MATLAB в научных исследованиях

Лекция № 4. Линейная алгебра

Н. Ю. Золотых

ННГУ, ВМК, сентябрь–декабрь 2008

Содержание

1. Системы линейных уравнений

1.1. Векторные и матричные нормы

$$
\begin{aligned}
\|x\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}, & \|A\| &= \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},\\
\|x\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |x_j|, & \|A\|_1 &= \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,\\
\|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}, & \|A\|_2 &= \max_{i=1,\dots,n} \lambda_j(A^{\mathrm{T}}A) \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2},\\
\|x\|_\infty &= \max_{j=1,\dots,n} |x_j|, & \|A\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.
\end{aligned}
$$

Свойство матричной нормы:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

```
norm(a, p) % p = 1, 2, 3, ..., Inf
norm(A, p) % p = 1, 2, Inf, 'fro'
```

`'fro'` — фробениусова норма:

$$\|A\|_{\mathrm{fro}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

1.2. Команды деления

$$Ax = b, \quad AX = B, \quad YA = B$$

`x = A\b` $(x = A^{-1}b)$

`X = A\B` $(x = A^{-1}B)$

`Y = B/A` $(x = BA^{-1})$

Пример

Построим систему линейных уравнений с заранее известным ответом:

```
n = 500;
A = rand(n);
xp = rand(n, 1);
b = A*xp;
```

Теперь найдем ее решение численно:

```
x = A\b;
```

Найдем норму невязки и абсолютную и относительную ошибку:

```
norm(A*x - b)
norm(xp - x)
norm(xp - x)/norm(xp)
```

1.3. Абсолютная и относительна ошибка

Пусть x — точное значение некоторой величины

Пусть $\widetilde{x}$ — ее приближенное значение:

$$x \approx \widetilde{x}$$

$$\Delta = |x - \widetilde{x}| \text{ — абсолютная ошибка}$$

$$\delta = \frac{|x - \widetilde{x}|}{|x|} \text{ — относительная ошибка}$$

Если $\delta \approx 10^{-p}$, то число верных значащих цифр в $\widetilde{x}$ примерно равно p.

Для матриц и векторов то же самое, только вместо модуля надо брать нормы.

1.4. Число обусловленности

$Ax = b$ — исходная система,

$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ — «возмущенная» система,

Тогда $A\Delta x = \Delta b$ и $\Delta x = A^{-1}\Delta b$.

Откуда

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

$$\mathrm{cond} A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

$$\text{отн.ошибка}(x) \leq \mathrm{cond} A \cdot \text{отн.ошибка}(b)$$

Похожая формула справедлива и при возмущении матрицы A

$$\text{отн.ошибка } x \approx \mathrm{cond} A \cdot \varepsilon_{\text{М}}.$$

Если число обусловленности матрицы небольшое, то маленькие (относительные) ошибки во входных данных и в промежуточных результатах при округлении, привед к маленькой ошибке в решении.

Если число обусловленности матрицы большое, то маленькие (относительные) ошибк во входных данных и в промежуточных результатах при округлении, могут привести громадной ошибке в решении.

Если число обусловленности «большое», то матрица называется *плохо обусловленной*.

Если число обусловленности «небольшое», то — *хорошо обусловленной.*

```
cond(A, p)       % число обусловленности
condest(A, p)    % оценка снизу
```

1.5. Пример: матрицы Гильберта

(плохо обусловленные)

$$A = (a_{ij}), \qquad a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$$

см. `thilbcond`

см. `thilb`

2. Собственные числа и собственные векторы

```
d = eig(A)
[Q, D] = eig(A)
```