Задачи по линейному программированию

DRAFT 14.10.2018

составитель: **Н. Ю. Золотых**

Нижний Новгород
2017, 2018

Оглавление

Глава 1

Симлекс-метод

Пример 1.1. Фирма производит столы и стулья. Объемы ресурсов, требуемых для производства одного стула и одного стола, а также имеющиеся запасы ресурсов и цены на товар приведены в следующей таблице:

Ресурсы	*Стул*	*Стол*	*Запасы*
Древесина (кг)	5	15	270
Кожа (м^2)	0,5		15
Клей (г)	120	200	6000
Трудовые ресурс (чел $\cdot$ ч)	10	15	360
Цена (руб.)	1 000	2 000	

Необходимо определить оптимальный план производства стульев и столов, максимизирующий прибыль.

Составляем математическую модель данной задачи. Обозначим x_1 количество производимых стульев, а x_2 — количество столов. Необходимо максимизировать прибыль:

$$\max(1000x_1 + 2000x_2)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 \le 270, \\ 0.5x_1 \le 15, \\ 120x_1 + 200x_2 \le 6000, \\ 10x_1 + 15x_2 \le 360, \\ x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbf{Z} \quad (j = 1, 2) \end{cases}$$

Строго говоря, данная задача является задачей *целочисленного* линейного программирования, так как на неизвестные наложены дополнительные ограничения $x_1 \in \mathbf{Z}$, $x_2 \in \mathbf{Z}$. Для начала забудем про эти требования и рассмотрим соответствующую ЗЛП.

Сокращая неравенства на подходящие коэффициенты и заменяя целевую функцию $1000x_1 + 2000x_2$ на $x_1 + 2x_2$ (теперь прибыль будет измеряться не в рублях, а в тыс. рублей) получаем следующую ЗЛП:

$$\max(x_1 + 2x_2)$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & \leq & 54, \\ x_1 & \leq & 30, \\ 3x_1 + 5x_2 & \leq & 150, \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 72, \\ x_1 & \geq & 0, \\ x_2 & \geq & 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

1-Й СПОСОБ (ГРАФИЧЕСКИЙ) ЗЛП (1) содержит 2 неизвестных, поэтому ее можно решить графически (см. рис. 1.2). Допустимая область, задаваемая системой ограничений задачи (1), представляет собой пятиугольник с вершинами $(0, 0)$, $(30, 0)$, $(30, 4)$, $(18, 12)$, $(0, 18)$. Также на рис. 1.2 изображены несколько линий уровня функции $x_1 + 2x_2$. Двигаем прямую $x_1 + 2x_2 = \text{const}$ в направлении градиента (нормального вектора) $(1, 2)$ до самой крайней вершины многоугольника. Этой точкой, очевидно, является $(18, 12)$. Значение функции $x_1 + 2x_2$ в ней равно 42. Заметим, что это значение можно сравнить со значениями в остальных вершинах многоугольника. Значение исходной функции $1000x_1 + 2000x_2$ в точке $(18, 12)$ равно $42\,000$.

Обратим внимание, что компоненты оптимального вектора целочисленны (нам повезло!), следовательно, данный вектор является решением и начальной ЗЦЛП.

Ответ: 18 стульев, 12 столов, прибыль $42\,000$ руб.

2-Й СПОСОБ (СИМПЛЕКС-МЕТОД) На рассматриваемой задаче проиллюстрируем наиболее распространенный метод решения задач линейного программирования — *симплекс-метод*.

Задача (1) — это ЗЛП в нормальной форме. Приведем ее к каноничe-

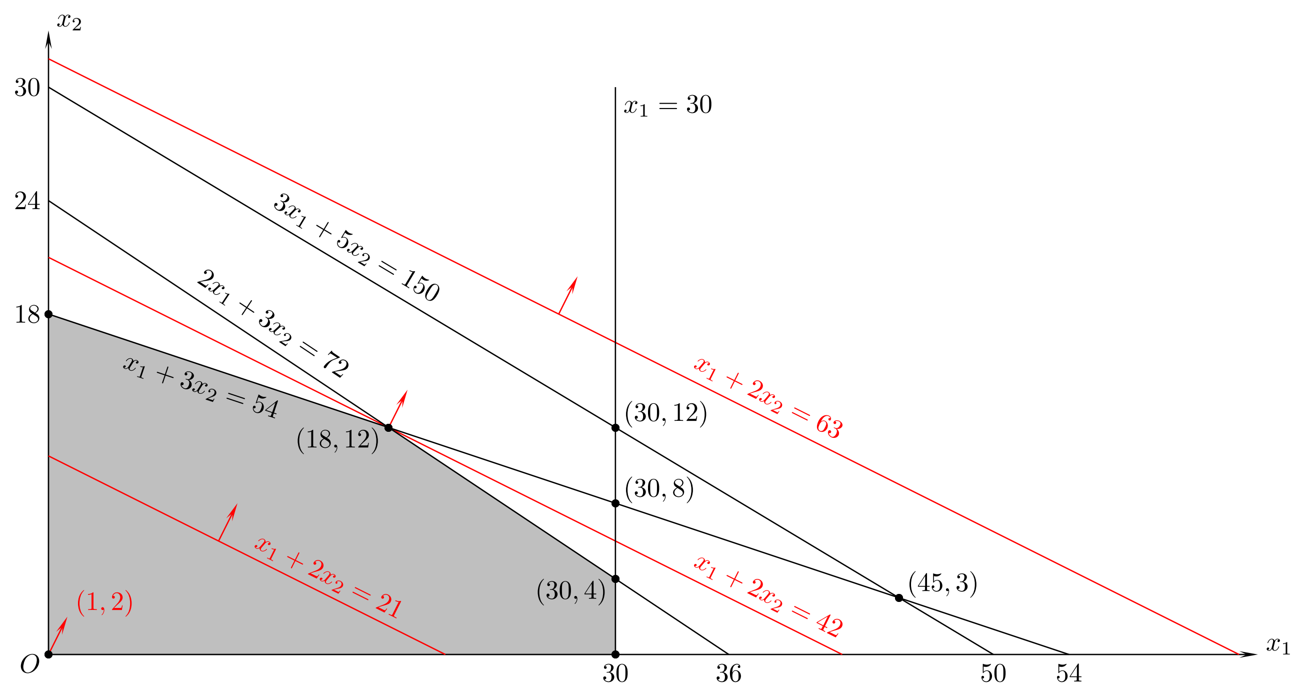

Рис. 1.1: Графическое решение задачи

скому виду, вводя новые — *слабые* — переменные x_3, x_4, x_5, x_6:

$$\max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 & = 54, \\ x_1 + x_4 & = 30, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_5 & = 150, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_6 & = 72, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \end{cases} \tag{2}$$

Содержательный смысл слабых переменных — количество неиспользованного ресурса.

Также введем новую переменную

$$x_0 = x_1 + 2x_2.$$

Задача теперь заключается в максимизации линейной функции x_0 при ограничениях

$$\begin{cases} 0 = x_0 - x_1 - 2x_2 \\ 54 = x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 30 = \boxed{x_1} + x_4 \\ 150 = 3x_1 + 5x_2 + x_5 \\ 72 = 2x_1 + 3x_2 + x_6 \end{cases} \tag{3}$$

и требованиях неотрицательности:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 6). \tag{4}$$

Роль переменной, помещенной в рамку, будет ясна в дальнейшем.

В системе линейных уравнений (3) уже выделены *базисные* (*связанные*) неизвестные x_0, x_3, x_4, x_5, x_6 и *небазисные* (*свободные*) неизвестные x_1, x_2. Выразим базисные переменные через небазисные:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + 2x_2, \\ x_3 = 54 - x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 30 - \boxed{x_1} \\ x_5 = 150 - 3x_1 - 5x_2, \\ x_6 = 72 - 2x_1 - 3x_2. \end{cases} \tag{5}$$

Обратим небазисные переменные в нуль, тогда по формулам (5) получим частное решение $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_5)^\top = (0, 0, 54, 30, 150, 72)$ системы ограничений исходной задачи и значение целевой функции $\widetilde{x}_0 = 0$. Заметим, что это решение удовлетворяет требованиям неотрицательности (4) (это произошло из-за того, что правая часть в системе (3) неотрицательна). Таким образом, $\widetilde{x}$ — это допустимый вектор задачи (2).

Этот вектор не является оптимальным. Действительно, в выражение для x_0 в (5) переменные x_1 и x_2 входят с неотрицательными коэффициентами, поэтому значение целевой функции x_0 можно увеличить за счет увеличения x_1 и/или x_2. Увеличивая x_1 и/или x_2, мы, конечно, должны соблюсти условия (3), (4).

Попробуем увеличить x_0 увеличивая x_1, оставляя x_2 равным 0 и соблюдая ограничения (3) или эквивалентные им равенства (5). Выражение для x_3 в (5) позволяет увеличить x_1 до 54 (напомним, что $x_3 \geq 0$). Из тех же соображений выражение для x_4 в (5) позволяет увеличить x_1 до 30, выражение для x_5 — до ${}^{150}\!/_{3} = 50$, а выражение для x_6 — до ${}^{72}\!/_{2} = 36$. Так как

$$\min\{54, 30, 50, 36\} = 30,$$

то на данном этапе x_1 можно увеличить лишь на величину 30.

Итак, $x_1 = 30$, $x_2 = 0$. Значения остальных переменных можно получить по формулам (5): $x_0 = 30$, $x_3 = 24$, $x_4 = 0$, $x_5 = 60$, $x_6 = 12$. Мы получили допустимый вектор и значение целевой функции на нем:

$$\widetilde{x} = (30, 0, 24, 0, 60, 12)^\top, \quad \widetilde{x}_0 = 30. \tag{6}$$

Те же значения можно получить иным способом. Подставляя выражение для $x_1 = 30 - x_4$ из (5) в уравнения (3) и приводя подобные, получим новую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 30 = x_0 \quad - 2x_2 \quad + x_4 \\ 24 = \quad 3x_2 + x_3 - x_4 \\ 30 = \quad x_1 \quad + x_4 \\ 60 = \quad 5x_2 \quad - 3x_4 + x_5 \\ 12 = \quad \boxed{3x_2} \quad - 2x_4 \quad + x_6 \end{cases} \tag{7}$$

Конечно, более легкий (и грамотный) способ получения системы (7) из (3) состоит в применении одного шага гауссова исключения с ведущим (направляющим) элементом $\boxed{x_1}$. Теперь базисными переменными в (7) являются x_0, x_1, x_5, x_6, а небазисными — x_2, x_4. Как и раньше, выразим базисные переменные через небазисные:

$$\begin{cases} x_0 = 30 - x_4 + 2x_2, \\ x_3 = 24 + x_4 - 3x_2, \\ x_1 = 30 - x_4 \\ x_5 = 60 + 3x_4 - 5x_2, \\ x_6 = 12 + 2x_4 - \boxed{3x_2}. \end{cases} \tag{8}$$

Полагая небазисные переменные равными нулю, по формулам (8) получим тот же допустимый вектор и то же значение целевой функции, что и в (6).

В выражении x_0 через x_2 и x_4 из (8) переменная x_2 входит с положительным коэффициентом, поэтому значение x_0 может быть увеличено за счет увеличения x_2 до величины

$$\min\{8, 12, 4\} = 4.$$

Чтобы получить новый допустимый вектор, сразу от системы (7) с помощью шага исключения Гаусса с ведущим элементом, заключенным в рамку, перейдем к системе

$$\begin{cases} 38 = x_0 - {}^1\!/_3\, x_4 + {}^2\!/_3\, x_6 \\ 12 = x_3 + \boxed{x_4} - x_6 \\ 30 = x_1 + x_4 \\ 40 = {}^1\!/_3\, x_4 + x_5 - {}^5\!/_3\, x_6 \\ 4 = x_2 - {}^2\!/_3\, x_4 + {}^1\!/_3\, x_6 \end{cases} \tag{9}$$

откуда

$$\begin{cases} x_0 = 38 + {}^1\!/_3\, x_4 - {}^2\!/_3\, x_6, \\ x_3 = 12 - \boxed{x_4} + \phantom{{}^2\!/_3}\, x_6, \\ x_1 = 30 - \phantom{{}^1\!/_3}\, x_4 \\ x_5 = 40 - {}^1\!/_3\, x_4 + {}^5\!/_3\, x_6, \\ x_2 = 4 + {}^2\!/_3\, x_4 - {}^1\!/_3\, x_6. \end{cases} \tag{10}$$

Полагая небазисные переменные x_4, x_6 равными 0, получим новый допустимый опорный вектор и значение целевой функции:

$$\widetilde{x} = (30, 4, 12, 0, 40, 0)^{\top}, \quad \widetilde{x}_0 = 38.$$

Анализируя (10), приходим к выводу, что значение x_0 может быть еще увеличено за счет увеличения x_4 до величины, равной

$$\min\{12, 30, 40\} = 12.$$

Делая в (9) шаг исключения Гаусса над элементом, заключенным в рамку, получим новую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 42 = x_0 & + \ {}^1\!/_3\, x_3 & & + \ {}^1\!/_3\, x_6, \\ 12 = & + \quad x_3 + x_4 & & - \quad x_6, \\ 18 = & x_1 \quad - \quad x_3 & & + \quad x_6, \\ 36 = & - \ {}^1\!/_3\, x_3 & + x_5 & - \ {}^4\!/_3\, x_6, \\ 12 = & x_2 + {}^2\!/_3\, x_3 & & - \ {}^1\!/_3\, x_6. \end{cases} \tag{11}$$

откуда

$$\begin{cases} x_0 = 42 - {}^1\!/_3\, x_3 - {}^1\!/_3\, x_6, \\ x_4 = 12 - \quad x_3 + \quad x_6, \\ x_1 = 18 + \quad x_3 - \quad x_6, \\ x_5 = 36 + {}^1\!/_3\, x_3 + {}^4\!/_3\, x_6, \\ x_2 = 12 - {}^2\!/_3\, x_3 + {}^1\!/_3\, x_6. \end{cases} \tag{12}$$

Полагая небазисные переменные x_3, x_6 равными 0, получим новый допустимый опорный вектор и значение целевой функции:

$$\widehat{x} = (18, 12, 0, 12, 36, 0), \quad \widehat{x}_0 = 42.$$

В выражении для x_0 из (11) переменные x_3 и x_6 входят с отрицательными коэффициентами, поэтому, так как $x_3 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, то $x_0 \leq 13$ на любом допустимом векторе. С другой стороны, на векторе $\widehat{x}$ значение целевой функции равно 13, следовательно, вектор $\widehat{x} = (18, 12, 0, 12, 36, 0)$ — оптимальный.

Обычно симплекс-метод, который мы проиллюстрировали на примере, представляют в виде последовательности преобразований над *симплекс-таблицами*. Так называют матрицы, составленные из коэффициентов систем уравнений вида (3), (7), (9), (11). Неизвестная x_0 всегда является базисной, поэтому соответствующий ей столбец не меняется — его записывать в таблицу не будем. Возле каждой строки указана соответствующая базисная неизвестная.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	-1	-2	0	0	0	0
x_3	54	1	3	1	0	0	0
x_4	30	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0
x_5	150	3	5	0	0	1	0
x_6	72	2	3	0	0	0	1

$+$ $-$ -3 -2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	30	0	-2	0	1	0	0
x_3	24	0	3	1	-1	0	0
x_1	30	1	0	0	1	0	0
x_5	60	0	5	0	-3	1	0
x_6	12	0	$\boxed{3}$	0	-2	0	1

$+{}^2\!/_3$ $-$ $-{}^5\!/_3$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	38	0	0	0	$-{}^1\!/_3$	0	${}^2\!/_3$
x_3	12	0	0	1	$\boxed{1}$	0	-1
x_1	30	1	0	0	1	0	0
x_5	40	0	0	0	${}^1\!/_3$	1	$-{}^5\!/_3$
x_2	4	0	1	0	$-{}^2\!/_3$	0	${}^1\!/_3$

$+{}^1\!/_3$ $-$ $-{}^1\!/_3$ $+{}^2\!/_3$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	42	0	0	$1/3$	0	0	$1/3$
x_3	12	0	0	1	1	0	-1
x_1	18	1	0	-1	0	0	1
x_5	36	0	0	$-1/3$	0	1	$-4/3$
x_2	12	0	1	$2/3$	0	0	$-1/3$

Рассмотрим последовательность полученных опорных векторов и возьмем в каждом из них первые две компоненты. На рис. 1.2 им будет соответствовать последовательность вершин допустимой области, а именно $(0,0)$, $(30,0)$, $(30,4)$, $(18,12)$. Если бы в первой таблице мы решили ввести в базисные переменные x_2 (а не x_1), получилась бы последовательность точек $(0,0)$, $(0,18)$, $(18,12)$ и процесс закончился бы немного быстрее.

Рассмотрим ЗЛП в каноническом виде

$$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$\begin{cases} b_1 = \; a_{11}x_1 + \; q_{12}x_2 + \ldots + \; q_{1n}x_n, \\ b_2 = \; a_{21}x_1 + \; q_{22}x_2 + \ldots + \; q_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m = a_{m1}x_1 + q_{m2}x_2 + \ldots + q_{mn}x_n, \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{13}$$

или в матричной форме записи:

$$\max cx$$

$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad .$$

Вводим переменную $x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. Тогда задача (14) эквивалентна ЗЛП

$$\max x_0$$

$$\begin{cases} 0 = x_0 - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n, \\ b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{14}$$

Предположим, что ранг матрицы A равен m и столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_m$ образуют ее столбцовую базу. Обозначим $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$. Переменные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ называются *базисными*. Остальные переменные (кроме x_0) называются *небазисными*. С помощью элементарных преобразований строк (гауссовых преобразований) систему (14) можно привести к эквивалентному виду

$$\max x_0$$

$$\begin{cases} q_{00} = x_0 + q_{01}x_1 + q_{02}x_2 + \ldots + q_{0n}x_n, \\ q_{10} = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{m0} = q_{m1}x_1 + q_{m2}x_2 + \ldots + q_{mn}x_n, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

в которой базисная переменная x_{j_i} встречается только в i-м уравнении ($j_i \in \mathscr{B}$), т. е.

$$q_{ij_i} = 1, \quad q_{kj_i} = 0 \quad (j_i \in \mathscr{B}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, m\} \setminus \{i\}).$$

В этом случае будем говорить, что в системе *выделена* база $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$,

Матрица

$$Q = (q_{ij}), \quad (i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, n)$$

называется *симплекс-таблицей*, соответствующей базе $\mathscr{B} = \langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$.

Если, например, $\mathscr{B} = \langle 1, 2, \ldots, m\rangle$, то симплекс-таблица Q имеет вид

$$\begin{array}{|c|cccccccc|}
\hline
q_{00} & 0 & 0 & \ldots & 0 & q_{0,m+1} & q_{0,m+2} & \cdots & q_{0n} \\
\hline
q_{10} & 1 & 0 & \ldots & 0 & q_{1,m+1} & q_{1,m+2} & \cdots & q_{1n} \\
q_{20} & 0 & 1 & \ldots & 0 & q_{2,m+1} & q_{2,m+2} & \cdots & q_{2n} \\
\cdots & \multicolumn{8}{c|}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
q_{m0} & 0 & 0 & \ldots & 1 & q_{m,m+1} & q_{m,m+2} & \cdots & q_{mn} \\
\hline
\end{array}$$

Решение $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n)^\top$ системы уравнений, для которого небазисные переменные равны нулю, а базисные однозначно находятся из системы, т. е.

$$\widetilde{x}_{j_i} = q_{i0} \quad (j_i \in \mathscr{B}), \qquad \widetilde{x}_k = 0 \quad (k \notin \mathscr{B})$$

называется *опорным вектором*, или *базисным решением*. Если опорный вектор $\widetilde{x}$ удовлетворяет требованию неотрицательности, т. е.

$$\widetilde{x}_{j_i} = q_{i0} \geq 0,$$

то он называется *допустимым опорным вектором*, или *базисным допустимым решением*.

Симплекс-таблица Q называется (*прямо*) *допустимой*, если все элементы ее нулевого столбца (кроме, быть может, q_{00}) неотрицательны:

$$q_{i0} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Соответсвующая база при этом также называется (*прямо*) *допустимой*. Итак, прямо допустимым таблицам (и только им) соответствуют допустимые опорные векторы.

Симплекс-таблица Q называется *двойственно допустимой*, если все элементы ее нулевой строки (кроме, быть может, q_{00}) неотрицательны:

$$q_{0j} \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Соответствующая база при этом также называется *двойственно допустимой*. Симплекс-таблица (и соответствующая база), являющаяся одновременно прямо допустимой и двойственно допустимой, называется *оптимальной*. Оптимальной симплекс-таблице соответствует оптимальный опорный вектор — решение ЗЛП.

Симплекс-метод стартует с прямо допустимой симплекс-таблицы, переходит от одной допустимой базы к соседней допустимой (т. е. отличающейся от предыдущей одним элементом), на каждой итерации не уменьшая значение целевой функции, пока не приходит к оптимальной таблице и, следовательно, оптимальному вектору, или обнаруживает, что значение целевой функции не ограничено на множестве допустимых векторов.

Алгоритм 1. Прямой симплекс-метод в строчечной форме

Шаг 0. Начать с допустимой базы[1] $\mathscr{B}$ и соответствующей ей допустимой таблицы Q.

Шаг 1. Если $q_{0j} \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — конец. Опорный вектор, соответствующий базе $\mathscr{B}$, оптимален. Иначе выбрать такое s, что $q_{0s} < 0$.

Шаг 2. Если $q_{is} \leq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — конец. Значение целевой функции на множестве допустимых векторов неограничено. Иначе выбрать такое r, что

$$\frac{q_{r0}}{q_{rs}} = \min\left\{\frac{q_{i0}}{q_{is}}: \quad q_{is} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\right\}.$$

Шаг 3 (шаг гауссова исключения). Поделить r-ю строку матрицы Q на q_{rs}. Для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$ вычесть из i-й строки r-ю, умноженную на q_{is}.

Шаг 4. В $\mathscr{B} = \langle j_1, \ldots, j_m \rangle$ в качестве j_r взять s. Вернуться на шаг 1.

Упражнение 1.2. Решить графически ЗЛП

$$\max(3x_1 + 4x_2)$$

$$1) \quad \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

[1] Способы построения начальной допустимой базы рассматриваются в разделе 1.1.

$$\min\{5x_1 + 2x_2\}$$

$$2)\quad \begin{cases} 4x_1 + \ x_2 \geq \ 4, \\ x_1 + \ x_2 \geq \ 1, \\ x_1 - \ x_2 \leq \ 7, \\ x_1 + 3x_2 \geq -1, \\ x_1 \qquad \geq \ 0; \end{cases}$$

$$\max(2x_1 + 3x_2)$$

$$3)\quad \begin{cases} x_1 \qquad \leq \ 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ x_1 + \ x_2 \leq \ 7, \\ 2x_1 + \ x_2 \leq 11, \\ \qquad x_2 \leq \ 5. \end{cases}$$

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$4)\quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + \ x_2 \leq 9, \\ x_1 + \ x_2 \leq 6, \\ x_1 \qquad \geq 0, \\ \qquad x_2 \leq 5, \end{cases}$$

Пример 1.3. Фирма производит два типа подшипников А и В, каждый из которых должен быть обработан на 3 станках. В таблице ниже приведены время, требуемое для каждой стадии производственного процесса, ресурсы на обслуживание станков, полное возможное время работы каждого из станков и прибыль от продажи одного подшипника:

	Тип подшипника		*Время*
	А	В	*работы*
Токарный станок	0,01	0,02	≤ 210
Шлифовальный станок	0,03	0,01	≤ 260
Сверлильный станок	0,04	0,01	≤ 340
Обслуживание	0,09	0,06	≤ 930
Прибыль	2	1	

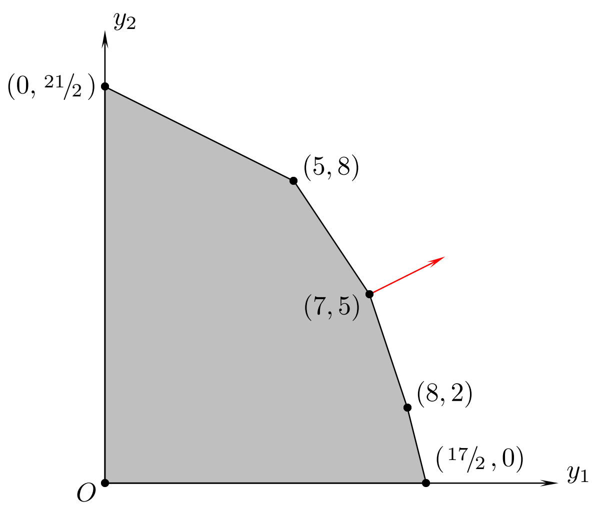

Рис. 1.2: Графическое решение задачи

$$\max(2x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 \le 210 \\ 0{,}03x_1 + 0{,}01x_2 \le 260 \\ 0{,}04x_1 + 0{,}01x_2 \le 340 \\ 0{,}09x_1 + 0{,}06x_2 \le 930 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$1000y_j = x_j \ (j = 1, 2)$

$$\max(2y_1 + y_2)$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 21 \\ 3y_1 + y_2 \le 26 \\ 4y_1 + y_2 \le 34 \\ 3y_1 + 2y_2 \le 31 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

0	-2	-1	0	0	0	0
21	1	2	1	0	0	0
26	3	1	0	1	0	0
34	4	1	0	0	1	0
31	3	2	0	0	0	1

17	0	$-1/2$	0	0	$1/2$	0
$25/2$	0	$7/4$	1	0	$-1/4$	0
$1/2$	0	$1/4$	0	1	$-3/4$	0
$17/2$	1	$1/4$	0	0	$1/4$	0
$11/2$	0	$5/4$	0	0	$-3/4$	1

18	0	0	0	2	-1	0
9	0	0	1	-7	5	0
2	0	1	0	4	-3	0
8	1	0	0	-1	1	0
3	0	0	0	-5	3	1

19	0	0	0	$1/3$	0	$1/3$
4	0	0	1	$4/3$	0	$-5/3$
5	0	1	0	-1	0	1
7	1	0	0	$2/3$	0	$-1/3$
1	0	0	0	$-5/3$	1	$1/3$

Пример 1.4 ***(Задача о разрезе.).*** Для изготовления шкафа требуются прямоугольные заготовки следующих размеров в указанном количестве:

Размеры	*Количество*
60×220 см	3 шт.
60×100 см	2 шт.
50×180 см	2 шт.
20×50 см	4 шт.

Заготовки вырезаются из прямоугольных плит размера 60×220. Определить способы распила плит на заготовки указанных размеров. Определить доли от общего (большого) числа плит, распиливаемых тем или иным способом, так, чтобы максимизировать число изготавливаемых шкафов.

Все максимальные способы раскроя плит приведены на рис. 1.3. Максимальность здесь означает, что в результате раскроя не остается отходов, из которых можно было бы выпилить еще по крайней мере одну заготовку. Сводная информация о способах раскроя приведена в следующей таблице:

Способ	*Получаемые доски*			
распила	60×220	60×100	50×180	20×50
1	1	—	—	—
2	—	2	—	1
3	—	1	—	7
4	—	—	1	2
5	—	—	—	13

Пусть a — количество имеющихся плит. Обозначим y_j количество плит, распиливаемых j-м способом ($j = 1, 2, \ldots, 5$), а y — общее количество получаемых комплектов (шкафов).

Задача заключается в максимизации y:

$$\max y$$

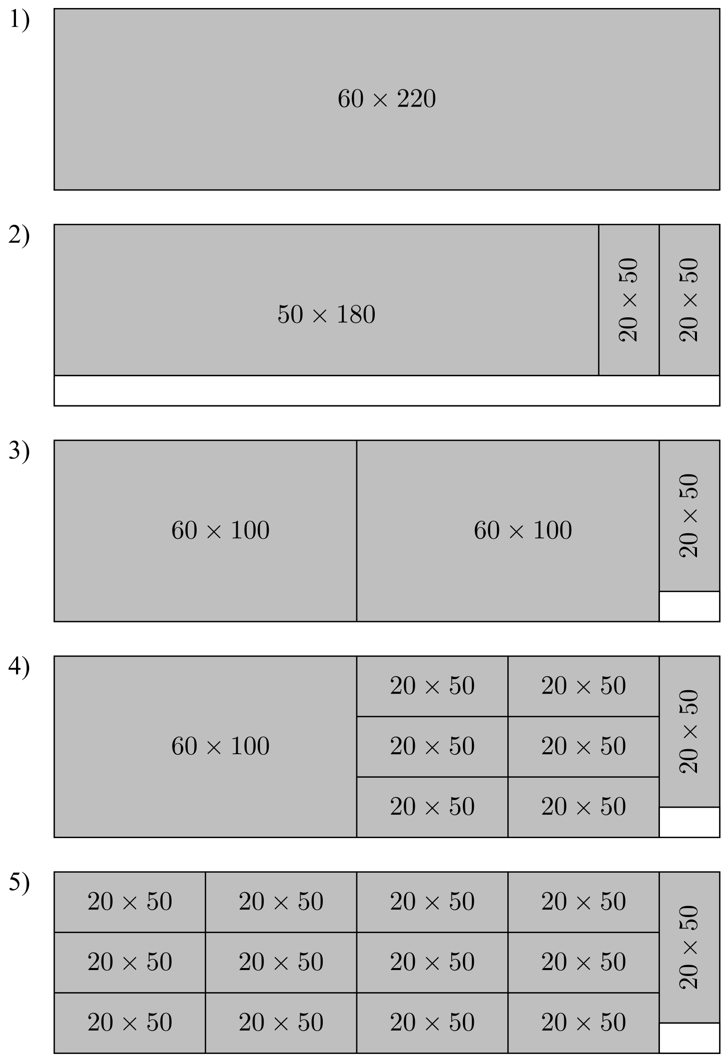

Рис. 1.3: Все максимальные способы раскроя в задаче 1.4

при ограничениях

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = a \\ y_1 \ge 3y \\ 2y_2 + y_3 \ge 2y \\ y_4 \ge 2y \\ y_2 + 7y_3 + 2y_4 + 13y_5 \ge 4y \\ y_j \ge 0, \quad y_j \in \mathbf{Z} \quad (j = 1, 2, \ldots, 5) \\ y \ge 0, \quad y \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Обратите внимание, что ограничения (кроме 1-го) имеют вид неравенств, а не уравнений, так как их левые части выражают количество изготавливаемых комплектов при *максимальном* раскрое (если заменить все неравенства на равенства, то получится несовместная задача). Тем не менее, так как число плит, раскраиваемых 1-м способом, должно равняться утроенному количеству комплектов, то вместо $y_1 \ge 3y$ можно все-таки записать уравнение $y_1 = 3y$.

Обозначим $x_j = y_j/a$ долю плит, распиливаемых j-м способом ($j = 1, 2, \ldots, 5$), и $x = y/a$ — количество комплектов, приходящихся на одну плиту. Если a велико, то требование целочисленности можно отбросить. Получаем ЗЛП:

$$\max x$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 2x \ge 0 \\ x_4 - 2x \ge 0 \\ x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 13x_5 - 4x \ge 0 \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 5), \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем x через x_1. Умножая уравнения на подходящие множители, получаем:

$$\max {}^1\!/_3\, x_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \ge 0 \\ -2x_1 + 3x_4 \ge 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 39x_5 \ge 0 \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 5) \end{cases}$$

С помощью слабых переменных приводим задачу к каноническому виду:

$$\max {}^1\!/_3\, x_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_6 = 0 \\ 2x_1 - 3x_4 + x_7 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 21x_3 - 6x_4 - 39x_5 + x_8 = 0 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 8) \end{cases}$$

0	$-1/3$	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	0
0	2	-6	-3	0	0	1	0	0
0	2	0	0	-3	0	0	1	0
0	4	-3	-21	-6	-39	0	0	1

0	$-1/3$	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	$\boxed{2}$	-6	-3	0	0	1	0	0
0	2	0	0	-3	0	0	1	0
39	43	36	18	33	0	0	0	1

0	0	-1	$-1/2$	0	0	$1/6$	0	0
1	0	4	$5/2$	1	1	$-1/2$	0	0
0	1	-3	$-3/2$	0	0	$1/2$	0	0
0	0	$\boxed{6}$	3	-3	0	-1	1	0
39	0	165	$165/2$	33	0	$-43/2$	0	1

0	0	0	0	$-1/2$	0	0	$1/6$	0
1	0	0	$1/2$	$\boxed{3}$	1	$1/6$	$-2/3$	0
0	1	0	0	$-3/2$	0	0	$1/2$	0
0	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	$-1/6$	$1/6$	0
39	0	0	0	$231/2$	0	6	$-55/2$	1

$1/6$	0	0	$1/12$	0	$1/6$	$1/36$	$1/18$	0
$1/3$	0	0	$1/6$	1	$1/3$	$1/18$	$-2/9$	0
$1/2$	1	0	$1/4$	0	$1/2$	$1/12$	$1/6$	0
$1/6$	0	1	$7/12$	0	$1/6$	$-5/36$	$1/18$	0
$1/2$	0	0	$-77/4$	0	$-77/2$	$-5/12$	$-11/6$	1

Оптимальный вектор $\widehat{x} = (1/2\,, 1/6\,, 0, 1/3\,, 0, 0, 0, 1/2)$, $\widehat{x}_0 = 1/6$. Итак, $\widehat{x}_1 = 1/2$ всех плит необходимо раскраивать 1-м способом, $\widehat{x}_2 = 1/6$ плит — 2-м способом, $\widehat{x}_4 = 1/3$ плит — 4-м способом. При этом на каждую плиту будет приходиться $\widehat{x}_0 = 1/3\,\widehat{x}_1 = 1/6$ комплектов.

1.1. Метод искусственного базиса

Пример 1.5. Нефтеперерабатывающий завод использует 4 способа переработки нефти. При переработке нефти получается бензин и мазут в разных объемах. Ниже перечислены количества бензина и мазута (в условных единицах), получаемых из 1 т нефти, и стоимости переработки (в условных единицах):

Продукт	*Способ переработки* 1-й	2-й	3-й	4-й	*План*
бензин	3	1	1	2	20
мазут	1	5	2	2	14
Стоимость	3	2	1	2	

Завод должен произвести 20 единиц бензина и 14 единиц мазута. Определить объемы использования каждого из 4 способов переработки, минимизирующие затраты.

Получаем ЗЛП

$$\min(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 20, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 14. \\ \qquad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

0	3	2	1	2
20	3	1	1	2
14	1	5	2	2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	0	0	0	0	1	1
x_5	20	3	1	1	2	$\boxed{1}$	0
x_6	14	1	5	2	2	0	$\boxed{1}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	-34	-4	-6	-3	-4	0	0
x_5	20	$\boxed{3}$	1	1	2	1	0
x_6	14	1	5	2	2	0	1

$-22/3$	0	$-14/3$	$-5/3$	$-4/3$	$4/3$	0
$20/3$	1	$1/3$	$1/3$	$2/3$	$1/3$	0
$22/3$	0	$\boxed{14/3}$	$5/3$	$4/3$	$-1/3$	1

0	0	0	0	0	1	1
$^{43}/_7$	1	0	$^3/_{14}$	$^4/_7$	$^5/_{14}$	$^{-1}/_{14}$
$^{11}/_7$	0	1	$^5/_{14}$	$^2/_7$	$^{-1}/_{14}$	$^3/_{14}$

0	3	2	1	2
$^{43}/_7$	$\boxed{1}$	0	$^3/_{14}$	$^4/_7$
$^{11}/_7$	0	$\boxed{1}$	$^5/_{14}$	$^2/_7$

$^{-151}/_7$	0	0	$^{-5}/_{14}$	$^{-2}/_7$
$^{43}/_7$	1	0	$^3/_{14}$	$^4/_7$
$^{11}/_7$	0	1	$\boxed{^5/_{14}}$	$^2/_7$

-20	0	1	0	0
$^{26}/_5$	1	$^{-3}/_5$	0	$^2/_5$
$^{22}/_5$	0	$^{14}/_5$	1	$^4/_5$

Ответ: $\widehat{x} = (^{26}/_5\,, 0, ^{22}/_5\,, 0)$. Затраты 20.

Пример 1.6 *(Задача о смесях).* Фирме требуется уголь с содержанием фосфора и золы не больше $0{,}03\,\%$ и $2{,}75\,\%$ соответственно. Доступны 3 сорта угля по следующим ценам:

Сорт	*Содержание примесей* фосфора, %	золы, %	*Цена*
A	0,06	2,0	30
B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45
Требования	0,03	2,75	

В каких пропорциях необходимо смешивать данные сорта, чтобы удовлетворить требованиям на содержание примесей?

Получаем ЗЛП

$$\min(30x_1 + 30x_2 + 45x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 0{,}06x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}02x_3 \le 0{,}03, \\ 2{,}0x_1 + 4{,}0x_2 + 3{,}0x_3 \le 2{,}75, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Умножая неравенства на подходящие множители и добавляя к их левым частям неравенств слабые переменные x_4 и x_5 получаем эквивалентную задачу:

$$\min(30x_1 + 30x_2 + 45x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 = 2{,}75, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5). \end{cases}$$

Вначале решаем вспомогательную задачу

$$\max(-x_6)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_5 = 2{,}75, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

0	30	30	45	0	0
1	1	1	1	0	0
3	6	4	2	1	0
11/4	2	4	3	0	1

0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1
3	6	4	2	1	0	0
11/4	2	4	3	0	1	0

-1	-1	-1	-1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1
3	6	4	2	1	0	0
$11/4$	2	4	3	0	1	0

$-1/2$	0	$-1/3$	$-2/3$	$1/6$	0	0
$1/2$	0	$1/3$	$2/3$	$-1/6$	0	1
$1/2$	1	$2/3$	$1/3$	$1/6$	0	0
$7/4$	0	$8/3$	$7/3$	$-1/3$	1	0

$-9/32$	0	0	$-3/8$	$1/8$	$1/8$	0
$9/32$	0	0	$3/8$	$-1/8$	$-1/8$	1
$1/16$	1	0	$-1/4$	$1/4$	$-1/4$	0
$21/32$	0	1	$7/8$	$-1/8$	$3/8$	0

0	0	0	0	0	0	1
$3/4$	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$	$8/3$
$1/4$	1	0	0	$1/6$	$-1/3$	$2/3$
0	0	1	0	$1/6$	$2/3$	$-7/3$

0	30	30	45	0	0
$3/4$	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$
$1/4$	1	0	0	$1/6$	$-1/3$
0	0	1	0	$1/6$	$2/3$

$-165/4$	0	0	0	5	5
$3/4$	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$
$1/4$	1	0	0	$1/6$	$-1/3$
0	0	1	0	$1/6$	$2/3$

Упражнение 1.7. Решить задачу из примера 1.6, если ограничения на содержание примесей следующие: требуется уголь с содержанием не более $0{,}03\,\%$ фосфора и $2{,}5\,\%$ золы.

1.2. Двойственный симплекс-метод

Пример 1.8. Чистящее средство оценивают по следующим трем показателям:

1) очищающее свойство;
2) дезинфицирующее свойство;
3) раздражающее воздействие на кожу.

Каждый из этих показателей измеряется по минимальной шкале от 0 до 100. Продукт должен содержать не менее 60 единиц очищающего свойства, не менее 60 единиц дезинфицирующего свойства, и не более 26 единиц очищающего свойства. Продукт является смесью 3 основных очистителей: A, B, C. Их основные характеристики, включая закупочные цены, приведены в таблице:

Свойства	*Очиститель* A	B	C	*Требования*
очищающее	90	30	70	≥ 60
дезинфицирующее	65	85	50	≥ 60
раздражающее	25	70	10	≤ 26
Цена	4	5	3	

Требуется составить оптимальную смесь, минимизирующую стоимость.

Обозначим x_1, x_2, x_3 доли очистителей A, B, C соответственно. Получаем ЗЛП

$$\min(4x_1 + 5x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 90x_1 + 30x_2 + 70x_3 \geq 60, \\ 65x_1 + 85x_2 + 50x_3 \geq 60, \\ 25x_1 + 70x_2 + 10x_3 \leq 26, \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Сокращая неравенства на подходящие числа и вводя слабые переменные, получаем

$$\min(4x_1 + 5x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -9x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -6 \\ -13x_1 - 17x_2 - 10x_3 + x_5 = -12 \\ 25x_1 + 70x_2 + 10x_3 + x_6 = 26 \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

0	4	5	3	0	0	0
1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	0
-6	-9	-3	-7	1	0	0
-12	-13	-17	-10	0	1	0
26	25	70	10	0	0	1

-3	1	2	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0
1	-2	4	0	1	0	0
-2	-3	$\boxed{-7}$	0	0	1	0
16	15	60	0	0	0	1

$-25/7$	$1/7$	0	0	0	$2/7$	0
$5/7$	$4/7$	0	1	0	$1/7$	0
$-1/7$	$\boxed{-26/7}$	0	0	1	$4/7$	0
$2/7$	$3/7$	1	0	0	$-1/7$	0
$-8/7$	$-75/7$	0	0	0	$60/7$	1

$-93/26$	0	0	0	$1/26$	$4/13$	0
$9/13$	0	0	1	$2/13$	$3/13$	0
$1/26$	1	0	0	$-7/26$	$-2/13$	0
$7/26$	0	1	0	$3/26$	$-1/13$	0
$-19/26$	0	0	0	$\boxed{-75/26}$	$90/13$	1

$-269/75$	0	0	0	0	$2/5$	$1/75$
$49/75$	0	0	1	0	$3/5$	$4/75$
$8/75$	1	0	0	0	$-4/5$	$-7/75$
$6/25$	0	1	0	0	$1/5$	$1/25$
$19/75$	0	0	0	1	$-12/5$	$-26/75$

1.3. Двойственный симплекс-метод. Столбцовая форма записи

Пример 1.9. (Задача о «диете») Студент желает минимизировать расходы на продукты и при этом гарантировать потребление необходимых минимальных нормы питательных веществ. В таблице приведены используемые им для составления «диеты» продукты, их цены (в руб.), содержание в них питательных веществ (в г. на 100 г. продукта) и минимальные нормы потребления в день.

Питательные вещества	*Продукты* картофель	колбаса	*Минимальная норма*
белок, г	2	12	72
жиры, г	0	10	100
углеводы, г	20	0	360
энергия, кКал	90	210	2520
Цена	2	21	

Обозначим x_1, x_2 — объем потребления в день картофеля и колбасы соответственно. Получаем ЗЛП

$$\min(2x_1 + 21x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + \ 12x_2 \geq \ 72, \\ \qquad\quad 10x_2 \geq 100, \\ 20x_1 \qquad\quad \geq 360, \\ 90x_1 + 210x_2 \geq 2520, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2). \end{cases}$$

После сокращения уравнений на подходящий множитель приводим задачу к виду

$$\min(2x_1 + 21x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + \ 6x_2 \geq \ 36, \\ \qquad\quad x_2 \geq \ 10, \\ 2x_1 \qquad\quad \geq \ 36, \\ 9x_1 + 21x_2 \geq 252, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2). \end{cases}$$

Упражнение 1.10. Какое минимальное число стрел нужно, чтобы выбить ровно 50 очков на мишени, изображенной на рисунке 1.5? Сведите данную задачу к ЗЦЛП. Покажите, что множество допустимых значений состоит из одного целочисленного вектора. Решите также соответствующую ЗЛП. К чему приводит округление компонент оптимального вектора этой ЗЛП?

Ответы

1.2. 1) $(3, 4)$, 25;
2) $(1, 0)$, 5;
3) $(3, 4)$, 18;
4) максимум равен 6 и достигается на любой точке отрезка, соединяющего точки $(1, 5)$, $(3, 3)$.

1.7. Условия задачи несовместны.

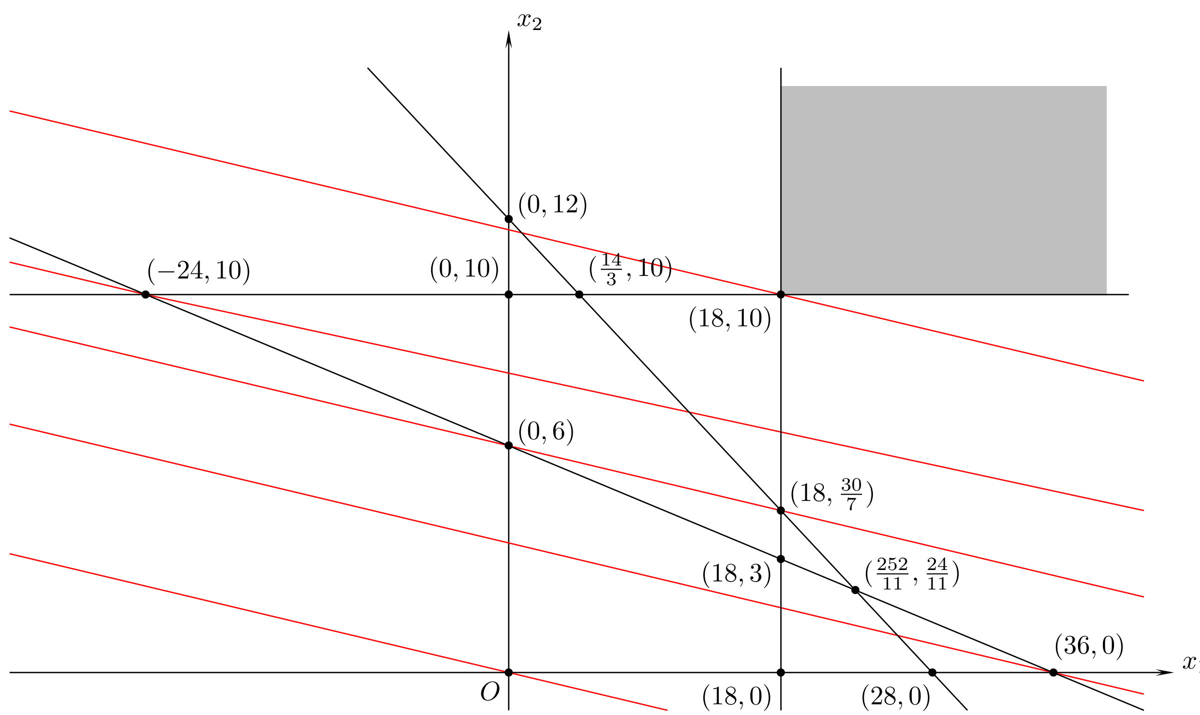

Рис. 1.4: Иллюстрация к двойственному симплекс-методу для задачи 1.9

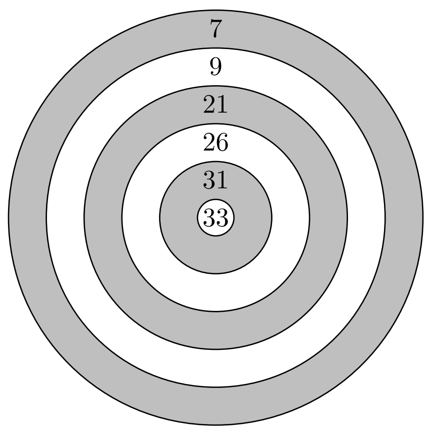

Рис. 1.5: