MATLAB в научных исследованиях

Лекция № 4.

Суммы, произведения, интегралы. Линейная алгебра

Н. Ю. Золотых

ННГУ, ВМК, сентябрь–декабрь 2008

Содержание

1. Суммы, разности, произведения

1.1. Суммы

```
sum(a)
cumsum(a)
sum(A)
cumsum(A)
sum(A, 2)
cumsum(A, 2)

a = 1:20,
b = cumsum(a),
plot(a, a, a, b)
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

```
N = 100;
n = 1:N;
a = n.^(-2);
s = cumsum(a);
lim = pi^2/6
s(end)

plot(n, s, 'b', [0 N], [lim lim], 'r')
grid
xlabel('n')
ylabel('\Sigma_{k=1}^n {1}/{k^2}')

relerr = abs(s - lim)/lim;

semilogy(relerr)
xlabel('n');
ylabel('Relative error');
```

$$g(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$$

```
n=1000; k=1:n;
m=2;   f=k.^(-m); plot(cumsum(f))
m=1.5; f=k.^(-m); plot(cumsum(f))
m=1.2; f=k.^(-m); plot(cumsum(f))
```

1.2. Разности

```
diff(a)
```

Пример: численное дифференцирование

```
h = 0.1;
x = 0:h:1;
f = exp(x);
plot(x, f)

d = diff(f)/h;
plot(x, f, 'b', x(1:(end - 1)), d, 'r')
plot(x, f, 'b', x(1:(end - 1)) + h/2, d, 'r')
```

1.3. Произведения

```
prod(a)
cumprod(a)
```

Пример: факториал

```
n = 200;
k = 1:n;
kf = cumprod(k);
plot(kf, '.')
sum(isinf(kf))
sum(isfinite(kf))
```

1.4. Сочетание произведений и суммирования

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

```
N = 5;
n = 1:N;
ni = 1./n;
x = 1;
M = [1; ni'*x];
s = sum(cumprod(M))
```

Относительная ошибка:

```
abs(s - exp(1))/exp(1)
```

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{a}{1} & \frac{a+h}{1} & \frac{a+2h}{1} & \dots & \frac{b}{1} \\ \frac{a}{2} & \frac{a+h}{2} & \frac{a+2h}{2} & \dots & \frac{b}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a}{m} & \frac{a+h}{m} & \frac{a+2h}{m} & \dots & \frac{b}{m} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cumprod}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{a}{1} & \frac{a+h}{1} & \frac{a+2h}{1} & \dots & \frac{b}{1} \\ \frac{a^2}{2!} & \frac{(a+h)^2}{2!} & \frac{(a+2h)^2}{2!} & \dots & \frac{b^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a^m}{m!} & \frac{(a+h)^m}{m!} & \frac{(a+2h)^m}{m!} & \dots & \frac{b^m}{m!} \end{pmatrix}$$

см. `exptaylor`

2. Интегрирование

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\sin x} dx$$

2.1. Правило прямоугольников

```
n = 100;
h = 3/n;
x = h/2:h:3;
f = x./sin(x);
plot(x,f);
plot(h*cumsum(f))
grid
sum(h*f)
hold on;
```

2.2. Правило трапеций

```
plot(cumtrapz(x, f), 'r')
trapz(x, f)
```

2.3. Правило Симпсона

```
quad('x./sin(x)', eps, 3) % tol=1e-3
[q, i] = quad('x./sin(x)', eps, 3, 1e-4)
```

2.4. Метод Лобатто

```
quadl('x./sin(x)', eps, 3) % tol=1e-6
[q,i]=quadl('x./sin(x)', eps, 3, 1e-4)
```

2.5. Двойные интегралы

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin(xy)\, dx dy$$

```
h = .1;
x = [0:h:pi];
[X, Y] = meshgrid(x);
F = sin(X.*Y).^2;
surfl(X, Y, F)
h^2*sum(F(:))          % try h=0.01

dblquad('sin(x.*y).^2', 0, pi, 0, pi)
```

3. Системы линейных уравнений

3.1. Векторные и матричные нормы

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad \|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \qquad \|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}, \qquad \|A\|_2 = \max_{i=1,\dots,n} \lambda_j(A^{\mathrm{T}}A) \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j|, \qquad \|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Свойство матричной нормы:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

```
norm(a, p) % p = 1, 2, 3, ..., Inf
norm(A, p) % p = 1, 2, Inf, 'fro'
```

`'fro'` — фробениусова норма:

$$\|A\|_{\mathrm{fro}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

3.2. Команды деления

$$Ax = b, \quad AX = B, \quad YA = B$$

`x = A\b` $(x = A^{-1}b)$

`X = A\B` $(x = A^{-1}B)$

`Y = B/A` $(x = BA^{-1})$

Пример

Построим систему линейных уравнений с заранее известным ответом:

```
n = 500;
A = rand(n);
xp = rand(n, 1);
b = A*xp;
```

Теперь найдем ее решение численно:

```
x = A\b;
```

Найдем норму невязки и абсолютную и относительную ошибку:

```
norm(A*x - b)
norm(xp - x)
norm(xp - x)/norm(xp)
```

3.3. Абсолютная и относительна ошибка

Пусть x — точное значение некоторой величины

Пусть $\widetilde{x}$ — ее приближенное значение:

$$x \approx \widetilde{x}$$

$$\Delta = |x - \widetilde{x}| \text{ — абсолютная ошибка}$$

$$\delta = \frac{|x - \widetilde{x}|}{|x|} \text{ — относительная ошибка}$$

Если $\delta \approx 10^{-p}$, то число верных значащих цифр в $\widetilde{x}$ примерно равно p.

Для матриц и векторов то же самое, только вместо модуля надо брать нормы.

3.4. Число обусловленности

$Ax = b$ — исходная система,

$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ — «возмущенная» система,

Тогда $A\Delta x = \Delta b$ и $\Delta x = A^{-1}\Delta b$.

Откуда

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

$$\mathrm{cond} A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

$$\text{отн.ошибка}(x) \leq \mathrm{cond} A \cdot \text{отн.ошибка}(b)$$

Похожая формула справедлива и при возмущении матрицы A

$$\text{отн.ошибка } x \approx \mathrm{cond} A \cdot \varepsilon_{\text{М}}.$$

Если число обусловленности матрицы небольшое, то маленькие (относительные) ошибки во входных данных и в промежуточных результатах при округлении, приведу к маленькой ошибке в решении.

Если число обусловленности матрицы большое, то маленькие (относительные) ошибк во входных данных и в промежуточных результатах при округлении, могут привести громадной ошибке в решении.

Если число обусловленности «большое», то матрица называется *плохо обусловленной*.

Если число обусловленности «небольшое», то — *хорошо обусловленной*.

```
cond(A, p)       % число обусловленности
condest(A, p)    % оценка снизу
```

3.5. Пример: матрицы Гильберта

(плохо обусловленные)

$$A = (a_{ij}), \qquad a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

см. `thilbcond`

см. `thilb`

4. Собственные числа и собственные векторы

```
d = eig(A)
[Q, D] = eig(A)
```