9,6)\}$, $\rho^2 = \{(2,1),(4,25),(6,25),(9,1),(10,26)\}$.

Список литературы

[1] *Коган Д. И., Федосенко Ю. С., Шеянов А. В.* Проблема синтеза оптимального расписания обслуживания бинарного потока объектов mobile-процессором // Труды III Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1998. — С. 43–46.

[2] *Резников М. Б., Федосенко Ю. С.* Задача оптимизации стратегии обслуживания бинарного потока объектов двумя mobile-процессорами в линейной рабочей зоне // Вестник Нижегородского университета. — 2007. № 4. — С. 104–109.

[3] *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007.

[4] *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.

[5] *Коган Д. И.* Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2005.

О гамильтоновых циклах в графах минимальных расстояний совершенных кодов

А. М. Романов

rom@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{F}_q^n$ размерности n над полем Галуа GF_q. Обозначим через $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ расстояние Хемминга между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Произвольное подмножество $\mathbb{C}_q^n$ векторов из пространства $\mathbb{F}_q^n$ называется *совершенным q-ичным кодом* длины n с кодовым расстоянием 3, если для каждого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n$ существует единственный вектор $\mathbf{c}$ из множества $\mathbb{C}_q^n$, такой, что $d(\mathbf{x},\mathbf{c}) \leqslant 1$. Известно, что совершенные q-ичные коды существуют только при $n = (q^m - 1)/(q-1)$, где m — любое натуральное число не меньше двух. Код называется *линейным*, если он образует линейное подпространство в пространстве $\mathbb{F}_q^n$. Линейные совершенные коды с кодовым расстоянием 3 называются *кодами Хемминга*. Далее q-ичный код Хемминга длины n будем обозначать через $\mathbb{H}_q^n$. Код называется *приведённым*, если он содержит вектор $\mathbf{0}$, состоящий из одних нулей. Далее мы будем рассматривать только приведённые коды. Пусть $\mathbb{C}$ — совершенный код с параметрами кода Хемминга. *Графом минимальных расстояний* кода $\mathbb{C}$ называется граф $G(\mathbb{C})$, множество вершин которого совпадает с $\mathbb{C}$, и вершины $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ графа $G(\mathbb{C})$ являются смежными тогда и только тогда, когда $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3$. Совершенный код $\mathbb{C}$ называется *гамильтоновым*, если его граф $G(\mathbb{C})$ минимальных расстояний содержит гамильтонов цикл.

В настоящей работе вопрос о существовании гамильтоновых нелинейных совершенных q-ичных кодов длины $N = qn + 1$ сведён к вопросу о существовании таких кодов длины n. При $q = 3$ для всех допустимых длин $n \geqslant 13$ предложены нелинейные совершенные q-ичные коды, графы минимальных расстояний которых содержат гамильтонов цикл. Ранее в [1] было конструктивно доказано существование гамильтоновых нелинейных двоичных кодов для всех допустимых длин $n \geqslant 15$. Остаётся открытым вопрос о существовании гамильтонова цикла в графе, образованном двумя средними слоями n-мерного двоичного куба нечётной размерности. Также не доказана гипотеза Ловаша, в которой утверждается, что из вершинной транзитивности связного графа следует существование в нём гамильтонова цикла.

Проверочная матрица кода Хемминга $\mathbb{H}_q^n$ длины $n = (q^m - 1)/(q-1)$ состоит из n попарно линейно независимых столбцов h_i, где $h_i^T \in \mathbb{F}_q^m$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Совокупность векторов $\mathbb{F}_n^q \setminus \{\mathbf{0}\}$ порождает конечную $(m-1)$-мерную проективную геометрию $PG_{m-1}(q)$ над полем Галуа GF_q. В этой геометрии точкам соответствуют столбцы проверочной матрицы кода Хемминга $\mathbb{H}_q^n$, и три точки i, j, k лежат на одной прямой, если соответствующие им столбцы h_i, h_j, h_k являются линейно зависимыми.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$. Тогда *носителем* вектора $\mathbf{x}$ называется множество $S(\mathbf{x}) = \{i : x_i \neq 0\}$. В коде $\mathbb{H}_q^n$ рассмотрим вектор $\mathbf{x}$, такой, что его носитель $S(\mathbf{x})$ является $(m-2)$-мерной гиперплоскостью в $PG_{m-1}(q)$. Обозначим через $H_{\mathbf{x}}$ множество всех векторов

$\mathbf{v} \in \mathbb{H}_q^n$, таких, что $S(\mathbf{v}) \subseteq S(\mathbf{x})$. Очевидно, что $H_{\mathbf{x}}$ образует в $\mathbb{H}_q^n$ подкод предыдущей размерности.

Сумму векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_n^q$ обозначим через $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — прямые, проходящие через точку i ($i \in \{1, \ldots, N\}$), в проективной геометрии $PG_m(q)$ и

$$R_i^N = \mathbb{H}_q^N(l_1) + \mathbb{H}_q^N(l_2) + \cdots + \mathbb{H}_q^N(l_n),$$

где $\mathbb{H}_q^N(l_p)$ — подкод кода $\mathbb{H}_q^N$, определяемый прямой l_p, $p = 1, 2, \ldots, n$, $N = qn + 1 = (q^{m+1} - 1)/(q - 1)$. Всевозможные смежные классы $R_i^N + \mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{H}_q^N$) представляют собой совокупность *i-компонент* кода Хемминга $\mathbb{H}_q^N$. Так как размерность подпространства $\mathbb{H}_q^N(l_p)$ равна $q - 1$, то размерность R_i^N равна $(q - 1)n = q^m - 1$ (см. [2, 3]). Из определения множества R_i^n следует, что минимально возможное расстояние между двумя различными векторами из R_i^n равно 3. Через $G(R_i^n)$ обозначим граф минимальных расстояний множества R_i^n.

Теорема 1. *При $m \geqslant 2$, $n = (q^m - 1)/(q - 1)$ граф $G(R_i^n)$ содержит гамильтонов цикл.*

Доказательство. Поскольку множество векторов из R_i^n образует в коде Хемминга $\mathbb{H}_q^n$ подпространство, порождённое всеми векторами веса 3 с ненулевой i-й координатой, то граф $G(R_i^n)$ минимальных расстояний содержит гамильтонов цикл. ∎

Перейдём далее к формулировке основной теоремы.

Теорема 2. *Пусть существует нелинейный совершенный q-ичный код $\mathbb{C}_q^n$ длины $n = (q^{m-1} - 1)/(q - 1)$, $m \geqslant 3$, граф минимальных расстояний которого содержит гамильтонов цикл. Тогда существует нелинейный q-ичный код $\mathbb{D}_q^N$ длины $N = qn + 1$, граф минимальных расстояний которого также содержит гамильтонов цикл.*

Доказательство. Рассмотрим конструкцию нелинейных совершенных q-ичных кодов, предложенную в [4, 5]. Эта конструкция является обобщением для q-ичных кодов конструкции из [6]. Будем считать, что столбцы проверочной матрицы кода Хемминга $\mathbb{H}_q^N$ упорядочены лексикографически. Векторы из пространства $\mathbb{F}_q^N$ также будем рассматривать как слова длины N над алфавитом $\{0, 1, \ldots, q-1\}$. Пусть

$$\mathbb{D}_q^N = \bigcup_{\mathbf{c} \in \mathbb{C}_q^n} \left(R_i^N + (\mathbf{c}|\mathbf{0})\right), \tag{1}$$

где вектор $\mathbf{0} \in \mathbb{F}_q^{(qn-n+1)}$, $i \geqslant n+1$ и вертикальная черта (|) обозначает конкатенацию. Формула (1) является некоторой интерпретацией конструкции из [4, 5]. Множество $\mathbb{D}_q^N$ является совершенным q-ичным кодом длины $N = qn + 1$ с кодовым расстоянием 3. Нелинейность кода $\mathbb{D}_q^N$ следует из формулы (1) и нелинейности кода $\mathbb{C}_q^n$. Гамильтоновость кода $\mathbb{D}_q^N$ следует из теоремы 1, формулы (1) и гамильтоновости кода $\mathbb{C}_q^n$. ∎

Далее, пусть $q = 3$. При $m = 2$ все совершенные троичные коды длины $n = 4$ эквивалентны коду Хемминга $\mathbb{H}_3^4$. Граф минимальных расстояний кода Хемминга $\mathbb{H}_3^4$ представляет собой полный граф, состоящий из 9 вершин. При $m = 3$ несложно при помощи свитчингов построить нелинейные совершенные троичные коды длины $n = 13$ и проверить при помощи компьютера, что графы минимальных расстояний этих кодов содержат гамильтонов цикл.

Теорема 3. *При $q = 3$, $m \geqslant 3$ для всех допустимых длин существуют нелинейные совершенные q-ичные коды, графы минимальных расстояний которых содержат гамильтонов цикл.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00997.

Список литературы

[1] *Романов А. М.* О комбинаторных кодах Грея с расстоянием 3 // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21, № 3. — С. 73–78.

[2] *Романов А. М.* О разбиениях q-ичных кодов Хемминга на непересекающиеся компоненты // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2004. — Т. 11, № 3. — С. 80–87.

[3] *Phelps K. T., Villanueva M.* Ranks of q-ary 1-perfect codes // Designs, Codes and Cryptogr. — 2002. — V. 27, № 1–2. — P. 139–144.

[4] *Schönheim J.* On linear and nonlinear single-error-correcting q-nary perfect codes // Inform. and Control. — 1968. — V. 12, № 1. — P. 23–26.

[5] *Lindström B.* On group and nongroup perfect codes in q symbols // Math. Scand. — 1969. — V. 25. — P. 149–158.

[6] *Васильев Ю. Л.* О негрупповых плотно упакованных кодах // Проблемы кибернетики. Вып. 8. — М.: Физматгиз, 1962.— С. 75–78.

О проверяющих тестах относительно перестановок переменных в булевых функциях

Д. С. Романов

romanov@cs.msu.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — набор значений булевых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Множество всех таких наборов $\tilde{\alpha}$ образует *n-мерный булев куб*, обозначаемый через E_2^n. *Весом* набора $\tilde{\alpha}$ называется число единиц в наборе $\tilde{\alpha}$ (обозначение: $\|\tilde{\alpha}\|$). Множество всех наборов из E_2^n, имеющих вес k, называется *k-м слоем булева куба* E_2^n и здесь обозначается через $E_2^n(k)$. Через $\rho(\tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}'')$ ($\tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}'' \in E_2^n$) будем обозначать *расстояние Хэмминга* между наборами (вес покоординатной суммы наборов $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\alpha}''$ по модулю 2).

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — булева функция, формально зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $N_f = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} \in E_2^n,\ f(\tilde{\alpha}) = 1\}$.

Пусть, далее, Γ — некоторая группа (относительно композиции) биекций на множестве E_2^n. При этом, если $\zeta \in \Gamma$ ($\zeta = \zeta(\tilde{x}^n): E_2^n \to E_2^n$ — взаимно однозначное отображение на множестве E_2^n), то ζ^{-1} — биекция, обратная к ζ. (Ясно, что в группе Γ содержится тождественное отображение $e: E_2^n \to E_2^n$, являющееся единицей группы). Обозначим через $f_\zeta(\tilde{x}^n)$ функцию, полученную из функции $f(\tilde{x}^n)$ действием отображения ζ (т. е. $f_\zeta(\tilde{x}^n) = f(\zeta(\tilde{x}^n))$, или, что то же самое, для любого $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ $f_\zeta(\tilde{\alpha}) = f(\zeta(\tilde{\alpha}))$). Через $\Gamma(f)$ обозначим множество всех булевых функций, полученных из f действием отображений $\zeta \in \Gamma$: $\Gamma(f) = \{f_\zeta \mid \zeta \in \Gamma\}$. Очевидно, что $f = f_e \in \Gamma(f)$.

Введем два важных частных случая для Γ. Обозначим через $\mathfrak{L}$ (соответственно, через $\mathfrak{S}$) группу Γ всех биекций на множестве E_2^n, порожденных всевозможными перестановками и отрицаниями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (соответственно, группу Γ всех биекций на множестве E_2^n, порожденных всевозможными перестановками переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Более формально, пусть $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ — подстановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ (лежащая в симметрической группе S_n), а $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ — набор из E_2^n. Для каждого набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n$ определим

$\zeta_\varphi(\tilde\alpha) = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n})$, $\zeta_{\tilde\varepsilon}(\tilde\alpha) = \tilde\alpha \oplus \tilde\varepsilon = (\alpha_1 \oplus \varepsilon_1, \alpha_2 \oplus \varepsilon_2, \ldots, \alpha_n \oplus \varepsilon_n)$. Таким образом определяются биекции ζ_φ и $\zeta_{\tilde\varepsilon}$. Группа $\mathfrak{L}$ порождена множеством биекций $\{\zeta_\varphi, \zeta_{\tilde\varepsilon} \mid \varphi \in S_n,\ \tilde\varepsilon \in E_2^n\}$, а группа $\mathfrak{S}$ — множеством биекций $\{\zeta_\varphi \mid \varphi \in S_n\}$. Множество булевых функций $\mathfrak{L}(f)$ называется *группой Лоренца функции* f.

Множество T наборов значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *проверяющим тестом относительно действия группы* Γ *над булевой функцией* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда любая не равная f функция $f_\zeta((\tilde x^n))$ из $\Gamma(f)$ отличается от f на множестве T. Число наборов в тесте T называется его *длиной* и обозначается $|T|$ или $l(T)$. Тест минимальной длины называется *минимальным*. Длину минимального проверяющего теста относительно действия группы Γ над булевой функцией $f(\tilde x^n)$ будем обозначать через $l_\Gamma^{\text{check}}(f(\tilde x^n))$. Введем функцию Шеннона длины проверяющего теста относительно действия группы Γ над булевой функцией:

$$l_\Gamma^{\text{check}}(n) = \max_{f(\tilde x^n) \in P_2^n} l_\Gamma^{\text{check}}(f(\tilde x^n)),$$

Отметим, что тест относительно действия группы $\mathfrak{S}$ над булевой функцией $f(\tilde x^n)$ называется *тестом относительно произвольных перестановок переменных булевой функции* $f(\tilde x^n)$, а тест относительно действия группы $\mathfrak{L}$ над булевой функцией $f(\tilde x^n)$ — *тестом относительно группы Лоренца булевой функции* $f(\tilde x^n)$.

Обобщим методику, предложенную Г. Р. Погосяном в [1] (см. также [2]) для оценивания сверху функции Шеннона длины проверяющего теста относительно произвольных инверсий переменных в булевой функции, на получение верхних оценок функции Шеннона $l_\Gamma^{\text{check}}(n)$ в случае произвольной группы Γ биекций на E_2^n.

Пусть $f(\tilde x^n)$ — булева функция, Γ — группа (относительно композиции) биекций на E_2^n, $A \subseteq E_2^n$ — некоторое (возможно, пустое) множество наборов, $\zeta \in \Gamma$. Обозначим через $\zeta(A)$ множество наборов $\{\zeta(\tilde\alpha) \mid \tilde\alpha \in A\}$, а через $\Phi(f, A)$ — множество всех функций из $\Gamma(f)$, неотличимых от f на множестве наборов $\zeta(A)$ (заметим, что $f = f_e \in \Phi(f, A)$). В частности, $\Phi(f, \varnothing) = \Gamma(f)$.

Лемма 1. *Пусть $f(\tilde x^n)$ — булева функция, Γ — группа (относительно композиции) биекций на E_2^n. Тогда для любого множества A_w ($A_w \subseteq E_2^n$) такого, что $\Phi(f, A_w) \setminus \Phi(f, E_2^n) \neq \varnothing$, существует множе-*

ство A_{w+1} $(A_{w+1} \subseteq E_2^n)$ *такое, что* $|A_{w+1}| = |A_w| + 1$ *и*

$$|\Phi(f, A_{w+1})| \leqslant 0,5 \cdot |\Phi(f, A_w)|.$$

Доказательство. Пусть $\Gamma(f) = \{f_{\zeta_i}(\tilde{x}^n) \mid i = \overline{1,t}\}$, причем булевы функции $f_{\zeta_1} = f_e = f$, $f_{\zeta_2}, \ldots, f_{\zeta_s}$ лежат в $\Phi(f, A_w)$, а булевы функции $f_{\zeta_{s+1}}, f_{\zeta_{s+2}}, \ldots, f_{\zeta_t}$ не лежат в $\Phi(f, A_w)$ $(1 \leqslant s \leqslant t)$. Так как $\Phi(f, A_w) \setminus \Phi(f, E_2^n) \neq \varnothing$, то найдутся набор $\tilde{\beta} \in E_2^n \setminus A_w$ и число $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ такие, что для функции $f_{\zeta_j}(\tilde{x}^n) \in \Phi(f, A_w)$ выполнено: $f_{\zeta_j}(\tilde{\beta}) \neq f(\tilde{\beta})$. Пусть среди чисел $f_{\zeta_1}(\tilde{\beta}), f_{\zeta_2}(\tilde{\beta}), \ldots, f_{\zeta_s}(\tilde{\beta})$ значение $f(\tilde{\beta})$ встречается q раз.

Случай 1. Если $q \leqslant 0,5s$, то, полагая $A_{w+1} = A_w \cup \{\tilde{\beta}\}$, получаем: $|\Phi(f, A_{w+1})| \leqslant 0,5 \cdot |\Phi(f, A_w)|$, что и требовалось.

Случай 2. Пусть теперь $0,5s < q \leqslant s$. Так как для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ $f_{\zeta_i(\zeta_j^{-1})}(\zeta_j(\tilde{x}^n)) = f_{\zeta_i}(\tilde{x}^n)$, то булевы функции $f_{\zeta_1(\zeta_j^{-1})}$, $f_{\zeta_2(\zeta_j^{-1})}, \ldots, f_{\zeta_{j-1}(\zeta_j^{-1})}, f_{\zeta_j(\zeta_j^{-1})} = f_e = f, f_{\zeta_{j+1}(\zeta_j^{-1})}, \ldots, f_{\zeta_s(\zeta_j^{-1})}$ лежат в $\Phi(f, \zeta_j(A_w))$, а булевы функции $f_{\zeta_{s+1}(\zeta_j^{-1})}, f_{\zeta_{s+2}(\zeta_j^{-1})}, \ldots, f_{\zeta_t(\zeta_j^{-1})}$ не лежат в $\Phi(f, \zeta_j(A_w))$ (при этом, разумеется, $\Gamma(f) = \{f_{\zeta_i(\zeta_j^{-1})}(\tilde{x}^n) \mid i = \overline{1,t}\}$). Заметим, что среди чисел $f_{\zeta_1(\zeta_j^{-1})}(\zeta_j(\tilde{\beta}))$, $f_{\zeta_2(\zeta_j^{-1})}(\zeta_j(\tilde{\beta})), \ldots$, $f_{\zeta_s(\zeta_j^{-1})}(\zeta_j(\tilde{\beta}))$ значение $f(\tilde{\beta})$ встречается q раз, и что

$$f(\zeta_j(\tilde{\beta})) = f_{\zeta_j(\zeta_j^{-1})}(\zeta_j(\tilde{\beta})) = f_{\zeta_j}(\zeta_j^{-1}(\zeta_j(\tilde{\beta}))) = f_{\zeta_j}(\tilde{\beta}) \neq f(\tilde{\beta}).$$

Значит, среди чисел $f_{\zeta_1(\zeta_j^{-1})}(\zeta_j(\tilde{\beta})), f_{\zeta_2(\zeta_j^{-1})}(\zeta_j(\tilde{\beta})), \ldots, f_{\zeta_s(\zeta_j^{-1})}(\zeta_j(\tilde{\beta}))$ значение $f(\zeta_j(\tilde{\beta}))$ встречается $s-q$ раз, то есть, менее чем в половине случаев. Следовательно, полагая $A_{w+1} = \zeta_j(A_w) \cup \{\zeta_j(\tilde{\beta})\}$, получаем и в этом случае, что $|\Phi(f, A_{w+1})| \leqslant 0,5 \cdot |\Phi(f, A_w)|$.

Лемма доказана. ∎

Теорема 2. *Пусть* $f(\tilde{x}^n)$ *— булева функция,* Γ *— группа (относительно композиции) биекций на* E_2^n*. Тогда*

$$l_\Gamma^{\text{check}}(f(\tilde{x}^n)) \leqslant \lceil \log_2 |\Gamma| \rceil.$$

Доказательство. Положим $A_0 = \varnothing$. Тогда $|\Phi(f, A_0)| = |\Gamma(f)| = |\Gamma|$. Применяя лемму 4 последовательно при $w = \overline{0, \lceil \log_2 |\Gamma| \rceil - 1}$, получим, что

$$\Phi(f, A_{\lceil \log_2 |\Gamma| \rceil}) \leqslant \frac{|\Gamma|}{2^{\lceil \log_2 |\Gamma| \rceil}} \leqslant 1,$$

откуда и следует утверждение теоремы. ∎

Из этой теоремы мгновенно вытекает

Теорема 3. *Пусть* Γ *— группа (относительно композиции) биекций на* E_2^n*. Тогда*

$$l_{\Gamma}^{\mathrm{check}}(n) \leqslant \lceil \log_2 |\Gamma| \rceil.$$

Применением формулы Стирлинга получаем

Теорема 4.

$$l_{\mathfrak{L}}^{\mathrm{check}}(n) \leqslant n \log_2 n(1+o(1)), \qquad l_{\mathfrak{S}}^{\mathrm{check}}(n) \leqslant n \log_2 n(1+o(1)).$$

В работе [3] было показано, что нижней оценкой для функции Шеннона длины проверяющего теста относительно единичных транспозиций переменных в булевой функции, а, следовательно, и для функций Шеннона $l_{\mathfrak{L}}^{\mathrm{check}}(n)$, $l_{\mathfrak{S}}^{\mathrm{check}}(n)$ является величина $0,25n \log_2 n(1+o(1))$. Значит, справедлива

Теорема 5.

$$l_{\mathfrak{L}}^{\mathrm{check}}(n) = \Theta(n \log_2 n), \qquad l_{\mathfrak{S}}^{\mathrm{check}}(n) = \Theta(n \log_2 n).$$

Отметим также в качестве замечания, что из приведенных утверждений выводится также, что порядок функции Шеннона длины условного диагностического теста (т. е. глубины дерева решений для задачи диагностики) относительно действия симметрической группы подстановок или же группы Лоренца на переменные булевой функции равен $\Theta(n \log_2 n)$.

Работа поддержана РФФИ (проекты № 09-01-00817, № 10-01-00768).

Список литературы

[1] *Погосян Г. Р.* О проверяющих тестах для логических схем. — М.: ВЦ АН СССР, 1982.

[2] *Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Долотова О. А., Погосян Г. Р.,* Теория тестирования логических устройств. — М.: Физматлит, 2006.

[3] *Глазунов Н. И., Горяшко А. П.* Об оценках длин обнаруживающих тестов для классов неконстантных неисправностей входов комбинационных схем // Изв. АН СССР. Сер. «Техническая кибернетика». — 1986. — № 3. — С. 197–200.

О синтезе схем, допускающих проверяющие тесты константной длины

Д. С. Романов

romanov@cs.msu.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, формально зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а S — схема из функциональных элементов в некотором базисе B, реализующая функцию f, и на схему S действует источник неисправности U (все не введенные в работе определения можно найти в монографии [1]). Источник неисправностей, вызывающий произвольные константные неисправности на выходах функциональных элементов, обозначим через U^c, а источник неисправностей, вызывающий произвольные константные и инверсные неисправности на выходах функциональных элементов, обозначим через $U^{c,\,\mathrm{inv}}$. *Нетривиальной* будем называть такую неисправность схемы S, при которой значение на выходе какого-то элемента E схемы S на некотором входном наборе не равно значению на выходе элемента E при исправной работе схемы S на этом наборе. Множество всех нетривиальных неисправностей схемы S (вызванных источником U) обозначим через $V^U(S)$, а множество всех нетривиальных единичных неисправностей схемы S (вызванных источником U), то есть неисправностей, приводящих к поломке ровно одного элемента схемы, — через $V_1^U(S)$. *Схемной целью контроля* называется некоторое множество Z пар неисправностей, вызываемых источником неисправностей U. Схема S называется *тестопригодной (относительно схемной цели контроля Z для источника неисправностей U)* тогда и только тогда, когда любые две неисправности схемы S, образующие пару из Z, вызывают неравные функционирования схемы S. Обозначим через $W(S)$ (соответственно, через $W_1(S)$) множество всех попарно неравных функций, каждая из которых может быть реализована схемой S в результате нетривиальной неисправности из $V^U(S)$ (соответственно, из $V_1^U(S)$). Множество T наборов значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *полным* (соответственно, *единичным*) *проверяющим тестом для схемы S относительно источника неисправностей U* тогда и только тогда, когда для любой функции $g \in W(S)$ (соответственно, $g \in W_1(S)$) такой, что $g(\tilde{x}^n) \not\equiv f(\tilde{x}^n)$, найдется набор $\tilde{\alpha}$ из T, для которого выполнено неравенство $f(\tilde{\alpha}) \neq g(\tilde{\alpha})$. Количество различных наборов в тесте T называется его *длиной* и обозначается через $l(T)$ или через $|T|$. Тест минимальной длины называется *минимальным*. Сопоставим полному (соответственно, единичному) проверяющему тестированию схемную цель контроля $Z^{\text{full, check}}$ (соответственно, $Z^{\text{single, check}}$), представляющую собой множество всех пар неисправностей (S_0, S_i), где $S_i \in V^U(S)$ (соответственно, где $S_i \in V_1^U(S)$). Обозначим через $D_U^{\text{full, check}}(S)$ (соответственно, через $D_U^{\text{single, check}}(S)$) длину минимального полного (соответственно, единичного) проверяющего теста относительно источника неисправностей U в схеме S, через $D_{B,U}^{\text{full, check}}(f(\tilde{x}^n))$ (соответственно, через $D_{B,U}^{\text{single, check}}(f(\tilde{x}^n)))$ — минимум величины $D_U^{\text{full, check}}(S)$ (соответственно, $D_U^{\text{single, check}}(S)$) по всем тестопригодным относительно цели контроля $Z^{\text{full, check}}$ (соответственно, относительно цели контроля $Z^{\text{single, check}}$) реализующим $f(\tilde{x}^n)$ схемам S в базисе B. Через $D_{B,U}^{\text{full, check}}(n)$ (соответственно, через $D_{B,U}^{\text{single, check}}(n)$) обозначим *функцию Шеннона длины полного проверяющего теста относительно источника неисправностей* U, т. е. функцию $D_{B,U}^{\text{full, check}}(n) = \max\limits_{f(\tilde{x}^n) \in P_2^n} D_{B,U}^{\text{full, check}}(f(\tilde{x}^n))$ (соответственно, $D_{B,U}^{\text{single, check}}(n) = \max\limits_{f(\tilde{x}^n) \in P_2^n} D_{B,U}^{\text{single, check}}(f(\tilde{x}^n))$).

В работе S. M. Reddy [2] было доказано, что в базисе Жегалкина $B_1 = \{x\&y, x \oplus y, 1\}$ функция Шеннона длины единичного проверяющего теста не превосходит $n+3$. Н. П. Редькиным был получен следующий результат: для произвольного полного конечного базиса B была найдена верхняя оценка $D_{B,U^c}^{\text{full, check}}(n) \leqslant 2(2^{\lceil n/2 \rceil} + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} + n)$ [3, 4]. Кроме того, Н. П. Редькиным, С. В. Коваценко, Ю. В. Бородиной и П. А. Бородиным были получены константные верхние оценки функций Шеннона длин проверяющих тестов при различных однотипных неисправностях на выходах функциональных элементов [5, 6, 7, 8, 9]. С. В. Коваценко [5] установил, что в случае $B = \{x\&y, x \oplus y, 1\}$ функция Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов равна 1 (в той же работе для того же класса схем и такого же источника неисправностей установлена верхняя оценка $n+1$ для функции Шеннона длины единичного диагностического теста и верхняя оценка

2^{n-2} для функции Шеннона длины полного диагностического теста). Н. П. Редькин [6] доказал, что в произвольном полном базисе функция Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов не превосходит 3. Ю. В. Бородина установила [7], что в стандартном базисе B_0 функция Шеннона длины полного проверяющего теста относительно однотипных константных неисправностей на выходах элементов равна 2. Ею же доказано [8], что функция Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно константных неисправностей типа 1 на выходах элементов в базисе Жегалкина равна 1. Ю. В. Бородина и П. А. Бородин получили [9], что функция Шеннона длины полного проверяющего теста относительно константных неисправностей типа 0 на выходах элементов в базисе Жегалкина равна 1.

Оказывается, верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для базиса* $B' = \{x\&y, x \oplus y, 1, \bar{x}(y \vee z) \vee x(y \sim z)\}$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы неравенства:* $2 \leqslant D^{\text{single, check}}_{B',\ U^{c,\text{inv}}}(n) \leqslant 4$.

Теорема 2. *Существует схемный базис* $\hat{B}$, *содержащий функциональные элементы* $\{1, \bar{x}, x\&y, x \oplus y, x \sim (y \vee z \vee u)\}$ *и группу функциональных элементов с пятью и шестью входами, такой, что для него при любом* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства* $2 \leqslant D^{\text{full, check}}_{\hat{B},\ U^c}(n) \leqslant 4$.

Идеи доказательств базируются на разложении произвольной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ в полином Жегалкина и на использовании контролирующих блоков специального вида.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Сергею Андреевичу Ложкину и к. ф.-м. н. Юлии Владиславовне Бородиной за обсуждение работы и ценные замечания.

Работа поддержана РФФИ (проекты №09-01-00817 и №10-01-00768).

Список литературы

[1] *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. — М: Изд-во МГУ, 1992.

[2] *Reddy S. M.* Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — V. 21, № 1. — P. 124–141.

[3] *Редькин Н. П.* О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механика. — 1986. — № 1. — P. 72–74.

[4] *Редькин Н. П.* О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

[5] *Коваценко С. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестник Моск. ун-та. Серия 15. Вычислит. матем. и киберн. — 2000. — № 2. — С. 45–47.

[6] *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: Наука, 2003. — С. 217–230.

[7] *Бородина Ю. В.* О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Моск. ун-та. Серия 15. Вычислит. матем. и киберн. — 2008. — № 1. — С. 40–44.

[8] *Бородина Ю. В.* О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем. Механика. — 2008. — № 5. — С. 49–52.

[9] *Бородина Ю. В., Бородин П. А.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа „0“ на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, № 3. — С. 127–133.

NP-полнота задачи о наибольшем кратном потоке

В. С. Рублев, А. В. Смирнов

roublev@mail.ru, alexander_sm@mail.ru

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В данной статье будет рассмотрен вопрос об *NP*-полноте задачи о наибольшем кратном потоке. Понятие кратных сетей и кратных потоков было введено в статье [1] применительно к задаче целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы. Дадим несколько определений.

Сначала введем целое $k > 1$, которое назовем *кратностью потока*. В качестве сети рассматривается ориентированный мультиграф $G(X, U)$, между вершинами которого могут быть дуги одного из 3 видов:

1) *обычная дуга* u^o с пропускной способностью $c(u^o)$; множество обычных дуг обозначим через U^o;

2) *кратная дуга* u^k между двумя вершинами, которая состоит из k дуг одной ориентации с одинаковой пропускной способностью и одинаковым потоком по каждой из них; множество кратных дуг обозначим через U^k;
3) *связанная дуга* u между двумя вершинами, которая связана с еще $k-1$ дугой, имеющей одинаковый один из концов; все k дуг имеют одинаковую пропускную способность, и по ним идет одинаковый поток; множество связанных дуг, выходящих из одной вершины или входящих в одну вершину, будем называть *мультидугой* u^m; множество мультидуг обозначим через U^m.

Множество выходящих из вершины дуг может быть либо только кратными дугами, либо только одной мультидугой (k связанных дуг), либо только обычными дугами. Из источника x_0 сети выходят только кратные дуги, а в сток z сети входит только одна мультидуга. Если из вершины выходят связанные дуги мультидуги, то в нее обязательно входит кратная дуга. Если в вершину входит мультидуга, то из нее может выходить только кратная дуга. Определенный таким образом мультиграф $G(X,U)$ с целочисленными пропускными способностями дуг назовем *кратной* (*транспортной*) *сетью*.

Кратным потоком по сети называется целочисленная функция, определенная на множестве дуг $U = U^o \cup U^k \cup U^m$, для которой выполнены условия неотрицательности, ограниченности (пропускными способностями дуг) и неразрывности потока (в каждой вершине). *Величиной кратного потока* называется сумма φ_z входящего потока для стока z, равная сумме выходящего из источника потока. Величина φ_z должна быть кратна k. Обозначим через $c(u)$ пропускную способность дуги u, а через $f(u)$ — поток на ней.

Так же как и в случае обычной транспортной сети, для кратных сетей ставится *задача о нахождении максимального потока*. Поставим также задачу о кратном потоке величины K как задачу распознавания следующего вида: существует ли в данной сети кратности k кратный поток величины не меньшей K? Данную задачу мы в дальнейшем будем называть *задачей КПk*, где k — кратность сети. При такой постановке для положительного ответа на вопрос достаточно указать такой поток в кратной сети, величина которого в точности равна K. Однако этот поток, в точности равный K, указать не всегда возможно, так как если в кратной сети существует поток величины

kT, то в ней не всегда существует поток любой другой величины kS $(1 \leqslant S < T)$.

Теорема 1. *Задача КП2 для сети с целочисленными пропускными способностями дуг является NP-полной.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что задача КП2 для сети с целочисленными пропускными способностями дуг принадлежит классу *NP*.

В работе [2] была обоснована *NP*-полнота задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы. Для доказательства этого факта было построено полиномиальное сведение классической задачи о 3-сочетаниях (см. [3]) к следующему сужению класса задач целочисленного сбалансирования (названного задачей ЦС3):

$$m = t = n;\ a_{ijp} \in [0,1)\ (i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,n},\ p \in \overline{1,n});$$

$$a_{i00} \leqslant 1\ (i \in \overline{1,n});\ a_{0j0} \leqslant 1\ (j \in \overline{1,n});\ a_{00p} \leqslant 1\ (p \in \overline{1,n}).$$

Построим для произвольной индивидуальной задачи ЦС3 кратную сеть целочисленного сбалансирования (см. [1]). Установим $K = 2n$ и покажем, что задача ЦС3 полиномиально сводится к задаче КП2 с параметром $K = 2n$. При этом существенно, что величина потока в такой сети не может быть больше, чем $2n$, так как пропускная способность мультидуги с концом в z равна $2n$. Следовательно, задача КП2 для этой сети имеет решение тогда и только тогда, когда в сети возможно построить поток величины $2n$. Если существует решение задачи ЦС3, то оно индуцирует поток величины $2n$ в сети целочисленного сбалансирования. Из результатов статьи [1] следует, что любой поток величины $2n$ в кратной сети целочисленного сбалансирования, построенной по задаче ЦС3, индуцирует решение задачи ЦС3, если удовлетворяет условиям:

$$f(x_{i00}, x_{ij0}) + f(x'_{i00}, x_{ij0}) \leqslant c(x_{i00}, x_{ij0}), \quad (i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,n});$$

$$f(x_{0jp}, x_{0j0}) + f(x_{0jp}, x'_{0j0}) \leqslant c(x_{0jp}, x_{0j0}), \quad (j \in \overline{1,n},\ p \in \overline{1,n});$$

$$f(x_{i0p}, x_{00p}) + f(x_{i0p}, x'_{00p}) \leqslant c(x_{i0p}, x_{00p}), \quad (i \in \overline{1,n},\ p \in \overline{1,n}).$$

Для потока величины $2n$ в кратной сети целочисленного сбалансирования, построенной по задаче ЦС3, данные условия выполняются всегда, следовательно, по этому потоку можно построить решение задачи ЦС3. Построение сети по матрице производится с помощью полиномиального алгоритма, все остальные операции, указанные выше, также полиномиальны, следовательно, мы произвели полиномиальное сведение задачи ЦС3 к задаче КП2, и задача КП2 является NP-полной. ∎

Теорема 2. *Задача нахождения максимального кратного потока в сети кратности k с целочисленными пропускными способностями дуг является NP-полной, если $k \geqslant 2$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы покажем сначала NP-полноту задачи КПk для произвольного фиксированного $k \geqslant 2$. Заметим, что задача КПk для сети с целочисленными пропускными способностями дуг принадлежит классу NP. Покажем полиномиальную сводимость задачи КП2, построенной по произвольной индивидуальной задаче ЦС3, к задаче КПk. Установим $K = kn$ и изменим сеть следующим образом.

1. Добавим вершины x_q, z_q и обычные дуги (x_q, z_q) $(q \in \overline{3,k})$. Установим пропускную способность этих дуг равной n.
2. К каждой кратной дуге добавим $k-2$ связанных дуг; пропускная способность каждой кратной дуги увеличится, соответственно, в $\frac{k}{2}$ раз.
3. Заменим мультидугу с концом в z на мультидугу $(\{z_1, \ldots, z_k\}, z)$ пропускной способности kn (каждая связанная дуга этой мультидуги имеет пропускную способность n).
4. Мультидуги вида $(x_{ijp}, \{x_{0jp}, x_{i0p}\})$ заменим на мультидуги вида $(x_{ijp}, \{x_{0jp}, x_{i0p}, x_3, \ldots, x_k\})$ $(i > 0,\ j > 0,\ p > 0)$ пропускной способности k (каждая связанная дуга этих мультидуг имеет пропускную способность 1).

Очевидно, что после выполнения указанных операций сеть будет иметь кратность k, а решение задачи КП2 с $K = 2n$ будет эквивалентно решению задачи КПk с $K = kn$. Операции шагов 1–4 выполняются за полиномиальное количество шагов. При этом существенно, что величина потока в такой сети не может быть больше, чем kn, так как пропускная способность мультидуги с концом в z равна kn. Следовательно, задача КПk для этой сети имеет решение тогда и только тогда, когда в сети возможно построить поток величины kn.

Таким образом, мы выполнили полиномиальное сведение задачи КП2, построенной по произвольной индивидуальной задаче ЦС3, к задаче КПk. В теореме 1 была доказана NP-полнота такой задачи КП2, следовательно, задача КПk также является NP-полной.

Задача КПk может быть решена при помощи следующего алгоритма:

1) нахождение максимального кратного потока;
2) проверка $F' \leqslant K$ (соответствует ответу «да» в задаче КПk), где F' — величина этого максимального потока.

Проверка шага 2 выполняется за константное время, а задача КПk NP-полна. Следовательно, задача нахождения максимального кратного потока в сети кратности k с целочисленными пропускными способностями дуг также NP-полна. ∎

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., ГК № П161.

Список литературы

[1] *Рублев В. С., Смирнов А. В.* Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы и алгоритмы ее решения // Моделирование и анализ информационных систем. — 2010. — Т. 17, № 2. — С. 72–98.

[2] *Рублев В. С., Смирнов А. В.* NP-полнота задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы // ДАН. — 2010. — Т. 435, № 3. — С. 314–316.

[3] *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.

Оптимизация вычислений объектных запросов системы управления данными DIM

В. С. Рублев, Е. А. Смирнова

roublev@mail.ru, smrn.ekaterina@gmail.com

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Постановка задачи

Описанный в [1] язык объектно-динамических запросов ODQL для динамической информационной модели DIM, концепции которой приведены в [2], обладает полнотой — любая группа объектов DIM (вместе с любыми их свойствами) может быть выделена ODQL-запросом (см. [3]). Рассматриваются вопросы организации информации, позволяющей построить алгоритм вычисления объектного запроса с минимальным (в эвристическом смысле) *временем отклика*.

Каждый запрос согласно [1] определяет *базовый класс* объектов запроса (по первому классу фразы **from** или по классу первого свойства класса **select** при отсутствии фразы **from**), множества классов связанных с ними объектов (по фразам **from, select, links**), а также множество ограничений на выделяемые объекты (по фразам **for, where**). Для эффективной реализации такого запроса нужно прежде всего выделить схему классов объектов, отвечающую запросу (алгоритм выделения такой *схемы слоев классов* запроса из гиперграфа классов и гиперграфа объектов системы DIM приведен в [3]), а затем использовать эту схему для возможно меньшего по трудоемкости вычисления запроса. Вот здесь-то и требуется организация данных системы DIM, позволяющая это сделать.

В реляционной технологии для этого вводятся конструкции индексов таблиц и внешних связей таблиц. Мы также введем в систему DIM подобные конструкции, использование которых делает возможным оптимизацию выполнения запроса по трудоемкости.

Индекс-выборки классов и отношений классов

Подобно индексам реляционных таблиц введем индексы по любому набору свойств класса для множества его объектов, каждый из которых реализуется в виде B^*-дерева. Узел такого дерева содержит указатель на объект класса и ключ, соответствующий значениям идентификационных свойств для этого объекта. Каждый объект, класс объектов и свойство класса снабжается объектным идентификатором — уникальным натуральным ключом, характеризующим эту сущность. Главный индекс объектов класса, создающийся всегда, является индексом по объектным идентификаторам объектов класса.

Помимо B^*-дерева главный индекс сдержит указатель на двунаправленный *список выборки объектов класса* и пометку списка: 0 — список выборки пустой, 1 — список выборки содержит не все объекты класса, 2 — список выборки содержит все объекты класса. Этот главный индекс и представляет собой *индекс-выборку* класса. Каждый элемент списка выборки содержит указатель на узел этого дерева, объект которого выбран, а также указатель на предыдущий и последующий элементы списка, а каждый узел дерева содержит указатель на соответствующий элемент списка выборки.

Инициализация списка выборки объектов производится в начале выполнения запроса по фразе **for** для каждого класса схемы слоев.

Для каждого отношения классов устанавливаются индексы (B^*-деревья) отношений. Они играют роль взаимных внешних индексов множеств классов, находящихся в отношении. Помимо B^*-дерева индекс отношения содержит указатель на двунаправленный *список выборки объектов, находящихся в соответствующем отношении объектов*, и пометку списка: 0 — список выборки пустой, 1 — список выборки содержит не все объекты класса, 2 — список выборки содержит все объекты класса. Этот индекс отношения и представляет собой *индекс-выборку* отношения классов.

Каждый элемент списка выборки отношения классов содержит указатель на узел этого дерева, объекты отношения которого выбраны, а также указатель на предыдущий и последующий элементы списка, а каждый узел дерева содержит указатель на соответствующий элемент списка выборки (пустое значение, если отношение объектов этого узла не входит в выборку) и указатели на соответствующие объектам узлы индекс-выборок их классов. Для отношений *наследования, включения и истории* (см. [2]) устанавливаются по 2 индекса, определенных порядком объектных идентификаторов классов отношения. Для отношения *взаимодействия* (см. там же) устанавливается 6 индексов с учетом порядка идентификаторов объектов 4 классов отношения. Каждый узел любого из этих отношений содержит указатели на соответствующие узлы индекс-выборок классов отношения.

Алгоритм выполнения запроса

Идея алгоритма состоит в том, что для каждого класса, участвующего в запросе, создается индекс-выборка. Затем, двигаясь по схеме слоев от слоя с максимальным уровнем к нулевому (к базовому классу), мы устанавливаем индекс-выборки каждого из отношений и корректируем индекс-выборки классов отношения. В результате по индекс-выборке базового класса получаем выборку его объектов, каждый из которых удовлетворяет условиям запроса. И, наконец, двигаясь по схеме слоев от нулевого слоя к внешнему слою, определяем как результат наборы свойств запроса, удовлетворяющие его условиям.

Общий алгоритм

1. Для каждого класса фразы **from** проводится начальная установка его индекс-выборки, как это описано выше. При этом трудоемкость начальной установки оценивается как $\theta(n)$, где n — число объектов всех классов запроса.
2. По фразе **links** запроса проводится коррекция всех индекс-выборок классов, участвующих в запросе, и установка индекс-выборок отношений этих классов. Для этого выбираются по очереди отношения классов, начиная с конца фразы. Пусть A — класс внешнего слоя отношения, B — класс внутреннего слоя, C — класс связи, участвующий в отношении включения, или классы C, H — классы, участвующие в отношении взаимодействия (класс H в роли *Как*, а остальные в других ролях). При этом класс связи C может иметь в общем случае k родительских классов $P_1, \dots P_k$ $(k \geqslant 0)$. В зависимости от вида отношения выполняем *алгоритм коррекции индекс-выборок*. Его трудоемкость $\theta(n_D)$ для отношения наследования (n_D — число элементов дочернего класса), $\theta(n_A \cdot n_B \cdot n_{P_1} \cdot \ldots \cdot n_{P_k})$ для отношения включения и для отношения истории при $k = 0$, $\theta(n_A \cdot n_B \cdot n_C \cdot n_{P_1} \cdot \ldots \cdot n_{P_k})$ для отношения взаимодействия.
3. Для каждого объекта индекс-выборки базового класса применяем описанный ниже *алгоритм обхода с возвратом схемы слоев* для получения всех деревьев связанных объектов запроса и для

каждого такого дерева выбираем по объектам, входящим в него, значения свойств фразы **select**.

Трудоемкость алгоритма обхода с возвратом схемы слоев является в общем случае экспоненциальной, так как алгоритм обхода дерева слоев является переборным. Например, если схема слоев содержит m вершин-классов, а индекс-выборка каждого класса после использования алгоритма коррекции индекс-выборок содержит не более p объектов, то трудоемкость алгоритма обхода схемы слоев можно оценить как $\theta(m^p)$. Однако так как сложность выбора каждого кортежа значений запроса в данном алгоритме оценивается как $\theta(m)$, то при выборе запросом k кортежей значений и предположении, что ограничение **where** отсекает число кортежей порядка $\theta(k)$, трудоемкость такого запроса оценивается как $\theta(m \cdot k)$.

Проблемы реализации

Поскольку в организации вычислений запроса основную роль играют индекс-выборки классов и отношений классов, а узлы индекс-выборок содержат не данные, а указатели для них, то данные могут размещаться в динамической памяти (типа *кучи*). Для определения лучшей платформы реализации в настоящее время разработан тестовый пример и выбраны для проведения статистических испытаний 3 возможные платформы: Oracle, C++, Java.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», ГК № 02.740.11.0207.

Список литературы

[1] *Рублев В. С.* Язык объектных запросов динамической информационной модели DIM // Моделирование и анализ информационных систем. — 2010. — Т. 17, № 3. — С. 144–161.

[2] *Писаренко Д. С., Рублев В. С.* Объектная СУБД «Динамическая информационная модель DIM и ее основные концепции» // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 62–91.

[3] *Рублев В. С.* Запросная полнота языка ODQL динамической информационной модели DIM // Ярославский педагогический вестник. Серия Физико-математические и естественные науки. — 2011. — Вып. 5. — С. 54–62.

Уточненные оценки функции Шеннона в некоторых базисах схем из функциональных элементов, вложенных в единичный куб

О. А. Садовников

oleg.a.sadovnikov@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Рассматривается задача реализации произвольной функции алгебры логики (ФАЛ) в классе схем из функциональных элементов (СФЭ), вложенных в n-мерный единичный куб B^n. Ранее данная задача была рассмотрена, в частности, О. Б. Седелевым в работах [2, 3].

В данной работе, как и в указанных выше, рассматривается обычный класс СФЭ со специальным функционалом сложности, связанным с «геометрической» реализацией СФЭ. Заметим, что подобный «геометрический» подход к сложности ранее уже применялся в традиционных классах схем. В частности, известным примером подобного применения являются клеточные схемы, где СФЭ размещается в плоской прямоугольной решётке, а под сложностью схемы понимается площадь указанной решётки.

Выберем в качестве структуры геометрической реализации n-мерный единичный куб B^n. Под «геометрической реализацией» СФЭ Σ в кубе B^n будем понимать её квазигомеоморфное вложение в B^n, то есть отображение, сопоставляющее каждой вершине v СФЭ Σ некоторую вершину w куба B^n (образ вершины v), а максимальному по включению пучку $E(v)$ дуг, исходящих из вершины v, — соответствующее ориентированное («транзитное») дерево в кубе B^n с корнем в вершине w куба B^n, такое, что множество его листьев совпадает с множеством вершин куба, являющихся образами концов дуг из пучка $E(v)$. При этом «транзитные» деревья не могут иметь общих внутренних вершин. Отметим, что такое вложение является обобщением известного гомеоморфного вложения.

Пусть Σ — некоторая СФЭ. Тогда под её сложностью $R(\Sigma)$ будем понимать минимальную размерность n-мерного единичного куба B^n, допускающего квазигомеоморфное вложение Σ.

Традиционно, через $P_2(n)$ обозначим множество всех ФАЛ, зависящих от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Как обычно, введём функционал

$R_{\text{Б}}(f)$ сложности ФАЛ $f \in P_2(n)$ в конечном полном базисе Б и положим его равным $R(\Sigma_f^{\text{Б}})$, где $\Sigma_f^{\text{Б}}$ — СФЭ минимальной сложности $R(\Sigma_f^{\text{Б}})$, реализующая ФАЛ f в базисе Б.

Наконец, обычным образом введём функцию Шеннона $R_{\text{Б}}(n)$, равную сложности реализации «самой сложной» ФАЛ из $P_2(n)$:

$$R_{\text{Б}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} R_{\text{Б}}(f).$$

Для указанной функции Шеннона О. Б. Седелевым в работе [2] была получена верхняя оценка для $R_{\text{Б}_0}(n)$ в стандартном базисе $\text{Б}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$:

$$R_{\text{Б}_0}(n) \leqslant n - \lfloor \log\log n \rfloor + 8. \tag{1}$$

В работе [3] была получена такая же верхняя оценка для так называемого мультиплексорного базиса $\text{Б}_\mu = \{\mu(x, y_0, y_1), 0, 1\}$, состоящего из мультиплексорной ФАЛ $\mu(x, y_0, y_1) = \bar{x}y_0 \vee xy_1$ и двух константных ФАЛ 0 и 1:

$$R_{\text{Б}_\mu}(n) \leqslant n - \lfloor \log\log n \rfloor + 8. \tag{2}$$

Основным результатом данной работы являются улучшенные по сравнению с (1) и (2) верхние оценки для функции Шеннона в базисах Б_0 и Б_μ.

При построении требуемых схем для получения улучшенных верхних оценок функции Шеннона применяется специальный метод [4] гомеоморфного (а следовательно — и квазигомеоморфного) вложения полного двоичного дерева $\mathcal{D}_n$ глубины n в единичный куб размерности $(n+2)$, сохраняющий соседство поддеревьев. При таком вложении выполняется следующее условие: два любых «соседних» полных поддерева одинаковой глубины в дереве $\mathcal{D}_n$ вкладываются в соседние подкубы одинаковой размерности в кубе B^{n+2} (под «соседними» здесь понимаются поддеревья, корни которых имеют общую вершину-предка в $\mathcal{D}_n$).

Данный метод вложения не является оптимальным по размерности (известно [1], что $\mathcal{D}_n$ можно гомеоморфно вложить в B^{n+1}), однако в ряде случаев он упрощает вложение схемы. В частности, с его помощью легко доказать следующий факт:

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{Q}_n(x_1, \ldots, x_n)$ — система всех ФАЛ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ вида $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}$, то есть система всех элементарных конъюнкций ранга n от n переменных. Тогда $R_{Б_0}(\mathbf{Q}_n) \leqslant n + 4$.*

Доказательство. Построим подходящую схему Σ в базисе $Б_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ с n входами $(x_1, \ldots, x_n)$ и 2^n выходами, реализующую систему из 2^n ФАЛ $\mathbf{Q}_n$. Подключим к каждому входу схемы элемент отрицания. Обозначим через $a_i, i = \overline{1, n}$, элемент $\{\&\}$, один вход которого подсоединен к i-му входу схемы Σ, а через $b_i, i = \overline{1, n}$, — элемент $\{\&\}$, один вход которого подсоединен к соответствующему элементу отрицания.

Пусть $\mathcal{D}_{n+1}$ — полное двоичное дерево глубины $(n + 1)$. Разместим в его вершинах элементы схемы Σ типа a_i и b_i, $i = \overline{1, n}$, следующим образом. В каждом i-м ярусе $(i = \overline{1, n})$ расположим элементы a_i и b_i так, чтобы корни любых двух соседних поддеревьев в дереве $\mathcal{D}_{n+1}$ содержали элементы различного типа. Для корректности удалим элементы a_1 и b_1 из первого яруса и отождествим вершины первого яруса с входом x_1 и соответствующим ему элементом отрицания.

Легко видеть, что на элементах n-го яруса дерева реализуются все 2^n ФАЛ из системы $\mathbf{Q}_n$, следовательно, требуемая схема Σ построена. Отметим, что дерево $\mathcal{D}_{n+1}$ указанным выше методом можно вложить в единичный куб размерности $(n + 3)$.

Рассмотрим единичный куб B^{n+4}. Выделим в нем 2 подкуба K_1 и K_2 размерности $(n + 3)$. Вложим в подкуб K_1 дерево $\mathcal{D}_{n+1}$. Отметим, что из условия соседства поддеревьев следует, что в подкубе K_1 можно выделить два подкуба L_1 и L_2 размерности $(n+2)$, такие, что все элементы типа a_i попадут в подкуб L_1, а все элементы типа b_i — в подкуб L_2 $(i = \overline{1, n})$.

Выделим в подкубе K_2 подкубы M_1 и M_2, параллельные подкубам L_1 и L_2 в подкубе K_1 соответственно. Из условия соседства поддеревьев, для любого $i = \overline{1, n}$ вершины в кубе M_1, соответствующие вершинам типа a_i в кубе L_1, можно соединить цепью C_i. Проведем эту цепь, разместим в произвольной ее вершине вход x_i схемы Σ и соединим все вершины цепи C_i с соответствующими им вершинами типа a_i в кубе L_1, обеспечив тем самым подвод переменной x_i ко всем элементам типа a_i. В кубе M_2 проведем аналогичную цепь

C_i', в произвольной ее вершине разместим элемент отрицания, соответствующий входу x_i, и соединим эту вершину с соответствующей вершиной цепи C_i — это возможно из того же условия соседства поддеревьев.

Проделаем аналогичные построения для всех $i = \overline{2, n}$. В результате будет получено требуемое вложение схемы Σ в куб B^{n+4}. ∎

Применение описанной здесь техники позволяет получить следующие улучшенные (по сравнению с (1) и (2)) верхние оценки для функции Шеннона в классе СФЭ, вложенных в единичный куб:

Теорема 2. $R_{Б_0}(n) \leqslant n - \lfloor \log \log n \rfloor + 7$.

Теорема 3. $R_{\mu}(n) \leqslant n - \lfloor \log \log n \rfloor + 4$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00817-а.

Список литературы

[1] *Ложкин С. А., Седелев О. Б.* О реализации функций алгебры логики BDD, вложенными в единичный куб // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2006. — № 4. — С. 29–35.

[2] *Седелев О. Б.* О реализации функций алгебры логики схемами из функциональных элементов, вложенными в единичный куб // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2008. — № 1. — С. 44–50.

[3] *Седелев О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики схемами из функциональных элементов в мультиплексорном базисе, вложенными в единичный куб // Тезисы XV Межд. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — Новосибирск: Изд-во Ин-та матем. им. С. Л. Соболева, 2004.

[4] *Садовников О. А.* О реализации функций алгебры логики схемами с подведением переменных, вложенными в единичный куб // Материалы XVIII Межд. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2009.

К вопросу о числе совершенных кодов

А. А. Сапоженко

sapozhenko@mail.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

В статье Ю. Л. Васильева [1] получена нижняя оценка числа C_n двоичных *плотно упакованных кодов* длины n с расстоянием 3, называемых также *совершенными.* Ряд авторов конструктивными средствами улучшали эти оценки. По-видимому, наилучшая к настоящему времени нижняя оценка получена С. А. Малюгиным в [2]. Она имеет вид

$$C_n \geqslant 2^{2^{(n+1)/2-\log_2(n+1)}} \cdot 2^{2^{(n-2)/4}}.$$

С. В. Августинович в [3] получил верхнюю оценку вида

$$C_n < 2^{\left(1+O(1/n)\right)2^{n-\frac{3}{2}\log n+\log\log(en)+d}}, \tag{1}$$

где $d = \log_2\sqrt{\frac{8}{\pi}}$. В статье [3] слагаемое d отсутствует, хотя из хода доказательства следует, что оно должно быть.

Цель данной публикации состоит в некотором улучшении этой верхней оценки на основе использования оценок числа независимых множеств, полученных в [4, 5]. Через B^n будем обозначать единичный n-мерный куб. В [3] дано следующее определение. Подмножество $M \subseteq B^n$ называется *базовым*, если для любых двух совершенных кодов K_1 и K_2 найдется вершина α, такая, что $\alpha \in K_1$ и $\alpha \notin K_2$. Ясно, что по множеству $M \cap K$ однозначно определяется совершенный код K. Обозначим через $\widetilde{M}$ множество $B^n_{(n-1)/2} \cup B^n_{(n+1)/2}$. В [3] доказана следующая

Теорема 1. *Множество $\widetilde{M}$ является базовым.*

Приведенная выше верхняя оценка из [3] получается в качестве следствия теоремы 1 и следующего равенства из известной статьи Г. С. Шапиро и Д. Л. Злотника [6]

$$|K \cap \widetilde{M}| = \frac{1}{(n+1)}\left(\binom{n+1}{(n+1)/2} + n\binom{(n+1)/2}{(n+1)/4}\right). \tag{2}$$

Из (2) при достаточно больших n следует, что

$$|K \cap \widetilde{M}| \leqslant |\widetilde{M}|/n. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) вытекает (1).

Идея понижения верхней оценки из [3] состоит в использовании того факта, что $K \cap \widetilde{M}$ является максимальным независимым множеством в графе $G_n = (\widetilde{M}, E)$, с множеством ребер $E = \{\{\alpha, \beta\} : \{\alpha, \beta\} \subseteq \widetilde{M}, 1 \leqslant d(\alpha, \beta) \leqslant 2\}$. То есть вместо произвольных множеств из $\widetilde{M}$, которые подсчитывались в [3], мы будем учитывать только те, что являются независимыми. Будут использоваться утверждения из статей [4, 5]. В [4] доказана следующая

Теорема 2. *Пусть G — регулярный степени k граф на n вершинах с числом независимости α. Тогда число $i(G)$ его независимых множеств удовлетворяет неравенству*

$$i(G) \leqslant (1 + n/2\alpha)^{\alpha} \cdot 2^{n\sqrt{\log k}/k}. \qquad (4)$$

Замечание. Для всякого кода K в B^n множество $K \cap \widetilde{M}$ является максимальным независимым множеством в графе G_n. В свою очередь, G_n является регулярным степени $\binom{(n+1)}{2}$ графом на $|\widetilde{M}| = 2\binom{n}{(n-1)/2}$ вершинах с числом независимости, не превосходящим $2|\widetilde{M}|/(n+3)$. В статье В. Е. Алексеева [5] доказана следующая

Теорема 3. *Для всякого n-вершинного графа G с числом независимости α справедливо неравенство*

$$i(G) \leqslant \left(\frac{n}{\alpha} + 1\right)^{\alpha}. \qquad (5)$$

Из теорем 1 и 3 вытекает

Теорема 4. *При достаточно больших n выполняется неравенство*

$$C_n \leqslant 2^{\left(1+O(1/n)\right)2^{n-\frac{3}{2}\log n + \log\log(n+1) + d}}. \qquad (6)$$

Доказательство. С учетом сказанного выше и применением неравенства (5) имеем

$$C_n \leqslant (1+n)^{|\widetilde{M}|/n} \leqslant (n+1)^{\binom{n+1}{(n+1)/2}/n} =$$

$$= 2^{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+O(\frac{1}{n})\right)\frac{2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)n}}\log(n+1)} \leqslant 2^{\left(1+O(1/n)\right)2^{n-\frac{3}{2}\log n+\log\log(n+1)+d}}.$$

∎

Оценка (6) лучше оценки Августиновича, но вытекающая из (6) оценка для величины $\log\log C_n$ асимптотически отличается от той, что следует из (1), лишь слагаемым порядка $1/\log\log n$. Применение (4) вместо (5) не приводит к улучшению оценки (6). Хотя главный член асимптотики для $\log i(G)$ в (4) лучше оценки Алексеева (5), остаточный член в (4) оказывается существенным.

Другая идея улучшения верхней оценки C_n состоит в использовании оценки числа $t(G)$ максимальных независимых множеств графа G из [5]. Ребро графа называется *доминирующим*, если любая вершина графа смежна хотя бы с одним из концов этого ребра. Пусть m_1 — число доминирующих ребер, m_0 — число ребер, не являющихся доминирующими, а $p = p(G)$ — максимальный размер порожденного паросочетания в графе G. В [5] доказана следующая

Теорема 5. *Для всякого графа G*

$$t(G) \leqslant \left(\frac{m_0}{p}+1\right)^p + m_1.$$

В определенном выше графе G_n доминирующие ребра отсутствуют при $n \geqslant 3$, т. е. $m_1 = 0$. При условии, что $p = p(G_n) = \Omega(|M|/n)$, понижения верхней оценки не произойдет. Если окажется, что $p = p(G_n) = \Omega(|M|/n^\alpha)$, где $\alpha > 1$, то удастся увеличить константу при отрицательном втором члене для $\log C_n$. По-видимому, дальнейшее понижение верхней оценки для C_n с использованием понятия базового множества следует искать на пути понижения мощности последнего.

Поддержано РФФИ, грант 10-01-00768-а.

Список литературы

[1] *Васильев Ю. Л.* О негрупповых плотно упакованных кодах // Проблемы кибернетики. — 1962. — № 8. — С. 337–339.

[2] *Малюгин С. А.* О нижней оценке числа совершенных двоичных кодов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 1999. — Т. 6, № 4. — С. 44–48.

[3] *Августинович С. В.* Об одном свойстве совершенных двоичных кодов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 1995. — Т. 2, № 1. — С. 4–6.

[4] *Сапоженко А. А.* Верхняя оценка числа независимых множеств в графах // ДАН. — 2007. — Т. 414, № 6. — С. 1–3.

[5] *Алексеев В. Е.* Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа // Дискретная математика. — 2007. — Т. 19, № 2. — С. 84–89.

[6] *Shapiro H. S., Slotnik D. L.* On the mathematical theory error correcting codes // IBM J. of Res. and Devel. — 1959. — V. 3, № 1. — P. 84–89.

О взаимодействии мобильных агентов с топологической средой

С. В. Сапунов

sapunov sv@iamm.ac.donetsk.ua

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

В работе рассматривается задача определения мобильным агентом (МА) своего положения в среде моделируемой графом с помеченными вершинами. Эта задача относится к проблематике взаимодействия управляющей и управляемой систем, являющейся классической для теоретической кибернетики [1, 2]. В настоящее время эта проблема актуальна в связи с задачами навигации автономных мобильных роботов [3].

Графы с помеченными вершинами

Конечным графом с помеченными вершинами (помеченным графом) назовем четверку $G = (V, E, M, \mu)$, где V, E, M — конечные множества вершин, ребер и меток соответственно, $\mu : G \to M$ — сюръективная функция разметки. Помеченный граф G назовем детерминированным (Д-графом), если в множестве преемников любой его вершины все вершины помечены различно. Д-граф G назовем сильно детерминированным (СД-графом), если в замкнутой окрестности любой его вершины все вершины помечены различно.

Неотличимость вершин

Последовательность меток вершин $w = \mu(g_1) \ldots \mu(g_k)$, соответствующую некоторому пути $g_1 \ldots g_k$ в графе G, назовем словом длины k, порожденным вершиной g_1. Языком L_g вершины g назовем множество всех слов, порожденных этой вершиной. Будем говорить, что вершины $g, h \in V$ ε-неотличимы, если $L_g = L_h$. Лингвистическим идентификатором (ЛИ) вершины $g \in V$ назовем конечное множество слов $W_g \subseteq M^+$ т.ч. для любой вершины $h \in V$ равенство $W_g \cap L_g = W_g \cap L_h$ выполняется тогда и только тогда, когда $g = h$.

Через S_g обозначим подграф графа G, порожденный всеми вершинами, достижимыми из вершины $g \in V$. Будем говорить, что вершины $g, h \in V$ σ-неотличимы, если $S_g \cong S_h$. Пусть G_g и H_h являются инициально-связными помеченными графами с выделенными вершинами g и h соответственно. Обозначим через $G_g \cap H_h$ операцию нахождения наибольшего связного подграфа $G'_g \subseteq G_g$, содержащего выделенную вершину g, такого, что G'_g изоморфно вложим в H_h, причем вершина g отображается в вершину h. Топологическим идентификатором (ТИ) вершины $g \in V$ назовем помеченный граф D_g т.ч. для любой вершины $h \in V$ изоморфизм $D_g \cap S_g \cong D_g \cap S_h$ существует тогда и только тогда, когда $g = h$.

Показано, что $\sigma \subseteq \varepsilon$, причем обратное включение не выполняется. Предложены полиномиальные методы построения ЛИ и ТИ вершин помеченных графов. Показано, что гомоморфный образ растущего помеченного дерева, соответствующего ЛИ W_g вершины $g \in V$ является ТИ этой вершины. Показано, что обратное утверждение в общем случае неверно.

Эксперименты с графами

Экспериментом с графом G относительно априорной информации I, цели C и средств S назовем процесс, состоящий из трех этапов: 1) построение теста P на основе I и C; 2) получение МА экспериментальных данных W на основе P и S; 3) вывод заключений о свойствах графа на основе W и I. Априорная информация — это класс графов, к которому принадлежит G. В качестве S выступают возможности МА перемещаться по графу, воспринимать локальную информацию о вершинах и ставить в них дополнительные стираемые/нестираемые метки. Эксперимент назовем диагностическим, если априори полностью известен граф G и МА установлен в произвольную начальную вершину этого графа, а целью является определение этой вершины, т. е. отличение этой вершины от всех других вершин. Из определения эксперимента следует, что он осуществляется посредством прохождения МА некоторого связанного с тестом Р множества путей по графу из начальной вершины.

В работах [4, 5] автором были предложены методы построения и реализации диагностических экспериментов с помеченными графами основывающиеся на проверке ε-эквивалентности вершин при помощи их ЛИ. Целью данной работы является создание аналогичных методов, основывающихся на ТИ вершин.

Диагностический эксперимент

Прямой суммой помеченных графов G и H назовем помеченный граф $G + H$, полученный объединением множеств вершин и ребер этих графов (с предварительным переобозначением вершин так, чтобы исходные графы не имели общих вершин). Соединением инициально-связных помеченных графов G_g и H_h назовем инициально-связный помеченный граф $\langle G_g + H_h \rangle$, полученный из графов G_g и H_h отождествлением их начальных вершин и последующей детерминизацией, т. е. многократным и исчерпывающим применением следующей операции: если в множестве преемников некоторой вершины оказываются одинаково отмеченные вершины, то такие вершины отождествляются с заменой возникающих кратных дуг одной дугой.

Следующая теорема дает метод построения диагностических тестов для СД-графов.

Теорема 1. *Граф $\left\langle \sum_{g \in V} D_g \right\rangle$ является диагностическим тестом для графа G для любого множества ТИ $\{D_g\}_{g \in V}$.*

МА может перемещаться по ребрам графа от вершины к вершине, оставлять маркер в текущей вершине, а также обнаруживать и подбирать маркер в случае его нахождения в текущей вершине. Находясь в вершине, МА считывает ее метку и метки смежных с ней вершин.

1-й этап эксперимента состоит в построении тестового графа P по множеству ТИ всех вершин графа G. Получение экспериментальных данных заключается в том, что МА, стартуя из неизвестной ему вершины h графа G, проверяет наличие/отсутствие в G путей, совпадающих по разметке с путями обхода в ширину графа P из его инициальной вершины. В зависимости от исхода каждой из этих проверок сокращается множество гипотетически возможных начальных вершин. По окончании работы алгоритма остается ровно одна такая вершина. Показано, что временная сложность предложенного алгоритма проведения диагностического эксперимента полиномиальна от числа вершин исследуемого графа.

Список литературы

[1] *Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С.* Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[2] *Капитонова Ю. В., Летичевский А. А.* Математическая теория проектирования вычислительных систем.— М.: Наука, 1988.

[3] *Dudek G., Jenkin M.* Computational Principles of Mobile Robotics.— Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[4] *Сапунов С. В.* Определение положения робота в топологической среде // Искусственный интеллект. — 2008. — Т. 4. — С. 558–565.

[5] *Грунский И. С., Сапунов С. В.* Идентификация вершин помеченных графов // Труды ИПММ НАН Украины. — 2010. — Т. 21. — С. 86–97.

Максимальная мощность (k, l)-множества свободного от сумм в циклической группе

В. Г. Саргсян

vahe_sargsyan@yahoo.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Подмножество $A \subseteq Z_n$ называется (k, l)-*множеством, свободным от сумм* (МСС), если уравнение $x_1+x_2+\cdots+x_k = y_1+y_2+\cdots+y_l$ не имеет решения в A. Положим $kA = \{x_1+x_2+\cdots+x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in A\}$, а $c \star A = \{c \cdot a \mid a \in A\}$ для любого $c \in Z_n$. Определение (k, l)-множества, свободного от сумм, эквивалентно тому, что $kA \cap lA = \varnothing$, которое, в свою очередь, эквивалентно тому, что $0 \notin kA - lA = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_k - y_1 - y_2 - \cdots - y_l \mid x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l \in A\}$. Через $\lambda_{k,l}(Z_n)$ обозначим максимальную мощность (k, l)-множества, свободного от сумм в Z_n, а через $\alpha_{k,l}(Z_n)$ — максимальную мощность (k,l)-арифметической прогрессии, свободной от сумм в циклической группе Z_n. Предположим, что $k \neq l \pmod{n}$ и $k > l$.

Теорема 1 [1]. *Для любого* n

$$\lambda_{k,l}(Z_n) = \max_{d|n} \left\{ \frac{\alpha_{k,l}(Z_d) \cdot n}{d} \right\}.$$

Лемма 2 [1]. *Для любого* n

1. *Если* $n|(k-l)$, *то* $\alpha_{k,l}(Z_n) = 0$;
2. *Если НОД*$(n, k-l) = 1$, *то*

$$\alpha_{k,l}(Z_n) = \max \left\{ \frac{n}{p}, \left\lfloor \frac{n-2}{k+l} \right\rfloor + 1 \right\},$$

   где p — *наименьший простой делитель* n;
3. *Если* $1 <$ *НОД*$(n, k-l) < n$, *то*

$$\max \left\{ \frac{n}{\rho_1}, \left\lfloor \frac{n-1-\delta(n)}{k+l} \right\rfloor + 1 \right\} \leqslant \\ \leqslant \alpha_{k,l}(Z_n) \leqslant \max \left\{ \frac{n}{\rho_1}, \frac{n}{2\rho_2}, \left\lfloor \frac{n-2}{k+l} \right\rfloor + 1 \right\},$$

   где $\delta(n) =$ *НОД*$(n, k-l)$, ρ_1 — *наименьший делитель* n, *такой, что* $(k-l)$ *не делится на* ρ_1, *а* ρ_2 — *наименьший делитель* n, *такой, что* $(k-l)$ *делится на* ρ_2.

Определение. Пусть S — непустое подмножество группы G. Стабилизатором подмножества S называется множество $H(S) = \{g \in G \mid g + S = S\}$, имеющее максимальную мощность. Ясно, что $H(S)$ представляет собой подгруппу группы G.

Лемма 3 [1]. *Пусть* A — (k,l)-*максимальное по включению множество, свободное от сумм в* Z_n. *Тогда*

1. $k(A + H(kA)) = kA$;
2. $(A + H(kA))$ — (k,l)-*множество, свободное от сумм в* Z_n;
3. $A + H(kA) = A$;
4. A — *объединение смежных классов* $H(kA)$.

Положим $\delta(n) = \text{НОД}(n, k-l)$, $n = \delta(n) \cdot n_1$, $k - l = \delta(n) \cdot m_1$, $R = \{0, n_1, 2 \cdot n_1, \ldots, (\delta(n) - 1) \cdot n_1\}$, $|R| = \delta(n)$.

Теорема 4. *Пусть A — (k,l)-множество, свободное от сумм в Z_n. Тогда*

1. $A \cap R = \varnothing$;
2. $c \star A$ *является (k,l)-множеством, свободным от сумм в Z_n, тогда и только тогда, когда* $0 \notin c \star A$;
3. $(kA - lA) \cap R = \varnothing$;
4. $H(kA - lA) \cap (kA - lA) = \varnothing$.

Доказательство.

1. Предположим противное, и пусть $i \cdot n_1 \in A$ $(i \in \{0, \ldots, \delta(n)-1\})$, тогда $(k-l) \cdot i \cdot n_1 \in kA - lA$, а $(k-l) \cdot i \cdot n_1 = \delta(n) \cdot m_1 \cdot i \cdot n_1 = n \cdot m_1 \cdot i = 0$, т. е. $0 \in kA - lA$, что противоречит тому, что A (k,l)-свободно от сумм.

2. Если $0 \in c \star A$, то, очевидно, $c \star A$ не является (k,l)-множеством, свободным от сумм. Теперь предположим, что $0 \notin c \star A$, но $c \star A$ не является (k,l)-множеством, свободным от сумм, т. е. существуют $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $y_1, y_2, \ldots, y_l \in A$, такие, что $c \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \cdots + c \cdot x_k = c \cdot y_1 + c \cdot y_2 + \cdots + c \cdot y_l$, т. е. $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_l$, что противоречит тому, что A (k,l)-свободно от сумм.

Как следствие получим, что $\delta(n) \star A$ (k,l)-свободно от сумм.

3. Предположим противное, и пусть $i \cdot n_1 \in (kA - lA)$ $(i \in \{0, \ldots, \delta(n) - 1\})$, тогда $\delta(n) \cdot i \cdot n_1 \in \delta(n) \star (kA - lA) = k(\delta(n) \star A) - l(\delta(n) \star A)$, а $\delta(n) \cdot i \cdot n_1 = 0$, т. е. $0 \in k(\delta(n) \star A) - l(\delta(n) \star A)$, что противоречит тому, что $\delta(n) \star A$ (k,l)-свободно от сумм.

4. Предположим противное, и пусть $h \in H(kA - lA)$ и $h \in (kA - lA)$, тогда $-h(\in H(kA - lA)) + h(\in kA - lA) = 0(\in kA - lA)$, что противоречит тому, что A (k,l)-свободно от сумм. ∎

Лемма 5 [1]. *Для любого n*

$$\alpha_{k,l}(Z_n) \geqslant \left\lfloor \frac{n - 1 - \delta(n)}{k + l} \right\rfloor + 1,$$

где $\delta(n) = НОД(n, k - l)$.

Теорема 6. *Для любого n*

$$\max_{d|n}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-\delta(d)}{k+l}\right\rfloor+1\right)\frac{n}{d}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\lambda_{k,l}(Z_n)\leqslant\max\left\{\frac{n}{2\rho},\max_{d|n}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-\delta(d)}{k+l}\right\rfloor+1\right)\frac{n}{d}\right\}\right\},\quad(1)$$

где $\delta(d)=$ НОД$(d,k-l)$, ρ — наименьший делитель n, такой, что $(k-l)$ делится на ρ.

Доказательство. Пусть A — (k,l)-максимальная по мощности арифметическая прогрессия с разницей t, свободная от сумм в Z_d, и НОД$(t,d)=1$. Тогда из теоремы 4 получим, что

$$(k+l)|A|-(k+l-1)=|kA-lA|\leqslant d-\delta(d),$$

т. е.

$$|A|\leqslant\left\lfloor\frac{d-1-\delta(d)}{k+l}\right\rfloor+1,\qquad(2)$$

где $\delta(d)=$ НОД$(d,k-l)$.

В [1] доказано, что если НОД$(t,d)\neq1$, то

$$\frac{d}{\rho_1}\leqslant|A|\leqslant\max\left\{\frac{d}{\rho_1},\frac{d}{2\rho_2}\right\}\qquad(3)$$

и

$$\max_{d|n}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-\delta(d)}{k+l}\right\rfloor+1\right)\cdot\frac{n}{d}\right\}\geqslant\frac{n}{\rho_1},\qquad(4)$$

где A — (k,l)-максимальная по мощности арифметическая прогрессия с разницей t, свободная от сумм в Z_d, $\delta(d)=$ НОД$(d,k-l)$, ρ_1 — наименьший делитель d, такой, что $(k-l)$ не делится на ρ_1, а ρ_2 — наименьший делитель d, такой, что $(k-l)$ делится на ρ_2.

Из леммы 5, (2) и (3) получим, что

$$\max\left\{\frac{d}{\rho_1},\left\lfloor\frac{d-1-\delta(d)}{k+l}\right\rfloor+1\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_{k,l}(Z_d)\leqslant\max\left\{\frac{d}{\rho_1},\frac{d}{2\rho_2},\left\lfloor\frac{d-1-\delta(d)}{k+l}\right\rfloor+1\right\},$$

а из теоремы 1 и (4) получим (1). ∎

Поддержано грантом РФФИ № 10-01-00768-а.

Список литературы

[1] *Bajnok B.* On the maximum size of a (k, l)-sum-free subset of an abelian group // International Journal of Number Theory. — 2009. — V. 5, № 6. — P. 953–971.

[2] *Hamidoune Y. O., Plagne A.* A new critical pair theorem applied to sum-free sets in Abelian groups // Commentarii Mathematici Helvetici. — 2004. — V. 79 — P. 183–207.

[3] *Wallis W. D., Street A. P., Wallis J. S.* Combinatorics: Room squares, sum-free sets, Hadamard matrices. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1972.

[4] *Green B., Ruzsa I.* Sum-free sets in abelian groups // Israel Journal of Mathematics.— 2005. — V. 147— P. 157–188.

[5] *Nathanson M. B.* Additive number theory: Inverse problems and the geometry of sumsets. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1996.

[6] *Lev V. F.* Large sum-free sets in Z/pZ // Israel Journal of Mathematics. — 2006. — V. 154 — P. 221–233.

[7] *Bier T., Chin A. Y. M.* On (k, l)-sets in cyclic groups of odd prime order // Bull. Austral. Math. Soc. — 2001. — V. 63, № 1. — P. 115–121.

[8] *Diananda P. H., Yap H. P.* Maximal sum-free sets of elements of finite groups // Proc. Japan Acad. — 1969. — V. 45. — P. 1–5.

Использование графовых моделей при распараллеливании метода Холецкого для решения разреженных симметричных СЛАУ

Я. Ю. Сафонова

safonova.yana@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Введение

Системы линейных уравнений $Ax = b$ с симметричной положительно определенной матрицей A возникают при численном решении дифференциальных уравнений. Для решения систем такого рода применяют разложение Холецкого, находящее верхнетреугольную матрицу U, такую, что $U^TU = A$. Тогда решение исходной системы эквивалентно решению двух систем:

$$U^Ty = b, Ux = y.$$

Алгоритм нахождения разложения, предложенный в [1], последовательно ищет строки искомой матрицы и не обладает параллелизмом, поскольку значения в строке i зависят от значений в предыдущих $i-1$ строках. Однако если матрица A является разреженной, т. е. содержит $O(n^2)$ нулей, где n — порядок матрицы, то строка i может не зависеть от значений предыдущих строк и выделение «независимых» друг от друга групп строк позволяет организовать параллельный расчет. В [2] дано определение дерева исключения матрицы как отражения ее структуры разреженности и сформулированы теоремы, позволяющие сконструировать параллельный алгоритм нахождения разложения по известному дереву исключения. Построение дерева исключения, являющееся, по сути, нахождением портрета матрицы U, весьма трудоемкая задача [3, 4]. При этом существуют алгоритмы переупорядочивания матрицы [1], в ходе выполнения которых определяется вид дерева исключения. В данной статье рассматривается взаимосвязь между переупорядочиванием матрицы и эффективностью применения параллельного алгоритма разложения.

Дерево исключения разреженной матрицы и параллельный алгоритм Холецкого

Пусть $G(A) = (V, E)$ — граф матрицы A. Деревом исключения называется дерево, множество вершин которого совпадает с V, а ребро (v_i, v_j) существует тогда и только тогда, когда $i = \min\{k : u_{kj} \neq 0 \ \& \ k > j\}$. Таким образом, v_j является родителем v_i, если первый наддиагональный элемент в столбце j располагается в строке i. Для дерева исключения справедлив ряд свойств [2], общий смысл которых заключается в том, что строки, соответствующие вершинам в непересекающихся поддеревьях, таких, что ни одна вершина из одного поддерева не является предком вершин другого поддерева, можно обрабатывать независимо. Обработкой одной вершины назовем нахождение значений в соответствующей строке путем последовательного исключения всех строк, являющихся ее потомками.

Параллельный алгоритм нахождения разложения матрицы использует помеченное дерево исключения, где листом считается вершина, не имеющая непомеченных потомков. На каждой итерации алгоритма формируется список листьев и организуется их параллельная обработка, по окончании которой обработанные вершины помечаются. Такой подход имеет существенный недостаток — большое количество синхронизирующих операций, время выполнения которых будет снижать производительность. Поэтому на практике используют разбиение дерева исключения на слои большей, чем 1, высоты, при этом внутри каждого слоя осуществляется параллельная обработка независимых поддеревьев. Время работы такого параллельного алгоритма зависит от высоты дерева исключения: чем меньше высота дерева при заданном количестве вершин, тем больше возможное количество параллельных операций внутри слоев.

Переупорядочивание матрицы и связь с видом дерева исключения

Для уменьшения заполнения фактора используется переупорядочивание исходной матрицы, т. е. решение системы сводится к решению эквивалентной системы $PAP^T(Px) = Py$, где P — матрица перестановок. Одним из способов определения матрицы P является метод вложенных сечений. Известны [1] оценки заполнения метода, говорящие в пользу его применения. Другой важной особенностью является формирование структуры дерева исключения в процессе переупорядочивания. На каждой итерации после выбора разделителя образуются два подграфа, не имеющие общих вершин и ребер. При вычислении строк, соответствующих вершинам в первом подграфе, заполнение будет возникать только в столбцах, соответствующих другим вершинам подграфа и вершинам разделителя. Аналогичные рассуждения применимы ко второму подграфу. Следовательно, вершины подграфов являются потомками вершин разделителя в дереве исключения. Полученное дерево исключения будет бинарным, а выбор в качестве разделителя среднего уровня смежности гарантирует хорошую сбалансированность. Предварительное применение метода вложенных сечений будет давать выигрыш при параллельной факторизации.

Вычислительный эксперимент

Полученные теоретические выводы проверены для матриц, возникающих в различных прикладных областях. Каждая матрица была переупорядочена методом вложенных сечений и алгоритмом Катхилла–Макки. Для всех представлений, включая исходное, построены деревья исключения и разложение Холецкого. Для конкретной матрицы сравнивались такие показатели, как высота дерева исключения и степень заполнения фактора. Оба способа переупорядочивания, алгоритм Катхилла–Макки и метод вложенных сечений, дают хорошие результаты с точки зрения заполнения.

Название матрицы	Степень заполнения		
	Без переупорядочивания	После CM	После ND
bcsstk14	0,116	0,128	0,094
plat1919	0,636	0,06	0,046
nasa2146	0,072	0,087	0,067
ex9	0,028	0,051	0,043
nasa2910	0,11	0,306	0,116
ex13	0,039	0,072	0,06
bcsstk24	0,32	0,109	0,07
nasa4704	0,081	0,096	0,045
s1rmq4m1	0,066	0,087	0,042

Однако значения высоты, соответствующие переупорядочиванию методом вложенных сечений, значительно ниже значений высоты исходного дерева исключения и полученного после работы алгоритма Катхилла–Макки.

Название матрицы	Высота дерева исключения		
	Без переупорядочивания	После CM	После ND
bcsstk14	1752	1764	350
plat1919	1902	1918	198
nasa2146	2145	2145	369
ex9	2556	2567	412
nasa2910	2581	2886	856
ex13	3361	3361	401
bcsstk24	3560	3561	636
nasa4704	4630	4703	785
s1rmq4m1	5488	5488	646

Полученные результаты свидетельствуют о том, что использование параллельного алгоритма разложения матрицы, упорядоченной методом вложенных сечений, будет давать наибольшую эффективность и умеренное заполнение.

Список литературы

[1] *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. — М.: Мир, 1988.

[2] *Heggerness P.* Minimizing fill-in size and elimination tree height in parallel Cholesky factorization. — Bergen: Department of Informatics University of Bergen, 1992. — P. 15–17.

[3] *van Grondelle J.* Symbolic sparse Cholesky factorization using elimination trees. — Utrecht: Department of Mathematics Utrecht University, 1999. — P. 3–6.

[4] *Dereniowski D., Kubake M.* Cholesky factorization of matrices in parallel and ranking of graphs // 5-th International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics. — Czestochowa: Springer, 2004. — P. 985–992.

О сложности k-значных функций в одном классе полиномов

С. Н. Селезнева

selezn@cs.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Одной из нормальных форм задания функций являются полиномы. Каждая k-значная функция может быть задана однозначным обычным полиномом тогда и только тогда, когда k — простое число [1]. Обобщения полиномов (поляризованные, обобщенно-поляризованные, обобщенные полиномы) вводятся для уменьшения сложности задания функций. К настоящему времени точная оценка функции Шеннона длины получена только для булевых функций в классе поляризованных полиномов [2]. Для k-значных функций (при простых $k \geqslant 3$) в классах поляризованных и обобщенно-поляризованных полиномов нижняя и верхняя оценки функции Шеннона длины совпадают только по порядку [3, 4]. А в классе обобщенных полиномов даже для булевых функций (и для k-значных при простых $k \geqslant 3$) нижняя и верхняя оценки функции Шеннона длины различаются по порядку [5–7].

В настоящей работе вводится один класс полиномов. Эти полиномы являются «почти» обычными, поляризация возможна только по одной выделенной переменной. Но поляризация понимается в более широком смысле. Однако этого достаточно, чтобы уменьшить сложность функций в этом классе полиномов почти так же, как в классе поляризованных полиномов. При том, что в поляризованных полиномах поляризация допускается по всем переменным. В работе найдены верхняя и нижняя оценки функции Шеннона длины k-значных функций (при простых $k \geqslant 3$) в этом классе полиномов, а также ее точная оценка для булевых функций.

Основные понятия

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, назовем k-значной, если $f : E_k^n \to E_k$. Если $k = 2$, то k-значная функция называется *булевой*. Множество всех k-значных функций обозначим как P_k, множество всех k-значных функций, зависящих от n переменных, как P_k^n.

Пусть k — простое число. Будем рассматривать сложение и умножение по $\bmod\ k$.

Произведение вида

$$x_{i_1}^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{m_r},$$

в котором все переменные x_{i_j} попарно различны и $1 \leqslant m_1, \ldots, m_r \leqslant k-1$, называется (*обычным*) *мономом*.

Степенью монома X называется число $d(X) = \sum\limits_{j=1}^{r} m_j$.

Будем считать константу 1 вырожденным мономом степени 0.

Сумма вида

$$\sum_{i=1}^{l} c_i \cdot X_i,$$

где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ — коэффициенты, X_i — различные мономы, $i = 1, \ldots, l$, называется (*обычным*) *полиномом*.

Число различных слагаемых полинома P называется его *длиной* $l(P)$, максимальная степень его слагаемых — его степенью $d(P)$.

Будем полагать константу 0 вырожденным полиномом с длиной и степенью, равными 0.

Если и только если k — простое число, каждую k-значную функцию можно однозначно задать (обычным) полиномом по mod k [1].

Введем понятие полинома, *поляризованного по выделенной переменной* x_i, или *квазиполинома.* Не ограничивая общности, рассмотрим случай переменной x_1.

Множество $\delta = \{s_1(x_1), \ldots, s_k(x_1)\} \subseteq P_k^1$ назовем *поляризующим*, если

1) в нем ровно k различных функций ($|\delta| = k$);
2) для каждого m, $0 \leqslant m \leqslant k-1$, найдутся такие коэффициенты $c_{1m}, \ldots, c_{km} \in E_k$, что

$$x_1^m = \sum_{i=1}^{k} c_{im} s_i(x_1).$$

Другими словами, множество δ является *полиномиальным базисом* в пространстве полиномов степени не выше $(k-1)$ над полем $(E_k; +, \cdot)$ (k — простое число).

Квазимономом (*по множеству* δ) назовем произведение некоторой функции $s(x_1) \in \delta$ и обычного монома, в котором нет переменной x_1.

Степенью квазимонома $X = s(x_1) \cdot X'$, где $s(x_1) \in \delta$ и обычный моном X' не содержит переменную x_1, назовем $d(X) = d(s_1) + d(X')$.

Квазиполиномом (*по множеству* δ) назовем сумму различных квазимономов по тому же множеству с ненулевыми коэффициентами из E_k.

Число различных слагаемых квазиполинома P назовем его *длиной* $l(P)$, максимальную степень слагаемых — его *степенью* $d(P)$.

О задании k-значных функций квазиполиномами

Теорема 1. *Пусть k — простое число. Для каждого поляризующего множества δ, для каждой k-значной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует однозначно определенный задающий ее квазиполином полином по этому множеству.*

О сложности квазиполиномов

Введем сложностные характеристики k-значных функций в классе квазиполиномов. Для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^n$ ее *длиной*

$l^{\text{к.п.}}(f)$ (*степенью* $d^{\text{к.п.}}(f)$) в классе квазиполиномов назовем минимальную длину (минимальную степень) среди всех квазиполиномов, задающих f.

Введем функции Шеннона длины и степени k-значных функций в классе квазиполиномов

$$L_k^{\text{к.п.}}(n) = \max l^{\text{к.п.}}(f), \qquad D_k^{\text{к.п.}}(n) = \max d^{\text{к.п.}}(f),$$

где максимум берется по всем функциям, зависящим от n переменных.

Для функции Шеннона $L_k^{\text{п.п.}}(n)$ длины поляризованных полиномов по векторам поляризации $(d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$ известны следующие оценки:

1) $L_2^{\text{п.п.}}(n) = \lfloor \frac{2}{3} 2^n \rfloor$ [2];
2) $L_k^{\text{п.п.}}(n) \leqslant \dfrac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n$, $k \geqslant 3$ [3];
3) $\dfrac{k-1}{k} k^n \lesssim L_k^{\text{п.п.}}(n)$ при $n \to \infty$ [4];
4) $L_k(1) = k - 1$ [8].

Мы доказываем следующие оценки функций Шеннона степени и длины квазиполиномов k-значных функций при $k \geqslant 2$.

Теорема 2. *Пусть k — простое число, $k \geqslant 2$. Тогда*

$$D_k^{\text{к.п.}}(n) = (k-1)n.$$

Теорема 3. $L_2^{\text{к.п.}}(n) = \lfloor \frac{2}{3} 2^n \rfloor$.

Заметим, что точная оценка длины квазиполиномов для булевых функций совпадает с точной оценкой длины поляризованных полиномов булевых функций [2].

Теорема 4. *Пусть k — простое число, $k \geqslant 3$. Тогда*

$$\frac{k-1}{k} k^n \lesssim L_k^{\text{к.п.}}(n) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 5. *Пусть k — простое число, $k \geqslant 3$. Тогда*

$$L_k^{\text{к.п.}}(n) \leqslant \frac{k}{k+1} k^n.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 09-01-00701-а и 10-01-00768-а.

Список литературы

[1] *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 2001.

[2] *Перязев Н.А.* Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. — 1995. — Т. 34, № 3. — С. 323–326.

[3] *Селезнева С.Н.* О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14, № 2. — С. 48–53.

[4] *Алексеев В.Б.*, *Вороненко А.А.*, *Селезнева С.Н.* О сложности реализации функций k-значной логики поляризованными полиномами // Тр. V Межд. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Ратмино, 26–29 мая 2003 г.). — М.: МГУ, 2003. — С. 8–9.

[5] *Even S.*, *Kohavi I.*, *Paz A.* On minimal modulo 2 sums of products for switching functions // IEEE Trans. Elect. Comput. — 1967. — P. 671–674.

[6] *Кириченко К.Д.* Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17, № 3. — С. 80–88.

[7] *Селезнева С.Н.*, *Дайняк А.Б.* О сложности обобщенных полиномов k-значных функций // Вестник Моск. унив. Серия 15. Вычисл. матем. и кибернетика. — 2008. — С. 34–39.

[8] *Селезнева С.Н.* О сложности поляризованных полиномов функций многозначных логик, зависящих от одной переменной // Дискретная математика. — 2004. — Т. 16, № 2. — С. 117–120.

О подобии некоторых верхнетреугольных матриц над кольцом целых чисел

С. В. Сидоров

sesidorov@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Пусть A и B — две целочисленные матрицы порядка n. Будем говорить, что матрица A подобна матрице B над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, если существует такая унимодулярная матрица $X \in \mathbf{Z}^{n\times n}$, что

$B = X^{-1}AX$. Матрица называется унимодулярной, если ее определитель равен 1 или -1.

Нормальной диагональной формой Смита называется целочисленная матрица $\left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ с неотрицательными элементами, где $D = \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_r\}$ — диагональная матрица, d_{k+1} делится на d_k $(k = 1, \ldots, r-1)$.

Известно, что для любой матрицы $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$ существуют такие унимодулярные матрицы $U \in \mathbf{Z}^{m\times m}$ и $V \in \mathbf{Z}^{n\times n}$, что $UAV = S_A$ — нормальная диагональная форма Смита.

Через E_n будем обозначать единичную матрицу порядка n.

Лемма 1. *Матрица* $\left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & A \\ \hline 0 & \beta E_n \end{array}\right)$ *подобна над кольцом целых чисел матрице* $\left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & S_A \\ \hline 0 & \beta E_n \end{array}\right)$, *где* S_A *— нормальная диагональная форма Смита для матрицы* A.

Доказательство. Пусть $U \in \mathbf{Z}^{m\times m}$ и $V \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ – унимодулярные матрицы, удовлетворяющие условию $UAV = S_A$. Рассмотрим блочную унимодулярную матрицу $\left(\begin{array}{c|c} U^{-1} & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right)$. Тогда

$$\left(\begin{array}{c|c} U^{-1} & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & A \\ \hline 0 & \beta E_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U^{-1} & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & V^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & A \\ \hline 0 & \beta E_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U^{-1} & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \alpha U & UA \\ \hline 0 & \beta V^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U^{-1} & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & UAV \\ \hline 0 & \beta E_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & S_A \\ \hline 0 & \beta E_n \end{array}\right).$$

∎

Лемма 2 [1]. *Пусть* $A, B \in \mathbf{Z}^{n\times n}$. *Если* A *и* B *подобны над кольцом целых чисел, то* $\Delta_k(A) = \Delta_k(B)$ $(k = 1, \ldots, n)$, *где* $\Delta_k(A)$ *и* $\Delta_k(B)$ *— наибольшие общие делители миноров* k*-го порядка матриц* A *и* B *соответственно.*

Теорема. *Матрицы* $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & A_1 \\ \hline 0 & \alpha E_n \end{array}\right)$ *и* $B = \left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & B_1 \\ \hline 0 & \alpha E_n \end{array}\right)$ *подобны над кольцом целых чисел тогда и только тогда, когда* $S_{A_1} = S_{B_1}$, *где* S_{A_1} *и* S_{B_1} *— нормальные диагональные формы Смита для матриц* A_1 *и* B_1 *соответственно.*

Доказательство. Согласно лемме 1 матрицы A и B подобны матрицам $A' = \left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & S_{A_1} \\ \hline 0 & \alpha E_n \end{array}\right)$ и $B' = \left(\begin{array}{c|c} \alpha E_m & S_{B_1} \\ \hline 0 & \alpha E_n \end{array}\right)$ соответственно.

Достаточность. Поскольку $S_{A_1} = S_{B_1}$, то $A' = B'$ и матрицы A и B подобны в силу транзитивности отношения подобия.

Необходимость. Матрицы A' и B' подобны, так как подобны матрицы A и B. Ясно, что тогда подобны матрицы $A'' = A' - \alpha E_{m+n} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & S_{A_1} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ и $B'' = B' - \alpha E_{m+n} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & S_{B_1} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Согласно лемме 2 $\Delta_k(A'') = \Delta_k(B'')$ $(k = 1, \ldots, m+n)$. Если $S_{A_1} = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $D_1 = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_r\}$, $S_{B_1} = \left(\begin{array}{c|c} D_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $D_2 = \operatorname{diag}\{d'_1, \ldots, d'_{r'}\}$, то наибольший общий делитель миноров k-го порядка в матрице A'' равен $\Delta_k(A'') = d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$ $(k = 1, \ldots, r)$. Аналогично $\Delta_k(B'') = d'_1 \cdot \ldots \cdot d'_k$ $(k = 1, \ldots, r')$. Поскольку $\operatorname{rank} A'' = r$, $\operatorname{rank} B'' = r'$, а ранги подобных матриц равны, то $r = r'$. При $k = 1$ получаем $d_1 = \Delta_1(A'') = \Delta_1(B'') = d'_1$. Далее по индукции легко доказывается, что $d_k = d'_k$ для всех $k = 1, \ldots, r$. Следовательно, $S_{A_1} = S_{B_1}$. ∎

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00545-а.

Список литературы

[1] *Шевченко В. Н., Сидоров С. В.* О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Математика. — 2006. — № 4. — С. 57–64.

Моделирование работы ациклического алгоритма на многопроцессорной вычислительной системе

В. В. Слободской

slvital@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Введение

С появлением многоядерных компьютеров всё чаще ставится задача распараллеливания алгоритмов, сложность которой увеличивается, когда алгоритм должен наилучшим образом использовать вычислительные ресурсы различных вычислительных систем с различной конфигурацией и количеством процессоров. Возникает задача моделирования работы алгоритма на различных вычислительных системах.

Как и в [1], будем рассматривать алгоритмы, не содержащие ветвлений и циклов, представимые в виде канонической сети взаимозависимых операций. Предполагается, что любой алгоритм при известном наборе исходных данных представим в виде ациклического алгоритма без ветвлений. Таким образом, в общем случае под категорию рассматриваемых алгоритмов подходит любой алгоритм с набором всех необходимых для его работы исходных данных.

Вычислительная система — набор из n процессоров, обладающих различными скоростями выполнения операций. Считается, что время выполнения любой операции на процессоре обратно пропорционально скорости вычисления процессора. Задана матрица скоростей передачи данных от одного процессора другому. В отличие от [2] в этой работе рассматривается общая модель задачи.

Алгоритм представляет собой каноническую сеть взаимозависимых операций, где каждая операция (кроме начальных) имеет набор предшествующих операций и каждая операция (кроме завершающих) имеет набор последующих операций. Операция не может начинаться, пока не завершены все предшествующие ей операции. Для каждой операции известно время ее выполнения на самом медленном процессоре. Для взаимозависимых операций задано количество данных, которые необходимо передать для выполнения последующей операции. Операция не может начинаться, пока не переданы данные со всех операций, предшествующих этой операции. Передача данных может начинаться только после завершения операции.

Необходимо таким образом назначить операции на процессоры, чтобы общее время завершения обработки всех операций было минимальным.

В качестве эксперимента рассматривается инструмент, позволяющий для любой программы, реализующей некоторый алгоритм на некотором наборе входных данных, получить каноническую сеть взаимозависимых операций, которая может быть использована для решения задачи распараллеливания данного алгоритма, моделируя тем самым его выполнение на любой вычислительной системе. Для решения подобной задачи предлагается использовать алгоритмы, рассмотренные в [1, 3, 4].

Общая математическая модель

Исходные параметры математической модели

J — множество всех операций, I — множество процессоров, $K(j)$ — множество операций, непосредственно предшествующих операции с номером j, $K(j) \subset J$, $j \in J$; t_j — время выполнения операции j на процессоре со скоростью 1, $t_j > 0$, $j \in J$; p_i — скорость процессора i, $p_i > 0$, $i \in I$.

Пусть $\|M\|$ — матрица размерности $|J| \times |J|$, элемент которой m_{kl} — количество данных, которые должны быть переданы после выполнения операции k для операции l, $k \in K(l)$, $k, l \in J$; $\|S\|$ — матрица размерности $|I| \times |I|$, элемент которой s_{uv} определяет скорость передачи данных от процессора u к процессору v, $s_{uv} > 0$, $u, v \in I$; $Q = \{(j,k) \mid k, j \in J, k \notin K(j), j \notin K(k)\}$; $J^0 = \{j \mid j \in J, K(j) = \varnothing\}$; $J^D = \{j \mid j \in J, \nexists k \in J, j \in K(k)\}$.

Варьируемые параметры математической модели

$|J|$-мерный вектор $\mathbf{x}$, компонента которого x_j определяет время начала выполнения операции j, $j \in J$, и булеву матрицу $\|Y\|$ размерности $|J| \times |J|$, элемент которой $y_{ji} = 1$, если операция j выполняется на i-м процессоре, $j \in J$, $i \in I$; 0 — в противном случае.

Ограничения математической модели

Технологическое ограничение

$$x_k \geqslant \max_{j \in K(k)} \left(x_j + t_j \sum_{l \in I} \frac{y_{jl}}{p_l} + m_{jk} \sum_{i \in I} \sum_{l \in I} \frac{y_{ji} y_{kl}}{s_{il}} \right), \; k \in J. \quad (1)$$

Невозможность выполнения двух операций на одном процессоре одновременно

$$x_k \geqslant x_j + t_j \sum_{l \in I} \frac{y_{jl}}{p_l} \quad \text{или} \quad x_j \geqslant x_k + t_k \sum_{l \in I} \frac{y_{kl}}{p_l},$$
$$\text{если } (j,k) \in Q,\ y_{jl} = y_{kl},\ \text{для всех } l \in I;\ j,k \in J. \quad (2)$$

Каждая операция должна выполняться на одном процессоре

$$\sum_{l \in I} y_{jl} = 1,\ j \in J, \quad (3)$$

$$x_j \geqslant 0,\ j \in J^0, \quad (4)$$

$$y_{ji} \in \{0,1\},\ j \in J,\ i \in I,\ x_j \geqslant 0,\ j \in J. \quad (5)$$

Задача минимизации общего времени выполнения операций

Требуется найти такое решение системы ограничений (1)–(5), на котором принимает минимальное значение критерий, определяющий общее время выполнения операций:

$$F(\mathbf{x}, Y) = \max_{j \in J^D} \left(x_j + t_j \sum_{l \in I} \frac{y_{jl}}{p_l} \right). \quad (6)$$

Моделирование работы алгоритма

Будем считать, что алгоритм реализован на языке программирования и представляет собой скомпилированное приложение. Для того чтобы получить детальную информацию о выполнении этого приложения, воспользуемся динамической инструментацией кода [5].

В качестве операции выделим блок кода, не содержащий инструкций-переходов (в дальнейшем – *простой блок*). Путем динамической инструментации кода найдём все простые блоки и добавим в код начала каждого блока запись информации об адресе блока, его размере и времени начала его работы. Таким образом мы сможем получить список операций приложения, а также их длительности.

Для определения зависимостей между операциями добавим инструментирование операций чтения и записи в память, а также инструкций, осуществляющих изменение содержимого регистров процессора. Будем сохранять информацию о том, какие участки памяти, а также регистры были считаны текущим простым блоком без предшествующей им записи. Определяя, какой блок осуществлял запись в эти ячейки памяти или регистры, мы получим зависимость между найденным и текущим блоком, тем самым будем иметь отношение взаимозависимости между соответствующими блокам операциями.

После запуска приложения на однопроцессорной системе, проведя анализ полученной информации, мы получим каноническую сеть взаимозависимых операций, соответствующих простым блокам приложения.

В качестве примера рассмотрим простую программу, вычисляющую произведение двух квадратных матриц. Моделировать выполнение будем на машинах архитектуры SMP с доступом к общей памяти, т. е. будем считать, что время передачи данных между процессорами равно нулю. Скорость вычислительных элементов системы будем считать равной скорости процессора, на котором осуществлялся сбор данных.

В результате анализа работы этого приложения была получена каноническая сеть взаимозависимых операций, состоящая из 29808 операций, время работы – 186,070 мс.

Для решения задачи распараллеливания использовался эвристический метод, описанный в [4]. Результаты моделирования на вычислительных системах с различным числом процессоров (мс): 96,139 (2П); 53,016 (4П); 33,022 (8П); 24,301 (16П).

В работе применен новый способ распараллеливания алгоритмов, основанный на решении оптимизационной задачи, поставленной в рамках общей математической модели. Предложен метод получения канонической сети взаимозависимых операций любого алгоритма с известными входными данными, что позволяет моделировать любой алгоритм (приложение) на любой вычислительной системе.

Данный подход можно использовать для оценки уровня параллелизма задачи. Варьируя вычислительные ресурсы, можно исследовать поведение алгоритма на различных вычислительных системах.

Список литературы

[1] *Слободской В. В.* Задача распараллеливания ациклического алгоритма // Вестник ННГУ. — 2008. — № 5. — С. 113–119.

[2] *Прилуцкий М. Х., Слободской В. В.* Распределение ресурсов в задачах балансирования с постоянными длительностями // Вестник ВГАВТ. Межвузовская серия «Моделирование и оптимизация сложных систем». Вып. 1. — 2008.

[3] *Слободской В. В.* Использование метода ветвей и границ для решения задачи распараллеливания ациклического алгоритма // Тезисы докладов конференции «Технологии Microsoft в теории и практике программирования». — Н.Новгород: Издательство ННГУ, 2009.

[4] *Слободской В. В.* Эвристический метод для решения задачи распараллеливания ациклического алгоритма на многопроцессорной вычислительной системе // Вестник ННГУ. — 2010. — № 4. — С. 182–186.

[5] *Chi-Keung Luk, Robert Cohn, Robert Muth, Harish Patil, Artur Klauser, Geoff Lowney, Steven Wallace, Vijay Janapa Reddi, Kim Hazelwood.* Pin: Building Customized Program Analysis Tools with Dynamic Instrumentation. Programming Language Design and Implementation (PLDI) Chicago: 2005. — P. 190–200.

Потоки в кратных сетях специального вида

А. В. Смирнов

alexander_sm@mail.ru

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Понятие кратных сетей и кратных потоков было введено в статье [1] применительно к задаче целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы. Вводится целое $k > 1$ — *кратность потока*. В качестве сети рассматривается ориентированный мультиграф $G(X, U)$, между вершинами которого могут быть дуги одного из трех видов:

1) *обычная дуга* u^o с пропускной способностью $c(u^o)$; множество обычных дуг обозначим через U^o;
2) *кратная дуга* u^k между двумя вершинами, которая состоит из k дуг одной ориентации с одинаковой пропускной способностью и одинаковым потоком по каждой из них; множество кратных дуг обозначим через U^k;

3) *связанная дуга* u между двумя вершинами, которая связана с еще $k-1$ дугами, имеющих одинаковый один из концов; все k дуг имеют одинаковую пропускную способность, и по ним идет одинаковый поток; множество связанных дуг, выходящих из одной вершины или входящих в одну вершину, будем называть *мультидугой* u^m; множество мультидуг обозначим через U^m.

Множество выходящих из вершины дуг может быть либо только кратными дугами, либо только одной мультидугой (k связанных дуг), либо только обычными дугами. Из источника x_0 сети выходят только кратные дуги, а в сток z сети входит только одна мультидуга. Если из вершины выходят связанные дуги мультидуги, то в нее обязательно входит кратная дуга. Если в вершину входит мультидуга, то из нее может выходить только кратная дуга. Определенный таким образом мультиграф $G(X,U)$ с целочисленными пропускными способностями дуг назовем *кратной* (*транспортной*) *сетью*.

Кратным потоком по сети называется целочисленная функция, определенная на множестве дуг $U = U^o \cup U^k \cup U^m$, для которой выполнены условия неотрицательности, ограниченности (пропускными способностями дуг) и неразрывности потока (в каждой вершине). *Величиной кратного потока* называется сумма φ_z входящего потока для стока z, равная сумме выходящего из источника потока. Величина φ_z должна быть кратна k. Обозначим через $c(u)$ пропускную способность дуги u, а через $f(u)$ — поток на ней. Так же как и в случае обычной транспортной сети, для кратных сетей ставится *задача о нахождении максимального потока*. В работе [2] рассмотрен вопрос об NP-полноте этой задачи для сети кратности $k \geqslant 2$.

Пусть имеется кратная сеть произвольной кратности k. Пусть при удалении всех мультидуг сеть распадается на $k+2$ компоненты связности (связность понимается в слабом смысле, то есть без учета направления дуг), при этом одна компонента состоит только из вершины z, компонента, содержащая вершину x_0, содержит только кратные дуги, а остальные k компонент содержат только обычные дуги. Если при этом каждая мультидуга имеет ровно один конец в каждой из k компонент, содержащих обычные дуги, то такую сеть мы будем называть *делимой*. Примером делимой сети является кратная сеть целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы, рассмотренная в [1].

Обозначим через P_0 компоненту делимой сети, содержащую кратные дуги, через $P_1, \ldots, P_k$ обозначим компоненты, содержащие обычные дуги. Тогда *частью* G_i делимой сети ($i \in \overline{1,k}$) назовем объединение соответствующей компоненты P_i с инцидентными ей связанными дугами всех мультидуг, кроме мультидуги с концом в z, а также с i-й связанной дугой каждой кратной дуги компоненты P_0. Заметим, что возможность выделения частей G_i является особенностью делимых сетей. Обозначим начальные вершины мультидуги с концом в z через $z_1, \ldots, z_k$. Вершины, являющиеся началом остальных мультидуг, будем обозначать через y_j. Объединение мультидуги u_z^m, идущей из вершин $z_1, \ldots, z_k$ в z, и k путей μ_r ($r \in \overline{1,k}$), каждый из которых является ориентированным путем в соответствующей части G_r из вершины x_0 в вершину z_r, назовем *обобщенным путем*, если каждый из путей μ_r проходит через одну и ту же вершину y_j. Кратный поток назовем *полным*, если любой обобщенный путь из x_0 в z имеет дугу u (обычную, кратную или мультидугу), поток по которой равен ее пропускной способности $f(u) = c(u)$. *Проекция* C_i ($i \in \overline{1,k}$) подграфа C на часть сети G_i — это часть подграфа C, образованная его вершинами и дугами, принадлежащими G_i. Так как части G_i ($i \in \overline{1,k}$) сети G представляют собой обычные транспортные сети с источником x_0 и стоком z_i, то будем называть некоторый путь из x_0 в z_i *путем прорыва в части* G_i, если $f(u) < c(u)$ на прямых дугах и $f(u) > 0$ на обратных дугах этого пути.

Пусть в делимой сети определен некоторый поток φ величины $\varphi_z > 0$. *Кратным циклом* в делимой сети $G(X,U)$, где X – множество вершин, U – множество дуг (обычных, кратных или мультидуг), назовем такой подграф $C(X',U')$, $X' \subset X$, $U' \subset U$, для которого:

1) проекции $C_1, \ldots, C_k$ на части $G_1, \ldots, G_k$ соответственно есть объединение некоторых циклов, причем дуги, поток по которым ненулевой, могут проходиться в обратном направлении;
2) проекции $C_1, \ldots, C_k$ *согласованы* (одинаковы) на общей части подграфов $G_1, \ldots, G_k$;
3) C_1 представим в виде $C_1 = \cup\{C_j^1\}$, где C_j^1 – некоторые циклы и $C_j^1 \not\subset C_k^1$ $\forall j \neq k$; при этом для любой дуги u из G_1 выполняется неравенство $0 \leqslant f(u) + a^+(u) - a^-(u) \leqslant c(u)$, где $a^+(u)$ – это число циклов C_j^1, в которых дуга u проходится в прямом направлении, $a^-(u)$ — это число циклов C_j^1, в которых дуга u проходится в

обратном направлении. Такое же условие должно выполняться и для $C_2, \ldots, C_k$.

Обобщенным путем прорыва в делимой сети $G(X, U)$ для некоторого кратного потока φ назовем такой подграф $S(X', U')$, $X' \subset X$, $U' \subset U$, для которого:

1) каждая из проекций $S_1, \ldots, S_k$ на части $G_1, \ldots, G_k$ соответственно есть объединение ровно одного пути прорыва из x_0 в z_i и некоторых циклов, причем дуги, поток по которым ненулевой, могут проходиться в обратном направлении;
2) проекции $S_1, \ldots, S_k$ *согласованы* на общей части подграфов $G_1, \ldots, G_k$;
3) S_1 представим в виде $S_1 = \mu_1 \cup \{C_j^1\}$, где μ_1 – путь прорыва, C_j^1 – некоторые циклы и $C_j^1 \neq C_k^1$ $\forall j \neq k$; при этом для любой дуги u из G_1 выполняется неравенство $0 \leqslant f(u) + a^+(u) - a^-(u) \leqslant c(u)$, где $a^+(u)$ – это число элементов множества $\mu_1 \cup \{C_j^1\}$, в которых дуга u проходится в прямом направлении, $a^-(u)$ – это число элементов множества $\mu_1 \cup \{C_j^1\}$, в которых дуга u проходится в обратном направлении. Такое же условие должно выполняться и для $S_2, \ldots, S_k$;
4) дуга $(\{z_1, \ldots, z_k\}, z) \in U'$ и $f(\{z_1, \ldots, z_k\}, z) < c(\{z_1, \ldots, z_k\}, z)$;
5) S не содержит кратного цикла.

Обозначим $G_\varphi = G(X, U_\varphi)$; $U_\varphi = \{u | f(u) \neq 0\}$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi^1(U)$, $\varphi^2(U)$ – два полных потока в делимой сети $G(X, U)$, причем $\varphi_z^1 \leqslant \varphi_z^2$. Пусть $\varphi^0(U) = \varphi^2(U) - \varphi^1(U)$. Тогда граф $G_{\varphi^0} = \{S_i\} \cup \{C_j\}$, где $\{S_i\}$ — множество всех обобщенных путей прорыва из x_0 в z, $\{C_j\}$ — множество всех кратных циклов. В случае когда $\varphi_z^1 = \varphi_z^2 = \varphi_z^{\max}$, $\{S_i\} = \varnothing$.*

Алгоритм нахождения максимального потока в делимой сети является обобщением алгоритма нахождения максимального кратного потока для решения задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы, рассмотренного в работе [1]. Работа алгоритма происходит в два этапа: *этап построения полного потока*; *этап увеличения потока* (если полученный полный поток не является максимальным, то увеличиваем поток при помощи *обобщенного алгоритма пометок* (см. ниже) до тех пор, пока поток не станет максимальным).

Алгоритм нахождения полного потока прост. На данном этапе увеличения потока можно добиваться, находя все возможные обобщенные пути прорыва из x_0 в z через вершины y_j без обратных дуг и увеличивая поток по ним. В итоге будет получен полный поток.

Рассмотрим обобщенный алгоритм пометок. Идея алгоритма состоит в следующем: в проекциях $G_1, \ldots, G_k$ поочередно строятся пути прорыва $\mu_1, \ldots, \mu_k$ (возможно, в объединении с некоторыми циклами) до тех пор, пока пути в обеих проекциях не станут согласованными либо же не останется вариантов для продолжения построения пути. В первом случае объединение $\mu_1, \ldots, \mu_k$ с мультидугой с концом в z даст обобщенный путь прорыва, во втором случае производится откат до *«точки ветвления»*, после чего выполнение алгоритма возобновляется.

Теорема 2. *Максимальный поток в делимой сети может быть найден при помощи указанного выше алгоритма.*

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., ГК № П161.

Список литературы

[1] *Рублев В. С., Смирнов А. В.* Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы и алгоритмы ее решения // Моделирование и анализ информационных систем. — 2010. — Т. 17, № 2. — С. 72–98.

[2] *Смирнов А. В.* NP-полнота задачи нахождения максимального потока в кратной сети // Заметки по информатике и математике. Вып. 2 — Ярославль: ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2010. — С. 122–131.

О структуре матриц оптимального локально-префиксного кодирования языков

Т. Г. Смирнова

smirnova-tg@mail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В работе исследуются вопросы сжатия информации в классе алфавитных отображений с использованием двоичных локально-префиксных кодов: всякому начальному отрезку сообщения соответствует своя группа букв, которые могут за ним непосредственно последовать в сообщении, и если для любой такой группы букв применяется префиксный код, то весь код называется локально-префиксным.

Пусть $A = \{0, 1\}$ — алфавит канала связи, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ — алфавит языка сообщений $L \subseteq B^*$, где B^* — свободный моноид над алфавитом B. Алфавитное кодирование $f = f_V$ задается схемой: $b_i \to v_i$, где $v_i \in A^+$ $(i = 1, \ldots, m)$. Вектор $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ называется кодом, определяющим f_V, а вектор $d\,(V) = \langle d_1, \ldots, d_m \rangle$, где $d_i = |v_i|$ — длина элементарного кода v_i, называется спектром длин кода V.

Будем говорить, что слова α и β находятся в отношении антипрефиксности $\overline{\pi}$ и обозначать $\alpha\,\overline{\pi}\,\beta$, если никакое из них не является префиксом другого. Префиксные коды, т. е. коды, у которых $v_i\,\overline{\pi}\,v_j$ для любых $i \neq j$, составляют один из основных классов однозначно декодируемых кодов переменной длины.

В настоящей работе рассматриваются локально-префиксные коды [1, 2], соответствующие алфавитному кодированию локальных моделей языков глубины 1.

Пусть $L \subseteq B^*$. Окрестностью глубины 1 слова $\alpha \in B^*$ назовем множество

$$\varepsilon\,(\alpha) = \{\beta : \ \beta \in B, \ \alpha\beta B^* \cap L \neq \oslash\}\,,$$

а множество $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1\,(L) = \{\varepsilon\,(\alpha) : \ \varepsilon\,(\alpha) \neq \oslash, \ \alpha \in B^*\}$ — локальной моделью языка L глубины 1.

Построение локальной модели глубины 1 существенно зависит от исходного способа задания языка. Известно [3], что для контекстно-свободных языков эта проблема алгоритмически неразрешима. В классе регулярных языков локальная модель глубины 1 может быть описана достаточно просто.

Пусть $L = L(\Gamma)$ — язык, порожденный автоматным источником Γ с n состояниями над алфавитом B, тогда

$$\varepsilon\,(\alpha) = \{b \in B : \ \varphi_\Gamma\,(\alpha b, q_0) \neq \oslash\}\,,$$

где q_0 — начальное состояние источника. Пусть $\varphi_\Gamma\,(\alpha, q_0) = \varphi_\Gamma\,(\beta, q_0) = q_i$, тогда $\varphi_\Gamma\,(\alpha b, q_0) = \varphi_\Gamma\,(\beta b, q_0) = \varphi_\Gamma\,(b, q_i)$ и $\varepsilon\,(\alpha) = \varepsilon\,(\beta) = \varepsilon\,(q_i)$. Таким образом, локальная модель $\mathfrak{M}$ регулярного языка $L = L(\Gamma)$ представляет собой множество непустых алфавитных окрестностей состояний $q_0, \ldots, q_{n-1}$ источника Γ:

$$\mathfrak{M}(L) = \{\varepsilon_{i+1} = \varepsilon(q_i) = \{b \in B : \varphi_\Gamma(b, q_i) \neq \oslash\} : i = 0, \ldots, n-1\}.$$

Всякой локальной модели $\mathfrak{M}(L) = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ языка L, $\varepsilon_i \subseteq B$ $(i = 1, \ldots, n)$, соответствует граф антипрефиксности

$$G = K(\varepsilon_1) \cup \ldots \cup K(\varepsilon_n),$$

где $K(\varepsilon)$ — полный граф на множестве вершин ε.

Код $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ называется локально-префиксным относительно графа G, если кодовые слова v_i, v_j, соответствующие смежным вершинам b_i, b_j графа G, находятся в отношении антипрефиксности, т. е. $v_i \,\overline{\pi}\, v_j$. Заметим, что для полных m-вершинных графов K_m задача локально-префиксного кодирования совпадает с задачей префиксного кодирования m-буквенного алфавита в обычном смысле.

Множество всех спектров, реализуемых q-ичными локально-префиксными относительно G кодами, монотонно относительно частичного порядка, определенного покомпонентной сравнимостью векторов. Минимальные элементы этого множества образуют матрицу $M(G)$ оптимального локально-префиксного кодирования локальных моделей, представимых графом G. Это множество конечно для любого графа по теореме Диксона и для любого графа может быть расшифровано.

Необходимое условие реализуемости спектра $d(V) = \langle d_1, \ldots, d_m \rangle$ двоичным локально-префиксным относительно G кодом записывается в виде системы неравенств Мак-Миллана для каждой из клик $K(\varepsilon_1), \ldots, K(\varepsilon_n)$ графа G:

$$\sum_{b_i \in K(\varepsilon_j)} 2^{-d_i} \leqslant 1 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

При $n = 1, 2$ система неравенств (1) определяет также и достаточное условие реализуемости спектра, однако при $n \geqslant 3$ подобное утверждение не имеет места.

Пусть $\mathfrak{G}_m$ — множество всех локальных моделей над алфавитом B и $\Sigma_m = \{M(G) : G = \mathfrak{M}(L), L \subseteq B^*\}$ — множество различных матриц оптимального двоичного локально-префиксного кодирования.

На $\mathfrak{G}_m$ определяется отношение эквивалентности ε: будем говорить, что графы G_1 и G_2 находятся в отношении ε, если матрицы $M(G_1)$ и $M(G_2)$ — перестановочно-эквивалентны, т.е. матрицу $M(G_2)$ можно получить из матрицы $M(G_1)$ элементарными перестановками строк и столбцов и наоборот. Тогда фактор-множество $\mathfrak{G}_m/\varepsilon$ изоморфно Σ_m и $\varphi_\varepsilon : G \to M(G)$ есть гомоморфизм $\mathfrak{G}_m$ на Σ_m.

Теорема 1. *$|\Sigma_m| \leqslant c_m$, где c_m — число связных графов с m вершинами.*

На множестве Σ_m определим отношение частичного порядка: будем говорить, что $M \leqslant M'$, если для любой частотной характеристики P и для любого спектра $\tilde{d}_1$ из M' найдется спектр $\tilde{d} \in M$, такой, что $C(\tilde{d}, P) \leqslant C(\tilde{d}_1, P)$.

Теорема 2. *Множество Σ_m содержит наибольший элемент $M_{\max} = M(K_m)$. Строками матрицы $M_{\max}$ являются все целочисленные векторы $\langle d_1, \ldots, d_m\rangle$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{m} 2^{-d_i} = 1$, и только они.*

Теорема 3. *Множество Σ_m содержит наименьший элемент $M_{\min} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m})$. $\varphi_\varepsilon^{-1}(M_{\min}) = \mathfrak{B}_m$, где $\mathfrak{B}_m$ — класс двудольных графов с m вершинами.*

Теорема 4. *$|\Sigma_m| \leqslant c_m - b_m + 1$, где c_m и b_m — соответственно числа связных и связных двудольных графов с m вершинами.*

В таблице ниже приведены значения $|\Sigma_m|$ при $m \leqslant 6$. Обратим внимание, что при $m \leqslant 4$ множество $[\Sigma_m, \leqslant]$ является линейно упорядоченным и может быть легко представлено диаграммой Хассе, причем при $m = 2$ имеем $M_{\max} = M_{\min} = M(K_2)$.

m	$\lvert\Sigma_m\rvert$	c_m	b_m	$c_m - b_m + 1$
2	1	1	1	1
3	2	2	1	2
4	4	6	3	4
5	13	21	5	17
6	58	112	17	96

Множество Σ_3 содержит два элемента $M_{\max} = M(K_3)$ и $M_{\min} = M(P_3)$, где P_3 — простой путь с тремя вершинами.

Множество Σ_4, кроме элементов $M_{\max} = M(K_4)$ и $M_{\min} = M(\mathfrak{B}_4)$, содержит элементы $M' = M(G')$, где граф $G' = K_4 - e$ получен из K_4 удалением ребра, и $M'' = M(G'')$, где граф $G'' = G' - e'$ получен из G' удалением ребра, инцидентного вершине степени 2. Для элементов множества Σ_4 имеем $M_{\min} \leqslant M(G'') \leqslant M(G') \leqslant M_{\max}$.

Для частично упорядоченного множества $[\Sigma_5, \leqslant]$, не являющегося цепью и содержащего 13 элементов, построение диаграммы усложняется. С использованием результатов [4] при $m \geqslant 6$ получено описание верхних четырех ярусов диаграммы Хассе для $[\Sigma_m, \leqslant]$.

Список литературы

[1] *Марков А. А.* Введение в теорию кодирования. — М.: Наука, 1982.

[2] *Марков Ал. А., Смирнова Т. Г.* О словарных раскрасках и некоторых совершенных графах // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, № 2. — С. 16–32.

[3] *Жильцова Л. П.* Об алфавитном кодировании контекстно-свободных языков // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике: Межвуз. тематич. сб. научн. тр. — Горький, 1983. — С. 106–123.

[4] *Смирнова Т. Г.* Алфавитное кодирование в классе локально-префиксных кодов // Восьмая Межд. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем»: Москва, 6–9 апреля, 2009. Электронный сборник материалов конференции. — М., 2009. — С. 170–172.

Релаксационный субградиентный метод минимизации овражных выпуклых функций

П. И. Стецюк

stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

Рассмотрим задачу:

$$\text{найти} \quad x^\star = \arg\min_{x \in R^n} f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ — выпуклая функция и ее субградиент $\partial f(x)$ для $\forall x \in R^n$ и $\forall x^\star \in X^\star$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$(x - x^\star, \partial f(x)) \geqslant \gamma(f(x) - f^\star), \quad \text{где } \gamma \geqslant 1. \tag{2}$$

Здесь $X^\star$ — ограниченное множество точек минимума функции $f(x)$, $f^\star$ — минимальное значение функции $f(x)$: $f^\star = f(x^\star)$, $x^\star \in X^\star$. Параметр γ определяет величину максимального сдвига по выпуклости функции $f(x)$ в неравенстве (2) и может быть использован для специальных классов выпуклых функций, для которых $\gamma > 1$. Так, например, градиент выпуклой квадратичной функции удовлетворяет неравенству (2) с параметром $\gamma = 2$.

Если $f^\star$ известно, то для решения задачи (1), (2) можно использовать метод amsg2p [1]. В его основу положен второй из субградиентных методов с преобразованием пространства и регулировкой шага Агмона–Моцкина–Шонберга [2]. Преобразование пространства в методе amsg2p реализуется с помощью одноранговоговo эллипсоидального оператора [3] и только на тех итерациях метода, когда тупым является хотя бы один из углов — угол между двумя последовательными субградиентами либо угол между последним субградиентом и агрегатным вектором, который является выпуклой комбинацией вычисленных на предыдущих итерациях субградиентов. Отсюда и название метода, где «ams» указывает на способ регулировки шага в направлении нормированного антисубградиента, а «g2p» указывает, что ams-шаг используется в пространстве переменных, преобразованном с помощью двух последних субградиентов (g2) и агрегатного вектора (p).

Если в задаче (1) структура поверхностей уровня функции $f(x)$ такова, что преобразования пространства не нужны, то метод amsg2p равносилен известному субградиентному методу Б.Т. Поляка [4]

$$x_{k+1} = x_k - h_k \frac{\partial f(x_k)}{\|\partial f(x_k)\|}, \quad h_k = \frac{\gamma(f(x_k) - f^\star)}{\|\partial f(x_k)\|}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (3)$$

с тем лишь отличием, что неравенство (2) для специальных классов функций реализует более сильные ams-шаги h_k, чем это делается для выпуклой функции при $\gamma = 1$. Отметим, что ams-шаг h_k еще называют шагом Поляка или шагом Агмона–Моцкина.

В настоящей заметке дополним метод amsg2p возможностью либо находить такую точку, где выпуклая функция $f(x)$ принимает значение, равное f_{min}, либо гарантировать достаточное условие, что такой точки не существует.

Метод amsg2p находит точку $x^\star_\varepsilon \in \{x : f(x) - f_{min} \leqslant \varepsilon\}$ и соответствующий ей неотрицательный номер итерации $k^\star_\varepsilon$. Отрицательный номер $k_\varepsilon^\star$ означает, что на итерации $|k_\varepsilon^\star|$ получено достаточное условие отсутствия точки x_ε^*.

Алгоритм-функция amsg2p: $(x_\varepsilon^\star, k_\varepsilon^\star) = \mathsf{amsg2p}(x_0, \varepsilon, r_0, f_{min}, \gamma)$

На итерации $k = 0$ заданы: начальное приближение $x_0 \in R^n$; начальный радиус r_0 такой, что $\|x_0 - x^\star\| \leqslant r_0$ для $\forall x^\star \in X^\star$; достаточно малое $\varepsilon > 0$. Вычислим $f(x_0)$ и $\partial f(x_0)$. Если $f(x_0) - f_{min} \leqslant \varepsilon$, то $x_\varepsilon^\star = x_0$, $k_\varepsilon^\star = 0$ и окончание алгоритма. Иначе положим $h_0 = \dfrac{\gamma(f(x_0) - f_{min})}{\|\partial f(x_0)\|}$, $\xi_0 = \dfrac{\partial f(x_0)}{\|\partial f(x_0)\|} \in R^n$, $p_0 = 0 \in R^n$, $B_0 = I$ — единичная $(n{\times}n)$-матрица. Перейдем к следующей итерации.

Пусть на k-й итерации получены $x_k \in R^n$, h_k, r_k, $\xi_k \in R^n$, $p_k \in R^n$, B_k — матрица $n{\times}n$. Для $(k+1)$-й итерации выполним пп. 1–5.

1. Вычислим $t_k = h_k/r_k$. Если $t_k > 1$, то $k_\varepsilon^\star = -(k+1)$ и окончание алгоритма. Иначе положим $r_{k+1} = r_k\sqrt{1 - t_k^2}$ и вычислим очередное приближение
$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k.$$
2. Вычислим $f(x_{k+1})$ и $\partial f(x_{k+1})$. Если $f(x_{k+1}) - f_{min} \leqslant \varepsilon$, то $x_\varepsilon^\star = x_{k+1}$, $k_\varepsilon^\star = k+1$ и окончание алгоритма. Иначе положим
$$\xi_{k+1} = \frac{B_k^T \partial f(x_{k+1})}{\left\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\right\|}, \quad h_{k+1} = \frac{\gamma(f(x_{k+1}) - f_{min})}{\left\|B_k^T \partial f(x_{k+1})\right\|}.$$
3. Вычислим $\lambda_1 = -p_k^T \xi_{k+1}$ и $\lambda_2 = -\xi_k^T \xi_{k+1}$. Положим
$$p_{k+1} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}\, p_k + \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}\, \xi_k, & \text{если } \lambda_1 > 0 \text{ и } \lambda_2 > 0, \\ p_k, & \text{если } \lambda_1 > 0 \text{ и } \lambda_2 \leqslant 0, \\ \xi_k, & \text{если } \lambda_1 \leqslant 0 \text{ и } \lambda_2 > 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_1 \leqslant 0 \text{ и } \lambda_2 \leqslant 0. \end{cases}$$
4. Вычислим $\mu_k = p_{k+1}^T \xi_{k+1}$. Если $-1 < \mu_k < 0$, то вычислим
$$B_{k+1} = B_k + (B_k\eta)\,\xi_{k+1}^T,\ \eta = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\mu_k^2}} - 1\right)\xi_{k+1} - \frac{\mu_k}{\sqrt{1-\mu_k^2}} p_{k+1}$$

и пересчитаем

$$h_{k+1} = \frac{h_{k+1}}{\sqrt{1-\mu_k^2}}, \qquad p_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu_k^2}}(p_{k+1} - \mu_k \xi_{k+1}).$$

Иначе положим $B_{k+1} = B_k$ и $p_{k+1} = 0$.

5. Перейдем к следующей итерации с x_{k+1}, h_{k+1}, r_{k+1}, ξ_{k+1}, p_{k+1}, B_{k+1}.

Теорема. *Если $f_{min} \geqslant f^\star$, то для $\forall x^\star \in X^\star$ справедливы неравенства*

$$\|A_{k+1}(x_{k+1}-x^\star)\|^2 \leqslant \|A_k(x_k-x^\star)\|^2 - \left(\frac{\gamma(f(x_k)-f_{min})}{\|B_k^T \partial f(x_k)\|}\right)^2, \ k = 0, 1, ...,$$

Здесь $A_k = B_k^{-1}, A_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$.

Теорема означает, что в методе amsg2p преобразование пространства таково, что в каждом очередном преобразованном пространстве переменных гарантируется уменьшение расстояния до множества точек минимума. Благодаря этому для каждой итерации $k > 1$ имеем неравенство

$$\|A_k(x_k-x^\star)\|^2 \leqslant \|x_0-x^\star\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\gamma(f(x_i) - f_{min})}{\|B_i^T \partial f(x_i)\|}\right)^2 = r_0^2 - \sum_{i=0}^{k-1} h_i^2 = r_k^2,$$

с помощью которого обеспечивается достаточное условие отсутствия точки $x_\varepsilon^\star$ при $f_{min} < f^\star - \varepsilon$ (реализовано в п. 1 алгоритм-функции amsg2p).

Антиовражная техника в методе amsg2p направлена на уменьшение степени овражности поверхностей уровня выпуклых функций подобно тому, как это сделано в r-алгоритмах [5]. Детерминант матрицы B_k стремится к нулю, так как если на k-м шаге реализуется преобразование пространства, то

$$\det(B_{k+1}) = \det(B_k)\det(I + \eta\xi_{k+1}^T) = \det(B_k)\sqrt{1-\mu_k^2}.$$

Для овражных функций это обеспечивает ускоренную сходимость метода amsg2p при произвольной начальной стартовой точке x_0 и достаточно малых значениях параметра ε ($\varepsilon \sim 10^{-10} - 10^{-14}$).

Последовательное уточнение границ на минимальное значение функции $f^\star$, например, по методу дихотомии позволяет использовать метод amsg2p для нахождения достаточно точного приближения к единственной точке минимума овражных функций. В докладе проиллюстрируем это на примере известной тестовой задачи maxquad [6], которая связана с минимизацией существенно овражной выпуклой кусочно-квадратичной функции $f(x) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant 5} \varphi_k(x)$, $x\in R^{10}$. Здесь $\varphi_k(x) = x^T H_k x - b_k^T x$, H_k — симметричные (10×10)-матрицы, такие, что $H_{kij} = e^{i/j}\cos(ij)\sin k$, если $i < j$, и $H_{kii} = i\,|\sin k|\,/10 + \sum\limits_{j\neq i} |H_{kij}|$, а компоненты векторов b_k определяются $b_{ki} = e^{i/k}\sin(ik)$.

Список литературы

[1] *Стецюк П. И.* Метод amsg2p для овражных выпуклых функций // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. № 12. — Екатеринбург: УрО РАН, 2011. — С. 57–58.

[2] *Стецюк П. И.* Субградиентные методы переменной метрики, использующие шаг Агмона-Моцкина и одноранговый эллипсоидальный оператор // Труды АТИК. — 2007–2008. Кишинэу: Эврика, 2009. — Т. I (XII). — С. 16–25.

[3] *Стецюк П. И.* Ортогонализующие линейные операторы в выпуклом программировании // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 3. — С. 97–119.

[4] *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.

[5] *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения — Киев: Наукова думка, 1979.

[6] *Lemarechal C.* Numerical experiments in nonsmooth optimization // Progress in nondifferentiable optimization / Ed. E. A. Nurminski. CP-82-58. — Laxenburg: International Institute for Applied System Analysis, 1982. — P. 61–68.

Граница смены триплетной периодичности в гене как область потенциальной склейки

Ю. М. Суворова, Е. В. Коротков

suvorovay@gmail.com, genekorotkov@gmail.com

Центр «Биоинженерия» РАН, Москва

В силу особенностей генетического кода гены, кодирующие белки, обладают характерным свойством — триплетной периодичностью (ТП), причем периодичность в них чаще всего не является явной. Анализ типов ТП показал, что ТП большинства генов принадлежит к одному из 2500 классов, это небольшое число по сравнению с общим количеством генов. В то же время существуют гены, содержащие участки с разными типами ТП [1]. Смена типа периодичности может быть свидетельством того, что данный ген был «склеен» из нескольких в процессе эволюции. Такие гены принято называть склеенными (*fused genes*) [2].

Поиск склеенных генов

Задача настоящей работы — создать алгоритм, который позволил бы определить границы перехода между участками с различной ТП в гене. Такие переходы по аналогии с генами мы называем *склейкой ТП*.

Различие ТП смежных участков. Далее мы рассматриваем генетическую последовательность как символьную $S = \{s(k), k = 1, 2, \dots L\}$ из алфавита $A = a, t, c, g$. Для некоторой координаты x будем рассматривать смежные участки длиной l (l кратно трем) $S_{10} = S(x-l+1, x)$ и $S_{20} = S(x+1, x+l)$. Также необходимо учесть возможность сдвига фазы ТП в точке x (так называемый «сдвиг рамки считывания» [3]). Для этого помимо S_{20} слева от x добавим к рассмотрению еще два участка: $S_{21} = S(x+2, x+l)$; $S_{22} = S(x+3, x+l)$ — участки длиной l со сдвигом на один и два символа соответственно.

Для определения размытой ТП в генетических текстах используются матрицы ТП — частотные матрицы $M(S_i)$ размера 3×4. Ячейка такой матрицы $m(i, j)$ — число символов типа i, находящихся в позиции j ($i = 1, \dots 4$; $i = 1$ для a, $i = 2$ для t, $i = 3$ для c, $i = 4$ для g) ($j = 1 \dots 3$) в рассматриваемой последовательности S_k. В нашем случае имеем четыре таких матрицы $M(S_{10})$, $M(S_{20})$, $M(S_{21})$

и $M(S_{22})$. Затем, чтобы избежать влияния отдельных символов, мы привели каждую матрицу к нормальному виду, используя

$$n(i,j) = \frac{m(i,j) - lp(i,j)}{\sqrt{lp(i,j)(1-p(i,j))}}, \quad p(i,j) = \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{3} m(i,j)\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{4} m(i,j)\right)}{l^2}.$$

Обозначим приведенные матрицы $N(S_{10})$, $N(S_{20})$, $N(S_{21})$ и $N(S_{22})$. Условием смены ТП в точке x будет отличие матрицы левого участка от всех матриц справа от x:

$$D(N(S_{10}), N(S_{2k})) > D_0; \;\; \forall k \;\; (k = 0, 1, 2). \tag{1}$$

Здесь $D(N(S_{10}), N(S_{2k}))$ — мера расхождения между двумя матрицами, D_0 — пороговое значение. В качестве меры расхождения мы использовали поэлементное сравнение матриц:

$$D(N(S_{10}), N(S_{2k})) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{(n_{s_{10}}(i,j) - n_{s_{2j}}(i,k))}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Величина $D(N(S_{10}), N(S_{2k}))$ имеет асимптотическое распределение $\chi^2(6)$. В соответствии с условием (1) мы выбираем величину $D_{min}(x)$ — минимум из трех величин $D(N(S_{10}), N(S_{2k}))$ $(k = 0, 1, 2)$ в точке x. Тогда итоговая мера определяется как $Z = -\log(D_{min} > x) = -3\log(P(\chi^2(6)) > D_0))$.

Поиск точки перехода. Такие вычисления проводились на протяжении всей последовательность гена. Шаг координаты x равен трем символам. На каждом шаге варьируются границы рассматриваемых участков $l = 60...600$, l кратно трем. Координата, соответствующая максимуму итоговой величины Z в последовательности, может рассматриваться как место потенциальной склейки, если ее значение превышает некоторый порог Z_0.

Определение порогового значения. Для определения значимого уровня был использован метод статистических испытаний Монте-Карло. Описанным выше алгоритмом были обработаны все последовательности генов банка данных KEGG/Genes-48 (`http://www.genome.jp/kegg/genes.html`) [4], общий объем около 4 млн. последовательностей. Для создания контрольной выборки все гены KEGG-48 были перемешаны с сохранением триплетной структуры последовательностей. Т. е. отдельно перемешивались символы, стоящие на первых, вторых и третьих позициях последовательности. При таком перемешивании сглаживаются все существующие в гене неоднородности ТП. Из сравнения результатов обработки «случайных» и реальных последовательностей было определено пороговое значение величины Z на уровне 5%.

Результаты

На уровне 5% в банке данных KEGG-48 было найдено более 300 тысяч генов, содержащих минимум одну смену типа периодичности.

В 131323 случаях, используя программу поиска подобий BLAST [5], мы обнаружили, что участки с разным типом ТП могли изначально принадлежать разным генам, которые в процессе эволюции были «склеены» в одну последовательность. Возможно, что для остальных случаев такие предковые гены тоже существовали, но могли быть утеряны в процессе эволюции или еще не помещены в базу данных.

Список литературы

[1] *Frenkel F. E., Korotkov E. V.* Classification analysis of triplet periodicity in protein-coding regions of genes // Gene. — 2008. — V. 421, № 12. — P. 52–60.

[2] *Pasek S., Risler J. L., Brŭzellec P.* Gene fusion/fission is a major contributor to evolution of multi-domain bacterial proteins // Bioinformatics. — 2006. — V. 22, № 12. — P. 1418–1423.

[3] *Korotkov E. V., Korotkova M. A.* Study of the triplet periodicity phase shifts in genes // J. Integrative Bioinformatics. — 2010. — V. 7, № 3. — P. 131–141.

[4] *Kanehisa M., Goto S.* KEGG: Kyoto Encyclopedia of Genes and Genomes // Nucleic Acids Res. — 2000. — V. 28, № 1. — P. 27–30.

[5] *Altschul S. F., Gish W., Myers E. W., Lipman D. J.* Basic Local Alignment Search Tool // J. Molecular Biology. — 1990. — V. 215, № 3. — P. 403–410.

Метод вольтерровых функционально-операторных уравнений в теории оптимального управления распределенными системами

В. И. Сумин

v_sumin@mail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В теории оптимального управления некоторый компромисс между стремлением к общности построений (призванной выявить новые связи и закономерности), с одной стороны, и желанием получить те или иные результаты в удобной для приложений форме, с другой, достигается, по-видимому, при переходе к описанию управляемых систем на языке функционально-операторных (функциональных) уравнений (см., например, [1]). Указанным требованиям унификации построений в теории оптимального управления распределенными системами во многом удовлетворяет предложенная в [2] (см. также [3, 4]) форма описания *управляемых начально-краевых задач* (УНКЗ) с помощью *вольтерровых функционально-операторных уравнений* (ВФОУ) вида

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m\left(\Pi\right), \tag{1}$$

где $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – множество изменения независимых переменных $t = \{t^1, ..., t^n\}$; $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ – заданная функция; $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ – управление; $A : L_p^m \to L_q^l$ – линейный ограниченный оператор, вольтерров на некоторой системе T подмножеств основного множества Π в том смысле, что для любого $H \in T$ сужение $A\left[z\right]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$; $p, q, k \in [1, +\infty]$. Приведенное определение «оператора, вольтеррова на системе множеств» из [2] — это многомерное обобщение известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра [5]. К ВФОУ (1) с богатыми системами T естественным образом (обращением главной части) приводятся разнообразные УНКЗ для эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегродифференциальных, с запаздываниями и др.) (см., например, [3, 6–10, 15–17, 20, 21]).

Переход от УНКЗ к эквивалентным ВФОУ (1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации. Он позволяет: получить конструктивные общие условия сохранения глобальной разрешимости УНКЗ при возмущении распределенных, граничных, начальных управлений и управлений, входящих в старшие коэффициенты уравнений (в этом случае управлением в (1) служит и оператор A), см., например, [2–4, 6–11] и обзор в [7]; показать, что для распределенных задач оптимизации характерно сильное вырождение особых управлений, когда вместе с *необходимыми условиями оптимальности* (НУО) первого порядка (например, поточечным принципом максимума) вырождаются и НУО второго порядка, и предложить новый общий способ вывода НУО особых управлений, использующий теорию тензорных произведений лебеговых пространств, см., например, [12, 13]; показать, что при выводе НУО сингулярность (в смысле Ж.-Л. Лионса [14]) часто можно «преодолевать» классическим способом (не прибегая к предложенному в [14] весьма, как правило, трудоемкому методу адаптированного штрафа), и решить ряд поставленных в [14] задач получения «сингулярных НУО» (см. [6]). Переход к ВФОУ оказывается естественным при обосновании принципа максимума (см., например, [15, 16]), численных методов оптимизации (см., например, [17, 18]) и при рассмотрении других вопросов теории оптимального управления распределенными системами (расширение оптимизационных задач, поточечные оценки решений УНКЗ, достаточные условия глобальной разрешимости нелинейных УНКЗ при всех допустимых управлениях и др.; см., например, [19–21].

Потребности теории оптимизации заставляют развивать собственно теорию вольтерровых операторов и уравнений в функциональных и абстрактных пространствах (см., например, [3, 4, 8, 11, 22]). Весьма полезным в теории оптимального управления оказалось введенное в [4] (см. также [11]) понятие равностепенно квазинильпотентного семейства операторов (см., например, [7, 10, 15, 16]).

В докладе предполагается дать обзор результатов, полученных в теории оптимального управления распределенными системами методом ВФОУ в последнее время.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (проект НК-13П-13) и АЦВП «Развитие потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер проекта 2.1.1/3927).

Список литературы

[1] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 622 с.

[2] *Сумин В. И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. — 1989. — Т. 305, № 5. — С. 1056–1059.

[3] *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. — 110 с.

[4] *Сумин В. И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 1998. — № 2. — С. 138–151.

[5] *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюллетень Московского университета. Секция А. — Т. 1, № 8. — С. 1–25.

[6] *Сумин В. И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I; II; III; IV // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 1999. — № 2(21). — С. 145–155; — 2001. — № 1(23). — С. 198–204; — 2002. — № 1(25). — С. 164–174; — 2004. — № 1(27). — С. 175–183.

[7] *Сумин В. И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. — 2003. № 1. — С. 91–108.

[8] *Сумин В. И., Чернов А. В.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2003. № 1. — С. 39–49.

[9] *Беляева О. А., Сумин В. И.* О задаче Коши для полулинейного волнового уравнения с управляемым старшим коэффициентом // Вестник Тамбовского университета. Естеств. и технич. науки. — 2007. — Т. 12, № 4. — С. 410–412.

[10] *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Гурса–Дарбу // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2006. — № 2. — С. 64–81.

[11] *Сумин В. И.* Равностепенная квазинильпотентность: определения, признаки, примеры применения // Вестник Тамбовского университета. Естеств. и технич. науки. — 2010. — Т. 15, № 1. — С. 453–466.

[12] *Сумин В. И.* Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. — 1991. — Т. 320, № 2. — С. 295–299.

[13] *Сумин В. И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского государственного университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — № 3. — С. 70–80.

[14] *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987. — 368 с.

[15] *Сумин В. И.* Вольтерровы функциональные уравнения и принцип максимума для распределенных оптимизационных задач // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2004. — № 1. — С. 178–191.

[16] *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестник Удмуртского государственного университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — № 2.

[17] *Сумин В. И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. — 1990. — Т. 30, № 1. — С. 3–21.

[18] *Чернов А. В.* К вопросу о сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Вестник ННГУ. — 2010. — № 2. — С. 124–130.

[19] *Сумин В. И.* О расширении оптимизационных задач, связанных с функциональными уравнениями в пространствах существенно ограниченных функций // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 1998. — № 1. — С. 126–133.

[20] *Чернов А. В.* О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговом пространстве // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, № 2. — С. 288–302.

[21] *Чернов А. В.* Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 3. — С. 95–107.

[22] *Сумин В. И., Чернов А. В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1402–1411.

О регуляризованной теореме Куна–Таккера и ее применении в оптимальном управлении и некорректных задачах

М. И. Сумин

msumin@sinn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Обсуждаются так называемая регуляризованная теорема Куна–Таккера в недифференциальной форме для параметрической задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве в случае сильно выпуклого функционала цели и возможности ее приложения при решении задач оптимизации, оптимального управления и некорректных задач. Эта теорема, доказательство которой основывается на методе двойственной регуляризации (см., например, [1, 2]), представляет собой утверждение в терминах минимизирующих последовательностей о возможности аппроксимации решения задачи выпуклого программирования точками минимума ее регулярной функции Лагранжа без каких-либо предположений регулярности самой оптимизационной задачи. Подчеркнем при этом, что аппроксимирующие решение задачи точки конструктивно указываются, поскольку они генерируются с помощью алгоритма двойственной регуляризации.

1. Регуляризованная теорема Куна–Таккера

Рассматриваемая параметрическая задача выпуклого программирования имеет вид:

$$(P_{p,r}) \qquad f(z) \to \min,\ Az = h + p,\ g(z) \leqslant r,\ \ z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $p \in H$, $r = (r_1, \ldots, r_m) \in R^m$ — параметры, $f : D \to R^1$ — непрерывный сильно выпуклый функционал, $A : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, $g(z) \equiv (g_1(z), \ldots, g_m(z))$, $g_i : D \to R^1$, $i = 1, \ldots, m$, — непрерывные выпуклые функционалы, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Обозначим через $z^0_{p,r}$ решение задачи $(P_{p,r})$ в случае его существования. Введем необходимые обозначения

$$L_{p,r}(z, \lambda, \mu) \equiv f(z) + \langle \lambda, Az - h - p\rangle + \langle \mu, g(z) - r\rangle,$$

$$\mathcal{D}^{\varepsilon}_{p,r} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|Az - h - p\| \leqslant \varepsilon,\ g_i(z) \leqslant r_i + \varepsilon,\ i = 1, \ldots, m\},\ \ \varepsilon \geqslant 0$$

и определим минимизирующее приближенное решение (МПР) в смысле Дж. Варги задачи $(P_{p,r})$ как последовательность $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1,2,\dots$, такую, что $f(z^k) \to \beta(p,r)$, $z^k \in \mathcal{D}^{\varepsilon^k}_{p,r}$, $\varepsilon^k \to 0$, $k \to \infty$. Здесь $\beta(p,r) \equiv \{f(z^0_{p,r}),$ если $z^0_{p,r}$ существует; $+\infty$ в противном случае$\}$ — S-функция задачи $(P_{p,r})$. Определим также двойственную задачу

$$V_{p,r}(\lambda,\mu) \to \sup,\ \ (\lambda,\mu) \in H \times R^m_+,\quad V_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv \inf_{z\in\mathcal{D}} L_{p,r}(z,\lambda,\mu).$$

Теорема 1. *Пусть $f : \mathcal{D} \to R^1$ — непрерывный сильно выпуклый субдифференцируемый функционал. Для существования ограниченного МПР в задаче $(P_{p,r})$ (и, значит, одновременно сходящегося сильно к $z^0_{p,r}$ при $k \to \infty$) необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $(\lambda^k,\mu^k) \in H \times R^m_+$, $k = 1,2,\dots$, такая, что*

$$L_{p,r}(z[\lambda^k,\mu^k],\lambda^k,\mu^k) = V_{p,r}(\lambda^k,\mu^k) \to \sup_{(\lambda,\mu)\in H\times R^m_+} V_{p,r}(\lambda,\mu),$$

$$z[\lambda^k,\mu^k] \equiv \mathrm{argmin}\{L_{p,r}(z,\lambda^k,\mu^k),\ z \in \mathcal{D}\} \in \mathcal{D}^{\varepsilon^k}_{p,r},\ \ \varepsilon^k \to 0,\ \ k \to \infty,$$
$$\langle(\lambda^k,\mu^k),(Az[\lambda^k,\mu^k] - h - p, g(z[\lambda^k,\mu^k]) - r)\rangle \geqslant 0,$$

а последовательность $z[\lambda^k,\mu^k]$, $k = 1,2,\dots$, была ограничена. При этом она является искомым МПР и $z[\lambda^k,\mu^k] \to z^0_{p,r}$, $k \to \infty$. В качестве последовательности $(\lambda^k,\mu^k) \in H \times R^m_+$, $k = 1,2,\dots$, может быть взята последовательность, генерируемая алгоритмом двойственной регуляризации [1, 2], *в соответствии с которым $(\lambda^k,\mu^k) = \mathrm{argmax}\{V_{p,r}(\lambda,\mu) - \alpha_k\|(\lambda,\mu)\|^2,\ (\lambda,\mu) \in H \times R^m_+\}$, α_k, $k = 1,2,\dots$, — произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел.*

Сформулированная теорема содержит в себе свой классический аналог и отличается от него двумя важными обстоятельствами:

1) она справедлива без каких-либо предположений регулярности (существования вектора Куна–Таккера) задачи $(P_{p,r})$;
2) она «устойчива» по отношению к ошибкам исходных данных и может использоваться, в частности, для решения некорректных задач.

Свойства сходимости в теореме 1 теснейшим образом связаны со свойствами субдифференцируемости выпуклой функции значений β

задачи $(P_{p,r})$. Она обобщается на случай задачи $(P_{p,r})$ с выпуклым функционалом цели, а также и на случай нелинейных задач математического программирования, когда роль классических функций Лагранжа берут на себя их модифицированные аналоги, конструкции которых являются следствиями дифференциальных свойств S-функций параметрических задач.

2. Приложения регуляризованной теоремы Куна–Таккера

Теорема Куна–Таккера в регуляризованной форме становится средством практического решения оптимизационных и некорректных задач, для которых характерным является отсутствие информации о разрешимости двойственной задачи.

Приложения в математическом программировании. Теорема 1 может быть непосредственно использована для приближенного решения задач математического программирования $(P_{p,r})$. При этом в случае существования седловой точки в задаче $(P_{p,r})$ конструктивно указываемая последовательность $(\lambda^k, \mu^k) \in H \times R^m_+$, $k = 1, 2, \ldots$, будет сходиться к нормальному решению двойственной задачи, а соответствующая последовательность $z[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, — к решению $z^0_{p,r}$ задачи $(P_{p,r})$. Если же двойственная задача не имеет решения, то последняя сходимость остается в силе, тогда как $\|(\lambda^k, \mu^k)\| \to +\infty,\ k \to \infty$.

Приложения в оптимальном управлении. Теорема 1 может быть непосредственно использована также для приближенного решения задач оптимального управления как сосредоточенными, так и распределенными системами, сводящихся к задаче математического программирования $(P_{p,r})$. В частности, одной из таких задач является параметрическая задача оптимального управления с операторным ограничением типа равенства и конечным числом функциональных ограничений-неравенств, имеющая вид

$$g_0(u) \equiv \int_0^T (\langle F(t)x[u](t), x[u](t)\rangle + \langle G(t)u(t), u(t)\rangle)dt \to \min,$$

$$\langle \varphi_1(t), x[u](t)\rangle = h(t) + p(t) \text{ при п.в. } t \in X,$$

$$\varphi_{2,i}(x[u](T)) \leqslant r_i \ \ i = 1, \ldots, m,$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \ \ x(0) = x_0 \in R^n, \ \ t \in [0, T], \ u \in \mathcal{D},$$

где $p \in H$, $r = (r_1, \ldots, r_m)^*$ — параметры, $g_0 : L_2(0,T) \to R^1$ — сильно выпуклый функционал, F, $A : [0,T] \to R^{n\times n}$, $B : [0,T] \to R^{n\times m}$, $G : [0,T] \to R^{m\times m}$ — непрерывные матрицы, φ_1, $h \in C[0,T]$ — заданные функции, $\varphi_{2,i} : R^n \to R^1$ — выпуклая, непрерывная вместе с градиентом $\nabla_x \varphi_{2,i}$ функция, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0,T) : u(t) \in U$ при п.в. $t \in (0,T)\}$, $U \subset R^m$ — выпуклый компакт, $X \subset [0,T]$, $X = \mathrm{cl}\,\overset{\circ}{X}$, $Z \equiv L_2(0,T)$, $H \equiv L_2(X)$.

Приложения в некорректных задачах. В отличие от своего классического аналога теорема 1 может применяться для решения широкого класса некорректных задач, и в первую очередь для нахождения нормальных решений операторных уравнений первого рода $Az = h + p$ с линейным ограниченным оператором $A : Z \to H$, Z, H — гильбертовы пространства. Одним из наиболее известных представителей таких уравнений является, например, популярное в различных физических приложениях интегральное уравнение Фредгольма первого рода с интегральным оператором $A(z)(x) \equiv \int_a^b K(x,s)z(s)\,ds$, $c \leqslant x \leqslant d$, с $z \in Z \equiv L_2(a,b)$, с правой частью $h \in L_2(c,d)$, с параметром $p \in L_2(c,d)$, с непрерывным на прямоугольнике $\Pi \equiv [a,b] \times [a,b]$ ядром K, поиск нормального решения для которого сводится к задаче минимизации $\|z\|^2 \to \min$, $Az = h + p$, $z \in L_2(a,b)$.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» Минобрнауки РФ (проекты 2.1.1/3927, 2.1.1/13303) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (проект НК-13П-13).

Список литературы

[1] *Сумин М. И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 4. — С. 602–625.

[2] *Сумин М. И.* Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009.

Оптимальный поиск экстремальной области функции

В. П. Тарасова

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва

Возникающие в исследовании прикладных оптимизационных задач функции являются, как правило, многоэкстремальными. В то же время общие эффективные методы решения таких задач отсутствуют. Поэтому представляется естественным рассматривать классы многоэкстремальных функций с ограничениями, позволяющими выделять каким-либо способом область наибольшего или наименьшего значения функции, и затем решать задачу оптимизации [1] в этой области.

В работе методом моделирования стратегии противника [2] решается задача оптимального поиска области наибольших значений для некоторого класса T вещественных функций. Функции из класса T определены в заданной области Ω m-мерного евклидова пространства, и удовлетворяют следующим условиям:

— для каждой функции f из класса T существует такая область наибольших значений Δ, $\Delta \subset \Omega$, в точках которой значения функции f превышают ее значения в любых других точках области Ω;

— области Δ, Ω, есть m-мерные кубы с ребрами, параллельными соответствующим осям координат;

— длина ребра гиперкуба Δ равна некоторому фиксированному вещественному δ, одному и тому же для всех функций класса T, длина ребра гиперкуба Ω равна $k\delta$, $k = 1, 2, \ldots$.

Задача поиска. Требуется для любой функции f из T по информации о значениях этой функции в p точках гиперкуба Ω, $p > (k-1)^m$, приближенно найти область наибольших значений Δ функции f.

Поиск будет осуществляться p-ходовыми стратегиями вычислителя, принадлежащими некоторому множеству и определяющими последовательный выбор точек из области Ω. То есть, выбор каждой очередной точки делается с учетом всей предыдущей информации.

Предполагается, что точное значение любой функции из класса T в выбранной точке становится сразу известным вычислителю.

Областью неопределенности назовем наименьшую по объему область из Ω, содержащую область наибольших значений Δ. До начала поиска областью неопределенности является вся область Ω. Область неопределенности определяется после каждого хода вычислителя по правилам, реализующим свойства функций из класса T, которые назовем правилами подсчета выигрыша.

Приведем пример двух таких правил:

1. если две точки, взятые в гиперкубе Ω, удалены друг от друга на расстояние, большее δ, то точка с меньшим значением функции не принадлежит области наибольших значений Δ;
2. если обе точки, находящиеся на расстоянии меньшем или равном δ, не принадлежат области Δ, то весь отрезок с концами в этих точках также не принадлежит области Δ.

Замечание. Приведенные правила всегда справедливы для любых двух точек, лежащих на одной прямой, при условии, что эта прямая параллельна одной из осей координат. Это утверждение касается и всех других правил подсчета выигрыша.

В работе используется теоретико-игровой язык, удобный для исследования такого рода задач, и к тому же позволяющий формализовать некоторые интуитивные понятия. Задача поиска области наибольших значений для любой функции из класса T представляется многоходовой (позиционной) антагонистической игрой $J\langle T\rangle$ вычислителя (первого игрока) с «природой» (вторым игроком). В качестве «природы» выступает класс T.

Стратегии вычислителя (первого игрока) принадлежат некоторому множеству $\mathfrak{R}$ p-ходовых детерминированных стратегий, и определяют выбор точек из области Ω. Стратегиями «природы» являются функции класса T.

Ходы игроков в игре делаются поочередно: ход первого игрока (выбор точки из области неопределенности) — ответный ход второго игрока (значение функции в этой точке). Такая пара называется ходом в игре.

Результатом стратегии поиска, или выигрышем первого игрока является объем области неопределенности, полученной после p ходов в игре с применением правила подсчета выигрыша. Эффективность любой стратегии A из множества $\mathfrak{R}$ в игре $J\langle T\rangle$ (в классе T) оценивается ее гарантированным выигрышем $\delta_p(A,T)$, равным $\delta_p(A,T)=\max\limits_{f\in T}\delta_p(A,f)$.

Задача оптимального поиска. Под задачей оптимального поиска области наибольших значений для функций класса T понимается задача построения оптимальной стратегии первого игрока (вычислителя) в игре $J\langle T\rangle$. Стратегия A_0 первого игрока является оптимальной (минимаксной) в игре $J\langle T\rangle$, если она имеет минимальный гарантированный выигрыш, то есть $\delta_p(A_0,T)=\min\limits_{A\in\mathfrak{R}}\delta_p(A,T)$.

Основная идея метода моделирования стратегии противника заключается в сведении задачи поиска оптимальной стратегии первого игрока в игре $J\langle T\rangle$ к такой же задаче в некоторой игре $J\langle S\rangle$, которая отличается от игры $J\langle T\rangle$ только множеством стратегий второго игрока, состоящим из одной специальной стратегии S, обладающей следующими свойствами:

1. В точках (x_i), выбираемых по любой стратегии первого игрока, стратегия S выдает значения $s(x_i)$, и при этом существует функция f из класса T такая, что $f(x_1)=s(x_1),\ldots,\ f(x_p)=s(x_p)$.
2. К значениям, выдаваемым стратегией S, применяются те же правила подсчета выигрыша, что и в игре $J\langle T\rangle$.
3. Стратегия первого игрока из множества $\mathfrak{R}$ стратегий оптимальна в игре $J\langle T\rangle$ тогда и только тогда, когда она оптимальна в игре $J\langle S\rangle$, и ее гарантированный выигрыш в игре $J\langle T\rangle$ равен ее выигрышу в игре $J\langle S\rangle$.

Стратегии S с такими свойствами мы называем синкретическими (синкретическим противником) для игры $J\langle T\rangle$.

Конструктивное определение синкретической для игры $J\langle T\rangle$ стратегии S является главной трудностью при решении задачи. Понятие синкретической стратегии представляет собой формализацию интуитивного понятия «худшей» для вычислителя функции в классе.

В соответствии с методом моделирования стратегии противника, сначала строится предполагаемая синкретическая стратегия S^0, которая должна удовлетворять условиям 1, 2, и быть походово-оптимальной стратегией второго игрока в игре $J\langle S^0\rangle$.

Затем определяется оптимальная против S^0 стратегия вычислителя, и проверяется выполнение равенства в условии 3. Если это равенство выполняется, то стратегия S^0 будет синкретической стратегией S для игры $J\langle T\rangle$, а найденная оптимальная против нее стратегия первого игрока — оптимальной стратегией в игре $J\langle T\rangle$.

Теорема. *Оптимальными стратегиями первого игрока в игре $J\langle S\rangle$ являются такие стратегии, принадлежащие множеству $\mathfrak{R}$, которые находят одну точку из области наибольших значений Δ, за наименьшее число ходов, а затем осуществляют оптимальный поиск отрезков наибольших значений функции из T [3] на каждой из m линий, проходящих через найденную точку, и параллельных осям координат. Эти же стратегии будут оптимальными стратегиями вычислителя в игре $J\langle T\rangle$.*

Численный результат. Если A_0 — любая из описанных оптимальных p-ходовых стратегий, то она находит первую точку из области Δ за $(k-1)^m$ ходов, а оставшиеся $p-(k-1)^m$ ходов используются для оптимального одномерного поиска. В случае, если выполняется условие $n = \lfloor p-(k-1)^m\rfloor/m$ — целое и большее единицы, то по окончании поиска будет найден m-мерный куб Γ, принадлежащий области Ω и содержащий область Δ с ребром, длина которого равна $(\delta+\delta/F_n)$, где F_n — n-е число Фибоначчи: $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$, $F_0 = F_1 = 1$.

Гарантированный выигрыш $\delta_p(A_0, T)$ стратегии вычислителя A_0, оптимальной в игре $J\langle T\rangle$, равен выигрышу этой стратегии в игре $J\langle S\rangle$ — объему m-мерного куба Γ: $\delta_p(A_0, T) = (\delta+\delta/F_n)^m$.

В случае, если величина $p-(k-1)^m$ не кратна m, но для поиска по каждой из m линий, проходящих через найденную из области Δ точку, остается больше одного хода, то получается m-мерный параллелепипед, содержащий область Δ.

Список литературы

[1] *Тарасова В. П.* О классах многоэкстремальных функций, допускающих поиск глобального экстремума методом Фибоначчи // ЖВМ и МФ. — 2004. — Т. 44, № 1. — С. 87–92.

[2] *Тарасова В. П.* Метод стратегии противника в задачах оптимального поиска. — М.: Издательство МГУ, 1988.

[3] *Тарасова В. П.* Оптимальные алгоритмы поиска отрезка наибольших значений для некоторого класса функций // ЖВМ и МФ. — 1981. — Т. 21, № 5. — С. 1108–1115.

Восстановление графа агентом с ограниченными ресурсами

Е. А. Татаринов

MDgerelo@yandex.ru

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Введение

Рассматривается задача распознавания конечного, неориентированного графа без петель и кратных ребер при помощи агента, который перемещается по нему и изменяет метки на вершинах и ребрах графа [1]. Целью данной работы было построение алгоритма восстановления графа, для которого $T^*(n) = O(n)$. В настоящей работе предложен новый алгоритм восстановления неизвестного графа, в котором оптимизируется количество шагов и различных камней, которые используются при проведении эксперимента по восстановлению графа. Уменьшение количества шагов происходит за счет использования агентом дополнительных ресурсов (камней и счетчиков). Данный алгоритм основан на методе восстановления графа при помощи построения на его вершинах неявной нумерации [2].

Основные обозначения

Рассматриваются конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все неопределяемые понятия общеизвестны, и их можно найти, например, в [3–5]. Пусть $G = (V, E)$ — граф, у которого V — множество вершин, E — множество ребер, $E \subseteq V \times V$, мощности n и m соответственно. Ясно что $m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Тройку $((u, v), v)$ будем называть инцидентором («точкой прикосновения») ребра (u, v) и вершины v. Множество таких троек обозначим I. Множество $L = V \cup E \cup I$ назовем множеством элементов графа G. Краской будем называть ресурс, который имеется у агента в неограниченном количестве, а камнем — ресурс, который имеется у агента в единичном экземпляре. Краски и камни образуют множество меток M, которые могут быть использованы при раскраске элементов графа G. Если элемент графа метится некоторой краской, то предыдущая краска стирается и вместо нее наносится новая. Если элемент графа метят камнем, то существующая на нем краска не уничтожается, а становится «невидимой» до тех пор, пока камень будет находиться на элементе. Обозначим h_t максимальную высоту дерева при поиске в глубину.

Окрестностью $O(v)$ вершины v будем называть множество элементов графа, состоящее из вершины v, всех вершин u смежных с v, всех ребер (u, v) и всех инциденторов $((v, u), v), ((v, u), u)$. Изоморфизмом графа G и графа H назовем такую биекцию $\varphi : V_G \to V_H$, что $(u, v) \in E_G$ точно тогда, когда $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E_H$. Изоморфные графы равны с точностью до обозначения вершин и раскраски их элементов.

Постановка задачи

Пусть задан класс K графов: конечных, неориентированных, без петель и кратных ребер, все элементы которых окрашены краской w. Задан мобильный агент, который передвигается по графу из вершины v в вершину u по ребру (u, v). При этом он может изменить окраску вершин v, ребра (u, v), инциденторов $((v, u), v), ((v, u), u)$ метками из множества M. Находясь в вершине v, агент A воспринимает («видит») метки всех элементов окрестности $O(v)$ и на этом основании определяет, по какому ребру (u, v) он будет перемещаться и как будет перекрашивать элементы из $O(v)$. Агент A обладает конечной, неограниченно растущей внутренней памятью, в которой фиксируется результат функционирования агента на каждом шаге и, кроме того, постепенно выстраивается представление графа G, вначале неизвестного агенту, списками ребер и вершин.

Надо разработать такой алгоритм функционирования (т. е. передвижения по графу и раскраски его элементов) агента A, что он, будучи помещен в произвольную вершину произвольного, неизвестного ему графа $G \in K$, через конечное число шагов построит граф H, изоморфный G (т. е. восстановит G).

Стратегия алгоритма

Алгоритм основан на методе обхода графа в глубину. Стратегия обхода графа в глубину хорошо известна [4, 5]. Она изменена с учетом того, что агенту граф изначально неизвестен, агент может воспринимать локальную информацию о графе и строить на вершинах графа нумерацию в порядке посещения вершин (M-нумерация) [3].

Реализовывать нумерацию агент будет неявно, при помощи набора камней. При этом для каждого камня i существует счетчик количества непомеченных ребер, которые есть в окрестности текущей вершины, перед тем как агент установит в ней камень i. Счетчик уменьшается на единицу, когда агент «видит» в окрестности текущей вершины вершину, помеченную камнем i. Когда счетчик обнулится, камень станет свободным и агент перейдет в вершину, снимет с нее камень i, вершину пометит краской b и вернется обратно. Агент использует для пометки свободный на данный момент камень. Камень считается свободным, если его счетчик равен нулю. Свободный на данный момент камень — камень с наименьшим номером. Камень i ассоциируется с M-номером, который неявно был присвоен вершине в момент установки в ней камня i. Такая ассоциация сохраняется до тех пор, пока камень не станет свободным.

В процессе обхода графа в глубину агент строит неявное дерево поиска в глубину, относительно которого ребра графа разбиваются на два множества: древесные и обратные. Древесные ребра проходятся два раза — в прямом и обратном направлениях. При первом прохождении по древесному ребру оно восстанавливается в графе G и один из его инциденторов метится краской r. После перехода по ребру агент устанавливает в новой вершине свободный камень и восстанавливает все обратные ребра текущей вершины. Для восстановления обратных ребер агенту не требуется переходить по ним, поскольку, находясь в текущей вершине, помеченной камнем i, он увидит камень j, установленный в вершине, с которой смежно восстанавливаемое обратное ребро. Зная i и j, агент может однозначно определить ассоциируемые с ними неявные M-номера и восстановить обратное ребро. При установке в вершине камня она добавляется в помеченный путь, при пометке ее краской b она удаляется из помеченного пути.

Алгоритм останавливается, когда помеченный путь будет пустым, а все вершины будут помечены краской b.

Теорема 1. *Выполняя алгоритм восстановления графа, агент восстановит любой граф G, с точностью до изоморфизма.*

Теорема 2. *Агент восстановит любой граф G, с точностью до изоморфизма, за время $O(n)$, при этом будет использовано $O(m)$ ячеек памяти, две краски и h_t камней.*

Выводы

Предложен новый полиномиальный алгоритм восстановления графа, который использует $O(n)$ шагов, $O(n)$ ячеек памяти, две краски r и b, а так же h_t камней, $h_t \leqslant n$. Предложенный алгоритм, также как и алгоритм [6], имеет линейную сложность, но использует не h_t красок, а h_t камней. Кроме того, предложенный алгоритм использует две различные краски, как и алгоритмы [2, 7, 8], но в отличие от последних, имеющих нелинейную сложность, предложенный алгоритм, за счет использования дополнительных камней, имеет линейную сложность. Модификации предложенного алгоритма позволяют уменьшить количество используемых камней для некоторых видов графов. Найдены виды графов, для восстановления которых агент будет использовать постоянное число.

Список литературы

[1] *Dudek G., Jenkin M.* Computational principles of mobile robotic. — Cambridge Univ., 2000.

[2] *Грунский И. С., Тихончев М. Ю.* О распознавании графов конечным автоматом // Вестник Донецкого университета. Серия А. Естественные науки. — 2001. — Вып. 2. — С. 351–356.

[3] *Грунский И. С., Татаринов Е. А.* Распознавание конечного графа блуждающим по нему агентом // Вестник Донецкого университета. Серия А. Естественные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 492–497.

[4] *Татаринов Е. А.* M-нумерация как метод распознавания графов // Збірник наукових праць «Питання прикладної математики математичного моделювання». — 2010. — С. 260–272.

[5] *Татаринов Е. А.* Базовый алгоритм восстановления конечного графа // Труды ИПММ НАН Украины. — 2010. — Т. 21.

[6] *Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. — С. 216–227. СПб.: БХВ — Петербург, 2003.

[7] *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979.

[8] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. — М.: МЦНМО, 2001.

Диагностика управляющих автоматов со счетно-бесконечными множествами состояний

В. А. Твердохлебов

tverdokhlebovva@list.ru

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов

Рассматривается диагностирование дискретных детерминированных автоматов со счетно-бесконечными множествами состояний. Используется новый способ задания законов функционирования автоматов символьными и числовыми графиками, точки которых представляют пары символьных и числовых автоматных отображений. Такой новый способ задания автоматов со счетно-бесконечным множеством состояний позволяет доопределять частичные автоматные отображения классическими методами интерполяции. Методы распознавания автоматов при таком способе задания законов их функционирования базируются на методах анализа, синтеза и распознавания геометрических кривых линий. Основными являются теоремы о связях автоматных отображений и произвольных геометрических кривых.

Введение

Рассматривается распознавание автомата средствами эксперимента с конечным семейством дискретных детерминированных автоматов со счетно-бесконечными множествами состояний. В связи с этим исключаются задания автоматов таблицами, графами, матрицами и т. п. Используется разработанное и изложенное в работах [1–3] задание автоматных отображений точками на аналитически заданных геометрических кривых. Для этого линейно упорядочиваются последовательности входных и последовательности выходных сигналов, на основании чего линейно упорядочивается автоматное отображение. Полученный символьный график преобразуется в график точек с целочисленными координатами (номерами последовательностей по введенным линейным порядкам). Числовая форма автоматного отображения позволяет доопределять частично заданные законы функционирования автомата классическими методами интерполяции графиков. Размещение точек геометрического образа законов функционирования автомата на аналитически заданных кривых позволяет на основе решений равенств и неравенств, построенных для уравнений кривых, определять области эффективного диагностирования.

Геометрические образы законов функционирования автоматов

Дискретный детерминированный автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S — счетно-бесконечное множество состояний, X и Y — конечные множества входных и выходных сигналов, $\delta : S \times X \to S$ и $\lambda : S \times X \to Y$ — функции переходов и выходов, функционирует в соответствии с уравнениями динамики $s(t+1) = \delta(s(t), x(t)), y(t) = \lambda(s(t), x(t))$. Функции δ и λ распространяются до функций вида $\delta : S \times X^* \to S$ и $\lambda : S \times X^* \to Y$, где X^* — множество всех конечных последовательностей в алфавите X, по правилам: $(\forall s \in S)(\forall x \in X)(\forall p \in X^*)\{\delta(s, xp) = \delta(\delta(s, x), p)\}$ и $(\forall s \in S)(\forall x \in X)(\forall p \in X^*)\{\lambda(s, px) = \lambda(\delta(s, p), x)\}$. Если ввести линейные порядки ω_1 на X^* и ω_2 на Y, то автоматное отображение $\rho_s = \bigcup\limits_{p \in X^*} \{(p, \lambda(s, p))\}$ может быть преобразовано в два графика: символьный график в системе координат с осью абсцисс (X^*, ω_1) и осью ординат (Y, ω_2) и числовой график в главном квадранте прямоугольной декартовой системы координат на плоскости на основе замены символьных координат точек их номерами по порядкам ω_1 и ω_2. Предполагается, что автоматное отображение ρ_s представляет автомат со счетно-бесконечным множеством состояний. Это означает существенное снятие ограничений в задании автоматного отображения точками графика.

Интерполяция частично заданных законов функционирования автоматов

Числовая форма автоматного отображения, представленная графиком, позволяет доопределять частично заданные законы функционирования автоматов на глубокой и разработанной основе — доопределять графики классическими методами интерполяции (Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Стирлинга, Бесселя и т. д.). Для этого все или некоторые известные точки автоматного отображения полагаются узлами интерполяции. Метод интерполяции имеет вид принимаемой гипотезы. Аналитическая формула геометрической кривой, на которой расположены точки автоматного отображения, позволяет любое счетное множество точек кривой рассматривать как точки автоматного отображения.

Распознавание автоматов, заданных геометрическими образами

Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ — инициальный дискретный детерминированный автомат с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний S, ρ_s — соответствующее ему автоматное отображение, G — числовой график автоматного отображения. Предположим далее, что множество дефектов I реальной системы R задано семейством автоматов $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$, где $A_i = (S_i, X, Y, \delta_i, \lambda_i, s_{0i})$, а $\beta = \{G_i\}_{i \in I}$ — семейство числовых графиков автоматных отображений. Пусть, кроме этого, числовые графики семейства β размещены на геометрических кривых линиях вида $y = f_i(x)$, где $i \in I$. Неравенства вида $f_i(x) \neq f_j(x)$, где $i \neq j$, определяют области, в которых содержащиеся входные последовательности $p \in X^*$ являются диагностическими тестами для пары дефектов (i, j). Равенства вида $f_i(x) = f_j(x)$ определяют области входных последовательностей, неэффективных для диагностирования.

Принципиально важным является установление взаимосвязей между автоматными отображениями автоматов со счетно-бесконечным множеством состояний и геометрическими кривыми линиями.

Теорема 1. *Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ — инициальный дискретный детерминированный автомат с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний S, ω_1 — линейный порядок на X^* и $(\alpha_0, \alpha_l]$ — полуинтервал на оси ординат, где $l = |Y|$. Тогда*

— *для любого взаимно-однозначного отображения «в» $\varphi : N^+ \to R$, где для любых $n, n' \in N^+$ из $n < n'$ следует $\varphi(n) < \varphi(n')$;*
— *для любого разбиения полуинтервала $(\alpha_0, \alpha_l]$ на l полуинтервалов $(\alpha_0, \alpha_1], (\alpha_1, \alpha_2], \ldots, (\alpha_{l-1}, \alpha_l]$ и взаимно-однозначного отображения $\nu : Y \to \{(\alpha_{i-1}, \alpha_i], 1 \leqslant i \leqslant l\}$,*

пара чисел (j, β), где $j \in Pr_2\varphi$ и $\beta \in (\alpha_0, \alpha_l]$, однозначно определяет пару (p, y_i), для которой j — номер $p \in X^*$ по порядку ω_1 и $\beta \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$.

Теорема 2. *Любые:*

— *геометрическая кривая* $y = f(x)$;
— *последовательность* h *точек*

$$(x_{i_1}, f(x_{i_1})), (x_{i_2}, f(x_{i_2})), ..., (x_{i_j}, f(x_{i_j})), \ldots,$$

где $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_j} < \ldots$;
— *число* $m \in N^+$ *и разбиение последовательности* h *на подпоследовательности из* m *элементов каждая;*
— *полуинтервал* $\Delta = (\alpha, \beta]$ *на оси ординат, где* $\min\limits_{x\in\Delta} f(x) < \alpha < \beta \leqslant \max\limits_{x\in\Delta} f(x)$;
— *разбиение полуинтервала* Δ *на конечное множество полуинтервалов вида* $(\alpha, \alpha_1]$, $(\alpha_1, \alpha_2]$, $\ldots$, $(\alpha_{l-1}, \beta]$, *где* $l \in N^+$,

однозначно определяют геометрический образ законов функционирования дискретного детерминированного автомата с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний, с m *входными и* l *выходными сигналами.*

Выводы. Новый способ задания управляющих автоматов — представление автоматных отображений числовыми графиками, размещенными на аналитически заданных геометрических кривых линиях, — снимает ограничения на множество состояний автомата (быть конечным множеством). После представления законов функционирования дискретных детерминированных автоматов числовыми графиками, размещенными на геометрических кривых линиях, поиск решения задач диагностирования автоматов может производиться с использованием методов анализа геометрических кривых линий.

Список литературы

[1] *Твердохлебов В. А.* Техническое диагностирование в геометрической интерпретации задач, моделей и методов // Автоматизация проектирования дискретных систем. — Минск: Белорус. гос. ун-т, 1995. — С. 97.

[2] *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы конечных детерминированных автоматов // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Сер. Математика, механика, информатика. — 2005. — Т. 5, № 1. — С. 141–153.

[3] *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы законов функционирования автоматов. — Саратов: Научная книга, 2008.

О построении восстановлений баз данных для некоторых классов формул-ограничений

Е. Е. Трифонова

etrifonova@yandex.ru

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

В работе рассматривается использование формальных логических моделей для устранения противоречий в содержимом баз данных. *Схемой базы данных* будем называть некое конечное множество предикатов $\mathbb{P}$ и множество ограничений, записанных в виде формулы Φ. *Базой данных* D будем называть совокупность таблиц $\mathbb{T}$ и формулы Φ: $D = \langle \mathbb{T}, \Phi \rangle$. При этом каждому предикату P из множества предикатов $\mathbb{P}$ ставится в соответствие таблица T из $\mathbb{T}$, которая определяет значение истинности предиката. Элементом таблицы является *кортеж*.

Будем обозначать множество кортежей, которые присутствуют в таблице T, как X_T, а множество кортежей, которые присутствуют в базе D, как $X = X(D)$, $X = \bigcup\limits_{T \in \mathbb{T}} X_T$. Определим множество функций $F : X \to \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. *Вспомогательным предикатом* от двух переменных $g(x_1, x_2)$ будем называть выражение вида $(f_i(x_1) \mathcal{R} f_j(x_2))$, где $f_i, f_j \in F$, а $\mathcal{R}$ — одно из отношений $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\neq$, $=$. Пусть G — множество всевозможных вспомогательных предикатов.

В качестве формулы-ограничения Φ будем рассматривать замкнутые формулы на языке первого порядка, записанные с использованием связок $\vee$, $\&$, $\neg$, $\to$, предикатов из $\mathbb{P}$ и вспомогательных предикатов из G. Переменные принимают значения из множества кортежей X. Если формула Φ истинна на множестве X, то базу данных D будем называть *непротиворечивой*. Если все таблицы базы данных пусты, то считаем, что любая формула Φ, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, истинна.

Если формула Φ ложна на множестве X, то будем говорить, что в базе данных D содержатся противоречия. Устранять противоречия будем посредством удаления кортежей из базы данных. *Восстановлением* Q для базы данных D будем называть базу данных, для которой выполняется следующее:

1. Схемы баз данных Q и D совпадают.
2. Каждый кортеж из таблицы Q содержится в соответствующей таблице D.
3. База данных Q не содержит противоречий.
4. Добавление к Q любого кортежа из D, который в Q не содержится, в соответствующую таблицу приводит к тому, что в Q возникают противоречия.

Будем обозначать Z_Q множество кортежей, удалённых из D для получения восстановления Q: $Z_Q = X(D) \setminus X(Q)$. Для каждой базы, содержащей противоречия, существует некоторое множество восстановлений. Те из них, которые содержат наибольшее число кортежей, будем называть *наилучшими восстановлениями*. Множество наилучших восстановлений для базы D будем обозначать $\mathbb{Q}_{max} = \mathbb{Q}_{max}(D)$.

Пусть задана формула Φ и требуется построить наилучшее восстановление $Q_{max} \in \mathbb{Q}_{max}$. Рассмотрим его построение для некоторых классов формул.

Утверждение 1. *Пусть* $P \in \mathbb{P}$, T *— таблица предиката* P, $\Phi = \forall x P(x)$. *Тогда* $X(Q_{max}) = X_T$.

Данная формула Φ фактически означает, что любой кортеж из базы данных содержится в таблице T предиката P.

Утверждение 2. *Пусть* $P \in \mathbb{P}$, T *— таблица предиката* P, $\Phi = \exists x P(x)$. *Тогда* $X(Q_{max}) = \varnothing$.

Построение восстановления в этом случае подразумевает, что если в P есть кортежи, то формула истинна, а если нет, то построить восстановление можно только путём удаления всех кортежей из базы данных.

Для сокращения записи будем называть *элементарным вспомогательным условием* и обозначать $h(x_1, \ldots, x_n)$ конъюнкцию вспомогательных предикатов, построенную следующим образом:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_{i_1}, x_{j_1}) \,\&\, g_2(x_{i_2}, x_{j_2}) \,\&\, \ldots \,\&\, g_k(x_{i_k}, x_{j_k}),$$

где $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$, $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$. Элементарное вспомогательное условие может быть тождественно равно «истине». Далее в утверждениях будем считать, что везде под $h(x_1, \ldots, x_n)$ подразумевается элементарное вспомогательное условие, если не оговорено иное.

Утверждение 3. *Пусть* $D = \langle \mathbb{T}, \Phi \rangle$, $T \in \mathbb{T}$ *— таблица предиката* P,

$$\Phi = \forall x P(x) \,\&\, h(x) \,\&\, \Phi_1.$$

Тогда $X(Q_{max}(D)) = X_T \cap X(Q_{max}(D_1))$, *где* $D_1 = \langle \mathbb{T}, \Phi_1 \rangle$.

В данном случае необходимо сначала удалить все кортежи, которые не содержатся в таблице T, а потом устранять противоречия, относящиеся ко второй части формулы.

Следствие 1. *Пусть* $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{P}$ *и* $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *— соответствующие им таблицы,*

$$\Phi = \forall x_1 P_1(x_1) h_1(x_1) \,\&\, \forall x_2 P_2(x_2) \,\&\, h_2(x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, \forall x_n P_n(x_n) \,\&\, h_n(x_n).$$

Тогда $X(Q_{max}) = X_{T_1} \cap X_{T_2} \cap \ldots \cap X_{T_n}$.

Следствие 2. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}$, T_1, T_2 *— таблицы, соответствующие* P_1, P_2,

$$\Phi = \forall x_1 P_1(x_1) \,\&\, h_1(x_1) \,\&\, \exists x_2 P_2(x_2) \,\&\, h_2(x_2).$$

Тогда $X(Q_{max}) = \{x | (x \in X_{T_1} \cap X_{T_2}) \,\&(h_1(x) \,\&\, h_2(x) = 1)\}$.

Утверждение 4. *Пусть* $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}$ *и* $T_1, \ldots, T_n$ *— соответствующие им таблицы,* $\Phi = \exists x_1 P_1(x_1) \& h_1(x_1) \vee \ldots \vee \exists x_n P_n(x_n) \& h_n(x_n)$. *Тогда* $X(Q_{max}) = \varnothing$.

Эта формула будет истинной только в том случае, когда в каждой из таблиц предиката будет содержаться хотя бы один кортеж, удовлетворяющий условию. Если же это не так, то возникает противоречие, которое можно устранить только удалением всех кортежей из всех таблиц предикатов.

Утверждение 5. *Пусть* $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}$ *и* $T_1, \ldots, T_n$ *— соответствующие им таблицы,* $\Phi = \forall x_1 (P_1(x_1) \to h_1(x_1)) \& \ldots \& \forall x_n (P_n(x_1) \to h_n(x_n))$.

Тогда $X(Q_{max}) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x | (x \in T_i) \& (h_i(x) = 1)\}$.

В данном случае формула Φ означает, что в таблице каждого из предикатов P должны содержаться данные, которые удовлетворяют записанному условию. Если какой-то кортеж ему не удовлетворяет, то его надо удалить. При этом дополнительных противоречий из-за производимых удалений возникать не будет.

Утверждение 6. *Пусть* $D = \langle \mathbb{T}, \Phi \rangle$ *и* $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ *— таблицы, соответствующие предикатам* P_1, P_2. *Пусть* $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, *где* $\Phi_1 = \forall x_1(P_1(x_1) \rightarrow h_1(x_1))$, $\Phi_2 = \forall x_2(P_2(x_2) \rightarrow h_2(x_2))$. *Обозначим* $D_1 = \langle \mathbb{T}, \Phi_1 \rangle$, $D_2 = \langle \mathbb{T}, \Phi_2 \rangle$. *Тогда* $X(Q_{max}(D))$ *будет равно тому из множеств* $X(Q_{max}(D_1)), X(Q_{max}(D_2))$, *которое будет содержать больше кортежей.*

Утверждение 7. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}$ *и* T_1, T_2 *— соответствующие им таблицы,*

$$\Phi = \forall x_1 \exists x_2 (P_1(x_1) \rightarrow (P_2(x_2) \& h(x_1, x_2))).$$

Тогда $Z_{Q_{max}} = \{x | (x \in T_1)$ *и для всех* $y \in T_2$ $h(x, y) = 0\}$, *если таблица* T_2 *не пустая, и* $Z_{Q_{max}} = X_{T_1}$, *если* T_2 *пустая.*

Возникновение противоречий для данной формулы может быть из-за того, что для какого-либо кортежа из P_1 нет такого кортежа из P_2, чтобы условие выполнялось, соответственно, надо удалить все такие кортежи из P_1. Если же P_2 — пустая, то тогда необходимо удалить все кортежи из P_1.

Утверждение 8. *Пусть* $D = \langle \mathbb{T}, \Phi \rangle$ *и* $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ *— таблицы, соответствующие предикатам* P_1, P_2. *Пусть* $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, *где*

$$\Phi_1 = \forall x_1 \exists x_2 (P_1(x_1) \rightarrow (P_2(x_2) \& h_1(x_1, x_2))),$$

$$\Phi_2 = \forall x_3 \exists x_4 (P_1(x_3) \rightarrow (P_2(x_4) \& h_2(x_3, x_4))).$$

Обозначим $D_1 = \langle \mathbb{T}, \Phi_1 \rangle$, $D_2 = \langle \mathbb{T}, \Phi_2 \rangle$. *Тогда* $Z_{Q_{max}(D)}$ *будет равно либо* $Z_{Q_{max}(D_1)}$, *либо* $Z_{Q_{max}(D_2)}$, *в зависимости от того, в каком из них содержится меньше кортежей, а также* $Z_{Q_{max}(D)} \subseteq X_{T_1}$.

В соответствии с утверждением 7 удаление кортежей для построения восстановления следует производить из P_1. Кроме того, в соответствии с утверждением 6 достаточно сделать истинной одну из частей дизъюнкции, выбор которой необходимо осуществлять по числу удаляемых кортежей.

Утверждение 9. *Пусть* $P_1, P_2 \in \mathbb{P}$ *и* T_1, T_2 *— соответствующие им таблицы,*

$$\Phi = \forall x_1 \exists x_2 (\neg P_1(x_1) \vee \neg P_2(x_2) \vee h(x_1, x_2)).$$

Обозначим $Z_1 = \{x | (x \in T_1)$ *и для всех* $y \in T_2$ $h(x, y) = 0\}$, *если* T_2 *— не пустая, и* $Z_1 = X_{T_1}$, *если* T_2 *— пустая. Тогда* $Z_{Q_{max}}$ *будет* *равно либо Z_1, либо X_{T_2}, в зависимости от того, в каком из множеств кортежей меньше.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

Об одной задаче теории расписаний

М. А. Трушников

ctgy@ya.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматривается задача составления однопроцессорного расписания для n работ на отрезке времени $[0, 2m]$. Работы — это открытые отрезки, нужно расположить их внутри отрезка $[0, 2m]$ так, чтобы никакие два из них не пересекались. Входными данными задачи являются целые числа m и n и действительные числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$, l_i — длина i-й работы, $0 < l_i \leqslant 1$. Стоимость выполнения работ на отрезках $[1, 2], [3, 4], \ldots, [2m-1, 2m]$ ровно в k раз больше, чем на отрезках $[0, 1], [2, 3], \ldots, [2m-2, 2m-1]$, где k — константа. Далее отрезки из первой и второй групп будут называться дорогими и дешевыми соответственно. Для оценки качества расписания используется следующая целевая функция. Пусть $l_i^{'}$ — время, в течение которого i-я работа выполнялась в одном из дешевых отрезков, $l_i^{''} = l_i - l_i^{'}$. Требуется минимизировать функцию

$$\sum_{i=1}^{n} \left(l_i^{'} + k \cdot l_i^{''} \right).$$

Такую постановку можно интерпретировать следующим образом. Требуется составить расписание на m суток вперед, притом дорогие отрезки соответствуют дневному времени, дешевые — ночному, и предполагается, что ночью потребление электроэнергии стоит дешевле. Различные задачи, связанные с энергосберегающими расписаниями, рассмотрены, например, в [1].

Задача является NP-трудной, так как к ней можно свести задачу о разбиении набора чисел на два множества, суммы элементов в которых совпадают.

Теорема. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует полиномиальный от n и m алгоритм A_ε, строящий решение стоимости, не превосходящей $(1 + k\varepsilon)\, OPT$, где OPT — точное решение.*

Доказательство. Для удобства переформулируем задачу. Есть m бесконечных контейнеров. Стоимость помещения множества работ суммарного размера L в любой контейнер есть L, если $L \leqslant 1$, и $1 + (L - 1)k$ — иначе. Требуется расположить исходные n работ в m таких контейнерах, минимизировав суммарную стоимость. Ясно, что из решения переформулированной задачи можно получить решение исходной с тем же значением целевой функции.

Алгоритм. На вход подается действительное число $\varepsilon > 0$.

— Разобьем все работы на две группы:

$$B = \{i : t_i \geqslant \varepsilon\} \quad \text{и} \quad S = \{i : t_i < \varepsilon\}.$$

Пусть $n^{'} = |B|$. Ясно, что $OPT \geqslant \varepsilon \cdot n^{'}$.

— Введем $p = 2/\varepsilon^2$. Разобьем все работы из B на $\lceil p \rceil$ групп: $\{B_1, B_2, \ldots, B_{\lceil p \rceil}\}$. В группу с индексом $\lceil p \rceil$ поместим $\lceil n'/p \rceil$ самых коротких работ. В следующую группу — следующие по величине $\lceil n'/p \rceil$ работ. И так далее. В B_1 будут находиться самые длинные работы. Ясно, что $|B_1| \leqslant \lfloor n'/p \rfloor$.

— Теперь для $i = 2, \ldots, n$ длину каждой работы из B_i округлим вверх до длины самой короткой работы из B_{i-1}. Работы из множеств $B_2, \ldots, B_{\lceil p \rceil}$ с округленными длинами обозначим $B^{'}$.

— Заметим, что в $B^{'}$ длины работ принимают не более $\lceil p \rceil$ различных значений. Найдем точное решение для работ $B^{'}$ с помощью динамического программирования за время $O(m \cdot n^{2p})$. Алгоритм будет описан ниже. Полученное распределение работ $B^{'}$ по m контейнерам применим к исходным (неокругленным) работам из множеств $B_2, \ldots, B_{\lceil p \rceil}$.

— Работы из B_1 разместим в бесконечном дорогом пространстве любого из контейнеров. Заметим, что

$$|B_1| \leqslant \lfloor n^{'}/p \rfloor \leqslant \frac{n^{'}\varepsilon^2}{2} \leqslant \frac{\varepsilon \cdot OPT}{2}.$$

Следовательно, стоимость размещения всех работ из B не превосходит

$$(1 + \varepsilon/2)\, OPT\,. \tag{1}$$

— Работы из множества S будем добавлять к уже полученному распределению работ из B. Переберем работы из S в произвольном порядке и каждую будем помещать в самый свободный контейнер. После этого либо все маленькие работы будут выполнены в дешевое время, либо каждый контейнер заполнен хотя бы на $1 - \varepsilon$. В первом случае упаковка работ из S не добавляет ничего к оценке (1), во втором — вклад в погрешность решения при упаковке S можно оценить сверху как $\varepsilon \cdot k \cdot (1 + 2\varepsilon) \cdot OPT$ при условии, что $\varepsilon \leqslant 1/2$.

Грубая оценка стоимости упаковки всех n работ в m контейнеров по данному алгоритму имеет вид

$$OPT\left(1 + \frac{\varepsilon \cdot k}{2}\right) + 3\varepsilon \cdot k \cdot OPT = OPT\left(1 + \frac{7\varepsilon \cdot k}{2}\right).$$

Для завершения доказательства осталось описать, как используется динамическое программирование.

Алгоритм динамического программирования. На вход подается набор работ $l_1, \ldots, l_n$, $l_i \geqslant \varepsilon$. Длины работ могут принимать не более $\lceil p \rceil$ различных значений. За n_i обозначим число работ i-го типа, $i = 1, \ldots, \lceil p \rceil$. За $M(a_1, a_2, \ldots, a_{\lceil p \rceil}, s)$ обозначим минимальную стоимость расположения a_1 работ первого типа, …, $a_{\lceil p \rceil}$ работ типа $\lceil p \rceil$ в s контейнерах. Для $s = 1$ эти значения вычисляются очевидным образом. Остальные значения будем вычислять, используя формулу

$$\begin{aligned} &M(a_1, a_2, \ldots, a_{\lceil p \rceil}, s) = \\ &\qquad = \min_{\overline{v}} (M(a_1 - v_1, \ldots, a_{\lceil p \rceil} - v_{\lceil p \rceil}, s - 1) + M(v_1, \ldots, v_{\lceil p \rceil}, 1)), \end{aligned}$$

где $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_{\lceil p \rceil})$, $v_i \leqslant a_i$.

Для вычисления каждого из $n^{\lceil p \rceil}$ значений для $s = 2, \ldots, m$ нужно перебрать $n^{\lceil p \rceil}$ векторов $\overline{v}$. Итого, сложность алгоритма — $O(m \cdot n^{2\lceil p \rceil})$. ∎

Список литературы

[1] *Albers S.* Energy-efficient algorithms // Communications of the ACM. — 2010. — V. 53, № 5. — P. 86–96.

[2] *Fernandez de la Vega W., Lueker G. S.* Bin packing can be solved within $1+\varepsilon$ in linear time // Combinatorica. — 1981. — V. 1, № 4. — P. 349–355.

Об оценках глубины α-пополнений систем функций трехзначной логики

Д. В. Трущин

dimkatr@yandex.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет

Рассматривается задача о реализации функций трехзначной логики α-формулами, т. е. такими формулами, в которых каждая подформула содержит не более одной нетривиальной главной подформулы. В качестве меры сложности формул рассматривается глубина. В работе приведена последовательность функций, для которой справедливы экспоненциальные нижние оценки глубины над системой из всех бинарных операций с правым сокращением. Кроме того, получены экспоненциальные верхние оценки глубины произвольной функции над рассматриваемой системой.

Через P_k обозначим множество всех функций k-значной логики, $k \geqslant 2$, а через $H(n)$ — множество всех функций, принадлежащих множеству H, $H \subseteq P_k$, и зависящих только от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_k. Замыкание системы $\mathfrak{A}$ (относительно операций суперпозиции и введения фиктивной переменной) обозначим через $[\mathfrak{A}]$. Необходимые определения можно найти в [1].

Пусть Φ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$. Сложностью $L(\Phi)$ этой формулы называется число символов переменных, входящих в нее. Глубину $D(\Phi)$ формулы Φ определим индуктивно. Если Φ состоит только из символа переменной, то $D(\Phi) = 0$. Если Φ имеет вид $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, где $f \in \mathfrak{A}$, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — некоторые формулы над $\mathfrak{A}$, то $D(\Phi) = 1 + \max D(\Phi_i)$, где максимум берется по всем $i = 1, \ldots, m$. Для любой функции $f \in [\mathfrak{A}]$ положим $L_{\mathfrak{A}}(f) = \min L(\Phi), D_{\mathfrak{A}}(f) = \min D(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам Φ над $\mathfrak{A}$, реализующим f.

Известно [2], что для любой полной конечной системы булевых функций $\mathfrak{A}$ и любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ выполнено соотношение
$$L_{\mathfrak{A}}(f) \lesssim \frac{2^n}{\log_2(n)}.$$

В работе [3] показано, что для произвольной конечной системы булевых функций $\mathfrak{A}$ и любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in [\mathfrak{A}]$ справедливы неравенства
$$L_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c^n, \quad D_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant dn,$$
где c и d — некоторые константы, зависящие от $\mathfrak{A}$.

Следуя [4], определим индуктивно понятие α-формулы Φ над конечной системой функций алгебры логики $\mathfrak{A}$. Символ переменной является тривиальной α-формулой. Выражение вида $f(\varphi, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$, где φ — α-формула над $\mathfrak{A}$, f — символ m-местной функции из $\mathfrak{A}$, $m \geqslant 1$, а $x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ — символы переменных, также является α-формулой. Отметим, что каждая α-формула является формулой над $\mathfrak{A}$. Множество всех функций, реализуемых α-формулами над $\mathfrak{A}$, будем называть α-пополнением системы $\mathfrak{A}$ и обозначать через $[\mathfrak{A}]_\alpha$. Система $\mathfrak{A} \subset P_k$ называется α-порождающей для некоторого класса функций $H \subset P_k$, если $[\mathfrak{A}]_\alpha = H$. Система $\mathfrak{A} \subset P_k$ называется α-полной, если она является α-порождающей для P_k.

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система булевых функций, $f \in [\mathfrak{A}]_\alpha$. Положим $D^\alpha_{\mathfrak{A}}(f) = \min D(\Phi)$, $L^\alpha_{\mathfrak{A}}(f) = \min L(\Phi)$, где минимум берется по всем α-формулам Φ над $\mathfrak{A}$, реализующим f. Формулу Φ над $\mathfrak{A}$ назовем минимальной (для функции f), если Φ реализует f и $D(\Phi) = D^\alpha_{\mathfrak{A}}(f)$. Определим функцию Шеннона $D^\alpha_{\mathfrak{A}}(n) = \max D^\alpha_{\mathfrak{A}}(f)$, где максимум берется по всем функциям $f \in H(n)$, $H = [\mathfrak{A}]_\alpha$. Отметим, что для введенных мер сложности справедливы неравенства $c_1 D^\alpha_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant L^\alpha_{\mathfrak{A}}(f) \leqslant c_2 D^\alpha_{\mathfrak{A}}(f)$, где c_1 и c_2 — положительные константы, зависящие от $\mathfrak{A}$.

В работе [5] показано, что для любой конечной системы $\mathfrak{A}$ булевых функций существует многочлен $P(n)$, такой, что $D^\alpha_{\mathfrak{A}}(n) \leqslant P(n)$. Известно также [6, 5], что в P_2 не существует конечных α-полных систем. При этом в P_k при $k \geqslant 3$ конечные α-полные системы существуют [4, 6, 7].

В данной работе рассматриваются функции трехзначной логики. Положим $E_3 = \{0, 1, 2\}$.

Двухместную функцию $f(x_1, x_2) \in P_3$ будем называть бинарной операцией с правым сокращением, если для любых $b, c \in E_3$ существует, и притом ровно один, элемент $a \in E_3$, такой, что $f(a, b) = c$. Множество всех бинарных операций с правым сокращением обозначим через $\mathfrak{B}$.

Одноместную функцию $s(x) \in P_3$ будем называть подстановкой, если для любых различных $a_1, a_2 \in E_3$ справедливо неравенство $s(a_1) \neq s(a_2)$. Множество всех подстановок обозначим через S. Пусть $s \in S$. Легко видеть, что существует бинарная операция с правым сокращением f, такая, что для любых $a, b \in E_3$ имеет место равенство $f(a, b) = s(a)$, т.е. $f(x, y) = s(x)$. Таким образом, $[\mathfrak{B}]_\alpha = [\mathfrak{B} \cup S]_\alpha$. В работе [7] показано, что система, состоящая из всех бинарных операций с правым сокращением и всех подстановок, содержит α-полную подсистему. Поэтому система $\mathfrak{B}$ также α-полна.

Пусть $n \geqslant 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E_3$. Следуя [4], положим

$$\psi_{a_1,\ldots,a_n}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i = a_i, \text{ для всех } i = 1, \ldots n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема. *Для любого $n \geqslant 1$ и любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E_3$ имеют место неравенства*

$$\frac{2^n - 5}{4} \leqslant D^\alpha_{\mathfrak{B}}(\psi_{a_1,\ldots,a_n}) \leqslant 3 \cdot 2^{n-1} - 2.$$

Следствие 1. *При $n \longrightarrow \infty$ выполнено соотношение*

$$D^\alpha_{\mathfrak{B}}(\psi_{a_1,\ldots,a_n}) \asymp 2^n.$$

Следствие 2. *Пусть $n \geqslant 1$ и $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_3$. Тогда имеет место неравенство*

$$D^\alpha_{\mathfrak{B}}(f) \leqslant (3 \cdot 2^{n-1} - 2) \cdot 3^n.$$

В заключение автор выражает искреннюю признательность А. Б. Угольникову за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00508) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения», проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем».

Список литературы

[1] *Угольников А.Б.* Классы Поста. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008.

[2] *Лупанов О.Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — М.: Физматгиз, 1960. — С. 61–80.

[3] *Угольников А.Б.* О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — 1988. — С. 242–245.

[4] *Глухов М.М.* Об α-замкнутых классах и α-полных системах функций k-значной логики // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 1. С. 16–21.

[5] *Трущин Д.В.* О глубине α-пополнений систем булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2009. — Вып. 2. — С. 72–75.

[6] *Чернышов А.Л.* Условия α-полноты систем функций многозначной логики // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, вып. 4. — С. 117–130.

[7] *Шабунин А.Л.* Примеры α-полных систем k-значной логики при $k = 3, 4$ // Дискретная математика. — 2006. — Т. 18, вып. 4. — С. 45–55.

О сложности односторонних клеточных схем фиксированной высоты с кратными входами

А. Ю. Улесова

ulesova@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

В данной работе рассматривается модель односторонних клеточных схем с кратными входами фиксированной высоты, то есть клеточные схемы ограниченной высоты, в которых входные переменные могут подаваться только на верхнюю границу. В такой модели схем для функции Шеннона, характеризующей минимальную площадь клеточной схемы высоты h над произвольным полным базисом из клеточных элементов, реализующей функции алгебры логики (ФАЛ) от n переменных из инвариантного класса Q с характеристикой σ (см., например, [4]), установлена асимптотика вида $\sigma\frac{h2^n}{\log n}$ при $h \geqslant 4$. Для функции Шеннона, соответствующей классу симметрических относительно всех своих переменных функций, установлена асимптотика вида $\frac{hn}{\log n}$ при $h \geqslant 4$.

Схема из клеточных элементов (см. [1, 2]) представляет собой плоскую прямоугольную решетку, в каждой клетке которой расположен один из элементов схемы. Размеры всех элементов одинаковы и принимаются за единицу. Элементы могут быть как функциональными, то есть реализующими какую-то функцию от своих входов, так и коммутационными, которые служат для передачи сигнала к следующим элементам с возможным изменением направления.

Рассмотрим плоские прямоугольные схемы над базисом $B = \{f_1, \ldots, f_r\}$, состоящим из r функциональных элементов, реализующих некоторые ФАЛ, и из трех коммутационных элементов: разветвление, пересечение, изолятор. Базис B выбирается таким образом, что множество функций $\{f_1, \ldots, f_r\}$ является полным в классе всех ФАЛ. Построенный базис из клеточных элементов является при этом полным в классе клеточных схем в том смысле, что произвольную ФАЛ можно реализовать клеточной схемой высоты 2 над этим базисом (см. [3]).

Каждый из элементов базиса может быть повернут в плоскости на угол, кратный 90 градусам. В качестве входов и выходов схемы выбираем входы и выходы элементов, расположенных на границе схемы. Функциональные элементы схемы соединяются с помощью коммутационных таким образом, чтобы полученная схема представляла собой схему из функциональных элементов (СФЭ). Считаем, что клеточная схема реализует такие же ФАЛ, что и соответствующая ей СФЭ.

Ограничим класс рассматриваемых схем. Односторонней клеточной схемой назовем клеточную схему, входные переменные которой могут подаваться только на одну ее границу. Клеточной схемой с кратными входами назовем клеточную схему, каждая входная переменная которой может подаваться в схему многократно. Исследуем односторонние клеточные схемы с кратными входами (ОКСКВ) фиксированной высоты. Дадим практическое обоснование этой модели. Пусть имеется n параллельных проводников, по которым передаются значения переменных $x_1, \dots, x_n$. Ниже, под этими проводниками, располагается клеточная схема, на верхнюю границу которой могут подаваться переменные, идущие выше. Выход схемы находится в правом нижнем углу схемы. Интерес к такого рода схемам обусловлен, прежде всего, тем фактом, что в реальных схемах часто функциональная часть разбивается на блоки, соединенные между собой несколькими линиями передачи данных. При этом коммутация функциональных блоков может занимать достаточно большую часть схемы. Рассматриваемые схемы дают возможность проводить вычисления по ходу передачи сигналов, занимая лишь небольшую часть площади всей схемы. В общем виде ОКСКВ используется для реализации некоторых вспомогательных вычислений. В реальных схемах данная конструкция может встретиться в следующем виде: по некоторой шине передаются несколько сигналов, и например, в процессе передачи требуется выполнить проверку целостности передаваемых сигналов, для чего надо будет построить ОКСКВ. Вполне очевидным требованием является ограничение на высоту ОКСКВ.

Обозначим высоту ОКСКВ Σ через $h(\Sigma)$, длину — через $\lambda(\Sigma)$, площадь $A(\Sigma) = h(\Sigma)\lambda(\Sigma)$ и будем считать, что $h(\Sigma) \leqslant \lambda(\Sigma)$. Пусть f — произвольная ФАЛ, тогда $A_B(f)$ — наименьшая из площадей $A(\Sigma)$, где минимум берется по всем ОКСКВ Σ над базисом B, реализующим f.

Введем две функции Шеннона для площади схем в рассматриваемой модели. Пусть P_2 — множество всех ФАЛ. Для некоторого класса функций $K, K \subseteq P_2$, обозначим через $K(n)$ множество функций из K, зависящих от n переменных. Положим функцию $A_B(K)$ равной максимальной из площадей $A_B(f)$, где максимум берется по всем ФАЛ f из класса K. Рассмотрим случай, когда высота схем фиксирована. Напомним, что для любой f существует ОКСКВ Σ высоты $h(\Sigma) = 2$, реализующая эту функцию f [3]. Для любого $h \geqslant 2$ определены функция $A_B^h(f)$, равная наименьшей из площадей $A(\Sigma)$, где минимум берется по всем ОКСКВ Σ над базисом B высоты h, реализующим f, и функция $A_B^h(K)$, равная максимальной из площадей $A_B^h(f)$, где максимум берется по всем ФАЛ f из класса K.

А. А. Тиунчик в работе [3] доказал, что в произвольном полном базисе B функция $A_B^3(P_2(n))$ имеет порядок роста $2^n / \log n$.

Напомним, что класс Q, $Q \subseteq P_2$, называется *инвариантным классом* тогда и только тогда, когда Q замкнут относительно операций добавления и изъятия фиктивных переменных, переименования (без отождествления) переменных и подстановки констант вместо переменных (см. [4]).

Теорема 1. *Для инвариантного класса Q верна оценка для функции Шеннона $A_B^h(Q(n)) \sim \sigma h 2^n / \log n$ при $h \geqslant 4$.*

Теорема 2. *Для класса S симметрических функций — класса, замкнутого относительно операции перестановки переменных, — верна оценка для функции Шеннона при $h \geqslant 4$*

$$A_B^h(Q(n)) \sim \sigma \frac{h2^n}{\log n}, \qquad A_B^h(S(n)) \sim \frac{hn}{\log n}.$$

Если рассматривать функцию Шеннона в классе клеточных схем с кратными входами, где входные переменные могут подаваться по всей границе схемы, то асимптотика функции Шеннона уменьшается вдвое. При этом она справедлива для схем высоты $h \geqslant 7$. В стандартном базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ данные оценки достигаются при значениях $h \geqslant 3$ и $h \geqslant 5$ соответственно.

Доказательство верхних оценок в теореме основывается на асимптотически оптимальном методе построения формул, предложенном Лупановым в [5]. Модель ОКСКВ и ее оценки имеют практическую ценность при построении программируемых (настраиваемых) процессоров. Также интересно применение данной модели для экономии пространства интегральной схемы при больших затратах на трассировку схемы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00817-а.

Список литературы

[1] *Кравцов С. С.* О реализации функций алгебры логики в одном из классов схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. — 1967. — Т. 19. — С. 285–292.

[2] *Альбрехт А.* О схемах из клеточных элементов // Проблемы кибернетики. — 1975. — Т. 33. — С. 209–214.

[3] *Тиунчик А. А.* О реализации функций алгебры логики клеточными схемами ограниченной ширины // Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1990. — С. 73–83.

[4] *Яблонский С. В.* О невозможности элиминации перебора всех функций из P_2 при решении некоторых задач теории схем // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124, № 1. — С. 54–62.

[5] *Лупанов О. Б.* О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\&, \vee, \neg$ // Проблемы кибернетики. — 1967. — Т. 19. — С. 5–14.

Разнообразие шаров в графах с фиксированными числом вершин и диаметром

Т. И. Федоряева

tatiana.fedoryaeva@gmail.com

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ — конечное метрическое пространство, $B_i(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant i\}$ — шар радиуса i с центром в точке x. Рассмотрим покрытия пространства $\mathcal{X}$ перекрывающимися шарами фиксированного радиуса. Традиционно плотность таких покрытий определяется как среднее число шаров, содержащих точку пространства. Математической формализацией этого понятия может служить функция $\Theta : \mathcal{M}_i \to \mathbf{Q}^+$ [1], определяемая следующим образом:

$$\Theta(M) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \theta_M(x),$$

где $\mathcal{M}_i$ — совокупность всех покрытий пространства $\mathcal{X}$ шарами радиуса i, $M \in \mathcal{M}_i$, $\theta_M : X \to \mathbf{N}$, $\theta_M(x)$ — число элементов покрытия M, содержащих $x \in X$. Ввиду конечности пространства $\mathcal{X}$ существует покрытие с наибольшей плотностью. Такие покрытия естественным образом возникают, когда, например, требуется максимизировать плотность покрытия системы связи, износоустойчивость различного рода промышленных покрытий, защищенность для схем элементов, степень контроля и т. п. Поскольку функция плотности Θ строго возрастает на $\mathcal{M}_i$ относительно порядка по включению (см. утверждение 1 из [1]), то покрытие пространства $\mathcal{X}$ шарами фиксированного радиуса i с наибольшей плотностью представляет собой систему всех различных шаров радиуса i, а число элементов такого покрытия есть число $\tau_i(\mathcal{X})$ всех различных шаров радиуса i пространства $\mathcal{X}$.

На величину $\tau_i(\mathcal{X})$ можно также взглянуть с другой стороны. В случае дискретных метрических пространств различные шары одного радиуса могут иметь разные «форму» и «объём». Например, для метрического пространства обыкновенного графа G с $V(G) = \{a, b, x, y\}$ и $E(G) = \{ax, xb, by, ya, xy\}$ имеем $B_1(a) = \{a, x, y\}$, $B_1(x) = B_1(y) = \{a, b, x, y\}$, $B_1(b) = \{b, x, y\}$. В этой связи величина $\tau_i(\mathcal{X})$ может рассматриваться как число «способов размещения» шара радиуса i в n-элементном метрическом пространстве $\mathcal{X}$.

Далее возникает вопрос: каково наибольшее число шаров заданного радиуса в метрических пространствах фиксированного «объёма»? Формализацией этого вопроса для метрических пространств обыкновенных связных графов с обычным расстоянием между вершинами (т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины) является задача нахождения числа

$$\overline{\tau}_i(\Omega) = \max_{G \in \Omega} \tau_i(G),\ i \geqslant 0,$$

где Ω — класс всех обыкновенных связных графов наперёд фиксированного «объёма». В качестве Ω будем рассматривать класс Γ_n всех n-вершинных обыкновенных связных графов и класс $\Gamma_{n,\,d}$ всех n-вершинных обыкновенных связных графов диаметра d. Отметим, что для класса $\Gamma^{\,d}$ всех графов диаметра d максимум значений $\tau_i(G)$, $G \in \Gamma^{\,d}$, не достигается при любых $d > 0$ и $i < d$ (это следует, например, из существования для каждого $n \geqslant 2d > 0$ графа из класса $\Gamma_{n,\,d}$ с полным разнообразием шаров [1]).

В общем виде для произвольного класса Ω обыкновенных связных графов задача нахождения точных верхних и точных нижних оценок числа различных шаров заданного радиуса в графах из класса Ω, т. е. соответственно $\overline{\tau}_i(\Omega)$ и $\underline{\tau}_i(\Omega) = \min\limits_{G \in \Omega} \tau_i(G)$, была сформулирована в [1, 2] и решена для класса Γ_n, класса T_n всех n-вершинных деревьев и класса $\mathrm{T}_{n,\,d}$ всех n-вершинных деревьев диаметра d, т. е. установлены точные значения $\overline{\tau}_i(\Gamma_n)$, $\underline{\tau}_i(\Gamma_n)$, $\overline{\tau}_i(\mathrm{T}_n)$, $\underline{\tau}_i(\mathrm{T}_n)$, $\overline{\tau}_i(\mathrm{T}_{n,\,d})$, $\underline{\tau}_i(\mathrm{T}_{n,\,d})$ для любого $i \geqslant 0$. В следующей теореме 1 получены точные верхние оценки $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d})$ для класса $\Gamma_{n,\,d}$ (точные нижние оценки $\underline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d})$ найдены в [1, 2]). Здесь считаем, что рассматриваемый класс графов $\Gamma_{n,\,d}$ не пуст, т.е. $n \geqslant d+1 \geqslant 2$ или $n = d+1 = 1$.

Теорема 1.

$$\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d}) = \begin{cases} n, & \text{если } 0 \leqslant i < d \text{ и } i \leqslant \max\{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor,\, s\}, \\ 3(d-i)+1, & \text{если } \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor < s < i < d, \\ n+d+\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 3i, & \text{если } s \leqslant \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor < i \leqslant \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + s,\ i < d, \\ 2(d-i)+1, & \text{если } \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + s < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geqslant d, \end{cases}$$

где $s = n-d-1$.

Далее, для произвольного графа G числа $\tau_i(G)$, $i \geqslant 0$, образуют вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \ldots, \tau_i(G), \ldots, \tau_d(G))$, называемый *вектором разнообразия шаров графа* G [3], причём для них выполняется система неравенств $\tau_0(G) = |V(G)| \geqslant \ldots \geqslant \tau_i(G) \geqslant \tau_{i+1}(G) \geqslant \ldots \geqslant \tau_d(G) = 1$ (здесь $V(G)$ — множество вершин графа G и $d = d(G)$ — диаметр графа G). Впервые векторы такого вида были рассмотрены в [4], где было предложено изучать строение графов как дискретных метрических пространств через разнообразие и пересекаемость метрических шаров, содержащихся в графе. При таком подходе естественно возникает класс графов, обладающих локальным t-разнообразием шаров. Пусть $0 \leqslant t < d(G)$.

Определение 1 [4]. Граф G обладает локальным t-разнообразием шаров, если $|V(G)| = \tau_0(G) = \tau_1(G) = \ldots = \tau_t(G)$. Граф G с локальным t-разнообразием шаров при $t = d(G) - 1$ называется графом полного разнообразия шаров.

Отметим, что в [5] графы с локальным и полным разнообразием шаров использовались для построения графа G с вектором разнообразия шаров $\tau(G)$, совпадающим с наперёд заданным целочисленным вектором $\overline{\tau}$ с убывающими компонентами при дополнительных ограничениях на исходный вектор $\overline{\tau}$. В связи с этим возникает вопрос: всегда ли существуют n-вершинные графы диаметра d с локальным t-разнообразием шаров (или даже полным разнообразием шаров), как они устроены и какой вид имеет их вектор разнообразия шаров? В [1] автором исследован вопрос существования графа с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров) в классе $\Gamma_{n,\,d}$, и описаны все такие возможные значения параметров n, d и t.

Теорема 2 [1]. *Класс $\Gamma_{n,\,d}$ содержит граф с локальным t-разнообразием шаров тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(i) $0 \leqslant t \leqslant \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$, $n \geqslant d+1 \geqslant 2$;
(ii) $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor < t < d$, $n \geqslant d+1+t$.

Следствие 1. *В классе $\Gamma_{n,\,d}$ существует граф с полным разнообразием шаров тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2d > 0$ или $n = d+1 = 3$.*

В теореме 2 был найден наименьший порядок графов диаметра d с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров), а в следующей теореме 3 (следствии 2) с точностью до изоморфизма описываются графы наименьшего порядка диаметра d с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров) и вычисляются их векторы разнообразия шаров. В работе строятся n-вершинные графы $H^i_{n,\,d,\,t}$ диаметра d и доказывается

Теорема 3.

(i) *Пусть $0 \leqslant t \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$. Тогда простая цепь P длины d — единственный с точностью до изоморфизма граф диаметра d с локальным t-разнообразием шаров наименьшего возможного порядка и $\tau(P) = (\Delta^d_0, \Delta^d_1, \ldots, \Delta^d_d)$.*

(ii) *Пусть $\lfloor d/2 \rfloor < t < d$. Тогда n-вершинные графы $H^i_{n,\,d,\,t}$, где $n = d+1+t$ и $i = 0, 1, \ldots, \lfloor (d-t-1)/2 \rfloor$, — все с точностью до изоморфизма графы диаметра d с локальным t-разнообразием шаров наименьшего возможного порядка, причем $\tau(H^i_{n,\,d,\,t}) = (n, \ldots, n, \Delta^d_{t+1}, \Delta^d_{t+2}, \ldots, \Delta^d_d)$.*

Здесь

$$\Delta^d_j = \begin{cases} d+1, & \text{если } 0 \leqslant j \leqslant \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d-j)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < j < d, \\ 1, & \text{если } j \geqslant d. \end{cases}$$

Следствие 2. *Для любого $d > 0$ существует единственный с точностью до изоморфизма граф диаметра d с полным разнообразием шаров наименьшего возможного порядка, а именно $2d$-вершинный цикл при $d > 2$ и цепь длины d при $d \leqslant 2$.*

Список литературы

[1] *Федоряева Т. И.* Векторы разнообразия шаров для графов и оценки их компонент // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 47–67.

[2] *Федоряева Т. И.* Векторы разнообразия шаров и свойства их компонент // Труды VII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 4–6 марта 2006 г.). — М.: Изд-во МГУ, 2006. — С. 374–378.

[3] *Федоряева Т. И.* Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 74–84.

[4] *Евдокимов А. А.* Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сибирский журнал исследования операций. — 1994. — Т. 1, № 1. — С. 5–12.

[5] *Рычков К. Л.* О достаточных условиях существования графа с заданным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. — Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 99–108.

Задача синтеза стратегий обслуживания потока объектов в системе с накопительным компонентом

Ю. С. Федосенко, А. С. Куимова, Д. В. Минаев

fds@aqua.sci-nnov.ru, anastasia.kuimova@gmail.com,
minaev@aqua.sci-nnov.ru

Волжская государственная академия водного транспорта,
Нижний Новгород

Рассматривается модель однопроцессорного обслуживания конечного детерминированного потока объектов в системе с накопительным компонентом. Модель описывает схему массового завоза нефтепродуктов в специфических навигационных условиях приполярного региона Западной Сибири [1]. Для случая однокритериальной оценки качества управления обслуживанием соответствующая оптимизационная задача синтеза стратегий обслуживания исследовалась в работе [2]. Необходимость её бикритериального обобщения обусловлена требованием адекватности математического описания целому ряду практически значимых эксплуатационных ситуаций.

Ниже изучается задача синтеза стратегий обслуживания при наличии двух оценочных критериев.

Рассмотрим n-элементный поток объектов $O_n = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$, подлежащих однократному однофазному обслуживанию стационарным процессором P. Поток O_n обладает свойством бинарности, т.е. состоит из двух подпотоков — входящего O^+ и исходящего O^-. Принадлежность объекта o_i, $i = \overline{1,n}$, тому или иному подпотоку O^+ (O^-) определяется значением булева параметра w_i: $w_i = +1$, если $o_i \in O^+$, и $w_i = -1$, если $o_i \in O^-$.

Считаем, что подпоток O^+ либо представляет собой пустое множество $\oslash$ объектов, либо состоит из совокупности объектов $\{o_{q(1)}, o_{q(2)}, \ldots, o_{q(r)}\}$, $q(j) \in [1, 2, \ldots, n]$, $j = \overline{1,r}$, $1 \leqslant r \leqslant n$. Аналогично определяем подпоток O^- как состоящий из пустого множества или из совокупности $\{o_{q(1)}, o_{q(2)}, \ldots, o_{q(u)}\}$, $q(z) \in [1, 2, \ldots, n]$, $z = \overline{1,u}$, $1 \leqslant u \leqslant n$. При этом $r + u = n$, $q(z) \neq q(j)$ для любых пар допустимых значений z и j. Для каждого объекта o_i, $i = \overline{1,n}$, определены следующие целочисленные параметры: t_i — момент поступления в очередь на обслуживание ($0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$), τ_i — норма длительности обслуживания, a_i — штраф за единицу времени простоя в ожидании обслуживания, d_i — мягкий директивный срок завершения обслуживания ($d_i \geqslant t_i + \tau_i$), v_i — объемная характеристика. Если обслуживание объекта o_i начинается в момент времени t_i^* ($t_i^* \geqslant t_i$), то величина индивидуального штрафа по этому объекту определяется значением линейной функции вида $a_i(t_i^* - t_i)$.

Процессор P, обслуживающий поток O_n, снабжен накопительным элементом с объемной характеристикой V, которая в начальный момент времени $t = 0$ имеет значение V_0 и в любой момент времени не может превосходить известной величины V^*. В результате обслуживания объекта o_i из подпотока $O^+(O^-)$ значение характеристики V увеличивается (уменьшается) на величину v_i, $i = \overline{1,n}$. Обслуживание любого объекта из подпотока O^+ считается возможным, если в результате его реализации значение характеристики V не превысит величины V^*. Аналогично обслуживание любого объекта o_i, $i = \overline{1,n}$, из подпотока O^- считается возможным, если к его началу значение характеристики V не меньше объемной характеристики v_i этого объекта. Процессор P готов к обслуживанию потока объектов O_n в момент времени $t = 0$. Обслуживание объекта o_i, $i = \overline{1,n}$, может быть начато свободным процессором в любой момент времени t на полуинтервале $t \geqslant t_i$ и осуществляется без прерываний; необслуженный объект не может покинуть очередь к процессору; одновременное обслуживание процессором двух и более объектов и его непроизводительные простои запрещены.

Стратегия обслуживания объектов S представляет собой произвольную перестановку $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ совокупности индексов $N = \{1, 2, \ldots, n\}$; при её реализации объект с индексом i_k обслуживается k-м по очереди, $k = \overline{1, n}$. Стратегию S именуем допустимой, если удовлетворяются отмеченные выше объемные ограничения на обслуживание объектов. Множество всех допустимых стратегий обслуживания обозначим через Ω и считаем верным всегда выполняемое на практике условие $2v_i \leqslant V^*$, $i = \overline{1, n}$. Тогда необходимым и достаточным условием непустоты множества допустимых стратегий Ω является выполнение неравенств

$$0 \leqslant V_0 + \sum_{i: o_i \in O^+} v_i - \sum_{i: o_i \in O^-} v_i \leqslant V^*.$$

Обозначим через $t^*(i_k, S)$ и $\overline{t}(i_k, S)$ моменты начала и завершения обслуживания объекта с индексом i_k при реализации стратегии S. Считаем, что реализация стратегии обслуживания компактна и между $t^*(i_k, S)$ и $\overline{t}(i_k, S)$ имеют место соотношения: $t^*(i_1, S) = t_{i_1}$; $t^*(i_k, S) = \max(\overline{t}(i_{k-1}, S), t_{i_k})$, $k = \overline{2, n}$; $\overline{t}(i_k, S) = t^*(i_k, S) + \tau_{i_k}$, $k = \overline{1, n}$.

Качество стратегии S оценивается по значениям двух минимизируемых критериев

$$K_1(S) = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k}(t^*(i_k, S) - t_{i_k}),\ \ K_2(S) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n}(\overline{t}(i_k, S) - d_{i_k}, 0).$$

Общий подход к исследованию проблемы принятия решений при наличии нескольких критериев оценки базируется на концепции Парето [3] и для рассматриваемой модели обслуживания приводит к следующей бикритериальной задаче

$$\left\{\min_{S \in \Omega}(K_1(S)),\ \min_{S \in \Omega}(K_2(S))\right\} \tag{1}$$

выделения в плоскости $(K_1(S), K_2(S))$ полной совокупности эффективных оценок и последующего построения соответствующих им оптимально-компромиссных стратегий.

Задача относится к числу NP-трудных [4]. Для её решения построены рекуррентные соотношения динамического программирования [5–7], процесс вычислительной реализации которых состоит из трёх этапов. На первом этапе выполняется разметка для определения достижимых состояний системы. Фиксируются финальные состояния, соответствующие завершению процесса обслуживания всех объектов потока O_n. На втором этапе выполняется построение множеств эффективных оценок для произвольных достижимых состояний. Эти состояния характеризуются тем, что множество эффективных оценок для них неизвестно, но для всех непосредственно следующих за ними состояний множество эффективных оценок уже известно. Последней в процессе решения задачи (1) определяется полная совокупность эффективных оценок. На третьем, последнем этапе работы последовательно синтезируется стратегия обслуживания, соответствующая выбранной лицом, принимающим решения, эффективной оценке.

В качестве иллюстрации рассмотрен пример при следующих значениях параметров модели: $V^* = 300$, $V_0 = 261$; $t_1 = 0$, $t_2 = 3$, $t_3 = 5$, $t_4 = 7$, $t_5 = 11$, $t_6 = 11$, $t_7 = 15$, $t_8 = 19$, $t_9 = 23$, $t_{10} = 25$; $\tau_1 = 10$, $\tau_2 = 10$, $\tau_3 = 4$, $\tau_4 = 2$, $\tau_5 = 2$, $\tau_6 = 5$, $\tau_7 = 7$, $\tau_8 = 8$, $\tau_9 = 4$, $\tau_{10} = 5$; $a_1 = 1$, $a_2 = 6$, $a_3 = 2$, $a_4 = 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 4$, $a_7 = 3$, $a_8 = 5$, $a_9 = 6$, $a_{10} = 3$; $d_1 = 10$, $d_2 = 14$, $d_3 = 9$, $d_4 = 10$, $d_5 = 14$, $d_6 = 19$, $d_7 = 22$, $d_8 = 28$, $d_9 = 30$, $d_{10} = 33$; $v_1 = 35$, $v_2 = 6$, $v_3 = 128$, $v_4 = 68$, $v_5 = 107$, $v_6 = 35$, $v_7 = 50$, $v_8 = 84$, $v_9 = 11$, $v_{10} = 51$; $w_1 = -1$, $w_2 = -1$, $w_3 = -1$, $w_4 = -1$, $w_5 = 1$, $w_6 = -1$, $w_7 = 1$, $w_8 = -1$, $w_9 = 1$, $w_{10} = 1$.

Путем реализации описанных выше этапов синтеза получаем полную совокупность эффективных оценок и им соответствующих оптимально-компромиссных стратегий обслуживания:

$$
\begin{aligned}
&(349, 44) - \{2, 4, 5, 6, 9, 8, 10, 3, 1, 7\}, \ (326, 51) - \{2, 4, 5, 6, 9, 8, 10, 3, 7, 1\},\\
&(435, 30) - \{2, 4, 5, 6, 3, 9, 1, 7, 8, 10\}, \ (424, 33) - \{2, 4, 5, 6, 3, 9, 1, 8, 7, 10\},\\
&(430, 32) - \{2, 4, 5, 6, 3, 9, 1, 10, 7, 8\}, \ (376, 38) - \{2, 4, 5, 6, 3, 9, 8, 1, 10, 7\},\\
&(351, 43) - \{2, 4, 5, 6, 3, 9, 8, 10, 1, 7\}, \ (328, 50) - \{2, 4, 5, 6, 3, 9, 8, 10, 7, 1\},\\
&(405, 35) - \{2, 4, 5, 6, 3, 9, 10, 1, 7, 8\}, \ (465, 24) - \{1, 4, 5, 6, 3, 9, 2, 7, 8, 10\}.
\end{aligned}
$$

Список литературы

[1] Северный завоз. Википедия `http://ru.wikipedia.org/wiki/Северный_завоз`.

[2] *Коган Д. И., Федосенко Ю. С., Шеянов А. В.* Моделирование и оптимизация управления потоком объектов в однопроцессорной системе с изодромным элементом // Межвузовский сб. науч. тр. Вып. 273. Ч. 1. — Н. Новгород: Изд-во ВГАВТ, 1996. — С. 44–54.

[3] *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007.

[4] *Коган Д. И., Федосенко Ю. С.* Задача диспетчеризации: анализ вычислительной сложности и полиномиально разрешимые подклассы // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, № 3. — С. 135–147.

[5] *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.

[6] *Klamroth K., Wiecek M.* Dynamic Programming Approaches to the Multiple Criteria Knapsack Problem. Technical Report #666. Dept. of Math. Sc., Clemson University. — Clemson: SC, 1998.

[7] *Коган Д. И.* Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2005.

Управляющие конфликтные системы и аппроксимация потока Гнеденко–Коваленко

А. М. Федоткин

fandr@vmk.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В известной монографии [1] впервые рассматривается неординарный пуассоновский поток, когда в каждый вызывающий момент поступает не более двух заявок. Однако не приводятся примеры реальных потоков такой вероятностной структуры. Более того, в указанной монографии нет обоснования, когда и при каких условиях реально возникают такого рода потоки. В данной работе, применяя кибернетический подход для управляющих систем обслуживания, получаем условия, при которых транспортные потоки машин на магистралях могут быть аппроксимированы потоками Гнеденко–Коваленко.

Введение

Обозначим через $(\Omega,\ \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ вероятностную модель для случайного потока требований (заявок), которые поступают в некоторую реальную систему массового обслуживания. Элемент ω из множества Ω есть описание элементарного исхода потока требований. При этом $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра всех наблюдаемых исходов потока заявок и $\mathbf{P}(\cdot)$ является вероятностной функцией на $\mathcal{F}$. При каждом $i = 1, 2, \ldots$ случайная величина τ'_i определяет i-й момент поступления требования в систему. Тогда случайная последовательность $\{\tau'_i;\ i \geqslant 1\}$ является математической моделью реального потока заявок. Потоку $\{\tau'_i; i \geqslant 1\}$ взаимно-однозначно соответствует так называемый считающий случайный процесс $\{\eta(t);\ t \geqslant 0\}$. Здесь $\eta(t)$ при $t > 0$ определяет число поступивших в систему заявок за промежуток времени $[0,\ t)$ и $\eta(t) = \eta(t-0)$, $\eta(0) = 0$. Как правило, случайные величины $\tau'_{i+1} - \tau'_i$, $i \geqslant 1$, являются зависимыми и имеют различные функции распределения. В этом случае практически не удается найти распределения вероятностей для процесса $\{\eta(t);\ t \geqslant 0\}$. В работе рассматривается именно такая сложная ситуация.

Пусть теперь $\tau_0 = \tau'_1$ и $\{\tau_i = \tau'_{k_i};\ i \geqslant 0\}$ при $i \geqslant 0$, $k_i \in \{1, 2, \ldots\}$, $k_0 = 1$, есть подпоследовательность случайной последовательности $\{\tau'_i; i \geqslant 1\}$. Требования и моменты τ'_{k_i}, $i \geqslant 0$, в которые эти требования поступают в систему, будем называть стробирующими. Обозначим через η_i число всех заявок на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geqslant 0$. В дальнейшем вместо потока требований $\{\tau'_i;\ i \geqslant 1\}$ предлагается рассматривать поток $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geqslant 0\}$, где $\eta_i = \eta(\tau_{i+1}) - \eta(\tau_i) = k_{i+1} - k_i$, $i \geqslant 0$. Случайная величина η_i при каждом $i \geqslant 0$ измеряет размер так называемой i-й группы потока $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geqslant 0\}$.

К сожалению, почти всегда распределения потока заявок $\{\tau'_i;\ i \geqslant 1\}$ неизвестны или, в лучшем случае, имеют сложный вид. Поэтому возникает проблема выбора функциональной зависимости элементов τ_i, $i \geqslant 0$, от моментов τ'_i, $i \geqslant 1$, которая позволяет по наблюдениям за конечным отрезком последовательности $\{\tau'_i;\ i \geqslant 1\}$ идентифицировать конечномерные распределения стробирующего потока $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geqslant 0\}$.

Определение стробирующего потока $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geqslant 0\}$

В работе предлагается такой алгоритм построения последовательности $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geqslant 0\}$, для которого указанная последовательность будет составлена из независимых и одинаково распределенных векторных случайных величин. В этом случае легко определить конечномерные распределения стробирующего потока $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geqslant 0\}$. Перейдем к описанию алгоритма.

Пусть при $c = 0, 1, \ldots$ моменты $\tau_i^{(c)} < \tau_{i+1}^{(c)},\ i \geqslant 0$, совпадают с некоторыми элементами последовательности $\{\tau'_i;\ i \geqslant 1\}$, т. е. $\tau_i^{(c)} = \tau'_{k_{c,i}},\ k_{c,i} \in \{1, 2, \ldots\}$. Тогда величина $\eta_i^{(c)} = k_{c,i+1} - k_{c,i}$ задает число всех типов заявок на промежутке $[\tau_i^{(c)}, \tau_{i+1}^{(c)})$. При новом описании исходного потока $\{\tau'_i;\ i \geqslant 1\}$ в виде последовательности $\{(\tau_i^{(c)}, \eta_i^{(c)});\ i \geqslant 0\}$ величину $\eta_i^{(c)}$ условно назовем i-й группой, а величину $\delta_i^{(c)} = \tau'_{k_{c,i+1}} - \tau'_{k_{c,i+1}-1}$ — интервалом между последовательными группами $\eta_i^{(c)}$, $\eta_{i+1}^{(c)}$. Моменты $\tau_i^{(c)},\ c \geqslant 0,\ i \geqslant 0$, будем строить с помощью рекуррентных соотношений: $k_{0,i+1} = \inf\{j:\ j > k_{0,i},\ \tau'_j - \tau'_{j-1} \geqslant h_0\}$, $s_c = \inf\{j:\ j \geqslant 0,\ \eta_j^{(c)} \leqslant d,\ \eta_{j+1}^{(c)} \leqslant d,\ \delta_j^{(c)} < h_1, \eta_j^{(c)} = \eta_{j-1}^{(c)}\}$, $\tau_i^{(c+1)} = \tau_i^{(c)}$ при $i \leqslant s_c$ и $\tau_i^{(c+1)} = \tau_{i+1}^{(c)}$ при $i > s_c$. В этих формулах при каждом $c = 0, 1, \ldots$ величина $\eta_{-1}^{(c)} = 1$, $k_{0,0} = 1$, d — некоторое натуральное число, а постоянные величины h_0, h_1 удовлетворяют условию $h_0 < h_1$. Этот алгоритм выбора последовательностей $\{(\tau_i^{(c)}, \eta_i^{(c)});\ i \geqslant 0\}$, $c = 0, 1, \ldots$, используя величину h_0, сначала разбивает исходный процесс $\{\tau'_i;\ i \geqslant 1\}$ на группы с целью получения маркированного точечного процесса $\{(\tau_i^{(0)}, \eta_i^{(0)});\ i \geqslant 0\}$ нулевого уровня. Далее, последовательно, начиная с нулевой группы $\eta_0^{(0)}$, алгоритм объединяет первые две соседние группы $\eta_j^{(0)}$ и $\eta_{j+1}^{(0)}$, если каждая из них содержит не более d заявок, интервал между такими группами строго меньше величины h_1 и, наконец, выполняется равенство $\eta_j^{(0)} = \eta_{j-1}^{(0)}$. Это позволяет найти процесс $\{(\tau_i^{(1)}, \eta_i^{(1)});\ i \geqslant 0\}$ первого уровня, к которому применяем ту же самую процедуру, что и к процессу $\{(\tau_i^{(0)}, \eta_i^{(0)});\ i \geqslant 0\}$. В результате получаем маркированный точечный процесс $\{(\tau_i^{(2)}, \eta_i^{(2)});\ i \geqslant 0\}$ второго уровня и т. д.

Теорема 1. *Для любой реализации* $\omega = \{t'_i;\ i \geqslant 1\}$ *случайной последовательности* $\{\tau'_i;\ i \geqslant 1\}$ *и для любого фиксированного* $i \geqslant 0$ *существуют пределы* $\lim\limits_{c\to\infty} k_{c,i}(\omega)$, $\lim\limits_{c\to\infty} \tau_i^{(c)}(\omega)$.

Данная теорема позволяет для любого $i \geqslant 0$ определить случайные величины $k_i = \lim\limits_{c\to\infty} k_{c,i}$, $\tau_i = \lim\limits_{c\to\infty} \tau_i^{(c)}$. При таком алгоритме выбора потока $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geqslant 0\}$ имеем $\tau_i = \tau'_{k_i}$, $\eta_i = k_{i+1} - k_i$ для всех $i \geqslant 0$ и, значит, таким способом определяем число всех требований на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Для определения приемлемого тестового распределения случайной величины η_i для всех $i \geqslant 0$ предположим, что процесс формирования i-й группы осуществляется некоторой управляющей конфликтной системой массового обслуживания с переменной структурой. В такой системе стробирующая заявка из i-й группы является обслуживающим устройством для другого типа (нестробирующих) требований из этой группы. Под обслуживанием можно, например, понимать пересылку требования из i-й группы в $(i+1)$-ю группу или её выход из системы. Обозначим через $\eta_0(\omega; t, \Delta t)$ случайное число нестробирующих заявок, поступающих за промежуток времени $[0, t)$ в i-ю группу по закону Пуассона с параметром $\lambda_0 > 0$. Далее через $\xi(\omega; t, \Delta t)$ обозначим случайное число обслуженных нестробирующих заявок из i-й группы за промежуток времени $[t, t + \Delta t)$. Наконец, величина $\varkappa(\omega; t)$ определяет число всех типов заявок из i-й группы в момент $t \geqslant 0$. Пусть $\varkappa(\omega; t) = 1, 2$. Это возможно, если при малых $\Delta t > 0$ имеет место:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega\colon \varkappa(\omega; t) = 2, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = \mu_1 \Delta t - o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega\colon \varkappa(\omega; t) = 2, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = 1\}) = 1,$$

где параметр μ_1^{-1} определяет среднее время обслуживания в случае, когда i-я группа состоит из двух заявок, и символ $o(\Delta t)$ обозначает относительно Δt бесконечно малую величину более высокого порядка. С использованием результатов из [2] доказывается, что $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa(\omega; t) = 1\}) = \mu_1(\lambda_0 + \mu_1)^{-1} = p$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa(\omega; t) = 2\}) = \lambda_0(\lambda_0 + \mu_1)^{-1} = q$. Теперь можно выдвинуть гипотезу H_0 о том, что стационарный режим функционирования групп требований задается последовательностью $\{\eta_i;\ i \geqslant 0\}$ из независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение вида: $\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i(\omega) = 1\}) = p$, $\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i(\omega) = 2\}) = q$. Будем рассматривать поток из неоднородных требований как неординарный пуассоновский поток в случае, если в любой вызывающий момент поступает одна заявка с вероятностью p и две заявки — с вероятностью q. При пуассоновском потоке стробирующих заявок с интенсивностью $\lambda > 0$ и обозначениях $P_k(t) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t) = k\})$, $k = 0, 1, \ldots$, получены формулы: $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, $P_1(t) = \lambda t p e^{-\lambda t}$, $P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} C_{k-i}^{i} p^{k-2i} q^{i} \frac{(\lambda t)^{k-i}}{(k-i)!}$, $k = 2, 3, \ldots$, $\mathbf{M}\eta(t) = \lambda t(1+q)$, $\mathbf{D}\eta(t) = \lambda t(1+3q)$, $\text{Ка}\eta(t) = (1+7q)(\lambda t)^{-1/2}(1+3q)^{-3/2}$, $\text{Э}\eta(t) = (1+15q)(\lambda t)^{-1}(1+3q)^{-2}$. Здесь через символы $\mathbf{M}(\cdot)$, $\mathbf{D}(\cdot)$, $\text{Ка}(\cdot)$ и $\text{Э}(\cdot)$ обозначены математическое ожидание, дисперсия, коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины. Изучены экстремальные свойства приведенных числовых характеристик, и получены оценки параметров законов распределения для неординарного потока $\{\eta(t); t > 0\}$ неоднородных требований. Приводится методика проверки гипотезы H_0 и гипотезы о движении автомобилей на магистралях по закону Гнеденко–Коваленко.

Список литературы

[1] *Гнеденко Б. В., Коваленко И.* Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Ком Книга, 2005.

[2] *Федоткин М. А., Федоткин А. А.* Дискретные модели в теории транспортных потоков // Сб. научн. статей VIII Международной научн. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: МАКС Пресс, МГУ, 2009. — С. 305–311.

Управляющие системы и механизм образования транспортных пачек на магистралях с интенсивным движением

М. А. Федоткин, Е. В. Кудрявцев

`fma5@rambler.ru`

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Решена проблема построения и изучения математической модели пространственной и временной характеристик неоднородного транспортного потока на магистрали при большой плотности быстрых машин и неинтенсивном движении медленных машин. При построении вероятностной модели транспортного трафика существенно использовался кибернетический подход, предложенный Ляпуновым–Яблонским.

Введение

Математической теории транспортных потоков в случае независимых интервалов между моментами пересечения автомобилями некоторой поперечной линии магистрали посвящено большое число монографий и статей [1]. При этом предполагается, что транспортный поток сотоит из однородных или однотипных машин. Для реального транспортного потока каждый автомобиль осуществляет движение в экстремальных погодных и дорожных условиях. При этом скорости автомобилей являются непрерывными случайными величинами с различными интегральными функциями распределения. В силу этого транспортный поток машин на магистралях существенно отличается от потока случайных событий классической теории массового обслуживания. Рассмотрен нетрадиционный способ описания потока неоднородных машин, который основан на изучении распределения величины транспортной пачки и распределения потока так называемых медленных или головных в автоколонне машин. При этом предполагается интенсивное движение другого типа машин — быстрых. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ — вероятностная модель функционирования транспортной пачки и ω — произвольный элемент достоверного события Ω. Тогда $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра всех наблюдаемых исходов процесса фукционирования транспортной пачки и $\mathbf{P}(\cdot)$ является вероятностной функцией на $\mathcal{F}$. В соответствии с этой задачей обозначим через $\xi(\omega; t, \Delta t)$ число быстрых машин, которые поступают в транспортную пачку за промежуток времени $[t, t + \Delta t)$ по закону Пуассона с интенсивностью $\lambda > 0$. Пусть случайная величина $\chi(\omega; t)$ измеряет число всех типов машин в транспортной пачке в момент времени $t \geqslant 0$. Обозначим теперь через $\eta(\omega; t, \Delta t)$ случайное число быстрых машин, которые могут обогнать медленную за промежуток времени $[t, t+\Delta t)$. Вполне естественно предположить, что при малых значениях $\Delta t > 0$ условные вероятности событий, которые порождаются дискретной случайной величиной $\eta(\omega; t, \Delta t)$, определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=0\}\mid\{\omega\colon \chi(\omega;t)=2,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=1-\mu_1\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=1\}\mid\{\omega\colon \chi(\omega;t)=2,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=\mu_1\Delta t-o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=0\}\mid\{\omega\colon \chi(\omega;t)=3,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=1-\mu_2\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=1\}\mid\{\omega\colon \chi(\omega;t)=3,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=\mu_2\Delta t-o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=0\}\mid\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=1-\mu_3\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=1\}\mid\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=\mu_3\Delta t-o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=0\}\mid\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m-3,\xi(\omega;t,\Delta t)=1\})=1-O(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=1\}\mid\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m-3,\xi(\omega;t,\Delta t)=1\})=O(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)\geqslant 2\}\mid\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m-2,\xi(\omega;t,\Delta t)=1\})=o(\Delta t),$$
$$m=4,5,\ldots$$

В этих равенствах параметры μ_1^{-1} и μ_2^{-1} задают среднее время обгона в случае, когда транспортная пачка состоит из двух и трех машин соответственно. Аналогично параметр μ_3^{-1} определяет среднее время обгона, если транспортная пачка состоит из четырех и более машин. Параметры μ_1,μ_2,μ_3 будем называть интенсивностями обгона. Таким способом моделируется зависимость среднего времени обгона от числа машин в транспортной пачке. Итак, при заданном размере транспортной пачки условная вероятность того, что за (где угодно расположенный) промежуток Δt по меньшей мере две машины обгонят медленную, есть величина бесконечно малая по сравнению с Δt. Обозначим через $Q(t,m)$ вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m\})$ при фиксированных $t>0$ и $m=1,\ 2,\ \ldots$ В работе [2] при $\lambda<\mu_3$ было отмечено, что существует единственное стационарное распределение $\lim\limits_{t\to\infty}Q(t,m)=Q(m)>0,\sum_{m=1}^{\infty}Q(m)=1$ для числа $\chi(\omega)$ всех типов машин транспортной пачки в стационарном режиме движения автоколонн по магистрали. Для данного потока обозначим теперь через $\varkappa(\omega;t)$ случайное число всех типов машин, которые пересекают фиксированную поперечную линию автомагистрали за промежуток времени $[0,t)$. При $\alpha=\lambda\mu_1^{-1},\beta=\lambda\mu_2^{-1},\gamma=\lambda\mu_3^{-1}$, $p=(1+\alpha+\alpha\beta/(1-\gamma))^{-1}$ и пуассоновском движении медленных машин с интенсивностью $\mu > 0$ получены формулы:

$$Q(1) = (1 + \alpha + \alpha\beta/(1-\gamma))^{-1}, \quad Q(2) = \alpha(1 + \alpha + \alpha\beta/(1-\gamma))^{-1},$$
$$Q(m) = \alpha\beta\gamma^{m-3}(1 + \alpha + \alpha\beta/(1-\gamma))^{-1}, \quad m \geqslant 3;$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa(\omega;t) = 0\}) = e^{-\mu t},$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa(\omega;t) = k\}) = e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{[\frac{k}{2}]} \alpha^n \Big(\frac{(\mu t p)^{k-n}}{n!(k-2n)!} + \\ + \sum_{m=1}^{\min\{k-2n,n\}} \beta^m \sum_{l=0}^{k-2n-m} \gamma^l \frac{(\mu t p)^{k-n-m-l} C^l_{m+l-1}}{(n-m)!m!(k-2n-m-l)!} \Big);$$

$$\mathbf{M}\varkappa(\omega;t) = \mu t p \left(1 + 2\alpha + \alpha\beta \left[\frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right] \right),$$

$$\mathbf{D}\varkappa(\omega;t) = \mu t p \left(1 + 4\alpha + \alpha\beta \left[\frac{4}{1-\gamma} + \frac{3}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3} \right] \right),$$

$$K_a\varkappa = \left(1 + 8\alpha + \alpha\beta \left[\frac{8}{1-\gamma} + \frac{7}{(1-\gamma)^2} + \frac{6}{(1-\gamma)^3} + \frac{6}{(1-\gamma)^4} \right] \right) \times \\ \times (\mu t p)^{-1/2} \left(1 + 4\alpha + \alpha\beta \left[\frac{4}{1-\gamma} + \frac{3}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3} \right] \right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\text{Э}\varkappa = \Big(1 + 16\alpha + \alpha\beta \Big[\frac{16}{1-\gamma} + \frac{15}{(1-\gamma)^2} + \frac{14}{(1-\gamma)^3} + \frac{12}{(1-\gamma)^4} + \\ + \frac{24}{(1-\gamma)^5} \Big] \Big) (\mu t p)^{-1} \left(1 + 4\alpha + \alpha\beta \left[\frac{4}{1-\gamma} + \frac{3}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3} \right] \right)^{-2}.$$

Транспортная пачка и управляющие системы

В данной работе произвольная транспортная пачка представляется как некоторая управляющая кибернетическая система [3], для которой имеет место принцип непрерывности актов её функционирования во времени $t > 0$. Для такой системы выделены схема, информация, координаты и функция. Для схемы определены её структурные блоки: 1) входной полюс – пуассоновский входной поток быстрых машин с интенсивностью $\lambda > 0$, который поступает в транспортную пачку; 2) внешняя память – транспортная пачка из быстрых машин и медленной машины; 3) устройство по переработке внешней памяти – правило отбора быстрых машин из транспортной пачки для обгона медленной машины; 4) внутренняя память – механизм обгона для быстрых машин медленной машины; 5) устройство по переработке внутренней памяти – изменение механизма обгона для быстрых машин в зависимости от числа машин в транспортной пачке; 6) выходной полюс – поток быстрых машин, которые обогнали медленную. Для такого типа управляющей системы решены следующие задачи: 1) проведено кодирование информации или нелокальное описание структурных блоков; 2) выявлены функциональные и статистические связи между блоками схемы; 3) определены свойства исходных и искомых характеристик системы. Это позволяет изучить экстремальные свойства основных числовых характеристик транспортного потока и получить оценки параметров его закона распределения.

Работа выполнена в ННГУ по теме № 0120.0602598 «Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций».

Список литературы

[1] *Хейт Ф. А.* Математическая теория транспортных потоков. — М.: Мир, 1966.

[2] *Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В.* Построение и исследование математической модели неоднородного дорожного трафика // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети. — Минск: БГУ–РИВШ, 2011. — № 21. — С. 76–81.

[3] *Федоткин М. А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1998. — № 7. — С. 332–344.

Исследование математической модели трафика автомобилей на основе подхода Ляпунова–Яблонского

М. А. Федоткин, М. А. Рачинская

fma5@rambler.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

С использованием общих свойств управляющих кибернетических систем построена и изучена вероятностная модель движения неоднородного транспорта на автомагистрали в плохих дорожных и погодных условиях. Приводится метод получения оценок параметров закона распределения размера транспортной пачки при неинтенсивном движении быстрых машин.

Введение

В классической теории транспортных потоков рассматривается ситуация [1], когда последовательные моменты пересечения машинами виртуальной поперечной линии магистрали на оси времени образуют неординарный процесс Пуассона. Однако на практике действие некоторых факторов (плохие погодные и дорожные условия, разнородность машин) затрудняет беспрепятственное движение машин по автомагистрали. При таких условиях автомобили не могут свободно обгонять друг друга и мы можем наблюдать образование транспортных пачек или автоколонн. В силу этого построение и изучение как вероятностной модели пространственного расположения машин на магистрали, так и вероятностной модели последовательности зависимых временных интервалов между ближайшими машинами представляет значительные трудности. В работе [2] предполагается, что каждая автоколонна состоит из одной медленной машины во главе и очереди быстрых машин, ожидающих возможности обгона. Поэтому в работе [2] процесс формирования транспортной пачки рассматривается как функционирование системы массового обслуживания с переменной структурой и с ограниченной очередью. При этом каждая медленная машина может быть интерпретирована как обслуживающее устройство для быстрых машин. Здесь под обслуживанием понимается обгон быстрой машиной медленной. В отсутствие медленных машин быстрые двигаются относительно беспрепятственно.

Естественно предположить, что быстрые машины поступают в пачку по закону Пуассона с относительно малой интенсивностью. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ — вероятностная модель функционирования транспортной пачки и ω — произвольный элемент достоверного события Ω. Тогда $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра всех наблюдаемых исходов процесса функционирования транспортной пачки и $\mathbf{P}(\cdot)$ является вероятностной функцией на $\mathcal{F}$. Обозначим теперь через $\eta_0(\omega; t)$ случайное число быстрых машин, поступающих за промежуток времени $[0, t)$ в автоколонну по закону Пуассона с параметром $\lambda_0 > 0$. Далее через $\xi(\omega; t, \Delta t)$ обозначим случайное число быстрых машин, обогнавших медленную за промежуток времени $[t, t + \Delta t)$, и введем случайную величину $\varkappa(\omega; t)$, считающую число всех типов машин в транспортной пачке в момент времени $t \geqslant 0$. Пусть $\varkappa(\omega; t)$ принимает значения из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$. Это возможно, если интенсивность обгона медленной машины быстрыми значительно превышает интенсивность поступления быстрых машин в автоколонну. В этом случае образуются транспортные пачки относительно небольшого размера. Поскольку среднее время обгона быстрыми машинами медленной зависит от числа машин в транспортной пачке, то необходимо различать следующие ситуации. Пусть μ_1^{-1} и μ_2^{-1} — среднее время обгона в случае, когда пачка состоит из двух и трех машин соответственно. Предположим также, что среднее время обгона не меняется, если в пачке находится более трех машин. Обозначим его через μ_3^{-1}. Параметры μ_1, μ_2 и μ_3 будем называть интенсивностями обгона в указанных случаях. На параметры системы следует наложить ограничение $\lambda_0 < \mu_3$, которое содержательно описывает условие, что интенсивность обгона превышает интенсивность поступления машин в пачку. Учитывая, что машины в транспортном потоке не могут быть потеряны и что пачка не может состоять более чем из N машин, предположим выполнение следующего ограничения. Если быстрая машина догоняет полную автоколонну из N автомобилей, то она все же присоединяется к ней. При этом одновременно с этим быстрая машина, движущаяся вслед за головной, обязательно совершает обгон. Теперь можем следующими соотношениями определить при малых $\Delta t > 0$ условные вероятности событий, порожденных величиной $\xi(\omega; t, \Delta t)$:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\} \mid \{\omega\colon \varkappa(\omega; t) = 1, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = 1\}) = 1 - O(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\} \mid \{\omega\colon \varkappa(\omega; t) = 2, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = 1 - \mu_1 \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega;t,\Delta t)=1\}\mid\{\omega\colon \varkappa(\omega;t)=2,\eta_0(\omega;t,\Delta t)=0\})=\mu_1\Delta t-o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega;t,\Delta t)=0\}\mid\{\omega\colon \varkappa(\omega;t)=3,\eta_0(\omega;t,\Delta t)=0\})=1-\mu_2\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega;t,\Delta t)=1\}\mid\{\omega\colon \varkappa(\omega;t)=3,\eta_0(\omega;t,\Delta t)=0\})=\mu_2\Delta t-o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega;t,\Delta t)=0\}\mid\{\omega\colon \varkappa(\omega;t)=k,\eta_0(\omega;t,\Delta t)=0\})=1-\mu_3\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega;t,\Delta t)=1\}\mid\{\omega\colon \varkappa(\omega;t)=k,\eta_0(\omega;t,\Delta t)=0\})=\mu_3\Delta t-o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega;t,\Delta t)=1\}\mid\{\omega\colon \varkappa(\omega;t)=N,\eta_0(\omega;t,\Delta t)=1\})=1,$$

где $4\leqslant k\leqslant N$. Из этих соотношений следует, что при заданном размере транспортной пачки условная вероятность того, что за (где угодно расположенный) промежуток Δt по меньшей мере две машины обгонят медленную, есть величина бесконечно малая по сравнению с Δt. Обозначим через $Q(t,k)$ вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa(\omega;t)=k\})$, которая определена при $k=1,2,\ldots,N$ и $t\geqslant 0$. В работе [2] с использованием теоремы Маркова при $\lambda<\mu_3$ доказано, что существует единственное стационарное распределение $\lim\limits_{t\to\infty}Q(t,m)=$ $=Q(m)>0,\sum_{m=1}^{\infty}Q(m)=1$ для числа $\varkappa(\omega)$ всех типов машин транспортной пачки в стационарном режиме движения автоколонн по магистрали. Пусть $\nu_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}$, $\nu_2=\frac{\lambda_0}{\mu_2}$, $\nu_3=\frac{\lambda_0}{\mu_3}$, $p=(1+\nu_1+\nu_1\nu_2)^{-1}$, $q=\nu_1(1+\nu_1+\nu_1\nu_2)^{-1}$, $s=\nu_1\nu_2(1+\nu_1+\nu_1\nu_2)^{-1}$, а величина $\eta(\omega;t)$ подсчитывает число всех типов автомобилей, пересекающих поперечную линию магистрали за время $[0,t)$, и $P_k(t)=\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t)=k\})$, $k\geqslant 0$. Будем рассматривать транспортный поток как неординарный пуассоновский поток в случае, если в любой вызывающий момент поступает одна заявка с вероятностью p, две заявки — с вероятностью q и три — с вероятностью s. При пуассоновском движении медленных машин с интенсивностью $\lambda>0$ и $N=3$ получены формулы:

$$Q(1)=p,\quad Q(2)=q,\quad Q(3)=s,\quad P_0(t)=e^{-\lambda t},\quad P_1(t)=\lambda tpe^{-\lambda t},$$
$$P_k(t)=e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\sum_{j=0}^{[\frac{k-2i}{3}]}\binom{k-i-2j}{i,j,k-2i-3j}p^{k-2i-3j}q^is^j\frac{(\lambda t)^{k-i-2j}}{(k-i-2j)!},$$
$$k=2,3,\ldots$$
$$\mathbf{M}\eta(t)=\lambda t(1+q+2s),\qquad \mathbf{D}\eta(t)=\lambda t(1+3q+8s),$$
$$K_a\eta(t)=(1+7q+26s)(\lambda t)^{-1/2}(1+3q+8s)^{-3/2},$$
$$\text{Э}\eta(t)=(1+15q+80s)(\lambda t)^{-1}(1+3q+8s)^{-2},$$

где через символы $K_a(\cdot)$ и $Э(\cdot)$ обозначены коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины соответственно.

Представление модели транспортной автоколонны на магистрали в виде эволюционной управляющей системы

В этой работе произвольная транспортная пачка представляется как управляющая кибернетическая система [3], для которой имеет место принцип непрерывности актов её функционирования во времени $t \geqslant 0$. Для системы выделены схема, информация, координаты и функция. Для схемы определены структурные блоки: 1) входной полюс — пуассоновский поток быстрых машин, поступающих в автоколонну; 2) внешняя память — транспортная пачка из медленной и быстрых машин; 3) устройство по переработке внешней памяти — правило отбора быстрых машин для обгона медленной машины; 4) внутренняя память — механизм обгона для быстрых машин; 5) устройство по переработке внутренней памяти — изменение механизма обгона в зависимости от размера автоколонны; 6) выходной полюс — поток быстрых машин, которые обогнали медленную. Для такой управляющей системы решены задачи: 1) проведено кодирование информации или нелокальное описание блоков; 2) выявлены функциональные и статистические связи между блоками; 3) определены свойства исходных и искомых характеристик системы. Это позволяет изучить экстремальные свойства числовых характеристик транспортного потока и получить оценки параметров его закона распределения.

Работа выполнена в ННГУ по теме № 0120.0602598 «Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций».

Список литературы

[1] *Хейт Ф. А.* Математическая теория транспортных потоков. — М.: Мир, 1966.

[2] *Fedotkin M. A., Rachinskaya M. A.* Investigation of Traffic Flows Characteristics in Case of the Small Density // Queues: Flows, Systems, Networks. Proc. Int. Conf. «Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks». — Minsk: BSU-RIVH, 2011. — № 21. — С. 82–87.

[3] *Федоткин М. А.* Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука, 1996. — С. 51–70.

Кибернетический подход к изучению выходных процессов управления потоками Бартлетта

М. А. Федоткин, А. А. Федоткин

fma5@rambler.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Введение

В работе [1] впервые дано обоснование, когда и при каких условиях возникают потоки Бартлетта. Подробно изучены вероятностные и интегральные свойства таких потоков. Показана эффективность применения потоков Бартлетта при построении и изучении дискретных моделей движения неоднородных автомобилей на магистралях. С использованием общего понятия кибернетической управляющей системы обслуживания [2] в данной работе построена и исследована математическая модель выходных потоков, возникающих в системе обслуживания и управления m конфликтными потоками Бартлетта в классе циклических алгоритмов. Получены рекуррентные соотношения как для векторной марковской последовательности, которая является математической моделью конфликтной системы массового обслуживания с переменной структурой, так и для одномерных распределений этой последовательности. Доказано, что нелокальное описание выходных потоков в таких неклассических системах обслуживания можно выполнить с помощью маркированного точечного процесса с выделенной дискретной компонентой. Следует отметить, что проблема выходных потоков была решена только для простейших классических систем с ожиданием при пуассоновсом входном потоке и показательном законе обслуживания. Проведена классификация по Колмогорову состояний рассматриваемой системы обслуживания и управления m конфликтными потоками Бартлетта. Найдены необходимое и достаточное условия существования стационарного режима системы. С использованием метода имитационного моделирования осуществляется статистический анализ основных характеристик управляющей системы обслуживания. Этот анализ позволяет определить квазиоптимальное управление потоками по условию минимума средних задержек требований в системе. Аналитические и численные результаты интерпретируются и применяются при управлении транспортными конфликтными потоками машин на локальном перекрестке.

Построение модели управляющей системы обслуживания и её анализ

При кибернетическом подходе [2] для любой управляющей системы обслуживания необходимо выделить схему, информацию, координаты и функцию. Схема управляющей системы обслуживания отражает ее скелетное строение и дает возможность графического изображения системы с помощью фиксированного числа ее структурных блоков и заданных связей между блоками. Функциональная схема включает следующие структурные блоки: a) входные потоки Π_1, Π_2, ..., Π_m неоднородных требований — первый тип входных полюсов; b) потоки насыщения $\Pi_1^{(\text{н})}$, $\Pi_2^{(\text{н})}$, ..., $\Pi_m^{(\text{н})}$ (выходные потоки при максимальной загрузке и эффективном функционировании системы) — второй тип входных полюсов; c) неограниченные накопители $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, ..., $N^{(m)}$ очередей соответственно по входным потокам Π_1, Π_2, ..., Π_m — внешняя память; d) устройства $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ по организации дисциплины очередей в накопителях или стратегии механизма обслуживания — блок по переработке информации внешней памяти; e) обслуживающее устройство с $2m$ состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$ — внутренняя память; f) циклический граф переключений этих состояний, когда после состояния $\Gamma^{(r)}$ осуществляется мгновенный переход в состояние $\Gamma^{(r+1)}$ при $r < 2m$ и в состояние $\Gamma^{(1)}$ при $r = 2m$, — блок по переработке информации внутренней памяти; g) выходные потоки $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \ldots, \overline{\Pi}_m$ — выходные полюсы. Общая схема таких управляющих систем обслуживания представлена на рис. 1 в работе [2]. Набор состояний очередей в накопителях, множество состояний обслуживающего устройства, входных потоков, потоков насыщения и потоков обслуженных требований полностью определяют информацию управляющей системы обслуживания. Номера всех входных потоков, потоков насыщения, выходных потоков, накопителей, механизмов формирования очередей и номера состояний обслуживающего устройства задают координаты управляющей системы обслуживания, которые определяют расположение блоков на схеме. Функция системы — это, прежде всего, циклическое управление потоками (разрешение или запрещение начала обслуживания каждого из них) и непосредственно обслуживание неоднородных требований. При каждом фиксированном $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ в течение времени T_{2j-1} согласно экстремальной стратегии δ_j [2] обслуживаются только требования потока Π_j в количестве не более величины $[\mu_j T_{2j-1}]$, а в состоянии $\Gamma^{(2j)}$ в течение времени T_{2j} запрещается обслуживание потоков. Здесь параметр μ_j^{-1} определяет среднее время обслуживания требования потока Π_j или μ_j есть интенсивность потока насыщения $\Pi_j^{(\text{н})}$.

На оси времени выберем начальный момент $\tau_0 > 0$, совпадающий с некоторым моментом смены состояния обслуживающего устройства. В дальнейшем будем отслеживать значения всех интересующих нас величин в дискретные моменты $\tau_i, i = 0, 1, \ldots$, переключений состояний обслуживающего устройства или на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1}), i = 0, 1, \ldots$ При $j = 1, 2, \ldots, m$ и $i \geqslant 0$ введем случайные элементы: 1) $\eta_{j,i}$ — число заявок потока Π_j, поступивших в систему за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$; 2) $\xi_{j,i}$ — максимально возможное число заявок потока Π_j, которые система виртуально может обслужить на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$; 3) Γ_i — состояние обслуживающего устройства на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$; 4) $\varkappa_{j,i}$ — число требований потока Π_j, находящихся в системе в момент τ_i; 5) $\xi'_{j,i}$ — число заявок потока Π_j, которые в действительности покидают систему на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$; 6) $\xi'_{j,-1}$ — число заявок потока Π_j, которые в действительности покидают систему на промежутке $[0, \tau_0)$.

Теорема 1. *Если значение функци* $u(\Gamma^{(r)})$ *равно* $\Gamma^{(1)}$ *при* $r = 2m$ *и равно* $\Gamma^{(r+1)}$ *при* $r = 1, 2, \ldots, 2m-1$, *то имеет место равенство* $(\Gamma_{i+1}, \varkappa_{j,i+1}, \xi'_{j,i}) = (u(\Gamma_i), \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\})$.

Обозначим через $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_{2m}$ период циклического управления потоками и через $\mathbf{M}\eta_j$ математическое ожидание числа требований потока Π_j, поступивших в систему за каждый промежуток времени $[\tau_i, \tau_i + T)$. Формула для вычисления математического ожидания $\mathbf{M}\eta_j$ числа требований потока Бартлетта на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_i + T)$ приведена в работе [1].

Теорема 2. *Последовательность* $\{(\Gamma_i, \varkappa_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i = 0, 1, \ldots\}$ *при начальном распределении вектора* $(\Gamma_0, \varkappa_{j,0}, \xi'_{j,-1})$ *является марков-*

ской и неравенство $\mathbf{M}\eta_j - [\mu_j T_{2j-1}] < 0$ *является необходимым и достаточным условием для существования единственного стационарного режима в системе по потоку* Π_j.

Для рассматриваемых систем в общем случае аналитическим путем не удается получить такие ее характеристики, как законы распределения времени переходного процесса, длин очередей, времени ожидания начала обслуживания требований по потокам и законы распределения выходных потоков. Поэтому важно найти численные оценки указанных законов распределения и их интегральных характеристик, например численные оценки загрузки системы. Принцип блочного строения схемы управляемых систем обслуживания [2] позволяет построить имитационную модель таких систем. Программная реализация имитационной модели выполнена средствами разработок CodeGear RAD Studio 2009 на языке Object Pascal. Полный объём программы составляет 4,36 Мб на жестком диске, а без режима визуализации объём равен 1,37 Мб. Для моделирования использовался компьютер на базе процессора Intel Core 2 Duo. Результаты исследований на имитационной модели интерпретированы на задаче управления конфликтными транспортными потоками на пересечении магистралей. При этом за счет укрупнения некоторых состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$ светофора задача управления m потоками легко сводится к задаче управления двумя наиболее интенсивными конфликтными потоками. Итак, в имитационной модели, ради простоты, полагаем, что $m = 2$ и интенсивными потоками являются Π_1 и Π_2. С использованием теоретических результатов и имитационного моделирования предложен метод решения проблемы определения квазиоптимальных параметров циклического управления транспортными потоками на изолированных перекрестках по условию минимума оценки среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания произвольного требования. Более того, квазиоптимальные параметры обеспечивают сравнительно небольшое значение дисперсии каждого из выходных потоков, и, значит, можно значительно уменьшить задержки транспорта на соседних перекрестках.

Работа выполнена в ННГУ по теме № 0120.0602598 «Анализ дискретных управляющих систем обслуживания и систем вычисления булевых функций».

Список литературы

[1] *Федоткин М. А., Федоткин А. А.* Дискретные модели в теории транспортных потоков // Сб. научн. статей VIII Международной научной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: МАКС Пресс, МГУ, 2009. — С. 305–311.

[2] *Федоткин М. А.* Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука, 1996. — С. 51–70.

Построение глубоких отсечений в булевом программировании

О. В. Хамисов

khamisov@isem.sei.irk.ru

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск

Введение

В докладе описывается методика, впервые примененная в [2] для построения глубоких отсечений в вогнутом программировании и затем адаптированная в [3] для задач булева программирования. Дано теоретическое обоснование построения глубоких отсечений при помощи так называемого вогнутого продолжения.

Вогнутое продолжение

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, $f : X \to \mathbb{R}$ — вогнутая, непрерывная на X функция.

Определение 1. Функция $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется вогнутым продолжением функции f на множестве X, если выполняются следующие условия:

1) W — непрерывная вогнутая функция;
2) $W(x) = f(x) \ \ \forall x \in X$;
3) $W(x) \geqslant f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Множество всех вогнутых продолжений обозначим $EXT(f, X)$. Очевидно, что $f \in EXT(f, X)$.

Определение 2. Функция F называется максимальным вогнутым продолжением функции f на множестве X, если

1) $F \in EXT(f, X)$;
2) $F(x) \geqslant W(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall W \in EXT(f, X)$.

Везде далее будем предполагать, что f — дифференцируемая функция. Нетрудно показать, что максимальное вогнутое продолжение F вогнутой дифференцируемой функции f на X определяется следующим образом

$$F(x) = \min_{y \in X}\{f(y) + \nabla f(y)^T(x - y)\}. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение множество

$$D = \{d \in \mathbb{R}^n : d = \nabla f(x),\ x \in X\},$$

которое называется образом градиентного отображения множества X, и $co(D)$ — выпуклую оболочку D.

Теорема. *Предположим, что*

$$0 \notin int(co(D)).$$

Тогда максимальное вогнутое продолжение F имеет рецессивное направление на $\mathbb{R}^n$.

Главное отличие максимального вогнутого продолжения F от исходной функции f состоит в том, что F может иметь рецессивные направления, даже если f рецессивных направлений не имеет. Именно существование рецессивных направлений у F и позволяет строить более глубокие отсечения.

Очевидно, что максимальное вогнутое продолжение имеет смысл в том случае, когда задача (1) практически разрешима.

Пример. Функция f — вогнутая квадратичная функция

$$f(x) = x^T Q x + c^T x,$$

Q — отрицательно полуопределенная симметричная матрица. Тогда наилучшее вогнутое продолжение F определяется следующим образом:

$$F(x) = \min_{y \in X}\{2y^T Q x - y^T Q y\} + c^T x. \tag{2}$$

Следовательно, вычисление значения функции F в точке эквивалентно решению задачи выпуклого программирования (2).

Идейная основа построения глубоких отсечений

В данном разделе исследуется возможность построения глубоких отсечений в булевом программировании, основанных на использовании вогнутых продолжений.

Пусть заданы многогранное множество

$$X = \{x : Ax \leqslant b, 0 \leqslant x_j \leqslant 1, j = \overline{1,n}\} \subset \mathbb{R}^n,$$

где A — $(m \times n)$-матрица, $b \in \mathbb{R}^m$, и невырожденная вершина x^0 множества X, не все компоненты которой целые числа. Требуется построить правильное отсечение, т. е. построить такую плоскость $L = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^T x = \beta\}$, что открытое полупространство $H^{>} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^T x > \beta\}$ содержит точку x^0, а полупространство $H^{\leqslant} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^T x \leqslant \beta\}$ содержит все целочисленные точки множества X.

Как указано в [1], многие правильные отсечения можно построить, используя точки пересечения ребер многогранного конуса с вершиной x^0, образованного активными в точке x^0 ограничениями, с границей выпуклого множества $D \supset X$, такого, что целочисленные точки множества X принадлежат границе D. В работах Гомори, Балаша и Гловера в качестве D предлагается использовать полосу, двойственный гиперкуб и шар

$$S = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i) \geqslant 0 \right\}. \tag{3}$$

Заметим, что при построении этих отсечений используется не вся информация о множестве X: на построение отсечений никак не влияют *неактивные* в точке x^0 ограничения. В докладе предлагается метод построения правильных отсечений, использующий информацию о всех ограничениях множества X.

Обозначим функцию, с помощью которой определяется множество S в (3), через $s(x)$

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i).$$

Нетрудно видеть, что $s(x)$ — вогнутая функция. Определим вогнутое продолжение

$$F_s(x) = \min_{y \in X} \{f(y) + \nabla f(y)^T (x - y)\},$$

$$F_s(x) = s(x), \quad x \in X,$$
$$F_s(x) \geqslant s(x), \quad x \notin X,$$

и множество

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : F_s(x) \geqslant 0\}.$$

Нетрудно показать, что целочисленные точки множества X являются граничными точками множества G. Следовательно, отсечения, построенные с помощью множества G, будут правильными.

В данном случае

$$F_s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \min_{y \in X} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 - 2y_i x_i) \right\}. \tag{4}$$

Задача (4) есть задача минимизации выпуклой сепарабельной квадратичной функции на выпуклом многогранном множестве. В силу (1) отсечения, построенные с помощью множества Z (будем называть их отсечениями по вогнутому продолжению), будут не хуже (на практике, как правило, лучше) отсечений, построенных с помощью шара S. Плата за улучшение глубины отсечений состоит в решении задач (4). Что касается отсечений по полосе и двойственному гиперкубу, то сравнение с ними отсечений по вогнутому продолжению зависит от конкретной геометрической ситуации. В докладе приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность различных отсечений, и приводится предварительный численный эксперимент.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00307-а.

Список литературы

[1] *Булатов В. П.* Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1977.

[2] *Bulatov V. P., Khamisov O. V.* The Cutting Method in E^{n+1} Through Concave Extension for Solving Global Extremum Problem // 21 JAHRESTAGUNG «Mathematische Optimerung». — Berlin: Humboldt University, 1989. — P. 16–19.

[3] *Хамисов О. В.* О построении новых отсечений в целочисленном программировании // Тр. XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 1. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. — С. 607–612.

Решение проблемы обобщенной минимизации для многоленточных автоматов с одной существенной лентой

В. Е. Хачатрян, Я. Г. Великая

khachatryan@bsu.edu.ru, velikaya@bsu.edu.ru

Белгородский государственный университет

Определяется множество многоленточных автоматов с одной существенной лентой. Приводится процедура, использующая полную систему фрагментных эквивалентных преобразований, получения по любому автомату с одной существенной лентой всех минимальных, по числу состояний ему эквивалентных.

Многоленточные детерминированные автоматы [1] являются обобщением обычных конечных детерминированных автоматов. Не решена задача нахождения по заданному автомату ему эквивалентного, содержащего минимальное число состояний. Способ нахождения минимального автомата, используемый для конечных детерминированных автоматов, не приемлем, поскольку для конечных детерминированных автоматов минимальный единственен и совпадает с тупиковым, т. е. автоматом, не содержащим эквивалентных состояний. Для многоленточных автоматов существуют классы эквивалентности, содержащие бесконечное число тупиковых [2]. Более того, минимальный автомат может быть не единственным [3], поэтому проблема отыскания по заданному автомату всех ему эквивалентных минимальных называется обобщенной проблемой минимизации. В [4] обсуждается поиск одного минимального автомата и в случае, когда рассматриваемое множество автоматов отлично от множества, исследуемого в данной работе.

В [5] рассматривается случай двухленточных автоматов. В данной работе дается обобщение полученных в [5] результатов в случае, когда число лент $n > 2$.

Рассматриваются n-ленточные автоматы над алфавитом $P = \{p, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}\}$ и $Q = \{0, 1\}$, в виде диаграммы, где метками алфавита P помечены вершины диаграмм, а метками Q — дуги, из них выходящие. Путь, ведущий из входа в выход диаграммы, описывается его историей, т. е. последовательностью меток вершин (ленты) и меток дуг (символы на лентах), из них выходящих. История пути разбивается на подыстории, каждая из которых состоит из одних и тех же меткок вершин, с последующей меткой дуг. Автоматы эквивалентны, когда для любого пути одного из них в другом существует путь с тем же множеством подысторий и наоборот.

Автомат назовем автоматом с одной существенной лентой, если пути, ведущие в нем из входа в выход, могут содержать подыстории, для которых вершины с меткой q_i, $i = 1, \ldots, n-1$, имеют выходящие дуги, помеченные одним и тем же символом алфавита Q.

Процедура получения по данному автомату с одной существенной лентой всех минимальных ему эквивалентных основана на использовании полной системы эквивалентных фрагментарных преобразований.

Преобразование П1 [6] позволяет склеивать или расклеивать вершины автомата, а преобразование П2 [6] позволяет «переносить через фрагмент» множество q_i, $i = 1, \ldots, n-1$, вершин, если такой меткой помечены все входы или выходы фрагмента. Обозначим T систему преобразований, состоящую из преобразований П1 и П2.

Теорема 1. *T является полной системой фрагментных эквивалентных преобразований для n-ленточных автоматов, $n \geqslant 2$, с одной существенной лентой.*

Рассмотрим процедуру преобразования автомата с одной существенной лентой, состоящую из 3 этапов.

Этап 1. Пусть D — исходный автомат. С помощью преобразования П2 все $q_i, i = 1, \ldots, n-1$, состояния в автомате D переносим как можно «ближе» ко входу. На линейных участках добьемся условия: если $i < j$, то состояния q_i должны предшествовать состоянию q_j. С помощью преобразования П1 склеим все эквивалентные состояния. Полученный автомат обозначим через D'.

Этап 2. Применяя преобразования П2, уменьшим число состояний q_i, $i = 1, \ldots, n$, в автомате D' до тех пор, пока это возможно. Полученный автомат обозначим через D''.

Этап 3. В автомате D'' осуществим расклейку тех p-состояний, которые позволяют за счёт последующего применения преобразования П2 уменьшить число q_i-состояний таким образом, что уменьшится общее число всех состояний. Полученный автомат обозначим через D^*.

Теорема 2. *Автомат D^* является минимальным в классе эквивалентности D.*

Доказательство. Доказательство теоремы в общих чертах повторяет доказательство, предложенное в [5] для случая $n = 2$. ∎

Обозначим через K преобразования типа П2, не меняющие общее число состояний многоленточного автомата.

Теорема 3. *Если D^* — минимальный автомат с одной существенной лентой, то, применяя к нему преобразования вида K, получим все минимальные в классе эквивалентности D^*.*

Список литературы

[1] *Rabin M. O., Scott D. P.* Finite Automata and Their Decision Problems // IBM J. of Research and Development. — 1959. — V. 3, № 2. — P. 114–125.

[2] *Хачатрян В. Е.* Трансформационный метод в моделях вычислений // Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2008. — № 4. — С. 52–55.

[3] *Подловченко Р. И., Хачатрян В. Е.* Минимальность и тупиковость многоленточных автоматов // Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2008. — № 2. — С. 92–120.

[4] *Tamm H.* On Minimality and Size Reduction of One-Tape and Multitape Finite Automata. Helsinki: University of Helsinki, 2004.

[5] *Подловченко Р. И., Хачатрян В. Е.* Полное решение проблемы минимизации для одного множества бинарных двухленточных автоматов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, № 3. — С. 146–159.

О сведении задачи распознавания выполнимости формул логики линейного времени к распознаванию выполнимости формул логики высказываний

Р. В. Хелемендик

romash@keldysh.ru

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Логика линейного времени (ллв) является расширением логики высказываний (лв), в которой наряду с классическими связками добавлены следующие временны́е: $\bigcirc$ (в следующий момент), $\Box$ (всегда), $\Diamond$ (в некоторый момент), U (до тех пор, пока). Основанный на методе семантических таблиц для модальных логик (см. [1]) алгоритм распознавания выполнимости формул ллв изложен в работе [2]. Следуя работе [3], мы будем называть моделью для формулы конечную или бесконечную последовательность вершин с выделенной начальной вершиной, в которой эта формула истинна. Формула называется выполнимой, если она истинна в некоторой модели.

В настоящей работе проведено сведе́ние задачи распознавания выполнимости формул ллв к распознаванию выполнимости формул лв. Для произвольной формулы ллв Θ с учетом её особенностей строится формула лв Θ^{pq}, которая выполнима тогда и только тогда, когда выполнима Θ. В случае выполнимости Θ^{pq} по этой формуле получается модель для исходной формулы Θ. Данное сведе́ние применимо, в частности, и для ллв с обычной семантикой (см. [2, 4]), в которой моделями для формул считаются только бесконечные последовательности вершин, и оно даёт возможность использовать многочисленные SAT-решатели в лв для распознавания выполнимости формул ллв.

1. Основные определения

Каждая пропозициональная переменная есть *формула*. Если φ и ψ *формулы*, то θ, являющаяся одним из 9 выражений: $\top$, $\neg\varphi$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\to\psi)$, $\bigcirc\varphi$, $\Box\varphi$, $\Diamond\varphi$, $(\varphi\ U\ \psi)$, тоже называется *формулой*. Других *формул* нет.

Моделью будем называть пару $M=\langle N,L\rangle$, где N – связный ориентированный граф с выделенной начальной вершиной u_0, каждая вершина которого имеет не более одного сына[1] , а L – функция означивания, сопоставляющая каждой вершине множество пропозициональных переменных. *Полным путём* в графе называется бесконечный путь или цепь, последняя вершина которой не имеет сыновей.

Истинность формулы θ в вершине u_i модели M (обозначим это $M, u_i \models \theta$) определяется индуктивно.

— Если $\theta = \top$, то $M, u_i \models \theta$.
— Если $\theta = p$, то $M, u_i \models \theta \rightleftharpoons p \in L(u_i)$.
— Если $\theta = \neg\varphi$, то $M, u_i \models \theta \rightleftharpoons M, u_i \not\models \varphi$ (неверно $M, u_i \models \varphi$).
— Если $\theta = (\varphi \wedge \psi)$, то $M, u_i \models \theta \rightleftharpoons (M, u_i \models \varphi$ и $M, u_i \models \psi)$.
— Если $\theta = (\varphi \vee \psi)$, то $M, u_i \models \theta \rightleftharpoons (M, u_i \models \varphi$ или $M, u_i \models \psi)$.
— Если $\theta = (\varphi \rightarrow \psi)$, то $M, u_i \models \theta \rightleftharpoons (M, u_i \not\models \varphi$ или $M, u_i \models \psi)$.
— Если $\theta = \bigcirc\varphi$, то $M, u_i \models \theta \rightleftharpoons M, u_j \models \varphi$ для сына u_j вершины u_i либо вершина u_i не имеет сына.
— Если $\theta = \Box\varphi$, то $M, u_i \models \theta \rightleftharpoons$ для полного пути с началом в вершине u_i в каждой его вершине u_j верно $M, u_j \models \varphi$.
— Если $\theta = \Diamond\varphi$, то $M, u_i \models \theta \rightleftharpoons$ для полного пути с началом в вершине u_i существует вершина u_j, для которой верно $M, u_j \models \varphi$.
— Если $\theta = (\varphi\ U\ \psi)$, то $M, u_i \models \theta \rightleftharpoons$ для полного пути с началом в вершине u_i существует вершина u_j, для которой верно $M, u_j \models \psi$, а в каждой вершине u_k этого пути, предшествующей u_j, верно $M, u_j \models \varphi$.

Формула θ *истинна в модели* M, если она истинна в выделенной вершине u_0 этой модели. Формула θ *выполнима*, если она истинна в некоторой модели. Формула θ *общезначима*, если она истинна в каждой модели. В дальнейшем положим $\bot \rightleftharpoons \neg\top$.

2. Общее описание сведе́ния

Построение сведе́ния задачи распознавания выполнимости формул логики ветвящегося времени (лвв) к распознаванию выполнимости формул лв описано в работе [5]. Однако уже на синтаксическом уровне ллв (соответствующий ей англоязычный термин – Linear Time Logic, *Ltl*) не является частным случаем лвв (соответствующий ей англоязычный термин – Computational Tree Logic, Ctl) [4]. Тем не менее, построение по формуле ллв Θ формулы лв Θ^{pq}, выполнимой

[1] Т. е. N — конечная или бесконечная последовательность вершин.

тогда и только тогда, когда выполнима исходная формула Θ, возможно, и оно проводится по общей схеме, изложенной в работе [5], с учётом синтаксических и семантических отличий ллв и лвв.

В случае выполнимости формулы Θ^{pq} модель $M = \langle N, L \rangle$ для формулы Θ строится по модели для формулы Θ^{pq} следующим образом. Последовательность N вершин в модели определяется интерпретацией вспомогательных пропозициональных переменных q_j, используемых, в частности, для кодирования специального вида подформул φ_j исходной формулы Θ. А функция означивания L определяется по специальной интерпретации элементов множеств $\{p_i\}$ – пропозициональных переменных формулы Θ^{pq}, соответствующих конкретным пропозициональным переменным p_i исходной формулы Θ.

3. Корректность и полнота сведе́ния

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если формула Θ^{pq} выполнима, то выполнима и формула Θ. Формула Θ истинна в модели M, построенной по модели для формулы Θ^{pq}.*

Доказательство. Проводится по индукции проверкой истинности формулы Θ в модели M, построенной по модели для формулы Θ^{pq}. ∎

Теорема 2. *Если формула Θ выполнима, то выполнима и формула Θ^{pq}.*

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно тому, что из невыполнимости формулы Θ^{pq} следует невыполнимость формулы Θ, т. е. общезначимость формулы $\neg\Theta$. Для доказательства последнего утверждения используется модификация алгоритма построения выводов общезначимых формул из аксиом (см. [3, 6, 7]). ∎

В работе [3] введена формула $\Psi = \Box\neg\bigcirc\bot$ и установлена равносильность выполнимости формулы Θ ллв с рассматриваемой нами обобщённой семантикой выполнимости формулы $(\Theta \wedge \Psi)$ ллв с обычной семантикой. Таким образом, настоящее сведе́ние задачи распознавания выполнимости формул ллв к распознаванию выполнимости формул лв полностью применимо и для ллв с обычной семантикой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

Список литературы

[1] *Chagrov A. V., Zakharyaschev M. V.* Modal Logic. — Oxford: Clarendon Press, 1997. — V. 35 of Oxford Logic Guides.

[2] *Wolper P.* The Tableau Method for Temporal Logic: An Overview // Logique et Analyse. — 1985. — V. 28, June–Sept. 85. — P. 119–136.

[3] *Хелемендик Р. В.* Об одном обобщении логики линейного времени // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. — С. 209–212.

[4] *Emerson E. A., Halpern J. Y.* 'Sometimes' and 'Not Never' Revisited: On Branching versus Linear Time Temporal Logic // JACM. — 1986. — V. 33, № 1. — P. 151–178.

[5] *Хелемендик Р. В.* О сведении задачи распознавания выполнимости формул логики ветвящегося времени к распознаванию выполнимости формул логики высказываний // Сб. тр. XVII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» им. акад. О. Б. Лупанова (Новосибирск, 27 октября – 1 ноября 2008 г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2008. — С. 177–180.

[6] *Хелемендик Р. В.* Алгоритм распознавания формул логики ветвящегося времени и эффективный алгоритм построения выводов общезначимых формул из аксиом // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. — М.: Физматлит, 2006. — С. 217–266.

[7] *Хелемендик Р. В.* Об эффективном алгоритме построения выводов формул логики ветвящегося времени из аксиом с использованием логики высказываний // Дискретные модели в теории управляющих систем: VIII Международная конференция, Москва, 6–9 апреля, 2009 г.: Труды. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК им. М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. — С. 325–329.

Свойства непрерывных детерминированных функций с задержкой

А. Н. Черепов

ANCherepov@mail.ru

Смоленский филиал Московского энергетического института
(технический университет)

Задача об оценке сложности реализации непрерывных функций и классов таких функций дискретными функциями, близкими к автоматным, была поставлена А. Н. Колмогоровым [1]. В работе [2] в качестве множества приближающих функций рассматривался класс дискретных детерминированных функций с задержкой и соответствующих им непрерывных функций с задержкой. Этот класс появляется при естественном обобщении понятия детерминированной функции. Если с помощью классических детерминированных функций нельзя приблизить с любой точностью произвольную непрерывную функцию, то функции с задержкой позволяют это сделать. В предлагаемой работе приводятся некоторые свойства детерминированных функций с задержкой.

Рассмотрим множество всех бесконечных двоичных последовательностей E. Множество всех функций вида $f : E^n \to E$ обозначим P. Предположим, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательности из E, а $\tilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — набор таких последовательностей. Пусть $a_1|k, a_2|k, \ldots, a_n|k$ — первые k членов последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно, тогда $\tilde{a}|k = (a_1|k, a_2|k, \ldots, a_n|k)$.

Назовем функцию f детерминированной, если для всех $k = 1, 2, \ldots$ выполнено:

$$\forall \tilde{a}, \tilde{b} : \tilde{a}|k = \tilde{b}|k \Rightarrow f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k.$$

Класс всех детерминированных функций обозначим P_d, все остальные функции из P будем называть недетерминированными. Дальнейшие определения взяты из работы [2].

Определение 1. Говорим, что функция f является детерминированной функцией с задержкой τ, где τ — произвольное неотрицательное целое число, если для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b}$ выполнено:

$$\tilde{a}|k + \tau = \tilde{b}|k + \tau \ \Rightarrow \ f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k.$$

Множество всех функций с задержкой τ обозначим P_d^τ. Заметим, что $P_d^0 = P_d$. В класс P_d^∞ включим все функции множеств P_d^τ при $\tau = 0, 1, \ldots$

Утверждение 1 [2]. *Класс* P_d^∞ *замкнут.*

Из определения следует, что функцию с задержкой τ от n аргументов можно трактовать так: берется дискретное детерминированное устройство с n входами, преобразующее бесконечные входные последовательности из нулей и единиц в такую же выходную последовательность, и рассматривается выход этого устройства не с первого момента времени, а с момента времени $\tau + 1$. Осуществляемое преобразование и считается детерминированной функцией с задержкой τ. Таким образом, понятие функции с задержкой является естественным обобщением детерминированных функций. Аналогичным образом можно ввести понятие конечного автомата с задержкой.

Перейдем к вопросу о возможности реализации непрерывных функций, осуществляющих отображение точек n-мерного единичного куба на отрезок $[0, 1]$. Сопоставим каждой двоичной последовательности $a(1)a(2)\ldots a(i)\ldots$ некоторое число отрезка $[0, 1]$, равное $0{,}a(1)a(2)\ldots a(i)\ldots$. Из двух возможных представлений $0{,}a(1)a(2)\ldots a(i)100\ldots = 0{,}a(1)a(2)\ldots a(i)0111\ldots$ выберем первое. Для числа 1 берется представление $1 = 0{,}1111\ldots$.

Определение 2. Функцию $\mu : [0, 1] \to E$ определим следующим образом: для любого числа $a \in [0, 1]$, где $a = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$, значение функции равно $\mu(a) = a_1a_2a_3\ldots$.

Определение 3. Функцию $\mu^{-1} : E \to [0, 1]$ определим так, что для любой бесконечной двоичной последовательности $a = a_1a_2a_3\ldots$

1) если существует натуральное k, такое, что $a = a_1a_2\ldots a_k01111\ldots$, т. е. начиная с $(k+2)$-го члена a представляет собой бесконечную последовательность из единиц, то $\mu^{-1}(a) = 0{,}a_1a_2\ldots a_k1000\ldots$;
2) для остальных последовательностей $\mu^{-1}(a) = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$.

Определение 4. Любой дискретной функции $f : E^n \to E$ однозначно сопоставим действительную функцию $g : [0, 1]^n \to [0, 1]$ так, что для любой n-мерной точки

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in [0, 1]^n : g(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \mu^{-1} f(\mu(b_1), \mu(b_2), \ldots, \mu(b_n)).$$

Действительную функцию g будем называть соответствующей дискретной функции f.

Множества действительных функций, соответствующих множествам дискретных функций $P, P_d, P_d^\tau, P_d^\infty$, будем обозначать соответственно $D, \mu^{-1}(P_d)$, $\mu^{-1}(P_d^\tau)$, $\mu^{-1}(P_d^\infty)$. Заметим, что при таком сопоставлении теряется информация о преобразовании последовательностей вида $a_1a_2\ldots a_i0111\ldots$. Кроме того, может возникать некоторое несоответствие выхода дискретной функции значению функции действительных аргументов, в том случае когда выходной последовательности соответствует двоично-рациональное число.

Утверждение 2 [2]. *Класс действительных функций D_d^∞ замкнут относительно суперпозиции.*

Теорема 3 [2]. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(\tilde{x}) \in C[0,1]^n$ существует число $\tau \geqslant 0$ и функция $d(\tilde{x}) \in D_d^\tau$, такие, что $d(\tilde{x})$ ε-равна $f(\tilde{x})$.*

Теорема 4 [2]. *Функции одного аргумента классов D_d^τ непрерывны справа во всех точках и непрерывны слева во всех точках, кроме, может быть, двоично-рациональных точек отрезка $[0,1]$.*

Разобьем отрезок $[0,1]$ на полуинтервалы $[k/2^i, k+1/2^i)$ и обозначим это разбиение I_h, где $h = 1/2^i$.

Теорема 5. *Функция f принадлежит множеству D_d^τ тогда и только тогда, когда при любом $i = \tau+1,\ldots$ на каждом интервале $I_h(\tilde{a})$ $(h = 2^{-i})$ выполнено неравенство $f(\tilde{a}) \leqslant f(\tilde{x}) < f(\tilde{a}) + 2^{-(i-\tau)}$.*

Можно указать дополнительные свойства непрерывных функций множеств D_d^τ.

Теорема 6. *Непрерывная функция f принадлежит множеству D_d^τ тогда и только тогда, когда при любом $i = \tau+1,\ldots$, если $|x-y| < 2^{-i}$, то $|f(x) - f(y)| < 2^{-(i-\tau)}$.*

Следствие. *Если непрерывные функции f, g принадлежат множеству D_d^∞, то их сумма и разность тоже принадлежат D_d^∞.*

Так как функции, удовлетворяющие условию Липшица, имеют конечное изменение [3], то справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Непрерывная функция f, принадлежащая множеству D_d^τ, может быть представлена в виде разности двух возрастающих функций.*

Рассмотрим связь модуля непрерывности произвольной функции с величиной задержки приближающей функции.

Теорема 8. *Пусть* $f(x)$ *при* $\delta = 1/2^k$, $k > 1$, *имеет модуль непрерывности* $\omega(\delta) \leqslant \varepsilon$, *тогда существует функция* $g(x) \in D_d^\tau$, *где* $\tau = \lceil k + \log_2 \varepsilon \rceil + 1$, ε*-приближающая* $f(x)$.

В заключение автор выражает свою благодарность В. А. Буевичу за постановку задачи и полезные советы.

Список литературы

[1] *Офман Ю.* О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах // ДАН СССР. — 1963. — Т. 152, № 4. — С. 823–825.

[2] *Черепов А. Н.* Оценки сложности приближения непрерывных функций некоторых классов детерминированными функциями с задержкой // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, № 1. — С. 83–103.

[3] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. —М.: Наука, 1974. — С. 480.

О равномерной поточечной оценке приращения решения управляемого функционально-операторного уравнения

А. В. Чернов

chavnn@mail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В статье развивается предложенная в [1] методика получения поточечных (по всем независимым переменным) оценок приращения глобального решения управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ).

Об оценках решений дифференциальных уравнений

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (см., например, [2], там же библиографию). Что касается известных автору оценок решений, их естественно разбить на следующие три категории:

1) Оценки *приращения решения* управляемых НКЗ (при изменении входящих в постановку задачи управляющих функций) *по норме* подходящего банахова пространства (см., например, [3–7], там же

дальнейшую библиографию). Оценки указанного типа оказываются востребованными при обосновании сходимости численных методов оптимизации (см., например, [3]), при выводе необходимых условий оптимальности (см., например, [8, 9]), а также при исследовании особых управлений (см., например, [10]).

2) Поточечные (по всем независимым переменным) оценки самих решений как таковых снизу и (или) сверху. Ввиду обширности литературы по этой тематике приведем лишь имена некоторых авторов: *гиперболические уравнения*: I. Kubiaczyk, M. Cichon, M. Dawidowski, A. Belarbi, M. Benchohra, Н. И. Погодаев; *параболические и обобщенно-параболические*: А. К. Гущин, А. В. Лежнев, В. И. Ушаков, Ф. Х. Мукминов, Л. М. Кожевникова, Г. А. Рудых, А. В. Синицын, Л. И. Камынин, В. И. Налимов; *эллиптические уравнения*: М. А. Красносельский, Е. Б. Дынкин, С. Е. Кузнецов, J.-F. Le Gall, M. Marcus, L. Véron. В работах перечисленных авторов соответствующие оценки носили зачастую вспомогательный характер и использовались при исследовании таких вопросов, как асимптотическое поведение решений, устойчивость (в том или ином смысле) и т. п.

3) Прочие оценки: поточечные по части переменных; оценки решений или их следов по норме; оценки различных интегральных выражений, содержащих решения, и т. д. и т. п. Поскольку оценки такого типа не имеют непосредственного отношения к данной статье, приведем лишь (разумеется, далеко не полный) список авторов: В. И. Юдович, Ю. А. Дубинский, С. И. Похожаев, И. В. Скрыпник, М. И. Вишик, А. Е. Мамонтов, Ф. Бенилан, В. Л. Камынин, N. Trudinger, J. G. Morris, R. Adams, A. Kufner, G. Talenti и т. д.

В данной статье речь идет об оценках, сочетающих в себе свойства 1) и 2), и более тонких по сравнению с 1). Основная идея состоит в сведении управляемой НКЗ к функционально-операторному уравнению вида

$$y(t) = w(t) + A\Big[g\Big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\Big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad y(\cdot) \in L_q^l(\Pi), \tag{1}$$

и последующем применении соответствующих абстрактных результатов (см. далее) для этого уравнения. Здесь $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Лебегу ограниченное множество, $w(\cdot) \in L_q^l(\Pi)$; $u(\cdot) \in \mathcal{D}$ — управляющая функция (управление), $\mathcal{D} \subset L_r^s(\Pi)$ — ограниченное множество, $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^l(\Pi)$ — ЛОО, числа $n, m, l, s \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < q < +\infty$ заданы; функция $g(\cdot,\cdot,\cdot) :\ \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям типа Каратеодори:

а) $g(t,x,w)$ непрерывно дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^l$ для почти всех (п.в.) $t \in \Pi$, при каждом $w \in \mathbb{R}^s$ и вместе с производной $g'_x(t,x,w) : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{m\times l}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{x,w\} \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s$ для п.в. $t \in \Pi$;

б) для каждого $u(\cdot) \in L_r^s(\Pi)$ формула $\mathbf{G}_u[y] = g\Big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\Big)$ определяет оператор $\mathbf{G}_u : L_q^l(\Pi) \to L_p^m(\Pi)$;

в) для каждого $u \in L_r^s(\Pi)$ формула $\mathcal{G}_u[y] = g'_x\Big(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)\Big)$ определяет оператор $\mathcal{G}_u : L_q^l(\Pi) \to L_\sigma^{m\times l}(\Pi)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{p}$.

Что касается различных примеров сведения управляемых НКЗ к уравнению (1), см., например, [1, 6, 11]. Далее относительно ЛОО A будем предполагать, что он обладает положительной мажорантой $B : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$, у которой для любого $\delta > 0$ существует вольтеррова δ-цепочка [3, 4, 6, 12].

Формулировка основного результата

Пусть $V(\cdot) \in L_r(\Pi)$, $v(\cdot) \in L_r^s(\Pi)$ — некоторые фиксированные функции, причем для $u = v$ существует решение $y = y_v$ уравнения (1); $\mathcal{V}$ — заданное подсемейство семейства функций $\Big\{u(\cdot) \in L_r^s(\Pi) :$ $|u(t)| \leqslant V(t)$ для п.в. $t \in \Pi\Big\}$. Пользуясь результатами статьи [1], можно показать, что существуют $a(\cdot) \in L_\sigma^+(\Pi)$ и $b \geqslant 0$, такие, что для любых $\Delta y \in L_q^l(\Pi)$, $u \in \mathcal{V}$ имеем

$$\Big| g'_x(\cdot, y_v + \Delta y, u) \Big| \leqslant a(\cdot) + b\left(|\Delta y|^{q/\sigma} + |u|^{r/\sigma}\right) \leqslant a_0(\cdot) + b \cdot |\Delta y|^{q/\sigma},$$

где $a_0 = a + b|V|^{r/\sigma} \in L_\sigma(\Pi)$. Впрочем, во многих случаях параметры $a_0(\cdot)$ и b можно указать и непосредственно. Положим для краткости

$$\Delta_u g(y_v) = g\Big(\cdot, y_v(\cdot), u(\cdot)\Big) - g\Big(\cdot, y_v(\cdot), v(\cdot)\Big), \quad u(\cdot) \in L_r^s(\Pi),$$

и выберем функцию $\overline{\varphi} \in L_q^+(\Pi)$ так, чтобы $\sup\limits_{u \in \mathcal{V}} B\Big[\big|\Delta_u g(y_v)\big|\Big] \leqslant \overline{\varphi}$. В качестве таковой годится, например,

$$\overline{\varphi}(t) = B\Big[\max_{w \in \mathbb{R}^s : |w| \leqslant V(\cdot)} \Big| g\big(\cdot, y_v(\cdot), w\big) - g\big(\cdot, y_v(\cdot), v(\cdot)\big)\Big|\Big](t).$$

Следующее уравнение естественно назвать *мажорантным* для (1):

$$x = bB\Big[x^{q/p}\Big] + B\Big[a_0(\cdot)x\Big] + \overline{\varphi}, \quad x \in L_q^+. \tag{2}$$

Формулируемое далее утверждение является существенно более сильным по сравнению с теоремой 1.1 из [1].

Теорема 1. *Пусть мажорантное уравнение* (2) *имеет решение* $\overline{x}$. *Тогда для любого решения уравнения* (1) $y = y_u$, *отвечающего некоторому* $u \in \mathcal{V}$, *имеет место поточечная оценка:* $|\Delta y(t)| = |y_u(t) - y_v(t)| \leqslant \overline{x}(t)$ *для п.в.* $t \in \Pi$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (проект НК-13П(9)) и АЦВП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» Минобрнауки РФ (№ 2.1.1/3927).

Список литературы

[1] *Чернов А. В.* О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, № 2. — С. 288–302.

[2] *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О.* Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. — М.: Научный мир, 2008.

[3] *Сумин В. И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1990. — Т. 30, № 1. — С. 3–21.

[4] *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. — Н. Новгород: ННГУ, 1992.

[5] *Аргучинцев А. В., Крутикова О. А.* Оптимизация полулинейных гиперболических систем с гладким граничным управлением // Изв. вузов. Математика. — 2001. — № 2. — С. 3–12.

[6] *Сумин В. И., Чернов А. В.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2003. — Т. 26, № 1. — С. 39–49.

[7] *Злотник А. А.* Слабые решения уравнений движения вязкой сжимаемой реагирующей бинарной смеси: единственность и непрерывная по Липшицу зависимость от данных // Матем. заметки. — 2004. — Т. 75, № 2. — С. 307–311.

[8] *Морозов С. Ф., Сумин В. И.* Оптимизация нелинейных процессов переноса // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 247, № 4. — С. 794–798.

[9] *Плотников В. И., Сумин В. И.* Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. матем. журн. — 1981. — Т. 22, № 6. — С. 142–161.

[10] *Сумин В. И.* Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 320, № 2. — С. 295–299.

[11] *Чернов А. В.* Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 3. — С. 95–107.

[12] *Сумин В. И., Чернов А. В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1402–1411.

О сложности распознавания предикатов в трехзначной логике

Б. В. Чокаев

g110@yandex.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Пусть $E_3 = \{0, 1, 2\}$. Отображение $R(x, y, z) : E_3^3 \to \{$истина, ложь$\}$ называется 3-местным отношением (предикатом) на E_3. Определим $U(R)$ как класс всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ от любого числа n переменных, отображающих E_3^n в E_3, и для любых наборов

$\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ из E_3^n, удовлетворяющих импликации

$$R^n(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \Rightarrow R(f(\widetilde{\alpha}), f(\widetilde{\beta}), f(\widetilde{\gamma})),$$

где отношение R^n определяется формулой

$$R^n(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \Leftrightarrow \forall j R(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j).$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть для заданной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, отображающей E_3^n в E_3, требуется выяснить, принадлежит ли f классу $U(R)$. Нас будет интересовать сложность алгоритмов для этой задачи для произвольного 3-местного предиката R. Будем считать, что функция задана вектором её значений при стандартном (лексикографическом) упорядочении наборов переменных, т. е. длина входа равна $N = 3^n$. В качестве алгоритмов будем рассматривать неветвящиеся битовые вычисления.

Естественный алгоритм для решения указанной задачи, опирающийся просто на определение класса $U(R)$, требует просмотра всех выборок по 3 из N наборов, т. е. имеет сложность по порядку не менее N^3. Различные варианты метода полилинейных форм [1] позволяют существенно понизить эту оценку. Пусть Q_0 — множество неотрицательных рациональных чисел. Пусть F — поле чисел вида $p + q\lambda + r\lambda^2$, где $p, q, r \in Q$, λ — корень неприводимого над полем рациональных чисел кубического многочлена с рациональными коэффициентами. Для произвольного 3-местного предиката R на E_3 рассмотрим 3-линейную форму

$$\psi = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{2} t(i,j,k) x_i y_j z_k$$

с коэффициентами из Q_0, удовлетворяющую следующему условию:

$$t(i,j,k) > 0 \Leftrightarrow R(i,j,k).$$

Теорема 1 [1]. *Пусть 3-линейную форму ψ можно представить в виде*

$$\psi = \sum_{r=1}^{d} (a_{10}^r x_0 + a_{11}^r x_1 + a_{12}^r x_2)(a_{20}^r y_0 + a_{21}^r y_1 + a_{22}^r y_2)(a_{30}^r z_0 + a_{31}^r z_1 + a_{32}^r z_2),$$

где a_{ij}^r *— некоторые константы из* F*. Тогда существует алгоритм, который для любой функции* $f(x_1, \dots, x_n)$*, отображающей* E_3^n *в* E_3 *и заданной вектором её значений, отвечает на вопрос "*$f \in U(R)$*" с числом битовых операций*

$$L_{\text{б}}(n) \leqslant L_{\text{ар}}(n) \cdot O(n \log n \log\log n),$$

$$L_{\text{ар}} = \begin{cases} O(d^n), & \text{если } d > 3, \\ O(3^n), & \text{если } d < 3, \\ O(3^n n), & \text{если } d = 3. \end{cases}$$

Произвольной 3-линейной форме ψ с коэффициентами из Q_0 поставим в соответствие систему из трех матриц K_0, K_1, K_2 размера 3×3, с элементами $a_{ij0} = t(i, j, 0)$, $a_{ij1} = t(i, j, 1)$, $a_{ij2} = t(i, j, 2)$, $0 \leqslant i, j \leqslant 2$ соответственно. Рангом этой системы матриц назовем минимальное число матриц ранга 1, через которые линейно выражается (над полем F) каждая из матриц K_0, K_1, K_2. Нетрудно доказать следующую лемму о связи ранга системы K_0, K_1, K_2 и разложения 3-линейной формы ψ.

Лемма 2. *Ранг системы матриц* K_0, K_1, K_2 *меньше либо равен* d *тогда и только тогда, когда 3-линейную форму* ψ *можно разложить в сумму* d *слагаемых.*

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что каждому 3-местному предикату $R(x, y, z)$ можно взаимно-однозначно сопоставить три матрицы размера 3×3 с элементами из $\{0, 1\}$. При этом, для уменьшения ранга этой системы матриц, мы можем её модифицировать, заменяя единицы на произвольные положительные рациональные числа.

Теорема 3. *Для любого 3-местного предиката на* E_3 *существует алгоритм, который для любой функции* $f(x_1, \dots, x_n)$ *определяет, принадлежит ли* f *классу* $U(R)$ *с числом битовых операций*

$$L_b \leqslant O(N^{\log_3 6} \log^2 N).$$

Доказательство. Пусть A, B, C — произвольная система матриц с элементами из $\{0, 1\}$. Для доказательства теоремы достаточно построить 6 матриц ранга 1 с элементами из поля F, в линейной оболочке которых лежит система матриц, модифицированная из системы A, B, C. Если у всех трех матриц A, B, C определитель равен нулю, то мы можем построить две матрицы, через которые выражается матрица A, две матрицы, через которые выражается B, и две матрицы, через которые выражается матрица C. Пусть среди матриц A, B, C существует невырожденная матрица. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Первый шаг. Пусть $|A| \neq 0$. Рассмотрим этот определитель:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Если в этом разложении присутствует хотя бы одно положительное слагаемое и хотя бы одно отрицательное слагаемое, то, заменив один единичный элемент матрицы A на двойку, сделаем матрицу A вырожденной. Так же поступим с остальными невырожденными матрицами системы.

Второй шаг. Если после первого шага среди матриц A, B, C осталось не более одной невырожденной матрицы, то приступаем к третьему шагу. Пусть $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$. Рассмотрим определитель матрицы $A + \lambda B$:

$$|A + \lambda B| = |B| \cdot \lambda^3 + \tau(B, A) \cdot \lambda^2 + \tau(A, B) \cdot \lambda + |A|, \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} &\tau(A, B) = \\ &b_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + b_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + b_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + \\ &+ b_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + b_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + b_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + \\ &+ b_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + b_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + b_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{aligned}$$

Нам нужно подобрать рациональное число λ и некоторый элемент a_{ij} матрицы A таким образом, чтобы этот определитель был равен нулю. Пусть A_{ij} — матрица, полученная из A вычёркиванием i-й строки и j-го столбца, $\widehat{A_{ij}}$ — матрица, полученная из A заменой единичного элемента a_{ij} на 0. Тогда определитель $|A + \lambda B|$ можно записать в виде

$$|A + \lambda B| = a_{ij} \cdot |A_{ij} + \lambda B_{ij}| + |\widehat{A_{ij}} + \lambda B|.$$

Из этой формулы видно, что если числа $|A_{ij} + \lambda B_{ij}|$ и $|\widehat{A_{ij}} + \lambda B|$ разных знаков, то выбором элемента a_{ij} можно обнулить определитель $|A + \lambda B|$. Заметим, что $|\widehat{A_{ij}} + \lambda B|$ — кубический многочлен от

λ, а $|A_{ij} + \lambda B_{ij}|$ — квадратный, при условии, что $|B_{ij}| \neq 0$. В этом случае можно найти такое λ, что числа $|A_{ij} + \lambda B_{ij}|$ и $|\widehat{A_{ij}} + \lambda B|$ будут разных знаков. Если для некоторого ненулевого элемента a_{ij} матрицы A матрица B_{ij} невырождена, то сделаем матрицу $A + \lambda B$ вырожденной. Иначе, если для некоторого ненулевого элемента b_{ij} матрицы B матрица A_{ij} невырождена, то сделаем матрицу $B + \lambda A$ вырожденной. Иначе, определитель $|A+\lambda B|$ имеет вид $|A|+|B|\cdot\lambda^3$. Тогда, заменив все ненулевые элементы какой-нибудь строки матрицы A на модуль числа $\frac{|B|}{|A|}$ и положив λ равным 1 или -1, также сделаем матрицу $A+\lambda B$ вырожденной. Итак, мы получили систему матриц $A + \lambda B, B, C$ с таким же рангом, как и у исходной системы, в которой число невырожденных матриц на 1 меньше. Если $|C| \neq 0$, то таким же образом получим систему $A+\lambda B, B, C+\lambda B$, рангом не больше $rg(A + \lambda B) + rgB + rg(C + \lambda B) \leqslant 2+3+2 = 7$.

Третий шаг. Пусть A, B, C — система матриц, где A — невырожденная матрица с элементами из $\{0, 1\}$, B, C — вырожденные матрицы с рациональными элементами. Применяя выкладки, аналогичные выкладкам из шагов 1 и 2, можно заменить невырожденную матрицу A на линейную комбинацию системы A, B, C над полем F для некоторого λ, которая является вырожденной матрицей. ∎

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09–01–00701, и гранта Президента РФ № МД-757.2011.9.

Список литературы

[1] *Алексеев В. Б.* Логические полукольца и их использование для построения быстрых алгоритмов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1997. — № 1. — С. 22–29.

Сложность обобщенной распределенной полиномиальной модели на базе системы многочленов над конечными полями

С. В. Шалагин

Sshalagin@mail.ru

Казанский государственный технический университет им. А. Н. Туполева

Определены оценки сложности реализации обобщенной распределенной полиномиальной модели (ОбРПМ), описываемой на основе полиномиальных преобразований над полем Галуа и его расширениями. Предложены модели и методы синтеза устройств, выполняющих как стохастические, так и теоретико-полиномиальные преобразования, на базе указанной ОбРПМ.

Представление распределенных полиномиальных моделей (РПМ) на основе операций в конечных полях привлекательно тем, что открываются возможности определения преобразований стохастических процессов алгебраическими выражениями, допускающими распараллеливание, а также оперативного варьирования свойств моделируемых случайных процессов путем изменения коэффициентов полиномов над конечным полем [1]. РПМ определим как модели, реализующие полиномиальные преобразования на основе распределенных вычислений — способов решения трудоемких вычислительных задач с использованием двух и более вычислителей. Однако существует проблема снижения оценок временной сложности при вычислении многочленов, а также при выполнении отдельных операций над конечными полями. Данное обстоятельство определяет предпосылки для создания обобщенной РПМ (ОбРПМ) как для дискретных стохастических процессов (ДСП) класса марковских и их функций [1–4], так и для теоретико-полиномиальных преобразований (ТПП) — дискретных преобразований, определяемых в различных базисах с применением полиномиальной алгебры [5]. При определении ОбРПМ в общем случае применимы дискретные детерминированные нелинейные функции (ДДНФ) вида $\psi(x_1, \ldots, x_N) = y$, где $x_1, \ldots, x_N, y$ — n-разрядные двоичные числа. Известен метод реализации ДДНФ $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ как суммы элементарных полиномов над $GF(2^n)$ вида

$$f(q_1,\ \ldots,\ q_m) = \sum_{i_1=0}^{w} \cdots \sum_{i_m=0}^{w} a_{i_1\ldots i_m} q_1^{i_1} \ldots q_m^{i_m}, \\ w = 2^n - 1, a_{i_1\ldots i_m},\ q_1,\ \ldots,\ q_m \in GF(2^n). \tag{1}$$

Примем в качестве меры сложности элементарные схемы – вычислители, реализующие произвольную булеву функцию от двух переменных. Определен частный случай ПФ вида (1) от m переменных над $GF(2)$ — полином Жегалкина. Порядки оценок временной и емкостной сложности ПФ вида (1), представленной системой многочленов над $GF(2)$ согласно [6], составляют $O(\log(m \cdot n))$ и $O\left(m \cdot n^2\right)$ соответственно [4].

Обозначим $U(\psi(x_1,\ \ldots,\ x_m))$ — множество всевозможных значений ДДНФ (1), $I(x_j)$ — множество всевозможных значений переменной x_j, $j = \overline{1,\ m}$, на входе (1). Имеет место [4]

Утверждение 1. *ПФ вида* (1) *над* $GF(2^n)$ *принадлежит к классам* $A(p)$, $p = \overline{1,\ n}$, *и* $B(d_1\ \ldots\ d_m)$, $d_j \in [1,\ n]$, $j = \overline{1,\ m}$, *если для реализуемой ей ДДНФ* $\psi(x_1,\ \ldots,\ x_m)$: $|U(\psi(x_1,\ \ldots,\ x_m))| \in \left(2^{k-1},\ 2^k\right]$, $|I(x_1)| \in \left(2^{d_1-1},\ 2^{d_1}\right]$, $|I(x_2)| \in \left(2^{d_2-1},\ 2^{d_2}\right]$, $\ldots$, $|I(x_m)| \in \left(2^{d_m-1},\ 2^{d_m}\right]$.

Предложен метод синтеза вычислителей ДДНФ, принадлежащей классам $A(n)$ и $B(d_1, \ldots, d_m)$, $d_j = n$, $j = \overline{1,\ m}$, *на основе системы из* l *ПФ*, включающий три этапа [4]:

1) представление множества значений и m множеств значений переменных указанной ДДНФ l k-разрядными векторами, $n = k \cdot l$ [7];
2) определение l ДДНФ, принадлежащих классам $A(k)$ и $B(d_1, \ldots, d_{m \cdot l})$, $d_j = k$, $j = \overline{1,\ m \cdot l}$, позволяющих определить отображения φ_i, $i = \overline{1,\ l}$, для $m \cdot l$ множеств элементов $GF(2^k)$ в одно множество элементов $GF(2^k)$;
3) вычисление коэффициентов для l ПФ от $m \cdot l$ переменных каждая, определенных над $GF(2^k)$, которые соответствуют отображениям φ_i, $i = \overline{1,\ l}$, полученным на этапе 2).

Рассмотрим ОбРПМ генераторов ДСП класса марковских. Общим случаем данных ДСП является стохастическая функция неоднородной цепи Маркова (СФ НЦМ). Справедливо

Утверждение 2. *РПМ, определяющая СФ НЦМ, имеет вид*

$$A_{FNMC} = (X,\, Q,\, Y,\, z_1,\, z_2,\, f_1(x,\, z_1,\, q_t) = q_{t+1},\, f_2(z_2,\, q_{t+1}) = y,\, q_0)\,,$$

где X и Y — входной и выходной алфавиты, Q — множество состояний, z_1 и z_2 — дискретные стохастические величины (ДСВ) с заданным законом распределения, f_1 и f_2 — ПФ вида (1), $q_t \in Q$ — состояние НЦМ в момент времени t.

Предложен метод синтеза генератора СФ НЦМ, для которого вычисление элементов сводится к вычислению значений ПФ вида (1) от m переменных ($m = 2,\, 3$) над $GF(2^n)$, включающий 2 этапа:

1) представление ПФ вида f_1 и f_2 системой многочленов согласно предложенному методу синтеза ДДНФ;
2) генераторы, определяющие ДСВ z_1 и z_2, представимы РПМ согласно методу, определенному в [3].

Оценки временной сложности вычисления СФ НЦМ на основе РПМ будут уменьшены примерно в $\overline{T}$ раз, где $\overline{T} = \max\{t_1 + t_{f_1},\, t\} + t_{f_2}$, где t_1, t_2, t_{f_1} и t_{f_2} — оценки временной сложности вычисления ДСВ z_1 и z_2, а также ПФ вида f_1 и f_2.

На базе ОбРПМ представимы ТПП на примере определенных их подклассов: дискретных преобразований Фурье (ДПФ), Хартли (ДПХ) и цифровой фильтрации (ЦФ). Согласно [7], ДПФ описывается как функция вида $C_F = f_F(I)$, а ДПХ — как $C_H = f_H(I)$. Компоненты I и C_H представимы одним, а C_F — двумя n-разрядными двоичными числами. Алгоритм ЦФ с бесконечным временем отклика (IIR) порядка $p = \max(M,\, N)$ представим ПФ от $M + N + 1$ переменных над $GF(2^n)$, а алгоритм ЦФ с конечным временем отклика (FIR) — как ПФ от $M + 1$ переменных над полем $GF(2^n)$, если входной сигнал как для IIR, так и для FIR — n-разрядный двоичный вектор. При этом справедливы соотношения [7]:
для ДПФ:

$$T_{\text{ДПФ}} =]\log_2(Nn)[\,, \quad Q_{\text{ДПФ}} = \sum_{k=1}^{2N} n\,(Nn-1) = 2Nn\,(Nn-1)\,;$$

для ДПХ:

$$T_{\text{ДПХ}} =]\log_2(Nn)[\,, \quad Q_{\text{ДПХ}} = \sum_{k=1}^{N} n\,(Nn-1) = Nn\,(Nn-1)\,;$$

для IIR:

$$T_{\mathrm{IIR}} = \left]\, \log_2 \left(n \left(M + N + 1\right)\right) \right[\,, \quad Q_{\mathrm{IIR}} = n \left(n \left(M + N + 1\right) - 1\right);$$

для FIR:

$$T_{\mathrm{FIR}} = \left]\, \log_2 \left(n \left(M + 1\right)\right) \right[\,, \quad Q_{\mathrm{FIR}} = n \left(n \left(M + 1\right) - 1\right).$$

Список литературы

[1] *Захаров В. М., Шалагин С. В., Нурутдинов Ш. Р., Соколов С. Ю.* Полиномиальное представление конечноавтоматных случайных последовательностей над полем Галуа // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. — 2003. — № 2. — С. 24–28.

[2] *Захаров В. М., Шалагин С. В.* Параллельные марковские модели над полем $GF(2^n)$ // Тр. Восьмой Межд. конф. «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах». — Казань: Издательство КГТУ им. А. Н. Туполева, 2008. — С. 155–160.

[3] *Шалагин С. В.* Полиномиальные модели генераторов дискретных случайных величин // 6-я ежегодная Межд. научно-практич. конф. «Инфокоммуникационные технологии глобального информационного общества»: Сб. трудов. — Казань: Центр оперативной печати, 2008. — С. 159–171.

[4] *Шалагин С. В.* Обобщенная распределенная полиномиальная модель нелинейных преобразований над потоками чисел в конечных полях // Сб. тр. III Всерос. науч. конф. «Информационные технологии в системе экономической безопасности России и ее регионов»: Тезисы докладов. — Казань: ИГМА-пресс, 2010. — С. 186–192.

[5] *Крот А. М.* Дискретные модели динамических систем на основе полиномиальной алгебры. — Минск: Навука і тэхніка, 1990.

[6] *Шалагин С. В.* О представлении нелинейных полиномов над конечным полем распределенной вычислительной системой // Нелинейный мир. — 2009. № 5. — С. 376–379.

[7] *Шалагин С. В.* Представимость моделей анализа и фильтрации цифровой информации над полем Галуа // Дискретные модели в теории управляющих систем: Электронный сб. материалов 8-й Межд. конф. — Москва, 2009. — С. 426–429. `www.dmconf.ru/dm8/proceedings.pdf`

О сравнении базисов при формульном представлении булевых функций

И. К. Шаранхаев

goran5@mail.ru

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ

Под базисом понимаем конечную полную систему булевых функций.

Булева функция называется бесповторной в базисе B, если ее можно представить в этом базисе формулой, в которой каждая переменная встречается не более одного раза. В противном случае она называется повторной в B.

Булева функция называется слабоповторной в базисе B, если ее любая остаточная подфункция является бесповторной, а сама она повторна в базисе B.

Под сложностью $L(\Phi)$ формулы Φ понимаем число всех вхождений переменных в Φ. Сложностью $L_B(f)$ булевой функции f в базисе B называется наименьшее значение $L(\Phi)$ при условии, что формула Φ в базисе B представляет функцию f.

При сравнении базисов по сложности формульных представлений булевых функций на множестве всех базисов вводится частичный порядок: $B_1 \leqslant B_2$, если существует число c, такое, что $L_{B_1}(f) \leqslant cL_{B_2}(f)$ для любой булевой функции f, говорят, что B_1 предшествует B_2. Если $B_1 \leqslant B_2$ и $B_2 \leqslant B_1$, то базисы B_1 и B_2 называются эквивалентными. Если $B_1 \leqslant B_2$ и $B_2 \nleqslant B_1$, то пишем $B_1 < B_2$ и говорим, что B_1 строго предшествует B_2. Также говорим, что B_1 непосредственно предшествует B_2, если $B_1 < B_2$ и не существует базиса B, такого, что $B_1 < B < B_2$.

Таким образом, множество базисов разбито на классы эквивалентности. В [1] доказано, что в каждом классе базисов можно указать канонический вид класса, причем если базис B непосредственно предшествует базису $B^{'}$, то канонический вид B содержит на одну функцию больше, чем канонический вид $B^{'}$, а эта функция является слабоповторной в базисе каноническом для $B^{'}$.

О. Б. Лупановым замечено (результат сформулирован в [2]), что базис $B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ является наибольшим элементом при введенном порядке, то есть класс базисов, эквивалентных базису B_0, самый «плохой» по сложности реализаций булевых функций формулами. Эти базисы назовем базисами нулевого яруса. Отметим, что базис B_0 канонический для своего класса.

Базисами k-го яруса ($k > 0$) называются все базисы, непосредственно предшествующие всем базисам $(k-1)$-го яруса.

Введем обозначение $x^\sigma = \begin{cases} x, \text{ если } \sigma = 1 \\ \bar{x}, \text{ если } \sigma = 0 \end{cases}$. Функции f и g называются однотипными, если $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$, где $(i_1, \ldots, i_n)$ — произвольная перестановка чисел от 1 до n.

Функции f и g называются обобщенно-однотипными, если f однотипна к g или $\bar{g}$. Очевидно, что на множестве булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

В работе [3] получено описание всех обобщенных типов функций, слабоповторных в базисе B_0, а как следствие — канонических базисов первого яруса. Заметим, что при добавлении к базису B_0 разных по типу слабоповторных функций получаются базисы из разных классов эквивалентности. Поэтому уже в первом ярусе счетное число различных классов эквивалентности базисов.

Естественно, возник вопрос изучения базисов второго яруса. Эти базисы удалось описать в работах [4–9]. Таким образом, описание базисов второго яруса завершено.

Список литературы

[1] *Черухин Д. Ю.* Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов // Математ. вопросы кибернетики. — 1999. — № 8. — С. 77–122.

[2] *Субботовская Б. А.* О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами // ДАН СССР. — 1963. — Т. 149, № 4. — С. 784–787.

[3] *Стеценко В. А.* О предплохих базисах в P_2 // Математ. вопросы кибернетики. — 1992. — № 4. — С.139–177.

[4] *Перязев Н. А.* Слабоповторные булевы функции в бинарном базисе // Иркутский университет. Серия: Дискретная математика и информатика. Вып. 4. — Иркутск, 1998.

[5] *Кириченко К. Д.* Слабоповторные булевы функции в некоторых предэлементарных базисах // Иркутский университет. Серия: Дискретная математика и информатика. Вып. 13. — Иркутск, 2000.

[6] *Шаранхаев И. К.* О слабоповторных булевых функциях в одном предэлементарном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 2003. — Т. 10, № 2. — С. 79–101.

[7] *Шаранхаев И. К.* О булевых базисах второго яруса // Известия вузов. Математика. — 2004. — Вып. 3. — С. 81–82.

[8] *Шаранхаев И. К.* Слабоповторные булевы функции в предэлементарном немонотонном базисе порядка 3 // Вестник Бурятского университета. Серия 13. — 2005. — Вып. 2. — С. 61–71.

[9] *Шаранхаев И. К.* О классификации базисов булевых функций // Вестник Бурятского университета. Серия 13. — 2006. — Вып. 3. — С. 61–67.

Задача оптимального управления для систем с нелокальными условиями

Я. А. Шарифов

Sharifov22@rambler.ru

Бакинский государственный университет

Исследование нелокальных задач представляет интерес как с точки зрения развития общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений в математическом моделировании [1]. Объектом исследования в данной работе являются задачи оптимального управления в системах нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями:

$$\dot{x} = f\left(x, u, t\right), \quad x\left(t\right) \in R^n, \quad t \in T = \left[t_0, t_1\right], \tag{1}$$

$$Ax\left(t_0\right) + Bx\left(t_1\right) = C, \tag{2}$$

здесь $f\left(x, u, t\right)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с производными по x и u до второго порядка включительно, $A \in R^n$, $B \in R^{n\times n}$, $C \in R^{n\times 1}$ — постоянные матрицы, $u\left(t\right)$ — r-мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий на отрезке T. Предполагается, что почти всюду на этом отрезке управляющие воздействия удовлетворяют ограничению типа включения:

$$u\left(t\right) \in U, \quad t \in T, \tag{3}$$

где U — открытое множество из пространства R^r.

Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) + \int_T F(x, u, t)\, dt, \tag{4}$$

определенного на решениях краевой задачи (1), (2) при допустимых управлениях, удовлетворяющих условию (3). Здесь предполагается, что скалярные функции $\varphi(x, y)$ и $F(x, u, t)$ непрерывны по своим аргументам и имеют непрерывные и ограниченные производные по x и y до второго порядка включительно.

Пусть при некоторых условиях краевая задача (1), (2) при каждом допустимом управлении $u(t) \in U,\ t \in T$, имеет единственное решение $x(t, u)$.

Пусть $\{u, x = x(t, u)\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u,\ \tilde{x} = x + \Delta x = x(t, \tilde{u})\}$ — два допустимых процесса, где $\Delta u(t) = \varepsilon \delta u(t)$, ε — достаточно малое число, $\delta u(t)$ — некоторая кусочно-непрерывная функция. Тогда приращение функционала $\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$ при фиксированных функциях $u(t), \Delta u(t)$ есть функция параметра ε. Если справедливо представление

$$\Delta J(u) = \varepsilon \delta J(u) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta^2 J(u) + o\left(\varepsilon^2\right), \tag{5}$$

то назовём $\delta J(u)$ первой вариацией, а $\delta^2 J(u)$ — второй вариацией функционала.

Пусть $H(\psi, x, u, t) = \langle \psi(t), f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t)$ функция Понтрягина, а функция $\psi = \psi(t) \in R^n$ является решением следующей краевой задачи

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}, \qquad t \in T,$$
$$A' \psi(t_1) + B' \psi(t_0) = -B' \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_0)} - A' \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_1)}.$$

Из (5) следует, что на оптимальном управлении $u^0(t)$ выполняются условия [2]

$$\delta J(u^0) = 0, \ \ \delta^2 J(u^0) \geqslant 0. \tag{6}$$

Теорема. *Если допустимое управление $u(t)$ удовлетворяет условию $\delta J(u^0) = 0$, то для его оптимальности в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство*

$$\delta^2 J(u) = -\left\{ \int\limits_T \int\limits_T \left\langle \delta' u(\tau) \frac{\partial' f(x,u,\tau)}{\partial u} R(\tau,s) \frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u}, \delta u(s) \right\rangle d\tau ds + \right.$$

$$+ \int\limits_T \left\langle \delta' u(\tau) \frac{\partial^2 H(\psi,\, x,u,t)}{\partial u^2}, \delta u(t) \right\rangle dt +$$

$$+2 \int\limits_T \int\limits_T \left\langle \delta u'(t) \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x \partial u} \Phi(t) \left(A + B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} \Phi^{-1}(s) \frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u}, \delta u(s) \right\rangle dt ds +$$

$$\left. + \int\limits_T \left\langle \int\limits_t^{t_2} \delta u'(\tau) \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\tau)}{\partial x \partial u} \Phi(\tau) d\tau \Phi^{-1}(t) \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}, \delta u(t) \right\rangle dt \right\} \geqslant 0$$

выполнялось для всех $\delta u(t) \in L_\infty[t_0, t_2]$, где

$$R(\tau,s) = \Phi^{-1\prime}(\tau) \left[\Phi\left(t_1\right)\left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1}\right]' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\left(t_1\right)^2} \Phi\left(t_1\right)\left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} \Phi^{-1}(s) +$$

$$+\Phi^{-1\prime}(\tau) \left[\left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} B\Phi\left(t_1\right)\right]' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\left(t_0\right)^2} \left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} B\Phi\left(t_1\right) \Phi^{-1}(s) +$$

$$+\Phi^{-1\prime}(\tau) \left[\left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} B\Phi\left(t_1\right)\right]' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\left(t_0\right) \partial x\left(t_1\right)} \Phi\left(t_1\right)\left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} \Phi^{-1}(s) +$$

$$+\Phi^{-1\prime}(\tau) \left[\left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} \Phi\left(t_1\right)\right]' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\left(t_0\right) \partial x\left(t_1\right)} \Phi\left(t_1\right)\left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} B\Phi^{-1}(s) +$$

$$+\Phi^{-1\prime}(\tau) \left[\left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} B\Phi\left(t_1\right)\right]' \times$$

$$\times \int\limits_T \Phi'(t) \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x^2} \Phi(t)\, dt \left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} B\Phi\left(t_1\right) \Phi^{-1}(s) +$$

$$+\Phi^{-1\prime}(\tau) \int\limits_{\max(\tau,s)}^{t_1} \Phi'(t) \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\tau)}{\partial x^2} \Phi(t)\, dt \Phi^{-1}(s) -$$

$$-\Phi^{-1\prime}(\tau) \int\limits_\tau^{t_1} \Phi'(\xi) \frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\xi)}{\partial x^2} \Phi(\xi)\, d\xi \left(A{+}B\Phi\left(t_1\right)\right)^{-1} B\Phi\left(t_1\right) \Phi^{-1}(s) -$$

$$- \Phi^{-1}(\tau)\left[(A+B\Phi(t_1))^{-1} B\Phi(t_1)\right]' \int\limits_{\tau}^{t_1} \Phi'(\xi)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\xi)}{\partial x^2}\Phi(\xi)\, d\xi \Phi^{-1}(s),$$

$\Phi(t)$ — *нормированная фундаментальная матрица вариационного уравнения.*

Список литературы

[1] *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006.

[2] *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.

Восстановление графа мозаичной структуры агентами

Н. К. Шатохина

nshatokh@rumbler.ru

Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Донецк

Рассмотрена задача описания структуры графа на основе информации, полученной при обходе его по границе. В работе предложен алгоритм восстановления структуры графа мозаичной структуры в виде формулы, отражающей состав исходного графа как комбинацию базовых структур. Приведены оценки его временной и емкостной сложности.

Задача описания структуры объекта на основе информации, полученной при обходе по его границе, — одна из задач анализа геометрических сред, графов и других дискретных структур. Известны работы, например [1], посвященные задаче распознавания структуры объекта, в которых рассматривался случай решения подобных задач с использованием одного автомата (далее — агента).

В настоящей работе предлагается алгоритм распознавания структуры сильносвязного неориентированного графа G без дыр, состоящего из равносторонних треугольников, с использованием двух агентов. Первый агент-исследователь (АИ) выполняет перемещения по исходному графу и передачу информации второму агенту-экспериментатору (АЭ). Второй агент по полученной информации описывает структуру графа.

Требуется разработать такие алгоритмы передвижения агента АИ по исходному графу G с передачей информации об этом и восстановления графа агентом АЭ по полученным данным в виде формулы, что АИ за конечное число шагов независимо от начального размещения обойдет часть внутренних вершин G и все граничные вершины, пошагово передавая информацию. АЭ по этой информации через конечное число шагов опишет граф P, изоморфный исходному графу G.

Основные определения

Пусть $E(v) = \{e_1, \dots\}$, $|E(v)| \leqslant 6$, обозначает множество ребер, инцидентных вершине v. На $E(v)$ определена функция $q : E(v) \to X = \{x, x^{+1}, x^{+2}, x^{+3}, x^{+4}, x^{+5}\}$, где показатель степени обозначает количество поворотов против часовой стрелки на угол 60° относительно ребра x. Введенная функция позволяет сопоставлять ребрам метки. Определим функцию $f : (E(v), q(v, w)) \to V$ так, что $f(v, q(v, w)) = w$, где (v, w) — ребро с меткой $q(v, w)$. Тогда всякое перемещение АИ по любому ребру $e = (v, w)$ (операцию перемещения) можно однозначно описать функцией q, а $x = q(v, w)$ задает направление перемещения и метку x ребра.

Лабиринтом $L = (G, t, q, f)$ называется граф G, на котором определена t — разметка вершин, q — разметка ребер и f — функция перемещения.

Маршрут по границам графа называется выпуклым, если для любых двух последовательных направлений перемещения $x^{l_i}x^{l_{i+1}}$ выполняется условие $0 \leqslant l_{i+1} - l_i \leqslant 3$, а граф соответственно — выпуклым.

Маршрут по границам графа называется вогнутым, если найдется хотя бы одна пара подряд следующих направлений перемещения $x^{l_i}x^{l_{i+1}}$, для которых выполняется условие $l_{i+1} - l_i \leqslant 4$, а граф — вогнутым. Вершина, инцидентная данным ребрам, называется вершиной перегиба.

Базовые мозаики

Рассматриваемые в данной работе графы имеют мозаичную структуру, состоящую из правильных треугольников. Частными случаями таких графов являются равносторонний треугольник, параллелограмм, трапеция и шестиугольник, которые называются базовыми структурами. Каждой такой структуре однозначно соответствуют строки направлений, порождаемые обходом против часовой стрелки $+M(v, k_1, k_2)$ и по часовой стрелке $-M(v, k_1, k_2)$, которые называются базовой и обратной базовой. Здесь k_1, k_2 — количество ребер одной из сторон структуры, для треугольника и шестиугольника $k_2 = 0$, v — начальная (опорная) вершина маршрута.

По количеству вершин (ребер), расположенных на границе базовых структур, нетрудно оценить количество внутренних вершин структуры, и, наоборот, по общему количеству вершин базовых структур нетрудно определить длину маршрутов по граничным вершинам графа.

Лемма 1. *Длина маршрута (количество ребер) p по граничным вершинам G оценивается как $\sqrt{12n-3} - 3 \leqslant p \leqslant 2n$.*

Идентификатором базовой структуры называется подстрока $M(v, k_1, k_2)$, полученная из $M(v, k_1, k_2)$ путем удаления последнего символа с учетом соответствующего коэффициента, то есть $M(v, k_1, k_2) = M(v, k_1, k_2)kx^d$, где d — степень последнего символа в $M(v, k_1, k_2)$.

Введены операции сокращения на подстроках на основе использования определений идентификаторов. Согласно этим операциям, как только в строке направлений встретится один из идентификаторов базовой структуры, происходит замена его ($-M(v, k_1, k_2)$ или $+M(v, k_1, k_2)$) на kx^d. Причем если это была обратная базовая структура, то происходит присоединение соответствующего подграфа к G. Если же встречается идентификатор базовой структуры, происходит удаление из G соответствующего подграфа.

Процесс распознавания состоит из двух алгоритмов — «Обход» и «Восстановление» для АЭ и АИ соответственно.

Алгоритмы распознавания графа

В алгоритме работы АИ предполагается, что агент случайным образом может быть помещен в любую вершину графа, поэтому алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе, если необходимо, АИ выходит на границу, а на втором этапе АИ обходит граф против часовой стрелки по граничным ребрам до тех пор, пока не возвратится в вершину выхода на границу.

Лемма 2. *Если в мозаичном графе n вершин, то максимальная длина пути по внутренним вершинам графа в выбранном направлении не превосходит величины $l = (n-1)/3$.*

Временная сложность алгоритма с учетом лемм составляет $O(n)$ шагов. Емкостная сложность $E(n)$ отсутствует, т.к. агенту ничего не требуется сохранять.

В алгоритме работы АЭ дважды анализируется строка направлений, сгенерированная и переданная АИ.

Вначале производится поиск точек перегиба. Если точки имеются, то определяется идентификатор обратной базовой структуры, содержащий очередную точку перегиба в качестве второй вершины маршрута. Если находится обратная базовая структура $-M(v, k_1, k_2)$, то производится преобразование строки согласно операции сокращения, присоединение данной структуры к графу с соответствующим количеством вершин, а в строку формулы добавляется $-M(v, k_1k_2)$. В противном случае производится поиск идентификаторов базовых структур, расположенных до точки перегиба. Каждый раз, когда находится идентификатор, производится уменьшение строки согласно операции сокращения, отделение данной структуры от графа, и в строку формулы добавляется $+M(v, k_1, k_2)$.

Далее вновь просматривается сначала строка для поиска идентификаторов базовых структур. Каждый раз, когда находится идентификатор, производится преобразование строки согласно операции сокращения, отделение данной структуры от графа и добавление в формулу со знаком «+» соответствующего обозначения фрагмента. В результате преобразования исходная строка преобразуется в пустую строку.

Поскольку для каждой базовой структуры однозначно определено количество ее вершин, то фактически создается неявная нумерация этих вершин. Эта нумерация является биекцией, т. к. удаление/добавление базовых структур выполняется взаимно-однозначно в соответствии с их идентификаторами. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Выполняя алгоритмы распознавания, агенты распознают любой граф G с точностью до изоморфизма.*

В алгоритме работы АЭ осуществляются два просмотра исходной строки.

При подсчете временной сложности алгоритма работы АЭ учитывается, что распознавание структуры графа выполняется за счет двукратного просмотра исходной строки, длина которой не может превосходить $2n$ букв, т. е. временная сложность составит $4n$ шагов, то есть $O(n)$. Следовательно, суммарная временная сложность оценивается как $T(n) = O(n)$. Таким образом, совместная работа АИ и АЭ оценивается как $T(n) = O(n)$. Емкостная сложность $E(n)$ определяется сложностью строки направлений, мощностью множества граничных вершин $V' \subset V$ и строки формул, сложность которых оценивается величинами $O(n)$, $O(n)$, $O(n)$.

Список литературы

[1] *Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г.* О поведении автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, № 3. — С. 3–28.

О диагностике отождествления переменных в формулах булевых функций

В. И. Шевченко

vladimir-sh274@rambler.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Рассматриваются схемы из функциональных элементов формульного типа [1], то есть схемы, в которых разветвления могут быть только на входах схемы, а к выходу каждого элемента схемы может быть присоединен только один вход только одного элемента. В любой из рассматриваемых схем один или несколько элементов могут находиться в неисправном состоянии. При этом если в исправном состоянии элемент реализует функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, то при наличии в нем неисправностей он реализует функцию, которая получается из $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ отождествлением некоторых переменных. Для диагностики (поиска) этих неисправностей используются деревья решений (условные тесты) [2, 3]. В работе для различных конечных базисов для схем исследуются верхние и нижние оценки минимальной глубины деревьев решений в худшем случае.

Конечное множество булевых функций B будем называть *базисом*, а схему S, в которой каждому элементу сопоставлена функция из B, *схемой в базисе* B. Входы S и выходы ее элементов иногда будем называть вершинами. Предполагается, что каждая схема имеет хотя бы один вход, хотя бы один функциональный элемент и ровно один выход. Обозначим через $H(S)$ множество всех схем, которое содержит схему S и все схемы, которые могут быть получены из S при переходе некоторых ее элементов в неисправные состояния. Никаких других схем $H(S)$ не содержит. Множество различных булевых функций, реализуемых схемами из $H(S)$, обозначим через $F(S) = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Разобъем $H(S)$ на подмножества

$$H_1(S), H_2(S), \ldots, H_m(S)$$

такие, что для $i = 1, \ldots, m$ все схемы из $H_i(S)$ реализуют одну и ту же булеву функцию f_i. Для удобства будем предполагать, что $S \in H_1(S)$.

Задача диагностики схемы S: для любой схемы U из $H(S)$ определить к какому из подмножеств $H_i(S)$, $i = 1, \ldots, m$, принадлежит U. Для решения этой задачи используются деревья решений (условные тесты).

Дерево решений Y для решения задачи диагностики схемы S представляет собой конечное ориентированное корневое дерево, в котором каждой вершине, не являющейся концевой, приписан двоичный набор из $\{0, 1\}^n$, каждой концевой вершине — некоторое число из множества $\{1, \ldots, m\}$. Из каждой вершины, не являющейся концевой, исходят ровно две дуги, которым приписаны числа 0 и 1. Далее, для любой функции $f_i \in F(S)$, реализуемой схемами из $H_i(S)$, найдется полный путь (от корня до концевой вершины) $\gamma = v_1, u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}$ такой, что вершине v_{r+1} приписано число i и, если при $q = 1, \ldots, r$ вершине v_q приписан набор $\alpha_q \in \{0, 1\}^n$, а дуге u_q — число $\delta_q \in \{0, 1\}$, то функция f_i — единственная функция в $F(S)$, которая на наборах $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ принимает значения $\delta_1, \ldots, \delta_r$ соответственно. Максимальная длина полного пути называется глубиной дерева решений Y и обозначается через $h(Y)$. Величина $d(S) = \min h(Y)$, где минимум берется по всем деревьям решений для диагностики S, называется *минимальной глуби-*

ной деревьев решений для диагностики схемы S. Обозначим через $d_B(N) = \max d(S)$, где максимум берется по всем схемам в базисе B, число вершин в которых не провосходит N.

Теорема. а) *Если базис* B *есть* $\{x \cdot y\}$ *или* $\{x \wedge y\}$, *или* $\{x \oplus y\}$, *то для* $N \geqslant 3$ *справедливо равенство:*

$$d_B(N) = \lceil N/2 \rceil.$$

б) *Если* $B = \{x \cdot y, x \vee y\}$ *или* B *есть непустое подмножество множества* $\{x(y \vee z), x \vee yz, xy \vee yz \vee xz\}$, *то для* $N \geqslant 2$ *имеют место неравества:*

$$2^{\lfloor (N-2)/6 \rfloor - 1} \leqslant d_B(N) \leqslant \binom{N+1}{\lceil N/2 \rceil + 1}.$$

в) *Если* $B = \{x_1 \cdot x_2, \bar{x}\}$ *или* $B = \{x_1 \vee x_2, \bar{x}\}$, *или* B *есть непустое подмножество множества* $\{x_1 \cdot \bar{x}_2, \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2, x_1 \vee \bar{x}_2, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\}$, *то для* $N \geqslant 2$ *имеют место неравества:*

$$2^{\lfloor (N-2)/3 \rfloor - 1} \leqslant d_B(N) \leqslant 2^{\lceil N/2 \rceil}.$$

Список литературы

[1] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[2] *Мошков М. Ю./* Деревья решений. Теория и приложения. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1994.

[3] *Яблонский С. В., Чегис И. А.* Логические способы контроля работы электрических схем. // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

О сложности задач целочисленного линейного программирования с ограниченными минорами

В. Н. Шевченко

shev@uic.nnov.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Пусть $\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел, $A = (a_{ij}) \in \mathbf{Z}^{m \times n}$ — целочисленная $m \times n$ матрица, $b \in \mathbf{Z}^m$

— целочисленный вектор-столбец, i-я компонента которого равна b_i $(i = 1, \ldots, m)$, J_+ — подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

с неизвестными x_j $(j = 1, \ldots, n)$, где x_j — j-я координата вектора $x \in \mathbf{Q}^n$, и множество $\mathcal{M}(A, b, J_+)$ ее решений, удовлетворяющих условиям

$$x_j \geqslant 0 \quad \text{при} \quad j \in J_+, \tag{2}$$

Известно, что задача $\mathcal{P}_1$: найти вектор $z \in \mathcal{M}(A, b, J_+)$ или доказать, что $\mathcal{M}(A, b, J_+) = \varnothing$ — при $J_+ = \{1, ..., n\}$ является NP-полной и принадлежит классу P (задач, для которых имеются полиномиальные алгоритмы) при $J_+ = \varnothing$ (см., например, [1, 2]).

Выделены два класса подзадач $\mathcal{P}_1$, для которых имеются полиномиальные алгоритмы: один получается из псевдополиномиальных, а другой из квазиполиномиальных (см., например, [3, 4]) алгоритмов. Здесь предлагается третий класс — класс матриц $\mathfrak{A}_c$, состоящий из матриц A, любой минор для которых не превосходит по абсолютной величине некоторой константы c.

Теорема 1. *Если $A \in \mathfrak{A}_c$, то $\mathcal{P}_1 \in P$.*

Рассмотрим множества

$$P(A, b) = \{x \in \mathbf{Q}^n \mid Ax \leqslant b\}, \quad M(A, b) = P(A, b) \cap \mathbf{Z}^n$$

и задачу $\mathcal{P}_2$: найти $z \in M(A, b)$ или доказать, что $M(A, b) = \varnothing$.

Теорема 2. *Если $A \in \mathfrak{A}_c$, то $\mathcal{P}_2 \in P$.*

Нетрудно видеть, что теорему 2 достаточно доказать для случая, когда ранг A равен n (что и будем предполагать выполненным). Известно [4], что задача $\mathcal{P}_2$ принадлежит классу P при $m = n$ и NP-полна при $m = n+1$ (что позволяет говорить о ней как о простейшей NP-полной задаче целочисленного программирования).

Ключ к доказательству теоремы 2 дает

Лемма 3. *Если $A \in \mathfrak{A}_c$, $P(A, b) \neq \varnothing$, а $M(A, b) = \varnothing$, то существует полиномиальный алгоритм доказательства этого.*

Теоремы 1 и 2 сформулированы в [4] как гипотезы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00545а.

Список литературы

[1] *Гэри М. Р., Джонсон Д. С.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи // М.: Мир, 1982.

[2] *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования // М.: Мир, 1991.

[3] *Lenstra H. W.* Integer programming with a fixed number of variables // Mathematics of operations research. — 1983. — V. 8, № 4. — P. 538–548.

[4] *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного программирования // М.: Физматлит, 1995.

Численное нахождение количественных характеристик некоторых $\{0,1\}$-матриц

В. Н. Шевченко, М. Е. Сморкалов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Введение

Задача оценки средней величины миноров матриц некоторого типа играет важную роль во многих разделах математики, особенно в целочисленном программировании. Так, например, хорошо известно [1], что если матрица многоиндексной транспортной задачи неунимодулярная, то в некоторых случаях транспортный многогранник имеет вершины с дробными координатами и максимальный из знаменателей дробных компонент вершин многогранников не превосходит абсолютной величины базисного минора матрицы задачи.

Обозначим через $B_{n,k}$ булеву матрицу из n строк и $\binom{n}{k}$ столбцов, столбцами которой являются всевозможные булевы векторы, содержащие ровно k единиц. Заметим, что в случае $k = 2$ матрица $B_{n,k}$ представляет собой матрицу инцидентности полного графа. В случае $k \geqslant 3$ матрицу $B_{n,k}$ можно рассматривать как матрицу инцидентности полного гиперграфа.

Из [2] известно, как с ростом n ведет себя среднее значение модуля минора n-го порядка матрицы $B_{n,k}$ при $k = 2$ и $k \geqslant 8$. Поведение же этой величины при $3 \leqslant k \leqslant 7$ остается невыясненным, хотя известно, что среднее значение квадрата такого минора стремится к бесконечности. Задача ставится следующим образом: как, зная поведение среднего значения квадрата минора матрицы $B_{n,k}$ при $n \to \infty$, получить асимптотику модуля такого минора? Вообще, логично предположить, что если квадрат наудачу выбранного минора стремится к бесконечности, то к бесконечности стремится и модуль наудачу взятого минора. Однако, как выяснилось, это не всегда так. В данном докладе приводятся некоторые результаты, полученные для $k = 3, \ldots, 7$ с помощью методов математической статистики.

Нахождение среднего значения модуля минора матрицы $B_{n,k}$

Зафиксируем k ($k = 3, \ldots, 7$) и будем считать, что из всех возможных миноров порядка n матрицы $B_{n,k}$ наудачу выбирается минор и вычисляется его модуль. Тогда модуль таким образом выбираемого минора — случайная величина. Обозначим ее ξ. Данная случайная величина будет иметь следующий закон распределения вероятностей:

ξ	1	2	...	m
P	$X_0(n)/M$	$X_1(n)/M$	...	$X_0(m)/M$

Здесь $M = \binom{L}{n}$, $L = \binom{n}{k}$, $X_i(n)$ — количество квадратных подматриц порядка n матрицы $B_{n,k}$, модуль детерминанта которых равен i, m — максимально возможное значение детерминанта (по модулю). Математическое ожидание ξ вычисляется по формуле $\sum\limits_{\nu=1}^{m} \frac{\nu X_\nu(n)}{M}$. Если бы нам был известен ряд распределения, то мы могли бы воспользоваться этой формулой и найти его теоретически. Однако, при $n \gg 1$ сделать это затруднительно, поэтому предлагается искать несмещенную оценку по выборке.

Для нахождения такой оценки зафиксируем k, сформируем матрицу $n \times n$ из различных случайных $(0,1)$-векторов, содержащих ровно по k единиц, и вычислим модуль ее определителя. Повторим эту процедуру N раз. В результате получим N модулей случайно выбранных миноров n-го порядка матрицы $B_{n,k}$. Обозначим их через $\overline{\nu_1}$, $\overline{\nu_2}, \ldots,$ $\overline{\nu_N}$ и найдем $\overline{M_\xi} = \frac{1}{N} \sum\limits_{\nu=1}^{N} \overline{\nu_i}$. Известно, что $\overline{M_\xi} \approx M_\xi (M(\overline{M_\xi} - M_\xi)) = D_\xi / N$, при условии, что $M_\xi < \infty$ и дисперсия $D_\xi < \infty$. При фиксированном k будем увеличивать n и повторять описанный эксперимент.

Из результатов экспериментов следует, что при $4 \leqslant k \leqslant 7$ с ростом n среднее значение модулей миноров матриц растет экспоненциально от n. При $k = 3$ эксперимент показал рост среднего значения модуля минора при малых n ($n < 70$) и последующее убывание до нуля с ростом n.

Ниже приведена таблица с результатами эксперимента для $k = 3, N = 10000$:

n	10	20	30	40	50	70	100	150	300
$\overline{M_\xi}$	1.76	1.82	1.96	2.76	3.09	3.61	0.79	0	0

для $k = 4, N = 10000$:

n	10	30	50	100	200	300
$\overline{M_\xi}$	4.01	208.79	7800	2.5E+7	5.9E+15	6.87E+21

для $k = 5, N = 10000$:

n	10	30	50	100	200	300
$\overline{M_\xi}$	8.1	4500	1.7E+6	4.2E+12	2.3E+25	4.9E+38

для $k = 6, N = 10000$:

n	10	30	50	100	200	300
$\overline{M_\xi}$	6.42	3.3E+4	1.5E+8	3.3E+16	3.2E+33	1.06E+51

для $k = 7, N = 10000$:

n	10	30	50	100	200	300
$\overline{M_\xi}$	3.85	2.3E+5	3.5E+9	4.2E+19	1.4E+40	2.8E+60

Подбор стандартного вероятностного распределения для распределения модулей миноров

Задача сравнения закона распределения некоторой случайной величины с известными законами распределения является очень важной. Зная, что исследуемая случайная величина имеет тот или иной закон распределения, мы можем использовать свойства этих распределений, например, находить вероятности того, что случайная величина попадет в тот или иной интервал.

В работе были проведены сравнения распределения исследуемой случайной величины (модуля наудачу выбранного минора матрицы $B_{n,k}$) со следующими стандартными распределениями:

— гамма-распределение;
— распределение Пуассона;
— отрицательное биномиальное распределение;
— показательное распределение;
— распределение Релея.

Для этого использовался критерий согласия Пирсона. В данной ситуации имело смысл проводить сравнение исследуемого распределения, очевидно дискретного, не только со стандартными дискретными, но и непрерывными распределениями, т. к. известно, что некоторые дискретные распределения при выполнении определенных условий можно аппроксимировать непрерывными. Например, биномиальное распределение с параметрами m и p при $m \gg 1$ и $mp(1-p) > 20$ можно аппроксимировать нормальным распределением с параметрами mp и $mp(1-p)$. Значение уровня значимости (вероятность отклонения правильной гипотезы) выбиралось равным 0.001. Величина выборки (N) во всех случаях бралась равной 10000. Количество интервалов, на которые разбивался отрезок, содержащий все результаты наблюдений, бралось равным $N^{1/3}$. Параметры тестовых распределений выбирались по принципу максимального правдоподобия с помощью встроенных функций Matlab.

По результатам экспериментов можно сделать вывод, что при $k = 3$ и при достаточно больших n распределение модуля наудачу выбранного минора матрицы $B_{n,3}$ аппроксимируется гамма-распределением, плотность которого задается формулой:

$$y = f(x|a,b) = \frac{1}{b^a\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x/b},$$

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция от переменной a. Ниже приведена таблица с результатами эксперимента.

n	10	20	30	50	70
χ^2	9537.725	280	17.575	3.647	0.953
$\chi^2(1-q)$	39.252	31.264	26.124	24.322	13.816
Распределение подобрано верно	нет	нет	нет	да	да

При этом с ростом n при $n > 70$ отношение $\chi^2(1-q)$ к χ^2 продолжает расти и, стало быть, утверждение продолжает быть верным. Здесь

χ^2 — статистика Пирсона, а $\chi^2(1-q)$ — квантиль χ^2-распределения Пирсона.

Для $3 < k < 8$ подобрать стандартное распределение, которое бы аппроксимировало распределение модуля наудачу выбранного минора, не удалось.

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-01-00545-а.

Список литературы

[1] *Шевченко В. Н.* Многогранники многоиндексных транспортных задач: алгебраический подход // Дискретный анализ и исследование операций. — 2004. — С. 64–70.

[2] *Шевченко В. Н.* Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995.

О достаточности принципа максимума Понтрягина для одной нелинейной задачи оптимального управления

Г. В. Шевченко

shevch@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассмотрена задача перевода нелинейной системы в нулевое состояние с минимизацией неотрицательного интегрального функционала. Частные случаи этой задачи — задачи минимизации расхода ресурсов и минимизации расхода энергии. Показано, что для этой задачи принцип максимума является необходимым и достаточным условием. Следует подчеркнуть, что при доказательстве достаточности принципа максимума не используются функции Кротова.

Пусть управляемый объект описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, u), \tag{1}$$

где A — квадратная матрица порядка n; x — n-мерный вектор фазового состояния объекта; $x(0) = x^0$ — заданное начальное состояние объекта; $f(t, x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная по x и по u и непрерывно дифференцируемая по x функция; $f(t,x,u)\Big|_{x\neq 0,\, u\neq 0} \neq 0$, $f(t,0,u)\Big|_{u\neq 0} \neq 0$, $f(t,x,0)=0$; u — s-мерное измеримое управление, стесненное ограничением

$$u(t) \in U, \tag{2}$$

U — компактное тело из $\mathbb{R}^s$, содержащее внутри 0.

Предполагается, что система (1) управляема из начального состояния x^0 в начало координат.

Задача. *Требуется найти допустимое управление $u^0(t)$ $(t \in [0,T])$, переводящее систему (1) из $x(0)=x^0$ за фиксированное время T в нулевое конечное состояние $x(T)=0$ и минимизирующее функционал*

$$\mathcal{F}(u) = \int\limits_0^T W(u(t))dt, \tag{3}$$

где $W(u)$ — неотрицательная функция $W:\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, такая, что $W(0)=0$ и $W(u)\Big|_{u\neq 0} \neq 0$.

Очевидно, что эта задача имеет решение только при $T \geqslant T_{\text{opt}}$, где T_{opt} — время оптимального по быстродействию перевода системы (1) из начального состояния x^0 в начало координат. Существование оптимального по быстродействию управления для более общих систем, частный случай которых система (1), показано в [1]. Предположим, что $T > T_{\text{opt}}$.

Частными случаями поставленной задачи являются известные задачи: минимизации расхода ресурсов [2], где $W(u) = \sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_j u_j$, $\sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_j \neq 0$, $\alpha_j \geqslant 0$, и минимизации энергии, где $W(u) = \sum\limits_{j=1}^{s} u_j^2$, а в качестве U берётся параллелепипед $\{u=(u_1,\ldots,u_s) \mid u_j \leqslant M_j,\ j=\overline{1,s}\}$, $M_j > 0$ — действительные числа.

Обозначим через $\mathfrak{R}(T)$ область достижимости системы (1) за время T из начального состояния $x(0)=x^0$ допустимыми управлениями. В силу того, что $T > T_{\text{opt}}$, $f(t,x,u)\Big|_{x\neq 0,\, u\neq 0} \neq 0$, $f(t,0,u)\Big|_{u\neq 0} \neq 0$

и $f(t, x, 0) = 0$, имеет место включение $0 \in \operatorname{int} \mathfrak{R}(T)$. Через $\operatorname{int} A$ здесь и далее обозначается внутренность множества A. В силу непрерывности правой части системы (1) множество $\mathfrak{R}(T)$ компактно. Более того, поскольку система (1) управляема в начало координат, $\mathfrak{R}(T)$ — тело.

Введём согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина [3] сопряжённую систему

$$\dot{\psi} = -(A^* + D(f))\psi(t), \tag{4}$$

где $D(f)$ — матрица частных производных функции f по x, и запишем для задачи функцию Понтрягина

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = -W(u(t)) + \langle \psi(t), A(t)x(t)\rangle + \langle \psi(t), f(t, x(t), u(t))\rangle.$$

Здесь и далее через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается скалярное произведение векторов.

Теорема 1 (принцип максимума Понтрягина). *Для оптимальности управления $u^*(t)$ $(t \in [0, T])$ и траектории $x^*(t)$ $(t \in [0, T])$ необходимо существование такой ненулевой вектор-функции $\psi^*(t)$, являющейся решением сопряжённой системы (4) при некотором вполне определённом граничном условии $\psi(T) = c^*$, что при почти всех $t \in [0, T]$ функция $H(\psi^*(t), x^*(t), u)$ по переменной $u \in U$ достигает в точке $u = u^*(t)$ максимума, т. е.*

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u).$$

Из последнего выражения получаем

$$u(t) = \arg \max_{u \in U} \{-W(u) + \langle \psi(t), f(t, x(t), u)\rangle\}. \tag{5}$$

В силу однородности по ψ системы (4) в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением только граничных условий $\psi(T) = c$ с единичными нормами $\|c\| = 1$, используя вместо (5) следующее выражение:

$$u(t) = \arg \max_{u \in U} \{-\mu \cdot W(u) + \langle \psi(t), f(t, x(t), u)\rangle\}, \tag{6}$$

где μ — неотрицательное действительное число.

Обозначим через $u(t,c,\mu)$, $t \in [0,T]$, управление с компонентами, доставляющими максимум в (5) при некотором действительном числе $\mu \geqslant 0$.

Нетрудно показать, что при фиксированных t, $x(t)$ и $\psi(t)$ функция

$$g(t,c,\mu) = \max_{u \in U}\{-\mu \cdot W(u) + \langle \psi(t), f(t,x(t),u)\rangle\}$$

строго убывает по μ на некотором отрезке $[0,\mu_c(t)]$ и тождественно равна нулю при $\mu \geqslant \mu_c(t)$, где $\mu_c(t) = \max\{\delta(u) \mid u = u(t,c,\mu) \in U^+,\ \mu \geqslant 0\}$, $U^+ = \{u \in U \mid \langle \psi(t), f(t,x(t),u)\rangle > 0\}$, $\delta(u)$ таково, что $\gamma(t,c,\delta(u),u) = 0$.

Рассмотрим функцию $\mathcal{G}(c,\mu) = \mathcal{F}(u(c,\mu)) = \int\limits_0^T W(u(t,c,\mu))dt$, где $u(c,\mu) = u(t,c,\mu),\ t \in [0,T]$. Нетрудно показать, используя строгое убывание $g(t,c,\mu)$ по μ, что $\mathcal{G}(c,\mu)$ строго убывает по μ на отрезке $[0, \mu_T(c) = \max\limits_{t \in [0,T]} \mu_c(t)]$ и тождественно равна нулю при $\mu > \mu_T(c)$.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — единичная сфера с центром в начале координат. Каждому $c \in S$ при любом фиксированном $\mu \geqslant 0$ однозначно соответствуют управление $u_\mu = u_\mu(t) = u(t,c,\mu),\ t \in [0,T]$, и точка $x_\mu = x(T,u_\mu)$ из области достижимости $\mathfrak{R}(T)$ системы (1), где $x(T,u_\mu)$ — решение задачи Коши (1), $x(0) = x^0$ при допустимом управлении $u = u_\mu$ в момент времени $t = T$. Рассмотрим множество $\Omega(\widetilde{\mu}) = \{x = x(T,u_\mu) \mid \ c \in S,\ \mu \geqslant \widetilde{\mu}\}$. Очевидно, что множество $\Omega(0)$ совпадает с областью достижимости $\mathfrak{R}(T)$ системы (1). Границей множества $\Omega(\widetilde{\mu})$ является множество

$$\partial\Omega(\widetilde{\mu}) = \{x = x(T,u_{\widetilde{\mu}}) \mid u_{\widetilde{\mu}} = u_{\widetilde{\mu}}(t) = u(t,c,\widetilde{\mu})\ (t \in [0,T]),\ c \in S\}.$$

Так как функция $\mathcal{G}(c,\mu)$ строго убывает по μ на отрезке $[0,\mu_T]$ при любом $c \in S$, справедливы включения $\Omega(\widetilde{\mu}_2) \subset \Omega(\widetilde{\mu}_1)$ при любых $\widetilde{\mu}_2 > \widetilde{\mu}_1 \geqslant 0$.

Из полученных включений следует, что существует наименьшее $\widetilde{\mu}^*$, такое, что начало координат лежит на границе множества $\Omega(\widetilde{\mu}^*)$, а при любом $\widetilde{\mu}$, $0 \leqslant \widetilde{\mu} < \widetilde{\mu}^*$ лежит внутри $\Omega(\widetilde{\mu})$. Это означает, что существует $c^* \in S$, такое, что $x(T,u(c^*,\widetilde{\mu}^*)) = 0$.

Рассмотрим отображение $\mathfrak{F}_\mu : S \to \partial\Omega(\mu)$. Пусть $\mu_1 > \mu_2 \geqslant 0$. Отображения $\mathfrak{N}_{\mu_1\mu_2} : \partial\Omega(\mu_1) \to \partial\Omega(\mu_2)$ и $\mathfrak{N}_{\mu_2\mu_1} : \partial\Omega(\mu_2) \to \partial\Omega(\mu_1)$ удовлетворяют соотношениям $\mathfrak{F}_{\mu_2} = \mathfrak{N}_{\mu_1\mu_2}\mathfrak{F}_{\mu_1}$ и $\mathfrak{F}_{\mu_1} = \mathfrak{N}_{\mu_2\mu_1}\mathfrak{F}_{\mu_2}$. Из этих равенств следует, что $\mathfrak{N}_{\mu_1\mu_2}\mathfrak{N}_{\mu_2\mu_1} = I$, где I — тождественное отображение. Поэтому $\mathfrak{N}_{\mu_1\mu_2} = \mathfrak{N}^{-1}_{\mu_2\mu_1}$. Это означает, что отображение $\mathfrak{N}_{\mu_1\mu_2}$ является изоморфизмом. Следовательно, и отображение $\mathfrak{N}_{0\widetilde{\mu}^*}$ — изоморфизм. Тогда точке $0 \in \partial\Omega(\widetilde{\mu}^*)$ соответствует единственная точка, лежащая на границе области достижимости $\mathfrak{R}(T)$. Тем самым показано, что принцип максимума Понтрягина для поставленной задачи является и достаточным условием оптимальности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10–01–00035, и Сибирского отделения РАН, проект № 85.

Список литературы

[1] *Wang J. R., Xiang X., Wei W.* The constructive approach on the time optimal control of system governed by nonlinear equations on Banach spaces // Electronic J. Quantative Theory of Differential Equations. — 2009. — V. 45. — P. 1–10.

[2] *Шевченко Г. В.* Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для нелинейных стационарных систем // Автоматика и телемеханика. — 2009. — Т. 70, № 4. — С. 119–130.

[3] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1983.

Свойства минимальных нумераций корневых ордеревьев с выделенной вершиной

Д. С. Шелухин

dmshell@rambler.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Постановка задачи

Задача поиска минимальной нумерации графа. Пусть $G(V, E)$ — произвольный граф, содержащий n вершин; $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$ — множество из n натуральных чисел. Нумерацией графа $G(V, E)$ будем называть взаимно-однозначное соответствие $\varphi : V \to A$, где множество A — нумерующая последовательность графа. При нумерации φ каждой вершине $v_i \in V$ сопоставляется номер

$\varphi(v_i)$, а каждому ребру $e = (v_i, v_j) \in E$ — число $\Delta_e^\varphi = |\varphi(v_i) - \varphi(v_j)|$ (длина ребра (v_i, v_j) при нумерации φ).

Длиной графа $G(V, E)$ будем называть величину $\Delta^\varphi G = \sum_{e\in E} \Delta_e^\varphi$. Нумерации, на которых достигается $\min\limits_{\varphi} \Delta^\varphi G = \Delta(G)$, будем называть минимальными нумерациями.

Нумерующие последовательности. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i < a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, — произвольная нумерующая последовательность. Каждое целое число, заключенное между a_1 и a_n и не входящее в A, будем называть пробелом. Общее количество пробелов в A обозначим через $P(A) = (a_n - a_1) - (n-1)$. Если $P(A) = 0$, то нумерующая последовательность называется сплошной. В [1] приводится доказательство следующей леммы:

Лемма 1. *Для любой нумерации $\varphi : V \to A$, $P(A) > 0$ графа $G(V, E)$ и любой $\widetilde{\varphi} : V \to \widetilde{A}$, $P(\widetilde{A}) = 0$, сохраняющей порядок нумерации φ (вершины $\varphi^{-1}(v_i)$ и $\widetilde{\varphi}^{-1}(v_i)$ совпадают при любом $i = \overline{1, n}$), имеет место $\Delta^\varphi G \geqslant \Delta^{\widetilde{\varphi}} G + P(A)$.*

Нумерации ориентированных графов. Нумерации с выделенной вершиной. Для ориентированных графов вводится понятие допустимости нумерации. Чтобы нумерация была допустимой, требуется, чтобы номера вершин вдоль всех путей монотонно возрастали. Очевидно, что не существует допустимых нумераций в графах, имеющих ориентированные циклы.

Рассмотрим класс однокорневых ордеревьев. Задача поиска минимальной нумерации для этого класса графов приведена в [1]. Выделим в однокорневом ордереве $t(V, E)$ некоторую вершину $v^* \in V$ и рассмотрим нумерацию, минимизирующую функционал

$$\Delta^\varphi t + \varphi(v^*), \tag{1}$$

где $\varphi(v^*)$ — это номер, присвоенный выделенной вершине при нумерации φ, t — однокорневое ориентированное дерево. Нумерацию дерева, минимизирующую функционал (1), будем называть минимальной нумерацией с выделенной вершиной.

Основные свойства нумерации однокорневого ориентированного дерева с выделенной вершиной

Очевидно, что если выделенная вершина v^* совпадает с корнем дерева, то минимум функционала (1) будет достигаться тогда и только тогда, когда минимально $\Delta^\varphi t$ (т. к. $\varphi(v^*)$ всегда будет равно первому номеру нумерующей последовательности).

Рассмотрим случай, когда выделенная вершина не является корнем. Пусть для некоторого дерева t существует нумерация φ, минимизирующая (1). Так как нумерация φ соответствует ориентации дерева, то вершина $\varphi^{-1}(n)$ является висячей (где n — последний номер нумерующей последовательности). Рассмотрим путь σ_0 из корня дерева до вершины $\varphi^{-1}(n)$. Поддеревья, порожденные дугами, не принадлежащими σ_0, обозначим через $t_i^{\sigma_0}$, $i = \overline{1,k}$. Пусть также t_1 — это поддерево, содержащее поддеревья $t_1^{\sigma_0}, t_2^{\sigma_0}, \ldots, t_i^{\sigma_0}$, где i — номер поддерева, содержащего вершину v^*. Поддерево t_2 будет содержать в себе поддеревья $t_{i+1}^{\sigma_0}, \ldots, t_k^{\sigma_0}$ и вершину с последним номером из нумерующей последовательности. Справедлива следующая

Лемма 2. *Существует минимальная нумерация φ дерева t с выделенной вершиной v^*, при которой нумерующие последовательности поддеревьев t_1 и t_2 — сплошные.*

Доказательство. Для доказательства леммы рассмотрим некоторую минимальную нумерацию φ дерева t с выделенной вершиной v^*, при которой поддеревья t_1 и t_2 пронумерованы несплошными нумерующими последовательностями. Построим нумерацию $\overline{\varphi}$ так, чтобы она сохраняла порядок нумерации φ на каждом из поддеревьев t_1 и t_2, но нумеровала бы их сплошными нумерующими последовательностями (что всегда можно сделать, если исходная нумерующая последовательность — сплошная). Минимизируемый функционал можно записать в виде

$$\Delta^\varphi t + \varphi(v^*) = \Delta^\varphi t_1 + \Delta^\varphi t_2 + \Delta^\varphi e + \varphi(v^*),$$

где e — ребро, связывающее деревья.

Рассмотрим, что произойдёт, когда мы пронумеруем деревья сплошными последовательностями (перейдем от φ к $\overline{\varphi}$). Очевидно, что нумерации поддеревьев t_1 и t_2 улучшатся (по лемме 1), $\varphi(v^*)$ — не ухудшится. Остаётся рассмотреть ребро $e = (v_1^e; v_2^e)$. Здесь $v_1^e \in t_1$, а $v_2^e \in t_2$. Допустим, что при нумерации $\overline{\varphi}$ значение v_1^e уменьшилось на k_1. Обозначим исходную нумерующую последовательность дерева t_1 через $A_1 = \{1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$, а полученную сплошную нумерующую последовательность того же дерева через $B_1 = \{1, 2, \ldots, b_{n_1}\}$. В связи с тем, что мы не меняли порядок нумерации, в обеих последовательностях вершине v_1^e соответствует один и тот же номер с конца (обозначим его x). Если значение v_1^e уменьшилось, значит, изначальный номер a_{n-x+1} был больше, чем $b_{n-x+1} = n - x + 1$, ровно на k_1. Очевидно, что тогда верно: $a_{n_1} \geqslant n_1 + k_1$. Если теперь посчитать количество пробелов $P(A_1)$, то оно, очевидно, будет больше или равно k_1. Аналогично, если значение v_2^e увеличилось на k_2, то в поддереве t_2 было не менее k_2 пробелов. Следовательно, нумерация $\overline{\varphi}$ не хуже нумерации φ. ∎

Лемма 2 позволяет уменьшать размерность задачи, если цепь σ_0 выделена. Введем обозначения: пусть v_0 — корень дерева, а поддеревья $t(v_1), t(v_2), \ldots, t(v_p)$, $p \geqslant 1$, порождены вершинами всех веток, выходящих из v_0 соответственно по ребрам $(v_0, v_1), (v_0, v_2), \ldots, (v_0, v_p)$. Из леммы 2 получаем

Следствие. *Существует такая минимальная нумерация φ дерева t с выделенной вершиной v^*, при которой нумерующие последовательности всех поддеревьев $t(v_1), t(v_2), \ldots, t(v_p)$, $p \geqslant 1$, сплошные, кроме, разве что, поддерева, содержащего вершину v^*, а при выделении цепи в поддереве, содержащем вершину v^*, образующееся при этом поддерево t_2 также нумеруется сплошной нумерующей последовательностью.*

Теперь рассмотрим механизм выделения пути σ_0. Пусть количество вершин в поддереве, содержащем выделенную вершину v^* (пусть это будет поддерево $t(v_i)$), равно n. Предположим, что нумерация поддерева $t(v_i)$ при минимальной нумерации дерева t известна. Выделим внутри этого поддерева путь σ_0 (из корня в лист с максимальным номером) и разобьём его на поддеревья t_1 и t_2. Введём обозначение $n_2 = |t_2|$. Справедлива следующая

Теорема 3. *Существует минимальная нумерация φ дерева t с выделенной вершиной v^*, такая, что цепь σ_0 будет выделена в поддереве $t(v_i)$ тогда и только тогда, когда $\nexists k, |t(v_k)| > n_2$ и $|t(v_k)| > n/2$.*

Для определения значения параметра n_2 можно использовать следующую теорему.

Теорема 4. *Параметр n_2 равен мощности поддерева t_2, полученного при минимальной нумерации поддерева $t(v_i)$ с выделенной вершиной v^*, и является одинаковым для всех минимальных нумераций поддерева $t(v_i)$ с выделенной вершиной v^*.*

Список литературы

[1] *Иорданский М. А.* Задачи размещения графов. I // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Межвуз. сб. научн. трудов / Под ред. Ал. А. Маркова. — Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1983.

Некоторые оценки сложности двоичных решающих диаграмм

А. Е. Шиганов

df-dx@mail.ru

ООО «Нангейт», Москва

В работе изучается сложность реализации булевых функций двоичными решающими диаграммами, а также упорядоченными k-считывающими двоичными решающими диаграммами при $k \geqslant 4$.

Напомним основные определения. Двоичной решающей диаграммой (Binary Decision Diagram, BDD) от булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется ориентированный ациклический граф Σ с одним истоком (входом), в котором каждый сток (выход) помечается 0 или 1, каждой вершине, отличной от выходов, приписана одна из переменных $x_1, \ldots, x_n$ и из неё исходят две дуги с пометками $0, 1$ [1]. Двоичная решающая диаграмма Σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ реализует булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если для каждого набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ ориентированный путь, который начинается из входа Σ и далее при прохождении через вершину x_i следует по дуге α_i, приводит в выход, помеченный $f(\alpha)$.

Двоичная решающая диаграмма Σ называется упорядоченной k-считывающей (k-OBDD), если произвольный ориентированный путь из входа в выход Σ разбивается на k сегментов, таких, что на каждом сегменте переменные встречаются в одном и том же порядке, одинаковом для всех сегментов и указанных путей, и на каждом сегменте каждая переменная встречается не более одного раза [2].

Сложностью $L(\Sigma)$ BDD Σ называется число её вершин, отличных от выходов. Обозначим через $L^{\mathrm{BDD}}(f)$ (соответственно $L^{k\text{-OBDD}}(f)$) минимальную сложность BDD Σ (соответственно упорядоченной k-считывающей BDD Σ), реализующей f. Определим функции Шеннона

$$L^{\mathrm{BDD}}(n) = \max_{f(x_1,\ldots,x_n)} L^{\mathrm{BDD}}(f), \quad L^{k\text{-}\mathrm{OBDD}}(n) = \max_{f(x_1,\ldots,x_n)} L^{k\text{-}\mathrm{OBDD}}(f).$$

Представление булевых функций с помощью BDD было впервые предложено в [3]. Там же была получена нижняя асимптотическая оценка $2^{n-1}/n$ и верхняя асимптотическая оценка $2^{n+2}/n$ для функции Шеннона $L^{\mathrm{BDD}}(n)$. Позднее в [4] для этой функции была установлена асимптотика $2^n/n$, причём относительная погрешность полученных оценок, т.е. отношение разности между верхней и нижней оценками функции Шеннона к ней самой, составляла $O(1/\sqrt{n})$.

В работе [2] приводятся асимптотические оценки функции Шеннона $L^{\mathrm{BDD}}(n)$ с относительной погрешностью вида $o(\log n/n)$. Также в [2] установлено асимптотическое значение $2^n/n$ для функции Шеннона $L^{k\text{-}\mathrm{OBDD}}(n)$ при $k \geqslant 2$, а верхняя и нижняя оценки имеют относительную погрешность вида $o(\log n/n)$.

Основные результаты настоящей работы представлены в следующих теоремах.

Теорема 1. *При* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливы оценки*

$$\frac{2^n}{n}\left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant L^{\mathrm{BDD}}(n) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\log\log n + O(1)}{n}\right).$$

Теорема 2. *Для любого натурального* $k \geqslant 4$ *при* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливы оценки*

$$\frac{2^n}{n}\left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant L^{k\text{-}\mathrm{OBDD}}(n) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\log\log n + O(1)}{n}\right).$$

Отметим, что полученные оценки функций Шеннона $L^{\mathrm{BDD}}(n)$ и $L^{k\text{-}\mathrm{OBDD}}(n)$ при $k \geqslant 4$ имеют относительную погрешность вида $\dfrac{\log\log n + O(1)}{n}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-01-00817-а.

Список литературы

[1] *Wegener I.* The complexity of Boolean functions. — Teubner (Stuttgart)/Wiley (Chichester), 1987.

[2] *Ложкин С. А.* О сложности реализации произвольных булевых функций в некоторых классах BDD // Тр. Межд. школы-семинара «Дискретная математика и математическая кибернетика» (Ратмино, 31 мая — 3 июня 2001 г.). — М.: МАКС Пресс, 2001. — С. 18–19.

[3] *Lee C. Y.* Representation of switching circuits by binary-decision programs // Bell. Sys. Tech. J. — 1959. — V. 38. — P. 985–999.

[4] *Кузьмин В. А.* Оценка сложности реализации булевых функций программами простого типа // Методы дискретного анализа. Вып. 29. — 1976. — С. 11–39.

Декомпозиция недоопределенных данных

Л. А. Шоломов

sholomov@isa.ru

Институт системного анализа РАН, Москва

Задан алфавит $A_0 = \{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}$ *основных символов*. Пусть $M = \{0, 1, \dots, m-1\}$ и каждому непустому $T \subseteq M$ сопоставлен символ a_T. Символы алфавита $A = \{a_T, T \subseteq M\}$ называются *недоопределенными*, и *доопределением* символа $a_T \in A$ считается всякий основной символ a_i, $i \in T$. Символ a_M, доопределимый любым основным символом, называется *неопределенным* и обозначается $*$.

Источник X, порождающий символы $a_T \in A$ независимо с вероятностями p_T, будем называть *недоопределенным источником*. Величину

$$\mathcal{H}(X) = \min_Q \Big\{ -\sum_{T \subseteq M} p_T \log \sum_{i \in T} q_i \Big\},$$

где $\log x = \log_2 x$, минимум берется по наборам $Q = (q_i,\ i \in M)$, $q_i \geqslant 0$, $\sum_{i \in M} q_i = 1$, назовем *энтропией источника* X. Для недоопределенных данных эта величина играет роль энтропии Шеннона [1].

Источники X и Y будем называть (информационно) *равносильными* и записывать $X \approx Y$, если для любого источника Z выполнено $\mathcal{H}(XZ) = \mathcal{H}(YZ)$. Будем говорить, что источник X (информационно) *не слабее* Y (Y *не сильнее* X), и записывать $X \gtrsim Y$, если $XY \approx X$. Можно показать, что $X \approx Y$ тогда и только тогда, когда $X \gtrsim Y$ и $X \lesssim Y$. Существует эффективный алгоритм проверки соотношений $X \approx Y$ и $X \gtrsim Y$. (Алгоритм считается эффективным, если его трудоемкость оценивается сверху полиномом от размера исходных данных.)

Скажем, что X *разлагается в произведение* источников $X_1, ..., X_k$, если $X \approx X_1 \dots X_k$. Недоопределенный источник с алфавитом $\{0, 1, *\}$ называется *простым*. Источник X, который разлагается в произведение простых источников $X_1, \dots, X_k$, назовем *разложимым*, а само произведение $X_1 \dots X_k$ будем называть *декомпозицией* источника X.

Пусть задан некоторый класс $\mathbf{S}$ источников. Источник $Y \in \mathbf{S}$ будем называть (нижней) *аппроксимацией источника X в классе* $\mathbf{S}$, если $Y \precsim X$ и для всякого $Z \in \mathbf{S}$, такого, что $Z \precsim X$, выполнено $Y \succsim Z$. Очевидно, что аппроксимирующий источник Y, если он существует, определен однозначно с точностью до равносильности.

Обозначим через $\mathbf{D}$ класс всех разложимых источников. Если источник Y аппроксимирует X в этом классе, то про всякую декомпозицию источника Y будем говорить, что она аппроксимирует источник X. Все декомпозиции, аппроксимирующие заданный источник X, равносильны (т. е. равносильны произведения $X_1 \dots X_s$).

Утверждение 1. *Для всякого источника X существует аппроксимирующая декомпозиция $X_1 \dots X_s$.*

Замечание. Двойственно к понятию нижней аппроксимации можно определить верхнюю аппроксимацию. В качестве приближения мы рассматриваем только нижнюю аппроксимацию, поскольку верхняя аппроксимация в классе $\mathbf{D}$ существует не всегда.

Возникают задачи алгоритмического характера, связанные с построением декомпозиций (точных или приближенных) и с их упрощением — уменьшением числа s источников, присутствующих в декомпозициях. Под алфавитом A источника X будем понимать множество всех символов a_T, для которых $p_T > 0$. Некоторый анализ показывает, что задачи декомпозиции и аппроксимации источника X, а также упрощения этих представлений фактически не зависят от величин вероятностей p_T (ненулевых) и эти задачи могут быть переформулированы применительно к алфавиту A недоопределенных символов. В терминах алфавитов они и решаются в данной работе, но полученные результаты будем формулировать для источников.

Утверждение 2. *Существует эффективный алгоритм построения по источнику X аппроксимирующей декомпозиции $X_1 \dots X_s$, в которой число s простых источников не превосходит мощности $|A|$ алфавита A.*

Если источник X разложим, то произведение $X_1 \dots X_s$ является его декомпозицией,

Рассмотрим теперь задачу упрощения декомпозиций. Под декомпозицией будем понимать произвольное произведение $X_1 \dots X_s$ простых источников. В частности, оно могло возникнуть как декомпозиция или аппроксимация некоторого источника X. Источник X_i, $i = 1, \dots, s$, назовем *устранимым*, если

$$X_1 \dots X_s \approx X_1 \dots X_{i-1} X_{i+1} \dots X_s.$$

Утверждение 3. *Существует эффективный алгоритм проверки устранимости.*

Используя его, можно путем последовательного удаления устранимых источников эффективно построить *неизбыточную* декомпозицию, из которой нельзя удалить ни одного источника без потери равносильности. Задача о сложности неизбыточной декомпозиции (возникающей из заданной декомпозиции $X_1 \dots X_s$) состоит в том, чтобы узнать, можно ли из $X_1 \dots X_s$ выбрать не более заданного числа t источников, образующих равносильную декомпозицию.

Утверждение 4. *Задача о сложности неизбыточной декомпозиции NP-полна.*

Существуют примеры того, что в рамках заданной системы источников нельзя добиться хорошего результата и существенное уменьшение сложности декомпозиций связано с использованием других источников. В связи с этим рассмотрим вопрос перехода от декомпозиции $X_1 \dots X_s$ к равносильной декомпозиции $Y_1 \dots Y_t$, использующей, вообще говоря, другие источники. Скажем, что источник Y *выразим* через $X_1, \dots, X_s$, если $X_1 \dots X_s Y \approx X_1 \dots X_s$. Свойство выразимости может быть эффективно проверено с помощью утверждения 3, поскольку источник Y выразим через $X_1, \dots, X_s$ тогда и только тогда, когда Y устраним из $X_1 \dots X_s Y$.

Утверждение 5. *Существует эффективный алгоритм проверки равносильности заданных декомпозиций $X_1 \dots X_s$ и $Y_1 \dots Y_t$.*

Это следует из того, что $X_1 \ldots X_s \approx Y_1 \ldots Y_t$ тогда и только тогда, когда каждый Y_j выразим через $X_1, \ldots, X_s$, а каждый X_i — через $Y_1, \ldots, Y_t$.

Если новая декомпозиция $Y_1 \ldots Y_t$ не задана, то для ее формирования может быть использован найденный в работе метод порождения всех источников Y, выразимых через заданные источники $X_1, \ldots, X_s$.

Работа выполнена при поддержке ОНИТ РАН по программе фундаментальных исследований (проект «Теория и методы эффективного использования недоопределенных данных»).

Список литературы

[1] *Шоломов Л. А.* Элементы теории недоопределенной информации // Прикладная дискретная математика. Приложение № 2. — 2009. — С. 18–42.

[2] *Шоломов Л. А.* Преобразование нечетких данных с сохранением информационных свойств // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 85–104.

О сложности реализации предикатов из некоторых классов предикатными схемами

М. С. Шуплецов

miklesh@shupletsov.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Рассматривается задача синтеза [1, 2] и получения асимптотических оценок различной степени точности для сложности реализации предикатов из некоторых классов при помощи предикатных схем (см., например, [3, 4]) в базисах специального вида. Напомним, что для инвариантных классов булевых функций (см., например, [5]) в традиционных классах управляющих систем (схемы из функциональных элементов, контактные схемы и др.) поведение функции Шеннона для сложности указанных управляющих систем на уровне асимптотики было установлено О. Б. Лупановым [2]. Кроме того, для некоторых классов функций, связанных с автоматными языками, С. А. Ложкиным [6] были получены оценки высокой степени точности для сложности функции Шеннона в классе контактных схем и схем из функциональных элементов, имеющих ограниченную глубину ветвления.

Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ (соответственно $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_p, \ldots\}$) — счетный упорядоченный алфавит полюсных (соответственно внутренних) переменных. *Базисом* назовём произвольную полную (см., например, [3]) конечную систему предикатов $\mathfrak{B} = \{\pi_1, \ldots, \pi_b\}$, в которой предикат π_i, $i = 1, \ldots, b$, существенно зависит от k_i переменных из $\mathcal{X}$ и ему сопоставлено положительное действительное число, характеризующее «вес» этого предиката.

Напомним, что предикатная схема в базисе $\mathfrak{B}$ представляет собой двудольный граф, у которого все вершины одной доли помечены символами базисных предикатных элементов из множества $\mathfrak{B}$, а вершины другой доли — символами переменных из алфавита $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. Функционирование предикатного элемента с k полюсами задается его характеристической функцией от k переменных, связанных с этими полюсами, и определяется тем, что элемент находится в допустимом состоянии, если данная функция равна 1. Схема находится в допустимом состоянии на некотором наборе значений полюсных переменных тогда и только тогда, когда существует набор значений внутренних переменных, такой, что все предикатные элементы, из которых построена схема, находятся в допустимых состояниях. При этом предполагается, что предикатная схема Σ реализует предикат π от её полюсных переменных, если множество допустимых наборов π совпадает с множеством тех наборов, на которых Σ находится в допустимом состоянии. Более подробное описание указанной модели представлено в работах [3, 4].

Пусть $\Pi_2(n)$ — множество всех булевых предикатов от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, а Π_2 — множество всех булевых предикатов от переменных из $\mathcal{X}$. Для множества (класса) предикатов $Q \subseteq \Pi_2$ и натурального n через $Q(n)$ будем обозначать множество $Q \cap \Pi_2(n)$. При этом множество Q и связанную с ним последовательность $Q(1)$, $Q(2)$, … будем называть *классом предикатов*. Для класса предикатов Q введем следующую функцию:

$$\sigma_Q(n) = \frac{\log |Q(n)|}{2^n},$$

причём из определения следует, что $0 \leqslant \sigma_Q(n) \leqslant 1$ для всех n.

Пусть $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ — класс предикатных схем, построенных в полном предикатном базисе $\mathfrak{B}$. Тогда под сложностью $L(\Sigma)$ предикатной схемы Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$, понимается сумма «весов» её предикатных элементов, а под сложностью $L_{\mathfrak{B}}(\pi)$ предиката π — минимальная из сложностей реализующих его схем в базисе $\mathfrak{B}$. Для инвариантного класса Q введем обычным образом функцию Шеннона $L_{\mathfrak{B}}(Q(n))$ для сложности предикатных схем в классе $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ как максимальную сложность $L_{\mathfrak{B}}(\pi)$, $\pi \in Q(n)$. Отметим, что в работах [3, 4] для произвольного базиса $\mathfrak{B}$ на основе некоторых специальных характеристик предикатов введен приведенный вес $\rho_{\mathfrak{B}}$ и обобщенный приведенный вес $\widehat{\rho}_{\mathfrak{B}}$, которые определены для произвольного полного базиса, и $\rho_{\mathfrak{B}} = \widehat{\rho}_{\mathfrak{B}}$ для почти всех базисов.

Множество предикатов $Q \subseteq \Pi_2(n)$ назовем *инвариантным классом предикатов*, если множество Q замкнуто относительно операций добавления и изъятия фиктивных переменных, операции переименования полюсов без отождествления и операции подстановки булевых констант. Отметим, что введенное понятие является естественным аналогом понятия инвариантного класса булевых функций (см., например, [5]).

Лемма. *Пусть Q — инвариантный класс предикатов. Тогда существует предел*

$$\sigma_Q = \lim_{n\to\infty} \sigma_Q(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|Q(n)|}{2^n}.$$

При этом число σ_Q, называемое характеристикой класса Q, удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \sigma_Q \leqslant 1$.

Инвариантный класс предикатов Q будем называть *нулевым*, если его характеристика $\sigma_Q = 0$.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{B}$ — произвольный полный предикатный базис, такой, что $\rho_{\mathfrak{B}} = \widehat{\rho}_{\mathfrak{B}}$, то для любого ненулевого инвариантного класса Q выполнено асимптотическое равенство*

$$L_{\mathfrak{B}}(Q(n)) \sim \sigma_Q \rho_{\mathfrak{B}} \frac{2^n}{n}.$$

Пусть, далее, Λ — язык (множество слов) в алфавите $\{0, 1\}$, а $\Lambda(n)$ — множество тех слов, длина которых не более n. Под сложностью $L_{\mathfrak{B}}(\alpha)$ слова α, $\alpha \in \Lambda$, понимается минимальная сложность предикатных схем, реализующих такие предикаты, столбец значений характеристической функции которых имеет префикс α, а функция Шеннона $L_{\mathfrak{B}}(\Lambda(n))$ равна максимальной сложности $L_{\mathfrak{B}}(\alpha)$, $\alpha \in \Lambda(n)$. Язык Λ является экспоненциальным, если мощность множества его слов длины не более n равна $2^{(\sigma+o(1))n}$, $0 < \sigma = \sigma_\Lambda \leqslant 1$. Известно (см., например, [7]), что любой язык Λ, распознаваемый конечным автоматом, является либо полиномиальным, либо экспоненциальным.

Рассмотрим, далее, специальный класс базисов, который является подклассом обобщенно-проводящих базисов, введенных в работе [3]. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$, — некоторый предикат с двумя выделенными переменными (не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что это переменные x_1 и x_2) и для любого i, $i = 3, \ldots, n$, существует такой набор $\alpha^i = (\alpha_3, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, что характеристическая функция $\chi_\varphi(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ равна $(x_1 \oplus x_i \oplus \sigma_4) \vee x_2^{\sigma_2}$, а также существует набор $\beta = (\beta_3, \ldots, \beta_n)$, такой, что $\chi_\varphi(x_1, x_2, \beta_3, \ldots, \beta_n) = x_1^{\sigma_5} \vee x_2^{\sigma_6}$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ — булевы константы. Предикат φ, обладающий указанными свойствами, будем называть *строго проводящим*. Полный предикатный базис $\mathfrak{B}$ назовём *строго обобщенно-проводящим*, если в множестве базисных предикатов, на которых достигается приведенный вес $\rho_{\mathfrak{B}}$ базиса $\mathfrak{B}$, найдётся строго проводящий предикат φ, имеющий максимальное число полюсов среди всех предикатов указанного множества.

Теорема 2. *Если $\mathfrak{B}$ — строго обобщенно-проводящий базис, то для любого экспоненциального языка Λ, распознаваемого конечным автоматом, справедлива следующая оценка высокой степени точности:*

$$L_{\mathfrak{B}}(\Lambda(n)) = \sigma_\Lambda \rho_{\mathfrak{B}} \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\left(2 + \frac{1}{k_{\mathfrak{B}}-1}\right) \log_2 n \pm O(1)}{n} \right),$$

где $k_{\mathfrak{B}}$ — максимальное число полюсов у базисных предикатов, на которых достигается приведенный вес $\rho_{\mathfrak{B}}$ базиса $\mathfrak{B}$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

Список литературы

[1] *Shannon C. E.* The synthethis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. — 1949. — V. 28, № 1. — P. 59–98.

[2] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[3] *Шуплецов М. С.* Оценки высокой степени точности для сложности предикатных схем в некоторых базисах // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 2. — С. 173–184.

[4] *Шуплецов М. С.* Об одном подходе к синтезу предикатных схем на основе обобщенных переменных // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2010. — № 4. — С. 24–30.

[5] *Яблонский С. В.* О классах функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12. Вып. 6. — С. 189–196.

[6] *Ложкин С. А.* Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности функций, связанных с автоматными языками // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XII Международной конференции (Нижний Новгород, 17–22 мая 1999 г.). Часть II / Под редакцией О. Б. Лупанова. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 138.

[7] *Хомский Н., Миллер Д.* Языки с конечным числом состояний // Кибернетический сборник. Вып. 4. — М.: Изд-во ин. литературы, 1962. — С. 233–255.

О скорости сходимости квазигрупповых свёрток распределений вероятностей

А. Д. Яшунский

alexey.yashunsky@gmail.com

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Как отмечено в обзоре [1], в последнее время увеличивается интерес к вопросам применения квазигрупп в криптологии, в частности — для построения поточных шифров. Использование квазигрупповых операций при поточном шифровании позволяет получать зашифрованные сообщения, в которых распределение символов близко к равномерному. Специальный вид используемых преобразований позволяет свести их исследование к рассмотрению подходящих цепей Маркова.

Подобное сведение используется также и при исследовании весьма близкой задачи о случайных блужданиях в конечной группе, подробно описанной, например, в [2]. При исследовании групп для сведения к марковским цепям существенно используется ассоциативность умножения в группе.

Однако, как будет показано далее, ни ассоциативность умножения, ни специальный вид формул не требуются для того, чтобы установить сходимость распределений значений квазигрупповой формулы к равномерному распределению.

Пусть $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$ — множество, на котором задана операция квазигруппового умножения $i \cdot j = k$ (где $i, j, k \in Q$), имеющая однозначно определённые обратные операции правого и левого деления: $i = k/j$ и $j = i\backslash k$ (подробнее см. [3]). Будем рассматривать множество распределений вероятностей на квазигруппе Q:

$$\mathcal{P}^q = \{(p_1, \ldots, p_q) : \sum_{i=1}^{q} p_i = 1 \text{ и все } p_i \geqslant 0\}$$

и операцию *свёртки* распределений из $\mathcal{P}^q$. Для распределений $u, v \in \mathcal{P}^q$ определим свёртку $u * v \in \mathcal{P}^q$ следующим образом:

$$(u * v)_i = \sum_{j=1}^{q} u_j v_{j\backslash i}.$$

Содержательно такая свёртка выражает распределение значения результата при квазигрупповом умножении двух случайных элементов из Q, имеющих распределения u и v, соответственно.

Далее мы будем исследовать распределения, получающиеся в результате многократного применения операции свёртки к некоторому начальному распределению.

Следуя [4], для $u \in \mathcal{P}^q$ обозначим через $(u_{[1]}, u_{[2]}, \ldots, u_{[q]})$ распределение, получающееся перестановкой компонент распределения u таким образом, что

$$u_{[1]} \geqslant u_{[2]} \geqslant \ldots \geqslant u_{[q]}.$$

Кроме того, обозначим $\delta_u = u_{[1]} - u_{[q]}$.

Используя введённые обозначения, сформулируем одно из свойств свёртки:

Теорема 1 (Харди, Литтлвуд, Пойя [5]). *Пусть $u, v \in \mathcal{P}^q$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, q$*

$$u_{[1]}v_{[q]}+u_{[2]}v_{[q-1]}+\ldots+u_{[q]}v_{[1]} \leqslant (u*v)_i \leqslant u_{[1]}v_{[1]}+u_{[2]}v_{[2]}+\ldots+u_{[q]}v_{[q]}.$$

Дополнительно (и это следует, в том числе, непосредственно из теоремы) имеет место неравенство

$$(u * v)_{[q]} \geqslant \max\{u_{[q]}, v_{[q]}\}. \tag{1}$$

Теорема 1 позволяет получить оценку значения δ_{u*v} через значения δ_u и δ_v.

Теорема 2. *Пусть $u, v \in \mathcal{P}^q$. Тогда*

$$\delta_{u*v} \leqslant \min\{(1 - v_{[q]})\delta_u, (1 - u_{[q]})\delta_v\}.$$

Доказательство. По определению, $\delta_{u*v} = (u * v)_{[1]} - (u * v)_{[q]}$. Используя неравенства из теоремы 1, оцениваем

$$\begin{aligned}\delta_{u*v} \leqslant{} & (u_{[1]}v_{[1]} + u_{[2]}v_{[2]} + \ldots + u_{[q]}v_{[q]}) - \\ & - (u_{[1]}v_{[q]} + u_{[2]}v_{[q-1]} + \ldots + u_{[q]}v_{[1]}) = \\ & = u_{[1]}(v_{[1]} - v_{[q]}) + u_{[2]}(v_{[2]} - v_{[q-1]}) + \ldots + u_{[q]}(v_{[q]} - v_{[1]}) = \\ & = (u_{[1]} - u_{[q]})(v_{[1]} - v_{[q]}) + (u_{[2]} - u_{[q-1]})(v_{[2]} - v_{[q-1]}) + \ldots\end{aligned}$$

Очевидно, что для каждого $i = 1, \ldots, q$ выполнено

$$u_{[i]} - u_{[q-i+1]} \leqslant \delta_u, \quad v_{[i]} - v_{[q-i+1]} \leqslant \delta_v,$$

поэтому

$$\delta_{u*v} \leqslant (v_{[1]} + v_{[2]} + \ldots - v_{[\lfloor (q+1)/2 \rfloor]} - \ldots - v_{[q]})\delta_u \leqslant (1 - v_{[q]})\delta_u.$$

Аналогично, $\delta_{u*v} \leqslant (1 - u_{[q]})\delta_v$, откуда вытекает утверждение теоремы. ∎

Пусть $\pi \in \mathcal{P}^q$ — некоторое начальное распределение. Построим по индукции множества распределений D_k следующим образом. Положим $D_0 = \{\pi\}$ и далее

$$D_{k+1} = \{u * v : u \in D_r, v \in D_s, \max\{r, s\} = k\}.$$

Содержательно множество D_k соответствует распределениям, которые могут быть получены из начального распределения π в результате свёртки «глубины» k.

Теорема 3. *Пусть π — начальное распределение и D_k — соответствующие множества распределений. Тогда для любого $w \in D_k$ имеет место неравенство*

$$\delta_w \leqslant (1 - \pi_{[q]})^k.$$

Доказательство. Из неравенства (1) и определения множеств D_k вытекает, что для любого $w \in D_k$ $w_{[q]} \geqslant \pi_{[q]}$. Это соотношение, неравенство из теоремы 2 и определение множеств D_k вместе позволяют получить доказываемое утверждение. ∎

Утверждение теоремы является нетривиальным только в том случае, если $\pi_{[q]} > 0$, в противном случае неравенство в теореме превращается в $\delta_w \leqslant 1$. Если же неравенство $\pi_{[q]} > 0$ выполнено, то теорема позволяет утверждать, что с ростом k величины δ_w для $w \in D_k$ стремятся к нулю, а сами распределения w при этом приближаются к равномерному распределению $(1/q, \ldots, 1/q) \in \mathcal{P}^q$, причём, в силу определения δ_w, выполнено

$$\max_i \left| w_i - \frac{1}{q} \right| \leqslant (1 - \pi_{[q]})^k.$$

Таким образом, отклонение распределения w от равномерного оценивается через «глубину» k распределения w и начальное распределение π.

Автор выражает благодарность О. М. Касим-Заде за полезные обсуждения и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

Список литературы

[1] *Şcerbacov V.* Quasigroups in cryptology // Computer Science Journal of Moldova. — 2009. — V. 17, № 2 (50). — P. 193–228.

[2] *Saloff-Coste L.* Random walks on finite groups // Probability on discrete structures. Encyclopaedia Math. Sci., 110 / Ed. H. Kesten. — Berlin: Springer, 2004. — P. 263–346.

[3] *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.

[4] *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства. Теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983.

[5] *Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G.* Inequalities. — Cambridge: University Press, 1934.

Авторский указатель

А

Абросимов М. Б. 16
Акулов Я. В. 20
Алексеев В. Б. 24
Алексеев В. Е. 28
Алехина М. А. 30, 33
Антоновская О. Г. 38
Афраймович Л. Г. 42

Б

Баркалов А. В. 46
Барсукова О. Ю. 50
Беджанова С. Р. 54
Богатырёва Ю. А. 69
Бондаренко В. А. 58
Бондаренко Л. Н. 62
Бондаренко П. П. 55
Бородина Ю. В. 67
Буй Д. Б. ... 69, 73, 77, 81, 85
Бухман А. В. 88

В

Великая Я. Г. 520
Веселов С. И. 91
Винник В. Ю. 92
Власов Н. В. 96
Власова А. В. 98
Воблый В. А. 102
Вороненко А. А. 105
Вялый М. Н. 109

Г

Гавриков А. В. 113
Гашков С. Б. 114
Глушко И. Н. 73
Городецкий С. Ю. 117
Горюнов В. И. 38
Грабовская С. М. 30, 122
Груздев Д. В. 125
Грунская В. И. 129
Гуревич Е. В. 133

Д

Дагаев Д. А. 136
Дайняк А. Б. 139
Данилов Б. Р. 277
Донец Г. А. 142
Дудакова О. С. 145
Дуничкина Н. А. 202
Дьяконов А. Г. 147

Е

Евдокимов А. А. 151, 154
Емеличев В. А. 159

Ж

Жидков А. А. 162
Жильцова Л. П. 166

З

Заботин И. Я. 169
Замараев В. А. 173
Захаров В. А. 340, 372
Захарова Д. В. 28
Золотых Н. Ю. 176
Зорин А. В. 179

И

Иорданский М. А. 183
Исаченко А. Н. 187
Исаченко Я. А. 187

К

Калинин А. В. 162, 191
Карманова Е. О. 195
Кириченко К. Д. 198
Клянчина Д. М. 33
Коган Д. И. 202
Коганов Л. М. 205
Кожухов И. Б. 207
Кожухова Ю. И. 207
Коляда С. С. 209
Комаров Д. Д. 211
Комбаров Ю. А. 215
Компан С. В. 77, 81
Коноводов В. А. 281
Константинова Е. В. 218
Копытова О. М. 222
Коротков В. В. 159
Коротков Е. В. 226, 454
Костерин В. В. 230
Кочемазов С. Е. 151
Кочергин В. В. 235
Кочкаров А. А. 239
Краснов В. М. 242
Краснова Т. И. 246
Круглов И. А. 323
Кудрявцев Е. В. 503
Кузюрин Н. Н. 250
Куимова А. С. 495
Куликова Е. А. 252
Курганский А. Н. 255

Л

Лавренченко С. А. 259
Ларионов В. Б. 263
Леонтьев В. К. 266
Лисаченко И. В. 268
Логачев О. А. 272
Ложкин С. А. 277, 281

М

Магомедов А. М. 284
Мазуров А. А. 286
Майсурадзе А. И. 290
Максименко А. Н. 294
Малышев Д. С. 297
Маркелов Н. К. 301
Мартынов И. М. 166
Матов Д. О. 303
Махина Г. А. 307
Медведев А. Н. 218
Мельников Б. Ф. 311
Мерекин Ю. В. 315
Минаев Д. В. 495
Михайлович А. В. 319
Мишулина О. А. 323
Мокеев Д. Б. 327
Морозов Е. В. 330
Мубаракзянов Р. Г. 334

Н

Нагорный А. С. 336
Николаев А. В. 58
Новикова Т. А. 340
Нурутдинова А. Р. 344

О

Омаров Р. Р. 24
Отпущенников И. В. 151

П

Панин Д. Ю. 349
Пантелеев В. И. 352
Панюков А. В. 355
Панюкова Т. А. 355
Парфирова Т. С. 92
Пережогин А. Л. 154
Перязев Н. А. 359

Петренюк В. И. 363
Подловченко Р. И. 368
Подымов В. В. 372
Потапов В. Н. 376
Пряничникова Е. А. 380
Пузикова А. В. 85

Р

Рачинская М. А. 508
Ревякин А. М. 384
Резников М. Б. 388
Романов А. М. 392
Романов Д. С. .. 330, 396, 400
Рублев В. С. 403, 408

С

Садовников О. А. 412
Сапоженко А. А. 416
Сапунов С. В. 419
Саргсян В. Г. 422
Сафонова Я. Ю. 426
Селезнева С. Н. 430
Семенов А. А. 151
Сенникова Л. И. 239
Сергеев И. С. 114
Сидоров С. В. 434
Слободской В. В. 437
Смирнов А. В. 403, 441
Смирнова Е. А. 408
Смирнова Т. Г. 445
Сморкалов М. Е. 556
Смышляев С. В. 272
Стецюк П. И. 449
Суворова Ю. М. 454
Сумин В. И. 268, 457
Сумин М. И. 162, 191, 461

Т

Тарасов С. П. 109
Тарасова В. П. 465
Татаринов Е. А. 469
Твердохлебов В. А. 473
Тихончев М. Ю. 129
Трифонова Е. Е. 477
Трушников М. А. 481
Трущин Д. В. 484
Тюхтина А. А. 191
Тяпаев Л. Б. 133

У

Улесова А. Ю. 487

Ф

Федоряева Т. И. 491
Федосенко Ю. С. 202, 495
Федоткин А. А. 512
Федоткин А. М. 499
Федоткин М. А. .503, 508, 512

Х

Хамисов О. В. 516
Хачатрян В. Е. 520
Хелемендик Р. В. 523

Ц

Цветков А. И. 388

Ч

Черепов А. Н. 527
Чернов А. В. 530
Чирков А. Ю. 176
Чистиков Д. В. 105
Чокаев Б. В. 534

Ш

Шалагин С. В. 344, 539
Шаранхаев И. К. 543
Шарапова М. Л. 62

Шарифов Я. А. 545
Шатохина Н. К. 548
Шевченко В. И. 552
Шевченко В. Н. 554, 556
Шевченко Г. В. 560
Шелухин Д. С. 564
Шестакова Н. В. 46
Шиганов А. Е. 568
Шоломов Л. А. 570
Шульгина О. Н. 169
Шуплецов М. С. 573

Я

Яшунский А. Д. 577
Ященко В. В. 272

Проблемы теоретической кибернетики

Материалы XVI Международной конференции

(Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.)

Оформление обложки: А. А. Пережогин

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл.-изд. л. 34,2. Усл. печ. л. 33,6. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского,
603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23.

Редакционно-издательское управление (РИУ)
Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского,
603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23.