Линейное программирование: история, достижения, проблемы

В.Н.Шевченко

(Нижегородский университет)

1. В 1939 г. молодой ленинградский профессор Л.В. Канторович [1] опубликовал в издательстве ЛГУ небольшую книжечку [1], обобщавшую результаты его исследований по одной прикладной задаче, которую можно описать следующим образом. Даны (m,n)-матрица $A = (a_{ij})$ и вектор $d = (d_1, \ldots, d_n)$, a_{ij} означает производительность i-го станка по j-й детали, d_j — число деталей j-го вида, входящих в комплект. Требуется найти такую (m, n)-матрицу $T = (t_{ij})$, где t_{ij} — время, в течение которого i-й станок производит j-ю деталь, при которой в единицу времени производится максимальное число комплектов. Математическая запись этой задачи

$$\left.\begin{array}{l} \max\ \min\limits_i \ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}t_{ij}/d_j \\ \qquad\qquad \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} \leq 1 \ (i = 1, \ldots, m), \\ \qquad\qquad t_{ij} \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

В настоящее время общепризнана основополагающая роль работы [1] в становлении линейного программирования (ЛП). В частности, в ней была высказана и успешно применена к задаче (1) плодотворная идея "разрешающих множителей"(позже их связь с переменными двойственной задачи ЛП станет ясной не только их создателю), развитая в последующих работах [2,3]. Приведу короткую цитату из книги [4] Дж.

[1] Канторович Леонид Витальевич (1912-1986) — советский математик и экономист, академик АН СССР (1964, чл.-корр.(1958), гос. премия (1949), Ленинская премия (1965, совм.с экономистами В.С. Немчиновым и В.В. Новожиловым), Нобелевская премия (1975, совм. с американским экономистом Т.И. Купмансом). Основные труды по функцианальному анализу, вычислительной математике и экономике.

Данцига (разработавшего в 1949 г. симплекс-метод [5]), назвавшего [1] "обстоятельной монографией": «Канторовича следует признать первым, кто обнаружил, что широкий класс важнейших производственных задач поддаётся чёткой математической формулировке, которая ... даёт возможность ... решать их численными методами».

Итак, первые публикации по ЛП (термин принадлежит Т. Купмансу) начались в СССР на 10 лет раньше, чем в США. Вторая мировая война затормозила отечественные исследования в этом направлении. Например, работа [6], опубликованная в 1949 г., была выполнена в 1940 г., а в ней был изложен метод потенциалов (те же разрешающие множители), решающий транспортную задачу

$$\left.\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1,\ldots,m), \\ &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad (i=1,\ldots,n), \\ &0 \le x_{ij} \le d_{ij} \quad (i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Её интерпретируют как составление оптимального плана перевозок (нахождение x_{ij}) продукта от m поставщиков к n потребителям; a_i — количество продукта, имеющегося у i-го поставщика, b_j — потребность j-го потребителя, c_{ij} — стоимость перевозки единицы продукта от i-го поставщика к j-му потребителю, d_{ij} — ограничение на пропускную способность такой перевозки.

На Западе задачу (2) (при $d_{ij} = \infty$) называют задачей Хичкока–Купманса. В [7] она была впервые сформулирована и сделаны наброски метода её решения. Работа [7] не привлекла большого внимания, однако второй исследователь (T.C. Koopmans, 1910-1985, Нобелевская премия, 1975, совместно с Л.В. Канторовичем), "являясь членом Объединённого комитета перевозок во время Второй мировой войны, использовал решение транспортной задачи для снижения суммарных затрат времени на перевозку, так как недостаток грузовых судов представлял собой критическое узкое место. В 1947 г. Купманс возглавил исследования возможностей применения линейного программирования для изучения экономических задач,"(снова цитирую [4].)

Он привлёк к этим исследованиям много известных экономистов и математиков (в том числе Дж. Данцига) и организовал весьма представительную конференцию по ЛП [8].

Позволю себе подытожить несколько затянувшееся введение так: как часто бывало, разработанная в России теория доводится в США до чётко разработанных алгоритмов и применений и только после этого получает широкое распространение у нас.

2. Главный математический результат в линейном программировании — *теория двойственности*, связывающая пару двойственных задач линейного программирования:

$$max(c^1x^1 + c^2x^2), \qquad min(u^1b^1 + u^2b^2),$$

$$\begin{array}{cl} A_{11}x^1 + A_{12}x^2 \leq b^1, & u^1 \geq 0, \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^2 = b^2, & u^2, \\ x^1 \geq 0, & u^1A_{11} + u^2A_{21} \geq c^1, \\ x^2, & u^1A_{12} + u^2A_{22} = c^2. \end{array} \tag{3}$$

Здесь A_{ij} — (m_i, n_j)-матрица, b^i — m_i-мерный столбец, c^j — n_j-мерная строка, $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$.

Переменные первой из задач (будем называть её *прямой задачей ЛП*) собраны в столбцы x^1 и x^2 размерности n_1 и n_2 соответственно, различающиеся тем, что в x^2 собраны переменные, которые могут принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения. Они соответствуют ограничениям-равенствам второй задачи (будем называть её *двойственной*). Аналогично подразделяются переменные второй задачи, собранные в строчки u^1 и u^2 размерности m_1 и m_2 соответственно. В частности, если прямая задача принимает следующий вид

$$\max\ cx, \tag{4.1}$$

$$Ax = b, \tag{4.2}$$

$$x \geq 0, \tag{4.3}$$

называемый *каноническим*, то двойственная задача запишется в виде

$$\min\ ub, \tag{5.1}$$

$$uA \geq c. \tag{5.2}$$

Так как каждую из пары задач (3) несложно привести к каноническому виду, то для упрощения обозначений именно им мы и ограничимся.

Обозначим через P_1 и P_2 множества решений систем (4.2)–(4.3) и (5.2) соответственно. Вектор $x^0 \in P_1$ называется *оптимальным планом* задачи (4.1)–(4.3), если $cx \leq cx^0$ для любого $x \in P_1$. Аналогично определяется оптимальный план u^0 в двойственной задаче (5.1)–(5.2).

Теорема двойственности. *Справедливо одно и только одно из следующих утверждений:*

(а) $P_1 = \emptyset$ *и* $P_2 = \emptyset$,

(б) $P_1 = \emptyset$ *и* $\min\limits_{u \in P_2} ub = -\infty$,

(в) $P_2 = \emptyset$ *и* $\max\limits_{x \in P_1} cx = \infty$,

(г) каждая из пары двойственных задач имеет оптимальный план и значения линейных форм на них равны, т.е

$$\max_{x \in P_1} cx = \min_{u \in P_2} ub. \tag{6}$$

Кроме того, имеет место следующий критерий оптимальности.

Теорема (о дополняющей нежёсткости). *Пусть* $x \in P_1$ *и* $u \in P_2$. *Тогда для их оптимальности необходимо и достаточно, чтобы*

$$(c - uA)x = 0 \tag{7}$$

Аналогичные утверждения верны и для пары двойственных задач (3).

В этом случае условие (7) заменяется двумя условиями:

$$(u^1 A_{11} + u^2 A_{21} - c^1)x^1 = 0 \tag{8.1}$$

$$u^1(A_{11}x^1 + A_{12}x^2 - b^1) = 0. \tag{8.2}$$

Из теоремы двойственности, в частности, вытекает, что решение пары двойственных задач ЛП (3) равносильно решению следующей системы линейных уравнений и неравенств с $(m_1 + m_2 + n_1 + n_2)$ переменными

$$\left.\begin{array}{c} c^1x^1 + c^2x^2 \leq u^1b^1 + u^2b^2, \\ A_{11}x^1 + A_{12}x^2 \leq b^1, \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^2 = b^2, \\ u^1A_{11} + u^2A_{21} \geq c^1, \\ u^1A_{12} + u^2A_{22} = c^2, \\ x^1 \geq 0,\ u^1 \geq 0. \end{array}\right\}$$

Уже этот факт тесно связывает ЛП с теорией линейных неравенств, основные результаты которой были получены на рубеже XIX и XX веков Минковским и Фаркашем [9,10].

По-видимому, первым, кто исследовал линейные неравенства и подчеркнул их большое значение в механике и теории вероятностей, был Фурье (J.B.J. Fourier, 1768–1830). Задачу минимизации максимального отклонения в системах линейных уравнений он свёл [11] к нахождению самой низкой точки выпуклого многогранника, для чего предложил метод, состоящий в последовательном продвижении от вершины к вершине — прообраз симплекс–метода. Он же перенёс метод исключения на системы линейных неравенств. Пусть неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m \tag{9}$$

разделены на три подмножества соответственно знаку коэффициента a_{in}: $I_0 = \{i/a_{in} = 0\}$, $I_{-1} = \{i/a_{in} < 0\}$, $I_1 = \{i/a_{in} > 0\}$. Для любой пары $i \in I_{-1}$, $k \in I_1$ составляется неравенство–следствие

$$\sum_{j=1}^{n-1}(a_{kn}a_{ij} - a_{in}a_{kj})x_j \leq a_{kn}b_i - a_{in}b_k.$$

Пусть $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1)$ удовлетворяет всем полученным таким образом неравенствам и неравенствам (9), для которых $i \in I_0$. Тогда неравенства, соответствующие I_1 и I_{-1}, дают границы для x_n. Если выбрать x_n^1 в этих границах, то $x = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$ — решение системы (9).

Этот способ (называемый *методом исключений* Фурье-Моцкина) был позднее усовершенствован Т. Моцкиным в его диссертации [12], содержавшей основы теории линейных неравенств.

3. Чтобы привести основные результаты теории линейных неравенств, дадим несколько определений. Будем считать, что векторы (точки) принадлежат евклидову пространству V над полем F – подполем поля вещественных чисел.

Конусом C называется множество точек таких, что $\lambda x \in C$, если $x \in C$ и $\lambda \geq 0$.

Конус C называется *выпуклым*, если из того, что $x \in C$ и $y \in C$, следует $x + y \in C$.

Для выпуклого конуса C определяется *двойственный* конус $C^* = \{u/(u,x) \leq 0$ для всех $x \in C\}$, также являющийся выпуклым конусом.

Если $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$–конечное множество векторов из V, то множество $A^{\angle}$ всех неотрицательных линейных комбинаций $A^{\angle} = \{\sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j a_j,\ \lambda \geq 0\ (j = 1, \ldots, n)\}$ даёт пример выпуклого конуса, называемого *конечнопорождённым.* Конус, двойственный к конечнопорождённому назовём *конечноопределённым.*

Точка $b = \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j a_j$ называется *выпуклой комбинацией точек* $a_1, \ldots, a_s$, если $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1\ \ \lambda_j \geq 0\ (j = 1, \ldots, s)$

Множество M называется *выпуклым*, если оно содержит выпуклую комбинацию любых двух своих точек.

Нетрудно видеть, что пересечение выпуклых множеств выпукло. Ясно также, что выпуклый конус C, полупространство $\{x/ax \leq \alpha\}$, а, значит, и пересечение C с гиперплоскостью — выпуклые множества. Более того, можно показать, что любое n-мерное выпуклое множество M можно представить как пересечение некоторого конуса C с гиперплоскостью в $(n + 1)$-мерном пространстве. Для этого достаточно взять за начало координат точку O, не принадлежащую Π — аффинной оболочке множества M, и рассмотреть множество лучей $C = \{\lambda x,\ x \in M,\ \lambda \geq 0\}$. Тогда C — выпуклый конус, Π — гиперплоскость и $M = \Pi \cap C$.

Назовём множество решений системы $Ax \leq b$ *полиэдром*, а множество всех выпуклых комбинаций (выпуклую оболочку) точек $a_1, \ldots, a_s$ из V

$$\mathrm{conv}(a_1, \ldots, a_s) = \{\sum_{j=1}^{s} \lambda_j a_j / \sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, s\}$$

политопом.

Теорема (Фаркаша–Минковского). *Конус конечноопределён тогда и только тогда, когда он конечнопорождён.*

Так как доказательство этой теоремы конструктивно, то отсюда получается параметрическое представление множества решений однородной системы линейных неравенств, т.е. по заданной матрице $A \in F^{m \times n}$ мы можем найти такую матрицу $B \in F^{n \times s}$, что $\{x/Ax \leq 0\} = \{B\lambda,\ \lambda \geq 0\}$. При этом $\{u/uB \leq 0\} = \{\mu A,\ \mu \geq 0\}$ и справедлива оценка

$$s \leq \binom{m}{r-1} + n - r + 1,$$

где r — ранг матрицы A.

Оценки числа s и трудоёмкости предлагаемого алгоритма, разумеется экспоненциальны, однако, при любой фиксированной размерности они полиномиальны. Заметим, что переход от одного представления к другому позволяет находить пересечение и сумму конечно–порождённых конусов.

Применяя теорему Фаркаша–Минковского к полиэдру

$$P = \{x / Ax \leq b\},$$

представленному в виде пересечения конуса $C = \{(x_0, x)/x_0 \geq 0, Ax \leq bx_0\}$ с гиперплоскостью $x_0 = 1$, получим параметрическое представление полиэдра P и следующее утверждение [12].

Теорема о разложении полиэдра. *P — полиэдр тогда и только тогда, когда $P = Q + K$, где Q — политоп, а $K = \{x/Ax \leq 0\}$.*

Эта теорема – уточнение следующего классического результата.

Теорема Минковского–Штейница–Вейля [9, 13, 14]. *P — политоп тогда и только тогда, когда P — ограниченный полиэдр.*

Дадим следующее определение. Точка x, принадлежащая выпуклому множеству M, называется *крайней*, если её нельзя представить в виде выпуклой комбинации двух различных точек множества M. Для полиэдра понятие крайней точки равносильно понятию вершины. Предположим, что полиэдр P не пуст. Тогда для существования у него крайних точек необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A равнялся n. Будем считать далее это условие выполненным, если не оговорено противное. При этом множества вершин полиэдра P и политопа Q в теореме о разложении совпадают и их число $s \leq \binom{m}{n}$, так как с каждой вершиной v полиэдра (9) связана базисная подсистема неравенств, обращающаяся на v в равенства. Вопрос о максимальном числе $\mu(m, n)$ вершин был закрыт в [15], где доказано, что оно равно

$$\mu(m, n) = \binom{m - [(n+1)/2]}{[n/2]} + \binom{m - [(n+2)/2]}{[(n-1)/2]}. \tag{10}$$

4. Идея симплекс-метода заключается в движении по ребрам полиэдра от вершины к вершине, пока не будет достигнута оптимальная вершина. Дадим набросок алгебраической формализации этой идеи. Рассмотрим задачу (4.1–4.3), в которой предположим, что

1) ранг матрицы A равен числу строк m и

2) известна ее базисная подматрица A_J ($\det A_J \neq 0$) со столбцами a_j, $j \in J$, такая, что $b \in A_J^{\angle}$.

Если положить небазисные ($j \notin J$) переменные $x_j = 0$, то из системы (4.2) значения базисных переменных определяются однозначно и мы получим точку $x(J) \in P_1$, называемую *допустимым базисным решением* или опорным планом. Оказывается, что $x(J)$ является вершиной полиэдра P_1 и, обратно, любую вершину можно получить таким способом. Далее найдем решение $u(J)$ системы

$$ua_j = c_j \quad (j \in J), \tag{11}$$

получающейся обращением в равенства неравенств двойственной задачи, соответствующих базисным переменным прямой задачи. Если точка $x(J)$ имеет m положительных координат (невырожденный случай), то (11) следует из (7). Если $u(J)$ удовлетворяет неравенствам (5.2), то $u(J)$ — вершина полиэдра P_2 и по теореме о дополняющей нежесткости $x(J)$ — оптимальный план (и $u(J)$ — тоже).

В противном случае найдется $l \notin J$ такое, что $u(J)a_l < c_l$ (по существу, величина $c_l - u(J)a_l$ — это разрешающий множитель Канторовича). Это l определяет ребро, двигаясь по которому увеличиваем значение линейной формы. Если это можно сделать неограниченно, то имеет место случай (б) из теоремы двойственности. Иначе в невырожденном случае получим новую вершину $x(J')$ полиэдра P_1, соединенную с $x(J)$ ребром. Заметим, что J' отличается от J только одним элементом l, в таком случае будем называть их *соседними*. В вырожденном случае может появиться цикл, так как не исключено, что $x(J') = x(J)$. Специальные приемы, например, лексикографическое упорядочение подмножества J, делают возникновение циклов невозможным, что ограничивает сверху число симплексных итераций

$$\nu(m, n) \leq \binom{n}{m}. \tag{12}$$

Используя (10), эту оценку можно уточнить, что приведет, грубо говоря, к замене в (12) m на $m/2$.

Вопрос о нахождении начальной вершины (опорного плана $x(J)$) решается *методом искусственного базиса*. Не нарушая общности, будем считать, что $b \geq 0$ в системе (4.2). Рассмотрим задачу максимизации линейной функции

$$y_0 = -\sum_{i=1}^{m} y_i$$

на полиэдре $y + Ax = b, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \geq 0, \quad x \geq 0$. Положив $x = 0, y = b$, мы получим опорный план этой задачи ЛП, и, так как y_0 ограничена сверху ($y_0 \leq 0$), через конечное число итераций симплекс-метод даст оптимальный план. Если значение линейной формы y_0 на нем окажется отрицательным, то $P_1 = \emptyset$. В противном случае, проделав еще не более m симплексных итераций, мы исключим линейно-зависимые строки, если ранг матрицы A был меньше m, и найдем опорный план $x(J) \in P_1$. Этот прием показывает, что сделанные в начале пункта предположения 1) и 2) не нарушают общности.

Теорема двойственности подсказывает, что вместо полиэдра P_1 можно использовать полиэдр P_2: упорядоченный перебор его вершин приводит к *двойственному симплекс-методу*. Существуют и методы, использующие идеи как прямого, так и двойственного алгоритмов (см., например, монографию [16], содержащую их компактное описание). Естественной оценкой числа $\nu(m, n)$ снизу является диаметр $d(P_1)$ графа политопа P_1 (будем предполагать P_1 ограниченным), вершинами и ребрами которого являются вершины и ребра политопа P_1. Известно [4] предположение о том, что $d(P_1) \leq m$. Для политопов P_2, задаваемых в виде (5.2), обозначим через $\Delta(m, n)$ наибольший диаметр графа m-мерного политопа с n $(m-1)$-мерными гранями. С ним связана так называемая гипотеза Гирша (Hirsch W.M.) о том, что $\Delta(m, n) \leq m - n$, доказанная в ряде частных случаев (при $m \leq 3$, $n - m \leq 5$, а также для некоторых специальных классов политопов, например, для (0,1)- политопов, вершины которых имеют координатами числа 0 и 1 [17]). Известно, что гипотезу достаточно доказать только для простых (у каждой вершины m соседей) политопов и только при $n = 2m$. В общем случае получены следующие оценки

$$\left\lceil n - m - \frac{n - m}{\lceil 5m/4 \rceil} \right\rceil + 1 \leq \Delta(m, n) \leq 2^{m-3} n,$$

где $\lceil \alpha \rceil$ — наименьшее целое, не превосходящее α.

С этими и другими интересными результатами, связанными с графами политопов, можно ознакомиться по монографии [18].

5. Симплекс-метод оказался на практике весьма эффективным: опыт подтверждает почти линейную по размерности оценку числа итераций.

Однако в 1972 г. появилась работа [19], в которой было показано, что симплекс-метод (точнее, его вариант, разработанный Данцигом) не полиномиален. Для этого авторы, деформировав n-мерный куб, задали такую линейную форму, при которой симплекс-метод последовательно проходит все его 2^n вершин. Позже аналогичные результаты были получены и для других вариантов симплекс-метода (см. библиографию в [20]).

Процитирую [20]: «'Плохие' линейные программы получаются путем дальнейшей деформации куба типа скашивания ребер, заставляющей симплекс-метод 'проглядеть' короткий путь к оптимальной вершине. Основным препятствием тут является определенная 'близорукость' симплекс-метода: процедура не отсеивает все неперспективные варианты и не выделяет локально плохие, но глобально хорошие пути ... Однако до сих пор является открытым вопрос о существовании правила, делающего симплекс-метод полиномиальным.»

6. В 1979 г. Л.Г. Хачиян (премия Фалкерсона, 1982, совместно с Юдиным Д.Б. и Немировским А.С.) получил положительный ответ [21] на вопрос существования полиномиального алгоритма для задачи ЛП с рациональным входом, использовав метод эллипсоидов, разработанный для задач нелинейного программирования Н.З. Шором и Д.Б. Юдиным и А.С. Немировским ([22, 23], последующие работы см. библиогр. в [20]).

Пусть D – положительно определённая матрица и z – точка в $\mathbf{R}^n$. Тогда множество $E = M(z, D) = \{x \in \mathbf{R}^n / (x - z)^T D^{-1} (x - z) \leq 1\}$ задаёт эллипсоид с центром в точке z.

Пусть полиэдр P содержится в E. Если z не удовлетворяет какому-то из линейных неравенств $ax \leq \alpha$, описывающих полиэдр P, то $P \subseteq E'$ – эллипсоиду минимального объёма, содержащего $\{x/ax \leq az\} \cup E$. Для E' центр z' и положительно определённая матрица D' находятся достаточно просто, и процедуру можно повторять до тех пор, пока центр очередного эллипсоида не будет принадлежать P. Оказывается, что 1) отношение объёмов E' и E меньше величины $e^{-1/2(n+1)}$, где $e = 2,7...$ – основание натуральных логарифмов (это зерно метода эллипсоидов), 2) имеется величина ν, полиномиально зависящая от длины входной информации, показывающая, что если объём очередного эллипсоида стал меньше ν, то $P = \emptyset$ или его размерность меньше n. Хачаяну на пути к его результату пришлось преодолеть ещё ряд препятствий, главное из которых, пожалуй, состояло в необходимости рациональной аппроксимации полиэдра E', сохраняющий только что отмеченные свойства 1 и 2. Другие проблемы (переход к оптимизации, неограниченные области и пр.) не столь принципиальны. Можно показать, что если элементы (m, n)-матрицы A и компоненты столбца b целые числа, не превосходящие по модулю α, то для нахождения рационального решения (или доказательства его отсутсвия) системы $Ax \leq b$ алгоритмом Хачияна достаточно выполнить $O(mn^8 \log^2(\alpha n))$ арифметических (битовых) операций. О других полиномиальных алгоритмах ЛП можно посмотреть в [20].

Хотя эти алгоритмы эффективны с теоретической точки зрения, практически конкурировать с симплекс-методом они (по крайней мере, пока) не могут.

Объяснением этому, на мой взгляд, служат появившиеся почти одновременно работы [24-27], в которых показано, что в среднем (в разных вероятностных моделях) симплекс-метод полиномиален, с существенно лучшими, чем у Хачияна, оценками. Например, в [26] она линейна от числа неравенств в задаче (5.1)-(5.2) (для специального варианта симплекс-метода). Насколько эти вероятностные модели естественны предстоит ещё выяснить.

Замечено, например [20], «что при ограничениях комбинаторного характера или имеющих выраженную структуру (например, все коэффициенты – нули и единицы или же получены из "полиномов Кравчука") симплекс-метод часто работает медленно.»

Литература

1. Канторович Л.В. Математические методы в организации и планировании производства. ЛГУ, 1939, 67 стр.

2. Канторович Л.В. Об одном эффективном методе рещения некоторых классов экстремальных проблем. ДАН СССР, 1940, 3, №28,212-215.

3. Канторович Л.В. О перемещении масс. ДАН СССР, 1942, 37, №7-8, 227-229.

4. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966, 600с. — Перевод на русский с англ. Dantzig G.B. Linear programming and extensions, Prinston Univ. Press, 1963.

5. Dantzig G.B. Programming of interdependent activities, Mathematical model. Econometrica. 1949, 17, №3, 200-211.

6. Канторович Л.В., Гавурин М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. Сб. Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М., Академиздат, 1949, 110-138.

7. Hitchcock F.L. The distribution of a product from several sources to numerous localities. J. Math. Phys. 1941, 20, №2, 224-230.

8. Activity analysis of production and allocation (Koopmans T.C. ed.) Cowles Commission Monograph №13, New York, Wiley, 1951, 404.

9. Minkowski H. Theorie der Konvexen Korper. Gesammelte Abhandlunqen von Hermann Minkowski, Band II (D. Hilbert ed.) Teubner, Leiprig, 1911.

10. Farcas J. Über die Theorie der einfachen Ungleichungen. J. Reine und anqew. Math. 124, №1, 1902, 1-24.

11. Fourier J.B.J. Solution d'une question particuliere du calcul des inegalites, Nouveau Bulletin des Sciences par la Société plilomathique de Paris, 1826, 99-100.

12. Motzkin T.S. Beitrage zur Theorie der linearen Ungleichunqen, Jerusalem, 1936.

13. Steinitz E. Bedingt Konvergente Reihen und Konvxe Systeme (Sehluss). J. Reine und angew Math. 146, 1916, 1-52.

14. Weyl H. Elementare Theorie der Konvexen Polyeder. Commentarii Mathematiki Helvetici 7, 1935, 290-306.

15. McMullen P. The maximum numbers of fous of convex polytope. Mathematika, 17, 1971, 179-184.

16. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., Мир, 1974, 519 с.

17. Naddet D. The Hirsch conjecture is true for (0,1) — polytopes. Math. Progr. 1989, 45, 109-110.

18. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, отимизация. М., Наука, 1981, 344 с.

19. Klee V., Minty G.J. How good is the simplex algorithm? Inequalities III (O.Shisha, ed.) N.Y.Acad Press, 1972, 159–175.

20. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. М., Мир, 1991, 360 с.

21. Хачиян Л.Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании. ДАН СССР, 1979, т. 244, N 5, 1093–1096.

22. Шор Н.З. Использование операции растяжения пространств при минимизации выпуклых функций. Кибернетика, Киев, 1970, №1, 6-12.

23. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. Экономика и мат. методы, 1976, т.12, 357-369.

24. Вершик А.М., Спорышев П.В. Оценка среднего числа шагов симплекс-метода и задачи асимптотической интегральной геометрии. ДАН СССР,

1983, т. 271, N. 5, 1044–1048.

25. Borgwardt K.-H. The average number of pivot steps required by the simplex-method is polynomial. Zeitschrift für Operations Research. 1982, 25, 157–177.

26. Haimovich M. The simplex method is very good! On the expected number of pivot steps and related properties of random linear programming, 1983, preprint.

27. Smale S. On the average number of steps in the simplex method. Math. Progr. 1983, 27, №3, 241-262.

Переработанный текст лекции, прочитанной 4 марта 2002 г. на совместном семинаре ННГУ и Интел "Современные направления в вычислениях"

Аннотация

Обсуждаются три аспекта одной и той же предметной области: оптимизационный – линейное программирование, алгебраический – теория линейных неравенств, геометрический – полиэдры. Делается попытка с исторической точки зрения проследить логические связи между ними, привести основные математические результаты и сформулировать некоторые вопросы, остающиеся пока без ответов.

The Linear Programming: History, Results, Problems. V.N. Shevchenco

Abstract

Three aspects of one subject are investigated: optimization one – the linear programming, algebraic one - the theory of linear inequalities, geometric one – the polyhedra.

The author attempts to observe logical connections between these topics, to bring the main mathematical results, and to forumlate some unsolved problems from the historic point of view.