О фальшивом правиле из Арїѳме́тїки Л.Ф. Магницкого*

Н.Ю. Золотых

Версия 1: 18 июля 2008 г.

Аннотация

Настоящую заметку можно рассматривать как научно-популярную статью о фальшивом правиле в Арифметике Л.Ф. Магницкого. Вместе с тем, некоторые мои изыскания, возможно, будут интересны профессионалам в области истории математики. Мною замечены два любопытных обстоятельства, которые упустил из виду в своем исследовании Д.Д. Галанин. В частности, установлено, что Арифметика содержит не только правило двух ложных положений, как утверждает Д.Д. Галанин, но и правило одного положения.

На обороте 151-го листа (рн҃а) известнейшей Арифметики Л.Ф. Магницкого [1] можно встретить такую задачу:

Вопросѝ нѣ́кто оу҆чи́телѧ нѣ́коего глаго́лѧ : повѣ́ждь ми коли́кѡ и҆́маши оу҆ченикѡ́въ оу҆ себѐ во ꙋчи́лищи , поне́же и҆́мамъ сы́на ѿда́ти во ꙋчи́лище : и҆ хощꙋ̀ оу҆вѣ́дати ѡ҆ числѣ̀ оу҆ченикѡ́въ твои́хъ . оу҆чи́тель же ѿвѣща́въ речѐ є҆мꙋ̀ : а҆́ще при́детъ ми оу҆ченикѡ́въ толи́ко же , є҆ли́ко и҆́мамъ , и҆ полтоли́ка , и҆ четве́ртаѧ ча́сть , є҆ще́ же и҆ тво́й сы́нъ , и҆ тогда̀ бꙋ́детъ оу҆ менѐ оу҆ченикѡ́въ 100 : вопроси́вый же оу҆ди́вилсѧ ѿвѣ́тꙋ є҆гѡ̀ ѿи́де , и҆ нача́тъ и҆з҆ѡбрѣта́ти чрѐ сїю̀ наꙋ́кꙋ си́це :

Спросил некто учителя некоего, говоря: «Поведай мне, сколько имеешь учеников в классе, так как имею сына отдать в класс и хочу узнать о числе учеников твоих». Учитель, отвечая, говорил: «Если придет ко мне учеников столько же, сколько имею, и полстолько и четвертая часть и еще твой сын, то будет у меня учеников 100». Спрашивающий удивился ответу его, отойдя, и начал изыскивать через сию науку так: [. . .]

На языке алгебры задача сводится к решению простого линейного уравнения, но вот как решает ее Магницкий:

Пе́рвое положе́нїе :

24
24
12
6
1
67 — : — 33

Второ́е положе́нїе:

32
32
16
8
1
89 — : — 11

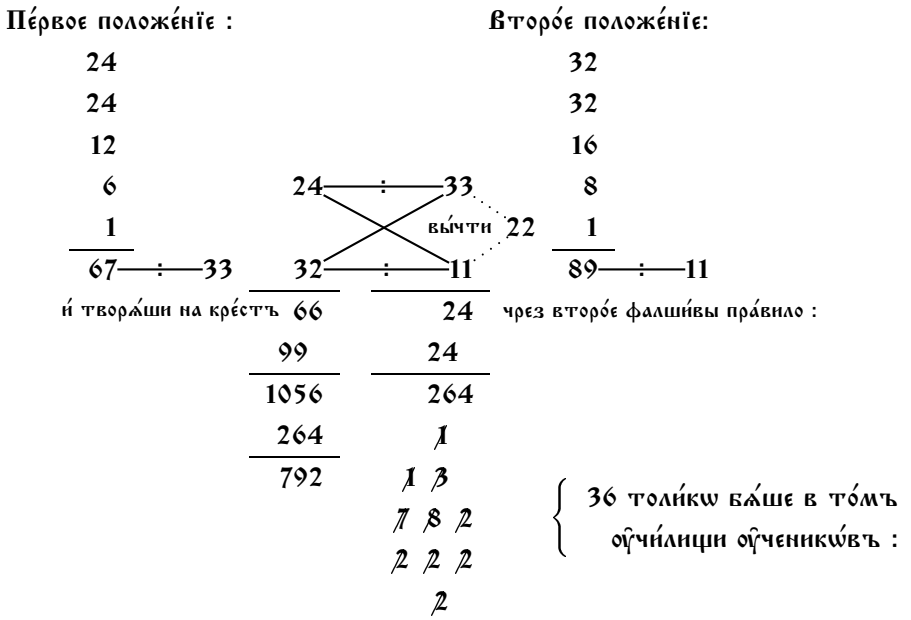
24 — : — 33
вы́чти 22
32 — : — 11

и́ творѧ́ши на кре́стъ 66
99
1056
264
792

24
24
264
~~1~~
~~1~~ ~~3~~
~~7~~ ~~8~~ ~~2~~
~~2~~ ~~2~~ ~~2~~
~~2~~

чрез второ́е фалши́вы пра́вило :

36 толи́кѡ бѧ́ше в то́мъ оу҆чи́лищи оу҆ченикѡ́въ :



Вычиления, приводимые Магницким, означают следующее. Предположим, что в классе 24 ученика. Это первое (пред)положение. Выполняя с этим числом указанные в формулировке задачи действия — еще столько и полстолько и четвертая часть и еще один — получим (см. первый столбец, озаглаленный «**пе́рвое положе́нїе**»)

$$24 + 24 + \frac{24}{2} + \frac{24}{4} + 1 = 67,$$

а должны получить 100. Ошибка составляет $100 - 67 = 33$.

*Использовались шрифты из пакета HIPTEX Александра Воинова.

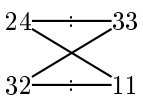
Теперь предположим, что в классе 32 ученка. Это первое (пред)положение. Выполняя с этим числом указанные действия (см. столбец, озаглаленный «**второ́е положе́нїе**»), получим

$$32 + 32 + \frac{32}{2} + \frac{32}{4} + 1 = 89.$$

Теперь ошибка составляет $100 - 89 = 11$.

Оказывается, что по этим двум ложным («фальшивым») (пред)положениям можно точно восстановить искомое число. Записываем высказанные предположения и соответсвующие им ошибки крестом:

$$\begin{array}{ccc} 24 & \div & 33 \\ & \times & \\ 32 & \div & 11 \end{array}$$



Находим произведения чисел, стоящих накрест: $24 \cdot 11 = 264$ и $33 \cdot 32 = 1056$. Делим разность этих чисел на разность ошибок: $(1056 - 254)/(33 - 11) = 36$. Это и есть искомое число. В классе 36 учеников. Способ, которым решена задача, называется *фальшивым*, *гадательным*, или *ложным правилом*.

Нетрудно видеть, что фальшивое правило представляет собой замаскированное решение линейного уравнения

$$ax + b = c. \tag{1}$$

На языке алгебры правило можно сформулировать так. Берем некоторый x_1 и проверяем, не является ли он решением. Если нет, то находим ошибку $r_1 = c - (ax_1 + b)$. Аналогично, берем некоторый x_2, отличный от x_1, и проверяем, не является ли он решением. Если нет, то находим ошибку $r_2 = c - (ax_2 + b)$. Теперь решение можно найти так:

$$x = \frac{r_1 x_2 - r_2 x_1}{r_1 - r_2} \tag{2}$$

Эту формулу легко проверить подстановкой в уравнение (1).

Фальшивому правилу в Арифметике уделена вся четвертая часть «**Ѡ правилахъ фалшивыхъ, или гадателных**» первой книги. Вот как она начинается.

Сїѧ̀ ча́сть ариѳме́тїки , и҆ме́т дѣ́йство чрез сїѧ̀ фалши́ваѧ пра́вила , си́рѣчь не и҆́стиннаѧ положе́нїѧ , занѐ чрез̾ два̀ не и҆́стиннаѧ положе́нїѧ и҆з̾ѡбрѣта́етъ са́мое ѻ҆́но жела́емое и҆́стинное число̀, є҆гѡ́же не вѣ́дꙋще , полага́емъ на примѣ́ръ и҆на́ѧ чи́сла , а҆ полага́ем ѧ̀ двократнѡ , и҆ в̾ є҆ди́номъ положе́нїи ѡ҆скꙋдѣвле́~ число̀ и не дохо́дить и҆ско́мыхъ чи́слъ и҆́стиннагѡ положе́нїѧ , а҆ в̾ дрꙋго́мъ положе́нїи превосхо́дитъ и҆ско́магѡ , и҆ чрез̾ ѻ҆́наѧ ра́знства по нижеобьѧвле́нной наꙋ́кѣ ѡ҆брѣта́етсѧ и҆ско́мое .

Сия часть арифметики дело с фальшивым правилом, т. е. не истинным положением, с помощью двух не истинных положений находит желаемое истинное число, его же не зная, полагаем, например, другие числа, а полагаем так дважды, и в одном положении оскудевает число и не доходит искомых чисел истинного положения, а в другом положении превосходит, или в обоих оскудевает, или превосходит искомого, и через эти разницы по нижеописанной науке находится искомое.

В Арифметике не рассматриваются отрицательные числа, поэтому правил ложного положения у Магницкого три: они соответствуют случаям, когда, переходя на алгебраический язык, 1) обе ошибки отрицательны, 2) обе ошибки положительны, 3) ошибки имеют разный знак. В разобранном примере используется второе правило. Все три варианта Магницкий вначале рассматривает на одном и том же примере:

Иска́телно є́сть число̀ , є҆мꙋ́же а҆́ще приложи́тсѧ є҆ди́на тре́ть , и҆ о~ сложе́ннагѡ вы́чтетсѧ є҆ди́на шеста́ѧ ча́сть , ѡ҆ста́нетсѧ 100;

Ищется число. Если к нему прибавить его треть и от суммы вычесть одну шестую часть, то останется 100.

После такого описания каждого правила рассматривается 39 задач, разбитых на 3 «статьи». Задача о числе учеников — это 3-я задача первой статьи.

Фальшивое правило, которые мы только что рассмотрели, можно назвать *правилом двух ложных положений*. Именно так оно называлось во многих западно-европейских учебниках тех времен и более поздних российских руководствах. Однако помимо этого правила было популярным *правило одного ложного положения* [3, С. 104]. В Арифметике Магницкого мы не встретим такого термина и это правило Магницкий явно не описывает. Но стоит отметить следующее. Почти все упомянутые 39 задач решены не одним, а двумя или даже тремя способами. При этом обычно второй (и третий) способ решения использует тройное правило, что по существу (при таком способе решения) совпадает и по логике, и с технической точки зрения с правилом одного ложного положения.

Таким образом, хотя такого термина в Арифметике Магницкого нет, но по существу правило одного ложного положения там присутствует[1].

Вот как, например, решается этим правилом задача о числе учеников в классе[2].

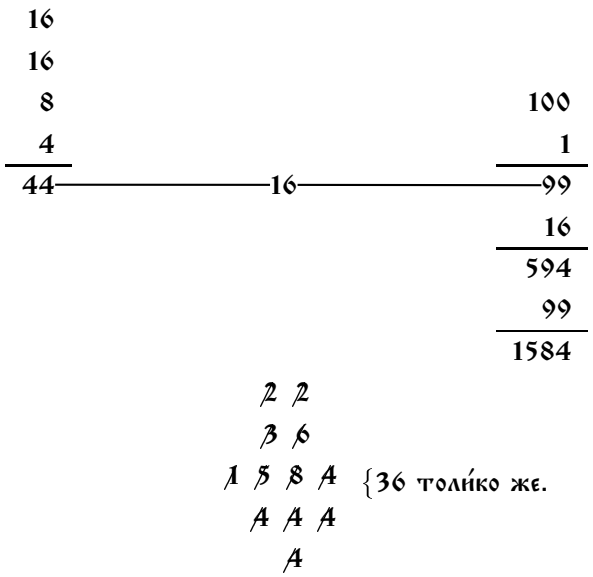
[1] Д.Д. Галанин, по-видимому, не заметил этого обстоятельства, утверждая, что «у Магницкого излагается только правило двух положений» [3, С. 109].

[2] Для этой задачи Магницкий дает три способа решения. Второй и третий основаны на правиле одного ложного положения. Мы приводим третий способ.

Па́ки ѡ҆ то́мже и҆́накѡ :

16		
16		
8		100
4		1
44	16	99
		16
		594
		99
		1584

$$\begin{array}{cccc} \cancel{2} & \cancel{2} & & \\ \cancel{3} & \cancel{6} & & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{8} & \cancel{4} \\ \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & \\ & \cancel{4} & & \end{array} \quad \{\text{36 толи́ко же.}$$



В современном изложении этот способ решения выглядит так. Предположим, что в классе 16 учеников, тогда

$$16 + 16 + \frac{16}{2} + \frac{16}{4} = 44,$$

а нужно получить 99. Составляем пропорцию

$$\frac{16}{x} = \frac{44}{99},$$

откуда $x = 36$.

Задача. Почему следующее рассуждение «не работает»? Предположим, что в классе 16 учеников, тогда

$$16 + 16 + \frac{16}{2} + \frac{16}{4} + 1 = 45,$$

а нужно получить 100. Составляем пропорцию

$$\frac{16}{x} = \frac{45}{100},$$

откуда $x = 35\frac{5}{9}$.

Понятно, что способ одного ложного положения есть замаскированное решение уравнения

$$ax = c.$$

Пусть x_1 — некоторое пробное число. Произведение ax_1 обозначим через c_1. Очевидно, что решение теперь можно найти по формуле

$$x = \frac{cx_1}{c_1}.$$

Хотя, как мы выяснили, в Арифметике Магницкого есть правило одного ложного положения, но ему уделяется гораздо меньше внимания, чем правилу двух положений. Объясняется это, наверное, тем, что первый из этих методов имеет меньшую область приложимости. Все, что можно решить правилом одного положения можно решить правилом двух положений, но не наоборот. С другой стороны, правило одного положения, если оно применимо, приводит к более короткому и прозрачному решению и, в отличие от правила двух положений, может быть объяснено без привлечения алгебраических методов. Замысел Магницкого, мне видится, заключался в следующем: дать подробное описание правила двух ложных положений, как основного, приложимого во многих случаях, но также дать сведения и о правиле одного положения как факультативном методе, который можно применять, обосновывая его применение простыми рассуждениями.

Фальшивое правило можно использовать для решения не только одного линейного уравнения, но и для системы таких уравнений. В этом случае нужно подобрать два таких положения, которые удовлетворяют всем уравнениям, кроме одного. Тогда на основе формулы (2) мы получаем истинное значение искомой переменной, причем в качестве x можно выбирать любую переменную. На обороте 162-го листа (**рѯ҃б**) мы встречаем следующую задачу:

Кꙋплено 80 фꙋнтwвъ разли́чныхъ зе́лїй , шафра́на , гвозди́ки , и҃мбира҆ , дано҆ 168 гри́венъ , цѣна҆ шафра́на по 7 гри́вен фꙋнт , а҆ гвозди́ки по 5 а҆лты́нъ , и҃мбира҆ же по гри́внѣ , но гвозди́ки бы́ло в҃ дво́е при и҃мбирѣ , и҃ вѣ́дательнw ѣ́сть , коли́кw ко́егw зе́лїа҃ wсо́бнw фꙋ́нтовъ ; при́детъ : гвозди́ки $46\frac{2}{17}$ фꙋ́нта : а҆ и҃мбира҆ $23\frac{1}{17}$ фꙋ́нта , шафра́на же $10\frac{14}{17}$ фꙋ́нта, а҆ и҃зwбрѣта́й си́це : вомѝ гводи́ки в҃ дво́е проти и҃мбира҆ , и҃ шафра́на проти гвозди́ки , и҃ ѹ҆множа́й на wсо́бныа҃ и҃хъ цѣ́ны :

Куплено 80 фунтов различных зелий: шафрана, гвоздики, имбиря, дано 168 гривен, цена шафрана по 7 гривен фунт, а гвоздики по 5 алтын, имбиря же по гривне, но гвоздики было вдвое больше, чем имбиря, и спрашивается, сколько какого зелья отдельно в фунтах; будет: гвоздики $46\frac{2}{17}$, а имбиря $23\frac{1}{17}$ фунта, шафрана же $10\frac{14}{17}$ фунта, а изыскивай так: возьми гвоздики вдвое больше чем имбиря, и шафрана вдвое больше чем гвоздики, и умножай отдельно на их цены: [. . .]

Если обозначить x — вес гвоздики в фунтах, y — имбиря, z — шафрана, то условия задачи запишутся в виде линейной системы

$$\begin{cases} x + y + z = 80, \\ 15x + 10y + 70z = 1680, \\ x = 2y, \end{cases}$$

но мы решим задачу фальшивым правилом. Полагаем, что купили гвоздики 40 фунтов, т. е. $x_1 = 40$, имбиря тогда должно быть $40/2 = 20$, а шафрана $80 - 40 - 20 = 20$. Тогда общая стоимость равна $40 \cdot 15 + 20 \cdot 10 + 20 \cdot 70 = 2200$ (копеек), что больше 1680 на 520, т. е. $r_1 = 520$.

Далее полагаем, что купили гвоздики 32 фунта, т. е. $x_2 = 32$, имбиря тогда должно быть $32/2 = 16$, а шафрана $80 - 32 - 16 = 32$. Тогда общая стоимость равна 2880 копеек, что больше 1680 на 1200, т. е. $r_2 = 1200$.

Теперь получаем, что гвоздики куплено

$$x = \frac{520 \cdot 32 - 1200 \cdot 40}{520 - 1200} = 46\frac{2}{17} \text{ фунтов},$$

откуда имбиря $23\frac{1}{17}$ фунта, шафрана $10\frac{14}{17}$ фунта. Решение Магницкого по существу такое же.

Задачи 2 и 4 второй статьи — на неопределенные уравнения[3], но этого Магницкий не указывает. Вот, к примеру, задача 2, расположенная на 163-м листе (**рг҃г**).

Кꙋпи́лъ нѣ́кто на 80 а҆лты́нъ гꙋсе́й , оу҆та́тъ и҃ чи́ркошвъ , гꙋ́сѧ покꙋпа́лъ по 2 а҆лты́на , оу҆́ткꙋ по 1 а҆лты́нꙋ , чи́ркаже по трѝ де́нги , а҆ всѣ́хъ кꙋ́пленw 80 пти́цъ : и҃ вѣ́дателнw ѣ́сть коли́кw кото́рыхъ пти́цъ кꙋпи́лъ : при́детъ : 15 гꙋсе́й 35 оу҆́токъ , 30 чи́ркwвъ , а҆ и҃зwбрѣта́й си́це :

Купил некто на 80 алтын гусей, уток и чирков, гуся покупал по 2 алтына, утку — по 1 алтыну, чирка же — по 3 денги, а всех куплено 80 птиц; и ведательно есть, сколько которых птиц купил. Получим 15 гусей, 35 уток, 30 чирков, а изобретай так: [. . .]

Задача сводится к решению системы (в целых неотрицательных числах — по смыслу задачи)

$$\begin{cases} x + y + z = 80, \\ 12x + 6y + 3z = 420, \end{cases}$$

но вот как ее решает Магницкий. Пусть куплено 5 гусей, 45 уток, 30 чирков — всего 80. Тогда за них заплатят $5 \cdot 12 + 45 \cdot 6 + 30 \cdot 3 = 420$ денег, а должно быть 80 алтын, т. е. 480 денег. Ошибка равна 60 денег (**«и҃ тꙋ́т ма́ло»**).

Теперь предположим, что куплено 20 гусей, 30 уток, 30 чирков. Тогда за них заплатят $20 \cdot 12 + 30 \cdot 6 + 30 \cdot 3 = 510$ денег. Ошибка равна $(-)30$ денег (**«но́ здѣ́сь мно́го»**).

По третьему фальшивому правилу получаем, что гусей должно быть

$$\frac{30 \cdot 5 + 60 \cdot 20}{60 + 30} = 15,$$

уток —

$$\frac{30 \cdot 45 + 60 \cdot 30}{60 + 30} = 35,$$

а чирков должно быть $80 - 15 - 35 = 30$. Можно проверить [3, 107 С.], что решений всего 27. Очевидно, что метод, которым пользуется Магницкий, мог привести к дробному решению.

Теперь рассмотрим четвертую задачу, расположенную на обороте 164-го листа (**рд҃д**).

Та́кожде нѣ́кто кꙋпи́лъ тре́хъ холсто́въ на 34 а҆лты́на и҃ на 4 де́нги , е҆ди́нагw по а҆лты́нꙋ а҆рши́нъ , дрꙋга́гw по 4 копе́йки , тре́тїагw по 5 копе́екъ , и҃ пе́рвагw взѧ́тъ 1 , дрꙋга́гw 2 , тре́тїегw 3 , и҃ сїѧ́ подо́бнымъ о҆́бразомъ wбрѣта́й си́це :

Также некто купил трех холстов на 34 алтына и 4 денги, одного по алтыну аршин, другого — по 4 копейки, третьего — по 5 копеек, и первого нужно взять 1, второго — 2, третьего 3 и это подобным способом изыскивай так: [. . .]

[3] Д.Д. Галанин утверждает [3, 107 С.], что все 14 задач этой статьи — на неопределенные уравнения. Но это не так: все задачи, кроме 2-й и 4-й, сводятся к системе определенных уравнений. Например, приведенная выше задача о гвоздике, имбире и шафране — это 1-я задача второй статьи.

Здесь мы имеем (неопределенную) систему из одного уравнения с тремя неизвестными

$$3x + 4y + 5z = 104.$$

Магницкий приводит только решение через тройное правило. Пусть куплено первого сукна 1 аршин, второго — 2 аршина, третьего — 3 аршина. Тогда за все заплачено $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 26$ копеек, а должно быть 104. Пробные числа 1, 2, 3 умножаются на 104 и делятся на 26. Получаем 4, 8, 12 аршин каждого сукна. Магницкий указывает это решение и не говорит о существовании других.

Правило одного ложного положения было известно уже древним египтянам [4, С. 30]. Правило двух положений заимствовано в средние века европейцами у арабов, которые, по-видиому, узнали его от китайцев [4, С. 163].

Как отмечает В.К. Беллюстин [2, С. 181], фальшивое правило вводилось во все учебники арифметики вплоть до начала XIX века и считалось важной их частью. Он отмечает две причины полного исключения (к началу XX века) фальшивого правила из курса арифметики:

> Во-первых, вывод его может быть сделан только алгебраически и, следовательно, в арифметике оно не может быть объяснено ученикам и требует от них прямого заучивания; во вторых, никакой учебник не разграничивал, какие задачи можно решать фальшивым правилом, и какихъ нельзя им решать; а, между тем, это существенно важно, потому что, если применить правило к тому, к чему оно неприменимо, то выйдет конечно, одно печальное недоразумение. На самомъ деле это правило можетъ иметь силу только для тех задачъ, где вся задача сводится к умножениям и делениям неизвестного.

Список литературы

[1] *Магницкий Л.Ф.* **Арїѳме́тїка, си́рѣчъ наꙋ́ка числи́телнаѧ**. М., 1703.

[2] *Беллюстин В.К.* Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики (Общедоступные очерки для любителей арифметики). М., 1909.

[3] *Галанин Д.Д.* Л.Ф. Магницкий и его Арифметика. Вып. 2. Арифметика-политика, или гражданcая. Вып. 3. Арифметика-логистика. М., 1914.

[4] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. 1 С древнейших времен до начала нового времени. М., 1970.