УДК 519.854.3

# О сложности решения одного класса задач целочисленного линейного программирования

Н. Ю. Золотых

**Аннотация**

Рассматривается задача о рюкзаке, в которой множество допустимых значений $M$ вычисляется с использованием оракула, отвечающего на вопрос “$x \in M$?”. Установлены нижние оценки числа обращений к оракулу. Предлагаемые оценки близки к известным верхним оценкам.

## Введение

Рассматривается известная задача о рюкзаке с двусторонними ограничениями: найти

$$\max \{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \mid \mathbf{x} \in M\}, \tag{1}$$

где

$$M = \{\mathbf{x} \in B(n,k) \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \le a_0\}, \tag{2}$$

$$B(n,k) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^n \mid 0 \le x_j \le k-1 \ (j = 1, \dots, n)\}, \tag{3}$$

$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$, $a_0 \in \mathbf{Z}$, $k \ge 2$, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^n c_j x_j$.

В статье исследуется задача (1)–(3) при условии, что $M$ вычисляется с использованием оракула, отвечающего на вопрос “$x \in M$?”, где $x$ — точка, выбираемая из $B(n,k)$. Естественной мерой сложности алгоритма, решающего поставленную задачу, является число обращений к оракулу в худшем случае.

В разделе 1 мы рассматриваем алгоритм $\mathcal{A}_0$ из [9], решающий поставленную задачу. Этот алгоритм использует не более $c_n \log^n k$ обращений к оракулу,[1] где величина $c_n$ зависит только от $n$. Для частного случая $n = 2$ предлагается алгоритм $\mathcal{A}_1$, использующий не более $6\log(k-1)+4$ обращений к оракулу.

В разделе 2 даны нижние оценки числа обращений к оракулу, совершаемых наилучшим алгоритмов в худшем случае. Оценка, основанная на мощностных соображениях, имеет вид $n \log k$. При $n = 2$ эта оценка близка к верхней оценке сложности алгоритма $\mathcal{A}_1$. Основным результатом статьи является нижняя оценка $c_n \log^{n-2} k$, где $c_n$ — некоторая положительная величина, зависящая только от $n$. При фиксированном $n$ эта оценка по порядку близка к верхней оценке сложности алгоритма $\mathcal{A}_0$.

В разделе 3 рассматривается булева задача о рюкзаке ($n = 2$).

Используемый в статье подход для получения нижних оценок, основан на идеях работы [5]. Нижние оценки сложности оракульных алгоритмов для задач оптимизации на системах независимости и задач о неподвижной точке рассмотрены в [11]. Оракульная сложность порядковой оптимизации на булевом кубе рассмотрена в [7].

[1] Всюду $\log x$ обозначает $\log_2 x$.

## 1. Верхние оценки сложности

Обозначим через $\mathcal{M}(n,k)$ множество всех допустимых областей $M$, удовлетворяющих условию (2). Следующую задачу обозначим через $\mathcal{P}_0$: "Для заданных целых $n \geq 2$, $k \geq 2$ и $c_1, \ldots, c_n$ с помощью обращений к оракулу определить, является ли пустым множество $M$, и если нет, найти максимум (1)". Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый алгоритм, решающий задачу $\mathcal{P}_0$. Обозначим через $\tau(\mathcal{A}, n, k)$ и $\rho(\mathcal{A}, n, k)$ соответственно максимальное число обращений к оракулу и максимальное число арифметических операций, совершаемых алгоритмом $\mathcal{A}$, если максимум берется по всем возможным $\mathbf{c} \in \mathbf{Z}^n$ и $M \in \mathcal{M}(n,k)$. Пусть $\alpha = \max\{k, c_1, \ldots, c_n\}$.

**Теорема 1.** [8, 12] *Существует такой алгоритм $\mathcal{A}_0$ решения задачи $\mathcal{P}_0$, что при всех $n \geq 2$ и $k \geq 2$ справедливы неравенства*

$$\tau(\mathcal{A}_0, n, k) \leq c_n \log^n k \quad \text{и} \quad \rho(\mathcal{A}_0, n, k) \leq c'_n \log^{c''_n} \alpha,$$

*где величины $c_n$, $c'_n$, $c''_n$ зависят только от $n$.*

Алгоритм $\mathcal{A}_0$, решающий задачу $\mathcal{P}_0$, был впервые описан в работе [8] (см. также [9], приложение 4, лемма 7). Было показано, что при каждом фиксированном $n$ величины $\tau(\mathcal{A}_0, n, k)$ и $\rho(\mathcal{A}_0, n, k)$ ограничены сверху некоторыми полиномами от $\log k$ и $\log \alpha$ сответственно. Более точная оценка сложности алгоритма $\mathcal{A}_0$, имеющая вид $\tau(\mathcal{A}_0, n, k) \leq c_n \log^n k$, неявно содержится в [12] (см. также [2], где рассматривается более общий случай).

Заметим, что известны процедуры, решающие более общую задачу. В [4, 13] предложены алгоритмы, которые находят все вершины множества $M$, используя при этом не более $c_n \log^n k$ обращений к оракулу и полиномиальное от $\log k$ число арифметических операций ($n$ фиксировано). Нетрудно видеть, что при фиксированном $n$ точка, максимизирующая целевую функцию (1) на множестве $M$, может быть выбрана из множества всех вершин за полиномиальное от $\log \alpha$ число арифметических операций.

Положив $n = 2$, получим частный случай $\mathcal{P}_1$ задачи $\mathcal{P}_0$.

**Теорема 2.** *Существует такой алгоритм $\mathcal{A}_1$ решения задачи $\mathcal{P}_1$, что при каждом $k \geq 2$ справедливы неравенства*

$$\tau(\mathcal{A}_1, 2, k) \leq 6\log(k-1) + 4 \quad \text{и} \quad \rho(\mathcal{A}_1, 2, k) \leq c \log^2 \alpha,$$

*где $c$ — некоторая постоянная величина.*

Алгоритм $\mathcal{A}_1$ основан на алгоритме из [3], который при $n = 2$ находит все вершины множества $M$ с использованием не более $6\log(k-1)+4$ обращений к оракулу и не более $c' \log^2 k$ арифметических операций. Точка, максимизирующая целевую функцию (1) на множестве $M$, может быть выбрана из множества всех вершин с использованием не более $c'' \log \alpha$ арифметических операций.

## 2. Нижние оценки сложности

Из мощностных соображений получается следующая нижняя оценка сложности задачи $\mathcal{P}_0$.

**Утверждение 1.** *Для произвольного алгоритма $\mathcal{A}$, решающего задачу $\mathcal{P}_0$, при всех целых $n \geq 2$, $k \geq 2$ справедливо неравенство*

$$\tau(\mathcal{A}, n, k) \geq n \log k.$$

Почти очевидно следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** *Для любого $\mathbf{x}' \in B(n,k)$ найдутся $a_0 \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^n$ и $\mathbf{c} \in \mathbf{Z}^n$ такие, что $\mathbf{x}'$ — единственное решение задачи $\mathcal{P}_0$.*

Для доказательства леммы положим

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} = (k^{n-1}, k^{n-1} + k^{n-2}, \ldots, k^{n-1} + \ldots + 1), \quad a_0 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}' \rangle.$$

Индукцией по $n$ легко проверяется, что если $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(n,k)$, то $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \neq \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$. Отсюда следует утверждение леммы.

Для доказательства утверждения 1 рассмотрим произвольное *дерево решений* задачи $\mathcal{P}_0$, т. е. корневое бинарное дерево со следующими свойствами:

- каждая неконцевая вершина помечена некоторым $\mathbf{x} \in B(n,k)$;
- из каждой неконцевой вершины выходит 2 ребра, помеченных числами $0, 1$;
- каждый лист помечен некоторым $\mathbf{x} \in B(n,k)$;
- для любой внутренней вершины $v$, любого выходящего из него ребра $r$ и любого листа $w$, в который из $v$ через $r$ ведет путь, выполняется неравенство $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq a_0$, если метка ребра 1, или обратное неравенство, если метка ребра 0.

На дерево решений можно смотреть как на описание некоторого алгоритма $\mathcal{A}$ решения задачи $\mathcal{P}_0$ при заданных $n$, $k$, $\mathbf{c}$. Очевидно, высота дерева совпадает с $\tau(\mathcal{A}, n, k)$, и по лемме 1 число листьев не меньше числа элементов в $B(n,k)$. Воспользовавшись известной нижней оценкой высоты бинарного дерева, получаем, что $\tau(\mathcal{A}, n, k) \geq \log |B(n,k)| = n \log k$. Утверждение доказано.

Для каждого целого $\Delta \geq 2$ определим множество

$$\Phi(n, \Delta) = \{(a_0, \mathbf{a}) = (a_0, \ldots, a_{n-1}, 1) \mid 0 \leq a_j \leq \Delta - 1 \ (j = 0, \ldots, n-1)\}.$$

Пусть $(a_0, \mathbf{a}) \in \Phi(n, \Delta)$. Обозначим через $V(a_0, \mathbf{a}, \Delta)$ множество вершин выпуклой оболочки множества решений системы

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j + x_j \equiv a_0 \,(\mathrm{mod}\,\Delta), \quad x_j \in \mathbf{Z}, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1 \ldots n). \tag{4}$$

В [1] (см. также раздел 3.5 в [9]) установлена верхняя оценка для среднего числа вершин

$$\varphi(n, \Delta) = \Delta^{-n} \sum_{(a_0, \mathbf{a}) \in \Phi(n, \Delta)} |V(a_0, \mathbf{a}, \Delta)|.$$

**Лемма 2.** [1] *При любых целых $n \geq 2$ и $\Delta \geq 2$ справедливо неравенство*

$$\varphi(n,\Delta) \geq c_n \Big(\log \Delta - n - 2 - n \log(n-1)\Big)^{n-1},$$

*где* $c_n = \Big(4n3^n(n-1)^{n-1}\big((n-1)!\big)^2\Big)^{-1}$.

Обозначим через $N(a_0, \mathbf{a})$ множество вершин выпуклой оболочки неотрицательных целочисленных решений уравнения $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = a_0$. Используя лемму 2, докажем следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.** *При любых целых $n \geq 3$ и $\gamma \geq 2$ найдутся $a_0 \in \mathbf{Z}$ и $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$ такие, что $0 < a_j < \gamma$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и*

$$|N(a_0, \mathbf{a})| \geq c_{n-1} \left(\frac{1}{2} \log \gamma - n - 3 - (n-1) \log(n-2)\right)^{n-2},$$

*где $c_n$ — величина, определенная в лемме 2.*

Пусть $(a_0, \mathbf{a}) = (a_0, \ldots, a_{n-1}, \Delta)$, где

$$\Delta(\Delta - 1) \leq a_0 \leq \Delta^2 - 1, \quad 0 \leq a_j \leq \Delta - 1 \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

По теореме 3.35 из [9] имеем $N' \subseteq N(a_0, \mathbf{a})$, где $N'$ — множество вершин выпуклой оболочки целочисленных решений системы

$$a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + \Delta x_n = a_0, \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Легко видеть, что $N'$ взаимно однозначно отображается в множество вершин выпуклой оболочки неотрицательных решений сравнения

$$a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} \equiv a_0 \pmod{\Delta},$$

или ему эквивалентного

$$a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} \equiv a_0 - \Delta(\Delta - 1) \pmod{\Delta}. \tag{5}$$

Для завершения доказательства леммы осталось сравнить (5) с (4), положить $\gamma = \Delta^2$ и воспользоваться леммой 2.

**Теорема 3.** *При любых целых $n \geq 3$, $k \geq 2$ и для произвольного алгоритма $\mathcal{A}$, решающего задачу $\mathcal{P}_0$, справедливо неравенство*

$$\tau(\mathcal{A}, n, k) \geq c_{n-1} \left(\frac{1}{2} \log k - n - 3 - (n-1) \log(n-2)\right)^{n-2},$$

*где $c_n$ — величина, определенная в лемме 2.*

Положим $\gamma = k$ и рассмотрим задачу максимизации целевой функции (1), если

$$M = \{\mathbf{x} \in B(n,k) \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq a_0 - 1\},$$

$a_0$, $a$ — величины, существование которых утверждается в лемме 3, и $c = a$. Так как $1 \leq a_j \leq k - 1$, то $N(a_0, \mathbf{a}) \subseteq B(n,k)$.

Пусть $\mathbf{v} \in N(a_0, \mathbf{a})$. Тогда существуют $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^n$ и $b_0 \in \mathbf{Z}$ такие, что $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = b_0$ и $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \geq b_0 + 1$ при любом $\mathbf{x} \in N(a_0, \mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{v}\}$. Рассмотрим множество

$$M' = \left\{ \mathbf{x} \in B(n,k) \mid \langle \mathbf{a} + \beta^{-1} b, \mathbf{x} \rangle \leq a_0 + \beta^{-1} b_0 \right\},$$

где

$$\beta = \max \left\{ 2(k-1) \sum_{j=1}^{n} |b_j|,\ 2|b_0| \right\}.$$

Так как $b \neq 0$, то $\beta > 0$. Покажем, что $M' = M \cup \{\mathbf{v}\}$. Действительно, при любом $\mathbf{x} \in M$ имеем

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + \beta^{-1} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \leq a_0 - 1 + \beta^{-1}(k-1) \sum_{j=1}^{n} |b_j| \leq a_0 - \frac{1}{2} \leq a_0 + \beta^{-1} b_0.$$

Далее,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle + \beta^{-1} \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = a_0 + \beta^{-1} b_0.$$

И, наконец, при любом $\mathbf{x} \in B(n,k) \setminus (M \cup \{\mathbf{v}\})$ имеем

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + \beta^{-1} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \geq a_0 + \beta^{-1}(b_0 + 1) > a_0 + \beta^{-1} b_0.$$

Таким образом, $M' = M \cup \{\mathbf{v}\}$. Так как $\langle \mathbf{c}, \mathbf{v} \rangle = a_0 > \max \{ \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \mid \mathbf{x} \in M \}$, то, очевидно, любой алгоритм, решающий задачу $\mathcal{P}_0$ с областью допустимых значений $M$ и вектором целевой функции $c = a$, обратится к оракулу в точке $\mathbf{v}$. Доказываемое неравенство теперь следует из леммы 3.

Заметим, что доказательство теоремы 3 легко переносится на специальный случай задачи $\mathcal{P}_0$, когда в (2) выполнены неравенства $a_j \geq 0$ и $c_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, и на случай, когда $a_j \geq 0$ и $c_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ и

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}.$$

# 3. Булева задача о рюкзаке

Рассмотрим частный случай $\mathcal{P}_2$ задачи $\mathcal{P}_0$, положив $k = 2$.

**Утверждение 2.** *Для произвольного алгоритма $\mathcal{A}$, решающего задачу $\mathcal{P}_2$, $\tau(\mathcal{A}, n, 2) = 2^n$.*

Пусть $M = \emptyset$. Для того, чтобы определить, содержится ли в $M$ хотя бы одна точка, произвольный алгоритм, решающий задачу $\mathcal{P}_2$, должен обратиться к оракулу в каждой точке $B(n, 2)$. Утверждение доказано.

В заключение рассмотрим специальный случай $\mathcal{P}_3$ задачи $\mathcal{P}_2$, если в (1)–(3)

$$c_j \geq 0, \quad a_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Пусть $\mathcal{A}$ — алгоритм, решающий задачу $\mathcal{P}_3$. Обозначим через $\tau'(\mathcal{A}, n)$ максимальное число обращений к оракулу, совершаемых алгоритмом $\mathcal{A}$, если максимум берется по всем возможным $c$ и $M$, удовлетворяющим условиям (2), (6). Для решения задачи $\mathcal{P}_3$ можно использовать алгоритм $\mathcal{A}_2$ из [6], решающий (более общую) многомерную булеву задачу о рюкзаке: найти $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \mid \mathbf{x} \in M\}$, где

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in B(n,2) \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_{i0} \ (i = 1, 2, \ldots, m) \right\},$$

$c_j, a_{ij} \ge 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, n)$. Алгоритм $\mathcal{A}_1$ использует не более $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$ обращений к оракулу. Доказательство следующего утверждения неявно содержится в [6] (ср. [10]).

**Утверждение 3.** *Для произвольного алгоритма $\mathcal{A}$, решающего задачу $\mathcal{P}_3$, справедливо неравенство*

$$\tau'(\mathcal{A}, n) \ge \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + 1.$$

Утверждение может быть доказано с использованием того же метода, что и при доказательстве теоремы 3. Рассмотрим булеву задачу о рюкзаке с входными данными

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in B(n,2) \mid \sum_{j=1}^{n} x_j \le \lfloor n/2 \rfloor - 1 \right\}$$

и $c_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Нетрудно видеть, что $|N(\lfloor n/2 \rfloor, \mathbf{a})| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, где $a_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Далее можно повторить рассуждения из доказательства теоремы 3.

Автор благодарит В. Н. Шевченко, С. И. Веселова и В. А. Таланова за полезные обсуждения.

## Список литературы


[1] Веселов С. И. Нижняя оценка среднего числа неприводимых и крайних точек в двух задачах дискретного программирования / Деп. в ВИНИТИ. № 2 В619-84. М., 1984.

[2] Золотых Н. Ю. О пороговых и близких к ним функциях, заданных в целочисленных точках политопа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 2. С. 40–54.

[3] Золотых Н. Ю. Пороговые функции, зависящие от двух переменных: сложность расшифровки и мощность разрешающего множества // Материалы Четвертой молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18–23 сентября 2000 г.). М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2000. С. 48–54.

[4] Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н. Расшифровка пороговых функций $k$-значной логики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 18–23.

[5] Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н. О нижней оценке сложности расшифровки пороговых функций $k$-значной логики // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1999. Т. 39, № 2. С. 346–352.

[6] Смирнов А. Н. О сложности одного класса задач булева программирования // Сообщения ВЦ АН. Вып. 10. М.: ВЦ АН СССР, 1978.

[7] Соколов Н. А. Оракульная сложность порядковой оптимизации на булевом кубе // Комбинаторные модели и методы. Вып. 2. М.: ВЦ РАН, 1997. С. 85–90.

[8] Шевченко В. Н. О расшифровке пороговой функции многозначной логики // Комбинаторно–алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1987. С. 155–163.

[9] Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.

[10] Hausmann D., Kannan R., Korte B. Exponential lower bounds on a class of knapsack algorithms // Mathematics of Operations Research. 1981. V. 6., No 2. P. 225–232.

[11] Hausmann D., Korte B., Lower bounds on the worst-case complexity of some oracle algorithms // Discrete Mathematics. 1978. V. 24, No 3. P. 261–272.

[12] Hegedüs T. Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc. of the 7th annual ACM conference on computational learning theory (COLT'94). New York: ACM Press, 1994. P. 228–236.

[13] Hegedüs T. Generalized teaching dimensions and the query complexity of learning // Proc. of the 8th annual ACM conference on computational learning theory (COLT'95). New York: ACM Press, 1995. P. 108–117.

Адрес автора:

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Факультет вычислительной математики и кибернетики
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
zny@uic.nnov.ru

Статья поступила
27 марта 2003 г.