

Вопросы по алгебре и геометрии
к зимнему экзамену 2022–2023 уч.г. 1 семестр
3822Б1ПМ1, 3822Б1ПМ2, 3822Б1ПМ3, 3822Б1ПМ4

Лектор: *Н.Ю.Золотых*

1. НОД целых чисел. Алгоритм Евклида.
2. Расширенный алгоритм Евклида. Коэффициенты Безу (линейное разложение НОД).
3. Взаимно простые числа. Критерий взаимно простых чисел. Свойства взаимно простых чисел.
4. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел (теорема Евклида).
5. Основная теорема арифметики (о разложении целых чисел на простые множители).
6. Сравнения и классы вычетов. Операции (сложение, вычитание, умножение) с классами вычетов.
7. Поле комплексных чисел. Операции над комплексными числами в алгебраической форме записи.
8. Тригонометрическая форма записи и геометрическая интерпретация комплексных чисел. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической записи.
9. Формула Муавра. Извлечение корня натуральной степени из комплексных чисел.
10. Бинарная алгебраическая операция. Ассоциативность. Коммутативность. Полугруппа. Примеры полугрупп. Нейтральный элемент в полугруппе. Симметричные элементы в полугруппе.
11. Группа. Примеры групп. Обратные элементы в группе.
12. Кольцо. Примеры колец. Мультипликативное свойство нуля. Правило знаков при умножении. Дистрибутивность при вычитании. Лемма о сокращении.
13. Поле. Примеры числовых полей. Делители нуля в поле.
14. Кольцо вычетов. Необходимое и достаточное условие, при котором кольцо вычетов является полем.
15. Изоморфизм групп, колец и полей.
16. Кольцо многочленов. Деление с остатком. Делимость.
17. Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида.
18. Расширенный алгоритм Евклида для многочленов. Коэффициенты Безу (линейное разложение НОД).
19. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимно простых многочленов. Свойства взаимно простых многочленов.
20. Неприводимые многочлены над полем. Существование и единственность разложения многочленов на неприводимые множители.
21. Деление многочлена на линейный множитель. Теорема Безу. Схема Горнера
22. Корни многочлена. Кратность корня. Производная многочлена. Корни производной.
23. Лемма о младшем члене (в доказательстве основной теоремы алгебры).
24. Лемма о старшем члене (в доказательстве основной теоремы алгебры).
25. Доказательство основной теоремы алгебры.
26. Разложение многочлена на линейные множители над полем комплексных чисел. Разложение на линейные и квадратичные множители многочлена с вещественными коэффициентами.

27. Формулы Виета.
28. Интерполяционный многочлен. Его существование и единственность. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
29. Отыскание рациональных корней многочлена с целыми (рациональными) коэффициентами.
30. Примитивные многочлены. Лемма Гаусса. Эквивалентность неприводимости многочленов над полем рациональных и кольцом целых чисел.
31. Признак Эйзенштейна неприводимости многочленов над кольцом целых чисел.
32. Матрицы. Определения и свойства операций сложения, умножения на число и умножения матриц.
33. Операция транспонирования матриц. Ее свойства
34. Метод Гаусса и метод Жордана–Гаусса решения систем линейных уравнений. Ступенчатый и приведенный вид матрицы.
35. Линейное (векторное) пространство. Примеры (геометрические радиус-векторы, арифметическое пространство, пространство многочленов). Простейшие следствия из аксиом.
36. Подпространство, его критерий. Линейная оболочка системы векторов. Линейная оболочка – минимальное подпространство, содержащее данные векторы.
37. Линейная комбинация и линейная выразимость. Транзитивность отношения линейной выразимости. Эквивалентные системы векторов, критерий эквивалентности.
38. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Критерий линейной зависимости и усиленный (уточненный) критерий линейной зависимости.
39. Лемма о замене.
40. База и ранг системы векторов.
41. Конечномерное пространство, его базис и размерность.
42. Эквивалентное определение: базис – максимальная линейно независимая система.
43. Эквивалентное определение: базис – минимальная полная система.
44. Координаты векторов линейного пространства. Их свойства.
45. Изоморфизм линейных пространств.
46. Размерность подпространства конечномерного пространства. Сумма и пересечение подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств (формула Грассмана).
47. Прямая сумма подпространств. Критерий прямой суммы. Понятие проекции на подпространство параллельно другому подпространству.