

Вопросы по алгебре и геометрии  
к зимнему экзамену 2022–2023 уч.г. 3 семестр  
3821Б1ПМ1, 3821Б1ПМ2, 3821Б1ПМ3, 3821Б1ПМ4

Лектор: *Н.Ю.Золотых*

1. Билинейные и полуторалинейные функции и формы. Квадратические (квадратичные) функции (формы). Матрица билинейной функции. Выражение функции через координаты векторов.
2. Связь матриц билинейной (полуторалинейной) функции в разных базисах. Конгруэнтные матрицы. Синхронные (сбалансированные) элементарные преобразования матрицы.
3. Симметрические (симметричные) билинейные (эрмитовы полуторалинейные) функции. Теорема Лагранжа о приведении симметричной билинейной функции к каноническому и нормальному виду.
4. Теорема Якоби о приведении симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции к каноническому виду.
5. Теорема инерции о единственности нормальной формы симметричной билинейной (эрмитовой полуторалинейной) функции.
6. Знакоопределенные симметричные билинейные (эрмитовы полуторалинейные) функции. Критерий Сильвестера положительной определенности. Критерий отрицательной определенности.
7. Евклидовы и унитарные пространства. Матрица Грама. Ее свойства.
8. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца в евклидовом (унитарном) пространстве. Неравенство треугольника.
9. Ортогональные и ортонормированные системы в евклидовом (унитарном) пространстве. Линейная независимость ортогональной и ортонормированной системы векторов. Теорема Пифагора.
10. Ортогональный и ортонормированный базисы в евклидовом пространстве. Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе. Свойства координат вектора в ортонормированном базисе.
11. Ортогональные и унитарные матрицы как матрицы перехода из ортонормированного базиса в ортонормированный.
12. Ортогональные множества в евклидовом (унитарном) пространстве. Ортогональная сумма подпространств. Утверждение о том, что ортогональная сумма является прямой. Ортогональность вектора подпространству.
13. Ортогональное дополнение в евклидовом (унитарном) пространстве. Теорема о разложении пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
14. Ортогональная проекция вектора на подпространство в евклидовом (унитарном) пространстве. Способ нахождения проекции и перпендикуляра.
15. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
16. Выражение длины перпендикуляра в евклидовом (унитарном) пространстве через определители Грама.
17. Объем параллелепипеда. Связь его с определителем Грама.
18. Оценка Адамара определителя матрицы. Матрицы Адамара.
19. Расстояния между множествами векторов евклидового (унитарного) пространства. Нахождение расстояния между линейными многообразиями.
20. Нормальное решение системы линейных уравнений с вещественными (комплексными) коэффициентами.
21. Псевдорешения системы линейных уравнений с вещественными (комплексными) коэффициентами. Метод наименьших квадратов. Нормальное псевдорешение несовместной системы.
22. Сопряженное преобразование. Линейность, существование, единственность сопряженного преобразования. Матрица сопряженного преобразования. Свойства операции сопряжения.
23. Теорема Шура.
24. Нормальное преобразование. Критерий нормального преобразования унитарного пространства. Критерий нормального преобразования евклидова пространства.
25. Унитарное и ортогональное преобразование. Критерии унитарного (ортогонального) преобразования.

26. Эрмитовы и симметрические преобразования. Критерии эрмитова (симметрического преобразования)
27. Арифметическое значение корня из неотрицательного симметрического (эрмитового) преобразования.
28. Полярное разложение преобразования унитарного (евклидова) пространства.
29. Сингулярное разложение.
30. Эллипс. Каноническое уравнение. Фокусы. Эксцентриситет. Директрисы. Их свойства. Касательная. Геометрическое определение и оптическое свойство эллипса.
31. Гипербола. Каноническое уравнение. Фокусы. Эксцентриситет. Директрисы. Их свойства. Касательная. Геометрическое определение и оптическое свойство гиперболы.
32. Парабола. Каноническое уравнение. Фокус. Директриса. Касательная. Геометрическое определение и оптическое свойство параболы.
33. Уравнение квадрики. Изменение уравнения квадрики при аффинном преобразовании. Аффинные инварианты.
34. Упрощение уравнения квадрики аффинным преобразованием. Единственность канонического уравнения.
35. Аффинная классификация кривых второго порядка.
36. Аффинная классификация поверхностей второго порядка.
37. Упрощение уравнения квадрики с помощью изометрии.
38. Ортогональная классификация кривых второго порядка
39. Ортогональная классификация поверхностей второго порядка.