

Вопросы по алгебре и геометрии
к экзамену 2022 г., 2 семестр
ПМИ (группы 3821Б1ПМ1–3821Б1ПМ4)
Лектор Н.Ю. Золотых

1. Линейное (векторное) пространство. Примеры (геометрические радиус-векторы, арифметическое пространство, пространство многочленов). Простейшие следствия из аксиом.
2. Подпространство, его критерий. Линейная оболочка системы векторов. Линейная оболочка - минимальное подпространство, содержащее данные векторы.
3. Линейная комбинация и линейная выразимость. Транзитивность отношения линейной выразимости. Эквивалентные системы векторов, критерий эквивалентности.
4. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Критерий линейной зависимости.
5. Лемма о замене.
6. База и ранг системы векторов.
7. Конечномерное пространство, его базис и размерность.
8. Эквивалентное определение: базис - максимальная линейно независимая система.
9. Эквивалентное определение: базис - минимальная полная система.
10. Координаты векторов линейного пространства. Их свойства.
11. Изоморфизм линейных пространств.
12. Размерность подпространства конечномерного пространства. Сумма и пересечение подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств (формула Грассмана).
13. Понятия столбцового и строчечного ранга матрицы. Эквивалентность столбцового и строчечного рангов для приведенных матриц.
14. Изменение столбцового ранга при строчечных преобразованиях матрицы
15. Изменение строчечного ранга при строчечных преобразованиях матрицы. Эквивалентность столбцового и строчечного рангов для произвольных матриц.
16. Критерий Кронекера–Капелли совместности системы линейных уравнений.
17. Пространство решений системы линейных однородных уравнений. Его базис (фундаментальная система решений) и размерность.
18. Линейное многообразие. Описание множества решений системы линейных неоднородных уравнений.
19. Задание линейного подпространства/многообразия в виде множества решений системы линейных уравнений.
20. Прямые и плоскости, их общие и параметрические уравнения.
21. Нахождение расстояния между точкой и прямой на плоскости, между точкой и плоскостью.
22. Нахождение расстояния между точкой и прямой в пространстве. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.
23. Замена базиса. Матрица перехода к новому базису. Изменение координат вектора при замене базиса

24. Аффинная система координат. Замена системы координат. Изменение координат точек при замене системы координат
25. Перестановки и подстановки. Их четность. Транспозиции. Изменение четности перестановки при транспозиции.
26. Определитель (детерминант). Его определение через полное разложение (комбинаторное определение). Транспонирование определителя.
27. Свойство линейности определителя. Изменение его при элементарных преобразованиях. Критерий равенства нулю определителя.
28. Лемма о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
29. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке (столбцу).
30. Минорный ранг матрицы. Его совпадение с рангом (столбцовым и строчечным). Метод окаймляющих миноров.
31. Работа с блочными матрицами. Метод Штрассена умножения матриц
32. Элементарные преобразования со строками (столбцами) матриц как домножение матрицы на матрицы специального вида.
33. Обратная матрица. Условия существования и единственности. Выражение коэффициентов обратной матрицы через алгебраические дополнения.
34. Формулы Крамера.
35. Теорема об умножении определителей и теорема Бине–Коши.
36. Линейные отображения (операторы). Матрица линейного отображения. Выражение координат образа вектора через матрицу линейного отображения и координаты вектора. Изменение матрицы отображения при замене базиса.
37. Сумма, умножение на число и произведение линейных отображений. Свойства этих операций. Соответствующие действия с матрицами отображений.
38. Ядро и образ линейного отображения. Ранг и дефект отображения.
39. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования. Подобные матрицы. Многочлены от преобразований.
40. Собственные векторы и собственные числа. Инвариантные подпространства. Индуцированное преобразование. Характеристический многочлен. Совпадение характеристических многочленов подобных матриц.
41. Определитель суммы двух матриц. Выражение коэффициентов характеристического уравнения через главные миноры матрицы.
42. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного числа. Критерий диагонализуемости линейного преобразования.
43. Теорема Жордана (без доказательства).