Нижегородский Государственный Университет им. Н. И. Лобачевского
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Автор: профессор В. Н. Шевченко (*Copyright©1993г.*)

Отпечатал в Microsoft Word: студент Рябов Василий (группа 822)

Нижний Новгород.

Введение.

На основе уже изложенных в курсе результатов о квадратичных формах в пособии излагается аффинная (§1) и ортогональная (§3) классификация n-мерных поверхностей второго порядка, а также исследуется вопрос о пересечении такой поверхности с прямой (§2). Более детально рассмотренные случаи *n=2* и *n=3* позволяют получить все основные результаты о кривых и поверхностях второго порядка существенно быстрее, чем при их традиционном изложении.

Примем следующие обозначения:

R — поле вещественных чисел;

R^n — n-мерное линейное пространство вектор-столбцов над R;

E^n — n-мерное евклидово пространство.

Все матрицы, векторы и скаляры предполагаются вещественными. Знак т над матрицей обозначает её транспонирование.

r = rank A — ранг матрицы A.

Введём также следующее определение:

Аффинной называется система координат, включающая в себя произвольный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и начало координат.

Если базис — ортонормированный, то система координат называется *декартовой*.

§1. Аффинная классификация кривых и поверхностей второго порядка.

1.1 Прежде всего установим, как меняется уравнение кривой (поверхности) второго порядка при изменении аффинной системы координат, и найдём его простейший вид.

Обобщим понятие кривой и поверхности 2-го порядка, введя определение *квадрики* следующим образом:

Определение 1. Уравнение

$$F(x) = x^T A \cdot x + 2a^T x + \alpha = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

где A — ненулевая симметричная матрица,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ : \\ : \\ a_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ : \\ x_n \end{pmatrix}$$ и $\alpha \in R$, назовём *уравнением квадрики,*

а множество точек, удовлетворяющих ему, — *квадрикой.*

В частности, при *n=2* **(1)** является уравнением кривой 2-го порядка, а при *n=3* — уравнением поверхности 2-го порядка.

Аффинное преобразование координат введём с помощью формулы

$$x = Q\,y + c, \qquad \textbf{(2)}$$

где Q — произвольная невырожденная $(n \times n)$ - матрица и

c – произвольный n-мерный вектор-столбец.

В новых переменных $\boldsymbol{y}$ уравнение **(1)** запишется в виде

$$F(Qy + c) = y^T Q^T AQ \cdot y + (c^T AQ + a^T Q)y + y^T (Q^T Ac + Q^T a) + c^T Ac + a^T c + c^T a + \alpha = 0.$$

Заметим, что $c^T Ac + a^T c + c^T a + \alpha = F(c)$.

Введём матрицу $B = Q^T AQ$ (по определению матрица B конгруэнтна матрице A, откуда следует, что B — тоже ненулевая симметричная матрица).

Обозначив $b = Q^T(Ac + a)$ и $\beta = F(c)$, получим, что

$$F(x) = F(Qy + c) = y^T By + 2b^T y + \beta. \qquad \textbf{(3)}$$

Введём *(n+1)*-мерный вектор $\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ и матрицу $\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline a & A \end{array}\right) = (a_{ij})$, где

i=0,…,n; *j=0,…,n;* $a_{00} = \alpha$, $(a_{10},\ldots,a_{n0})^T = a.$

Нетрудно проверить (сделайте это), что теперь уравнение квадрики **(1)** записывается в виде

$$F(x) = \overline{x}^T \overline{A}\overline{x} = 0. \qquad \textbf{(1')}$$

Действительно,

$$(1, x^T)\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = (1, x^T)\begin{pmatrix} \alpha + a^T x \\ a + Ax \end{pmatrix} = \alpha + x^T a + a^T x + x^T Ax.$$

Аналогично поступим и с переменным y: введём $\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ и $\overline{B} = \begin{pmatrix} \beta & b^T \\ b & B \end{pmatrix}$. Тогда $\overline{y}^T \overline{B}\,\overline{y} = y^T By + 2b^T y + \beta$, и уравнение (3) можно записать в виде

$$F(Qy + c) = \overline{y}^T \overline{B}\overline{y} = 0. \qquad \textbf{(3')}$$

Естественно возникает вопрос: нельзя ли, используя матрицу Q, построить такую матрицу $\overline{Q}$, чтобы $\overline{x} = \overline{Q}\overline{y}$? Нетрудно проверить, что искомая матрица имеет вид $\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & Q \end{pmatrix}$.

Оказывается также (проверьте это сами), что $\overline{B} = \overline{Q}^T \overline{A}\overline{Q}$, то есть расширенные матрицы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также конгруэнтны. ■

Таким образом, нами доказана

<u>*Теорема 1.*</u>

При аффинном преобразовании **(2)** уравнения **(1)** и **(1')** переходят соответственно в уравнения **(3)** и **(3')**, где

$$B = Q^T AQ, b = Q^T(Ac + a), \beta = F(c) \qquad \textbf{(4)}$$

и

$$\overline{B} = \overline{Q}^T \overline{A}\overline{Q}. \qquad \textbf{(5)}$$

<u>*Определение 2.*</u> Уравнение **(3')** назовём *аффинно-эквивалентным* уравнению (1'),если существует аффинное преобразование координат **(2)**, переводящее **(1')** в **(3').** В противном случае будем говорить, что уравнения **(1')** и **(3')** аффинно не эквивалентны.

Нетрудно показать (сделайте это сами), что введённое нами отношение аффинной эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно, и, следовательно, множество всех уравнений **(1')** и соответствующих им матриц $\overline{A}$ разбивается на классы аффинной эквивалентности.

<u>*Следствие 1*</u> из теоремы 1.

Для аффинной эквивалентности уравнений (1') и (3') необходима и достаточна конгруэнтность двух пар матриц: A и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

<u>*Определение 3.*</u> Обозначим через s(A) число положительных коэффициентов в канонической форме матрицы A; через r(A) – её ранг.

<u>*Следствие 2.*</u>

s(A) = s(B); s($\overline{A}$) = s($\overline{B}$);

r(A) = r(B); r($\overline{A}$) = r($\overline{B}$).

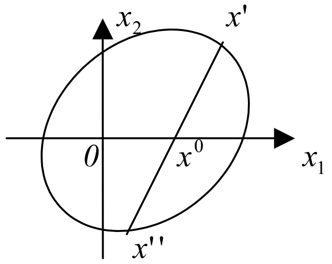
Таким образом, мы нашли систему аффинных инвариантов. Позже мы увидим, что эта система полностью определяет принадлежность уравнения **(1')** тому или иному классу аффинной эквивалентности.

Замечание. Вместо пары (s,r) можно рассматривать пару (s,t), где t = t(A) = r(A)-s(A) – число отрицательных коэффициентов в канонической форме матрицы A.

1.2. Рассмотрим частный случай аффинного преобразования **(2)** – сдвиг $x' = x+c$: тогда уравнение **(3)** будет иметь вид $F(x+c) = x^T Ax + 2x^T(Ac+a) + F(c) = 0.$

Определение 4. Точка x^o называется *центром* поверхности, если вместе с точкой x', принадлежащей поверхности, ей принадлежит и точка x'', симметричная точке x' относительно x^o.

Определение 5. Квадрика называется *центральной*, если она имеет хотя бы один центр.



(Во избежание путаницы заметим, что во многих учебниках по аналитической геометрии *центральной* называется поверхность, имеющая единственный центр).

Покажем, что множество центров x^o квадрики **(1)** совпадает с множеством решений системы уравнений

$$Ax^o + a = 0. \qquad \textbf{(6)}$$

Для этого запишем уравнение (1) для точек $x' = x^o + x$ и $x'' = x^o - x$, принадлежащих квадрике и симметричных относительно x^o, и вычтем одно уравнение из другого.

Теперь становится ясно, какие упрощения можно сделать с помощью сдвига: если квадрика центральная, то, взяв в качестве x один из её центров, мы избавимся от линейных членов в уравнении **(1).**

1.3. Нетрудно теперь описать все квадрики *К*, содержащие свой центр x^o (хотя бы один). Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы $Ax^o + a = 0$ и $F(x^o) = 0$. Если перенести центр x^o квадрики *К* в начало координат, то положить $x' = x - x^o$, то получим, что b=0 и $\beta = 0$, следовательно, уравнение перепишется в виде

$$x'^T Ax' = (x - x^o)^T A(x - x^o) = 0. \qquad \textbf{(7)}$$

Так как любое решение системы $Ax' = 0$ удовлетворяет уравнению **(7)**, то квадрика *К* содержит все свои центры (если *r=rank A<n,* то они составляют подпространство размерности *n-r*).

Определение 6. Квадрика *К* называется *конической с центром* x^o, если её можно представить уравнением вида **(7).**

Итак, отличительным свойством любой конической квадрики с центром в начале координат является однородность задающего её уравнения. Нетрудно видеть, что такая квадрика вместе с точкой x' содержит все точки вида ax', где *a* – произвольное действительное число, то есть прямую с направляющим вектором x'.

Последнее свойство обычно принимают за геометрическое определение конической поверхности.

1.4. Естественно возникает вопрос: как найти такую замену переменных (2), при помощи которой уравнение квадрики приводится к возможно более простому виду. Кроме того, можно поставить вопрос о разбиении множества кривых (поверхностей) на классы аффинной эквивалентности в зависимости от канонического вида задающих их уравнений.

Теорема 2.

Уравнение любой квадрики аффинно эквивалентно одному из следующих четырёх уравнений:

$$\sum_{j=1}^{s} y_j^2 - \sum_{j=s+1}^{r} y_j^2 = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2y_{r+1} \end{cases}.$$

Уравнения разных видов и уравнения одного вида с разными r и s аффинно не эквивалентны.

Доказательство.

Рассмотрим уравнение квадрики (1): $x^T Ax + 2a^T x + a = 0,$ где A – ненулевая симметричная матрица размера $(n \times n)$. По теореме Лагранжа **([1]**,**[3]**) существует такая невырожденная матрица Q, что

$$Q^T AQ = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ldots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ldots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ldots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right),$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{s}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{t}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-r}$$

причём числа $s = s(A), t = t(A)$ и $r = r(A)$ определены единственным образом (закон инерции для квадратичных форм ([1]-[3])).

Отсюда и из *теоремы 1* следует, что уравнение **(1)** заменой переменных $x = Qy$ приводится к виду $\sum\limits_{j=1}^{s} y_j^2 - \sum\limits_{j=s+1}^{r} y_j^2 + 2\sum\limits_{j=1}^{n} b_j y_j + \alpha = 0$.

Далее, используя приём выделения полного квадрата, сделаем такую замену переменных:

$$y_j' = \begin{cases} y_j + b_j & , j = 1,\ldots,s; \\ y_j - b_j & j = s+1,\ldots,r; \\ y_j & , j = r+1,\ldots,n. \end{cases}$$

Тогда в новых переменных получим уравнение

$$\sum_{j=1}^{s} y_j'^2 - \sum_{j=s+1}^{r} y_j'^2 + 2\sum_{j=r+1}^{n} b_j y_j' = \alpha', \text{ где } \alpha' = \sum_{j=1}^{r} b_j^2 - \alpha .$$

Здесь возможны следующие ситуации:

1). $b_{r+1} = \ldots = b_n = 0$. Тогда

а) если $\alpha' = 0$, получаем уравнение $\sum\limits_{j=1}^{s} y_j'^2 - \sum\limits_{j=s+1}^{r} y_j'^2 = 0$;

б) если $\alpha' > 0$, то, положив $y_j'' = \dfrac{y_j'}{\sqrt{\alpha'}}$ и разделив обе части уравнения на α', получим в правой части единицу;

в) если $\alpha'<0$, то, положив $y_j''=\dfrac{y_j'}{-\sqrt{\alpha'}}$ и разделив обе части уравнения на $(-\alpha')$, в правой части получим -1.

2). Рассмотрим теперь случай, когда по крайней мере один из коэффициентов $b_j \neq 0 (j=r+1,...,n)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $b_{r+1}\neq 0$ (В противном случае поменяем переменные местами, это – невырожденное преобразование).

Сделаем замену переменных: $\begin{cases} y_{r+1}''=-\sum\limits_{j=r+1}^{n} b_j y_j' -\alpha'. \\ y_j''=y_j', j\neq r+1 \end{cases}$

Такими образом, в этом случае уравнение квадрики приводится к последнему из указанных в утверждении теоремы видов.

Докажем теперь, что канонический вид квадрики определяется по уравнению **(1)** однозначно. Во-первых, как уже отмечалось, из закона инерции следует, что s и r, а значит, и матрица B, определяются единственным образом. Далее рассмотрим расширенные матрицы $\overline{B}$ для каждого из четырёх случаев. Нетрудно показать, что все эти матрицы попарно не конгруэнтны, откуда по *теореме 1* следует, что уравнение квадрики каждого из четырёх видов нельзя аффинным преобразованием привести к другому виду.

$$\overline{B}_1=\left(\begin{array}{c|ccccccccc} -1 & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & & & & \\ & & \ldots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \ldots & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ldots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{array}\right);\quad \overline{B}_2=\left(\begin{array}{c|ccccccccc} 1 & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & & & & \\ & & \ldots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \ldots & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ldots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{array}\right);$$

$$\overline{B}_3=\left(\begin{array}{c|ccccccccc} 0 & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & & & & \\ & & \ldots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \ldots & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ldots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{array}\right);\quad \overline{B}_4=\left(\begin{array}{c|cccccc|cccc} 0 & & & & & & & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline & 1 & & & & & & & & & \\ & & \ldots & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & \ldots & & & & & \\ & & & & & & -1 & & & & \\ \hline -1 & & & & & & & 0 & & & \\ 0 & & & & & & & & 0 & & \\ \ldots & & & & & & & & & \ldots & \\ 0 & & & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Теорема доказана. ■

<u>*Следствие.*</u> Квадрика является центральной, если $rank\overline{A}\leq rankA+1$, и нецентральной в противном случае.

Замечание. Рассмотрим два уравнения: $x^2 - y^2 = 1$ и $-x^2 + y^2 = -1$. Очевидно, что они описывают одну и туже кривую, но аффинно не эквивалентны, так как соответствующие расширенные матрицы $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ – не конгруэнтны. Чтобы исключить из рассмотрения такие случаи, договоримся считать, что всегда $s \ge t$, или, что то же самое, $2s \ge r$ (в противном случае все коэффициенты уравнения можно умножить на -1).

В частности, при *n=2* из *теоремы 2* следует

Теорема 3.

Для любой кривой второго порядка существует аффинная система координат, в которой она задаётся одним из девяти аффинно не эквивалентных друг другу уравнений, перечисленных в следующей таблице:

Таблица 1.

Название кривой	Каноническое уравнение	Расширенная матрица $\overline{B}$	*s(B)*	*r(B)*	$s(\overline{B})$	$r(\overline{B})$
Эллипс	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	2	2	2	3
Мнимый эллипс	$x_1^2 + x_2^2 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	2	2	3	3
Пара мнимых пересекающихся прямых	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	2	2	2	2
Гипербола	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	1	2	1	3
Пара пересекающихся прямых	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	1	2	1	2
Пара параллельных прямых	$x_1^2 = 1$	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	1	1	1	2
Пара мнимых параллельных прямых	$x_1^2 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	1	1	2	2
Пара совпадающих прямых	$x_1^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	1	1	1	1
Парабола	$x_1^2 = 2x_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	1	2	3

Для доказательства теоремы нам достаточно убедиться в том, что любую кривую 2-го порядка в соответствующих аффинных координатах можно описать одним из перечисленных канонических уравнений. Так как $r = rank\ B$ может принимать лишь два значения $(r = 1{,}2)$, и $s \ge t$, то матрица В может иметь один из следующих трёх видов: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, причём только в последнем случае может получиться нецентральная кривая. Очевидно, приведённая таблица исчерпывает все возможные варианты расширенных матриц, соответствующих каждой из трёх матриц B. ■

В трёх мерном случае имеет место аналогичная

Теорема 4.

Для любой поверхности второго порядка существует аффинная система координат, в которой она задаётся одним из 17 аффинно не эквивалентных друг другу уравнений.

Для доказательства достаточно перебрать все возможные варианты, как это было сделано в теореме 3(попутно мы дадим представление о том, как выглядят соответствующие поверхности, и приведём их названия). ■

Рассмотрим сначала поверхности, уравнения которых содержат не все координаты, то есть совпадают с 9 уравнениями, рассмотренными в предыдущей теореме.

Лемма 1 ([3]).

Пусть уравнение $\varphi(x_1, x_2) = 0$ задаёт на плоскости некоторую кривую L. Тогда в трёхмерном пространстве это уравнение задаёт цилиндрическую поверхность с направляющей L и образующими, параллельными оси x_3.

Таким образом, 9 поверхностей, канонические уравнения которых не зависят от координаты x_3, представляют собой цилиндры с образующими, параллельными оси x_3; в сечениях этих цилиндров плоскостью $0x_1x_2$ лежат соответствующие кривые 2-го порядка, перечисленные в теореме 3:

$x_1^2 + x_2^2 = 1$ - эллиптический цилиндр;

$x_1^2 + x_2^2 = -1$ - мнимый эллиптический цилиндр;

$x_1^2 - x_2^2 = 1$ - гиперболический цилиндр;

$x_1^2 = 2x_2$ - параболический цилиндр;

$x_1^2 - x_2^2 = 0$ - пара плоскостей $x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 = 0$, пересекающихся по оси x_3;

$x_1^2 + x_2^2 = 0$ - пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой – оси x_3;

$x_1^2 - 1 = 0$ - пара параллельных плоскостей $x_1 = 1, x_2 = -1$;

$x_1^2 + 1 = 0$ - пара мнимых параллельных плоскостей;

$x_1^2 = 0$ - пара совпадающих плоскостей $x_1 = 0$.

Уравнения оставшихся поверхностей должны включать все 3 координаты. Переберём варианты строения матрицы B (с учётом условия $s \ge t$):

$$1)\ B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix};\ 2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix};\ 3)\ B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix};\ 4)\ B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

(В двух последних случаях необходимо, чтобы расширенная матрица $\overline{B}$ содержала ненулевой коэффициент при переменной x_3(иначе получится один из перечисленных выше цилиндров), следовательно, здесь получаются нецентральные поверхности).

Представим все эти поверхности в следующей таблице:

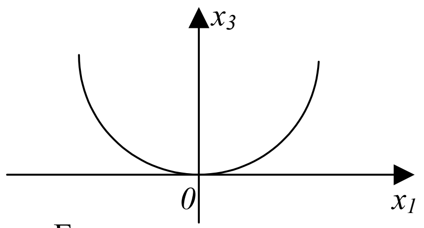
Таблица 2.

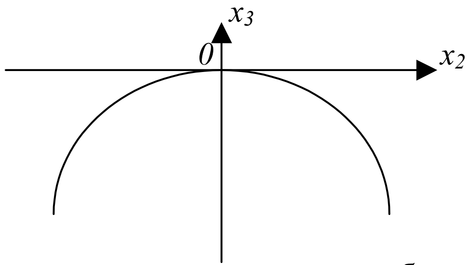
Название поверхности	Каноническое уравнение	*s(B)*	*r(B)*	$s(\overline{B})$	$r(\overline{B})$
Эллипсоид	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$	3	3	3	4
Мнимый эллипсоид	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$	3	3	4	4
Мнимый конус	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	3	3	3	3
Однополосный гиперболоид	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=1$	2	3	2	4
Двуполостный гиперболоид	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=-1$	2	3	3	4
Конус	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	2	3	2	3
Эллиптический параболоид	$x_1^2+x_2^2=2x_3$	2	2	2	4
Гиперболический параболоид	$x_1^2-x_2^2=2x_3$	1	2	3	4

Итак, мы показали, что каждую поверхность 2-го порядка можно задать одним из 17 уравнений, перечисленных в таблицах 1 и 2. Проверив, что 17 строк таблиц 1 и 2 содержат различные наборы аффинных вариантов *s(B), r(B),* $s(\overline{B})$ и $r(\overline{B})$, мы получаем доказательство теоремы 4.

Чтобы представить себе вид поверхности, можно предложить следующий приём: фиксируя по очереди каждую из переменных, будем рассматривать кривые, получающиеся в соответствующих сечениях, что даёт наглядное представление о поверхности.

Например, чтобы построить поверхность, заданную уравнением $x_1^2-x_2^2=2x_3$ (гиперболический параболоид), посмотрим, какой вид имеет каждое из сечений этой поверхности плоскостями $x_2=const$ и $x_1=const$:





Если менять одну из координат (например, x_2), то соответствующая парабола будет перемещаться параллельно самой себе, причём её вершина будет скользить по другой параболе. Кроме того, в сечениях $x_3=const$ лежат гиперболы $x_1^2-x_2^2=const$ (в плоскости $x_3=0$ это – две пересекающиеся прямые, являющиеся асимптотами данного семейства парабол).

Можно провести аналогичный анализ остальных случаев, однако мы поступим иначе. Будем сначала считать, что x_1,x_2,x_3 – декартовы координаты, а затем подвергать полученную поверхность аффинному преобразованию. Тогда можно воспользоваться наличием в левой части канонического уравнения выражения $x_1^2+x_2^2$ и следующей леммой:

Лемма 2 (о поверхностях вращения).

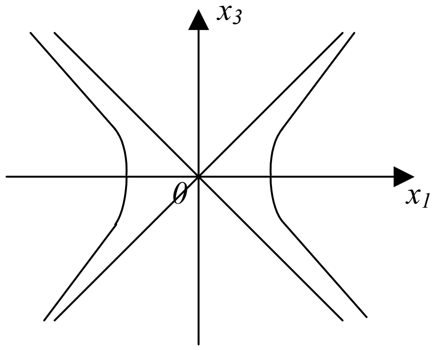
Пусть *x,y,z* – декартова система координат, и пусть в плоскости *y=0* уравнение $\varphi(x,z)=0$ задаёт линию *L*. Тогда уравнение $\varphi(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$ задаёт поверхность *П*, образованную вращением линии *L* вокруг координатной оси *Oz*.

Доказательство этой леммы можно найти, например, в **[3]**.

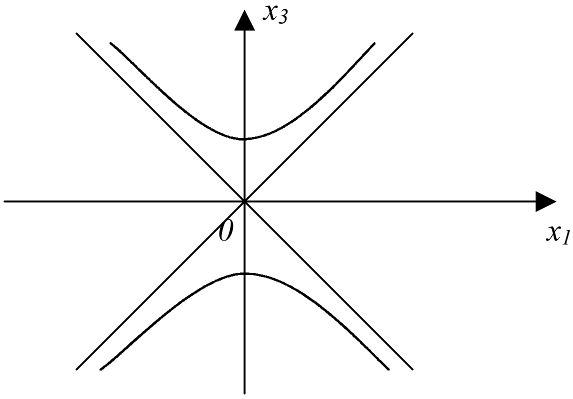
Замечание.

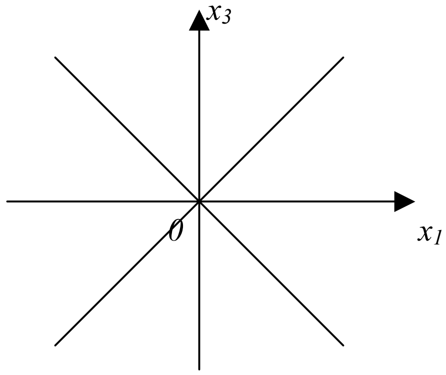
Перейдя от декартовых координат к цилиндрическим (ρ,φ,z), мы увидим, что, подобно тому, как уравнение цилиндрической поверхности не содержит координаты *z*, уравнение поверхности вращения не содержит координаты *φ*.

Чтобы построить поверхность, заданную уравнением $x_1^2+x_2^2-x_3^2=1$ (однополостный гиперболоид), поступим следующим образом: возьмём $x_2=0$ и рассмотрим гиперболу $x_1^2-x_3^2=1$, лежащую в сечении нашей поверхности плоскостью Ox_1x_3, а затем будем вращать её вокруг оси Ox_3:



Аналогично вращением гиперболы $x_1^2 - x_3^2 = -1$ вокруг оси Ox_3 получается и двуполостный гиперболоид:





Асимптоты гиперболы являются образующими конуса $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

<u>§2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КВАДРИКИ И ПРЯМОЙ.</u>

<u>2.1.</u> Напомним, что в §1 мы определили квадрику (обозначим её через *К*) как множество точек, удовлетворяющих уравнению **(1)**:

$$F(x) = x^T Ax + 2a^T x + \alpha = 0$$

Рассмотрим прямую *П*, заданную параметрически: $П = (x/x_0 = x_0 + tq)$, где x_0 - некоторая начальная точка, *t* – параметр и *q* – направляющий вектор.

Чтобы понять, что представляет собой пересечение квадрики *К* и прямой *П*, подставим в уравнение **(1)** уравнение прямой:

$$F(x_0 + tq) = x^T Ax_0 + 2a^T x_0 + \alpha + 2t(x_0^T Aq + a^T q) + t^2 q^T Aq = 0.$$

Учитывая, что $x_0^T Ax_0 + 2a^T x_0 + \alpha = F(x^0)$, получаем, что уравнение для параметра *t*, соответствующего точкам пересечения *К* и *П*, имеет вид:

$$t^2 q^T Aq + 2t(x_0^T A + a^T)q + F(x^0) = 0 \qquad \mathbf{(8)}$$

Введём следующее определение:

<u>*Определение 7.*</u> Ненулевой вектор *q* называется *асимптотическим вектором* относительно уравнения **(1)**, если $q^T Aq = 0,$ и неасимптотическим в противном случае.

Говорят также, что асимптотический вектор задаёт *асимптотическое направление*.

Рассмотрим пример. Пусть задано каноническое уравнение гиперболы: $x_1^2 - x_2^2 = 1$. Найдём для неё асимптотические направления. Здесь $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то есть компоненты асимптотического вектора удовлетворяют уравнению $q_1^2 - q_2^2 = 0.$ Можно считать, что $q_2 = 1;$ таким образом, эта гипербола имеет два асимптотических направления: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2. Если направляющий вектор прямой *П* является асимптотическим относительно квадрики *К*, то уравнение (8) превращается в уравнение $2t(x_0^T A + a^T)q + F(x^0) = 0$, линейное относительно *t*, и здесь возможны следующие ситуации:

(а) Если $x_0^T A + a^T \neq 0,$ то уравнение имеет единственное решение и $К \cap П$ представляет собой единственную точку.

Если $x_0^T A + a^T = 0,$ то

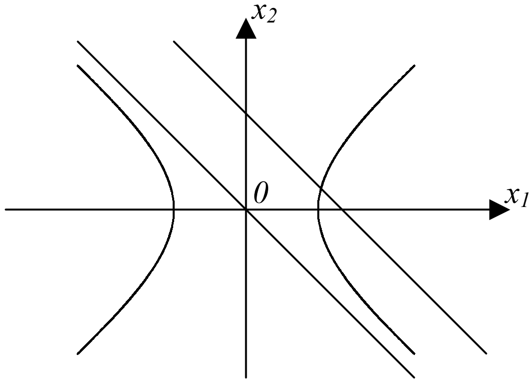
(б) при $F(x^0) \neq 0$ уравнение не имеет решений, *К∩П=Ø;*

(в) при $F(x^0) = 0$ уравнение превращается в тождество, то есть $П \subseteq К$.

В рассмотренном в П.2.1. примере существуют две возможности взаимного расположения гиперболы и прямой, направляющий вектор которой является асимптотическим для этой гиперболы:

а) К∩П=Ø;

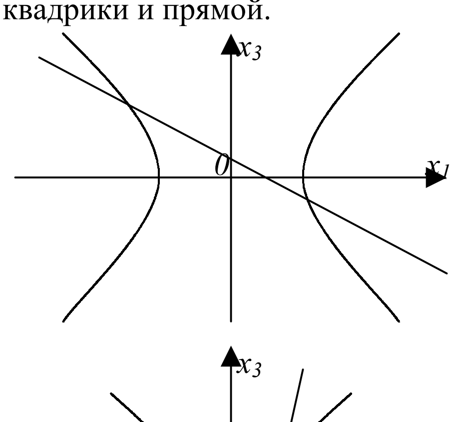
б) гипербола и прямая пересекаются в одной точке.



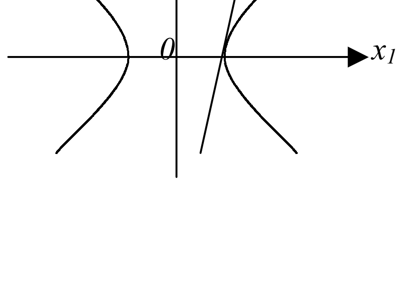
Приведём ещё один пример. Пусть матрица квадрики имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$; в зависимости от вида расширенной матрицы $\overline{A}$ она может задавать однополостный или двуполостный гиперболоид или конус. Асимптотические направления для всех трёх поверхностей определяются одним и тем же уравнением $q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = 0$, представляющим собой уравнение конуса. Такой конус называется <u>*конусом асимптотических направлений*</u> для каждой из этих поверхностей.

Пусть теперь направление, соответствующее нашей прямой, не является асимптотическим, то есть $q^T A q \neq 0$. В этом случае уравнение **(8)** представляет собой квадратное уравнение относительно *t*. В зависимости от того, какими будут корни этого уравнения, реализуются различные возможности взаимного расположения квадрики и прямой.

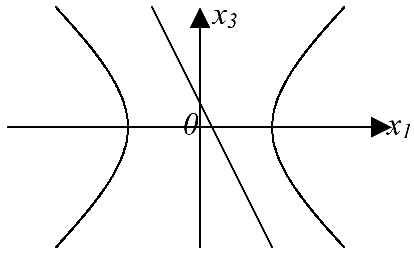
а) Если уравнение **(8)** имеет два различных вещественных корня $(t_1 \neq t_2; t_1, t_2 \in R)$, то прямая *П* пересекает квадрику *К* в двух точках – $x^1 = x_0 + t_1 q$ и $x^2 = x_0 + t_2 q$.



б) Если уравнение имеет одинаковые действительные корни $(t_1 = t_2)$, то прямая *П* касается квадрики *К*.



в) Если корни уравнения **(8)** – комплексные, то $K \cap \Pi = \varnothing$.



2.3. Найдём асимптотические направления для нецилиндрических поверхностей второго порядка; результаты представим в виде следующей таблицы:

Таблица 3.

Поверхность	Каноническое уравнение	Уравнение для асимптотического направления $q^T Aq = 0$	Асимптотические направления
Эллипсоид	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0$	не существуют
Однополостный гиперболоид	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$	$q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = 0$	конус, описываемый уравнением $q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = 0$ *(конус асимптотических направлений)*
Двуполостный гиперболоид	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$		
Конус	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$		
Эллиптический параболоид	$x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$	$q_1^2 + q_2^2 = 0$	*(0,0,1)*
Гиперболический параболоид	$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$	$q_1^2 - q_2^2 = 0$	*(0,0,1)* *(1,1,α)* *(1,-1,β)*

Задание. Найдите асимптотические направления для остальных поверхностей второго порядка.

2.4. Перечислим поверхности второго порядка, содержащие на себе прямые (будем рассматривать лишь те поверхности, канонические уравнения которых содержат все три координаты, так как по определению цилиндрические поверхности сплошь состоят из параллельных прямых).

В случае конуса задача тоже решается просто. Из определения конуса $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ следует, что он целиком состоит из прямых асимптотических направлений, проходящих через начало координат. Через точку *(0,0,0)* проходит бесконечное множество прямых, принадлежащих конусу; через любую точку конуса $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ проходит единственная прямая, принадлежащая конусу, состоящая из точек $(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$, где α – действительное число, пробегающее значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Выше мы получили следующие необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямая $\Pi = \{x = x_0 + tq\}$ целиком принадлежала квадрике *К*, заданной уравнением **(1)**:

(1) $q^T Aq = 0$, то есть вектор *q* должен быть асимптотическим относительно квадрики *К*.

(2) $(x_0^T A + a^T)q = 0$.

(3) $F(x^0) = 0$, то есть $x^0 \in K$.

Теорема 5.

Через каждую точку $x^0 = (x_0, y_0, z_0)$ гиперболического параболоида $x^2 - y^2 = 2z$ проходят ровно две прямые, целиком ему принадлежащие: $\Pi_1 = x^0 + tq^1$ и $\Pi_2 = x^0 + tq^2$, где $q^1 = (1,1, x_0 - y_0)^T$ и $q^2 = (1,-1, x_0 + y_0)^T$.

Доказательство. Условие ***(1)*** в рассматриваемом случае $\left(A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right)$ даёт $q_1^2 - q_2^2 = 0$, следовательно, все $q \neq 0$, удовлетворяющие ему, коллинеарны одному из трёх векторов: $q^1 = (0,0,1)$, $q^2 = (1,1,\alpha)$, $q^3 = (1,-1,\beta)$. Поскольку $Ax^0 + a = (x_0, -y_0, -1)^T$, то условие ***(2)*** для q^1 не выполняется, для q^2 даёт $\alpha = x_0 - y_0$ и для q^3 – $\beta = x_0 + y_0$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 6.

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят ровно две принадлежащие ему прямые; двуполостный гиперболоид не содержит на себе прямых.

Доказательство. Для обоих гиперболоидов условие ***(1)*** даёт $q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = 0$. Так как $q \neq 0$, то, не уменьшая общности, можно считать, что $q = (q_1, q_2, 1)$, где $q_1^2 + q_2^2 = 1$ **(9)**

Так как $a = 0$, условие ***(2)*** даёт $q_1 x_0 + q_2 y_0 = z_0$ **(10)**

В декартовых координатах q_1, q_2 **(9)** – уравнение окружности, а **(10)** – уравнение прямой, для которой расстояние от начала координат есть $\rho = \dfrac{|z_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$.

Если $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = -1$, то $\rho^2 = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{x_0^2 + y_0^2} > 1$, следовательно, **(9)** и **(10)** не имеют общих решений (рис. (а)), то есть двуполостный гиперболоид не содержит прямых.

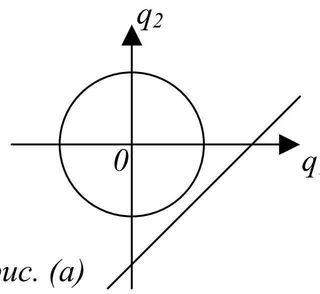


рис. (а)

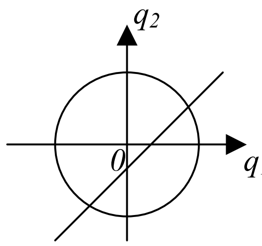


рис. (б)

В случае однополостного гиперболоида $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$, $\rho^2 = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{x_0^2 + y_0^2} < 1$, следовательно, прямая **(10)** пересекает окружность **(9)** ровно в двух точках *(рис. (б))*. Теорема доказана. ■

Выразим q_1, q_2 через x_0, y_0, z_0. Из **(9)** и **(10)** следует, что

$$y_0^2 q_2^2 = y_0^2(1 - q_1^2) = z_0^2 + x_0^2 - 2x_0 z_0 .$$

Решая это квадратное уравнение относительно q_1, получаем, что $q_1 = \dfrac{y_0 z_0 \pm |y_0|}{x_0^2 + y_0^2}$ (проделайте опущенные выкладки сами).

Аналогично получается $q_2 = \dfrac{y_0 z_0 \pm |x_0|}{x_0^2 + y_0^2}$. Подставив найденные значения q_1 и q_2 в **(10)**, получим правило комбинирования знаков для выбора нужной пары решений: $\pm x_0 |y_0| \pm y_0 |x_0| = 0$ (Проверьте, что при этом выполнится и **(9)**).

Более простой в вычислительном отношении способ нахождения прямых, лежащих на однополостном гиперболоиде, состоит в следующем:

Перепишем уравнение однополостного гиперболоида *К* в виде $(x-2)(x+2)=(1-y)(1+y)$ и рассмотрим прямые $\Pi_1(k_1)$ и $\Pi_2(k_2)$, заданные парами линейных уравнений

$$\begin{cases} x-z=k_1(1-y) \\ k_1(1+z)=1+y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-z=k_2(1+y) \\ k_2(x+z)=1-y \end{cases}.$$

Проверьте, что при $y_0^2 \neq 1$, $k_1=\dfrac{x_0-z_0}{1-y_0}$ и $k_2=\dfrac{x_0-z_0}{1+y_0}$ прямые $\Pi_1(k_1)$ и $\Pi_2(k_2)$ различны, проходят через точку (x_0,y_0,z_0) и принадлежит *К*.

Проведите самостоятельно аналогичные рассуждения для гиперболического параболоида, записав его уравнение в виде $(x-y)(x+y)=2z$.

Доказательство того, что ни одна из оставшихся поверхностей второго порядка не содержит прямых, мы также предоставляем читателю.

2.5. *Лемма 3.*

Для любой квадрики *К* существует базис из неасимптотических направлений.

Доказательство. Пусть $\{0,e_1,\dots,e_n\}$ − аффинная система координат, в которой квадрика имеет канонический вид. Тогда, не уменьшая общности, можно считать, что матрица квадрики устроена следующим образом:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{s}\;\underbrace{\qquad\qquad}_{r-s}\;\underbrace{\qquad\qquad}_{n-r}$$

Заметим, что векторы e_j, $j=r+1,\dots,n$ − асимптотические.

Рассмотрим систему векторов $e_1',\dots,e_n'$, где $e_j'=\begin{cases} e_j & ,\ j=1,\dots,r; \\ e_1+e_j & ,\ j=r+1,\dots,n. \end{cases}$

Очевидно, что $\{e_j'\}$ − базис, поскольку матрица перехода при таком преобразовании будет невырожденной. Докажем, что все векторы e_j', $j=1,\dots,n$, − неасимптотические относительно квадрики *К*. Действительно, $e_j'^T A e_j' = \begin{cases} 1, & j=1,\dots,s; \\ -1, & j=s+1,\dots,r; \\ 1, & j=r+1,\dots,n. \end{cases}$

Лемма доказана. ■

Теорема 7.

Пусть даны *(n+1)* точек $x_\nu \in K$, $\nu=0,\dots,n$, не лежащих в одной гиперплоскости, и пусть *q* – неасимптотическое направление относительно *К* $(q^T A q \neq 0)$. Тогда существует номер *t*, такой, что прямая $\Pi_i=\{x=x_i+tq\}$ пересекает квадрику *К* ровно в двух точках.

Доказательство. Рассмотрим систему векторов $q_\nu=x_0-x_\nu$, $(\nu=1,\dots,n)$. Эти векторы линейно независимы (так как иначе точки x_ν принадлежали бы одной гиперплоскости) и, следовательно, составляют базис n–мерного пространства. Тогда для любого вектора q существуют числа $\alpha_1,...,\alpha_n$, такие, что $q=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu q_\nu$.

Далее применим метод доказательства от противного. Предположим, что не существует такого номера t, что $|\Pi_i \cap K| = 2$, то есть каждая из прямых Π_i касается квадрики K в точке x_i. Запишем условие касания прямой и квадрики. Пусть $\Pi = \{x = x_0 + tq\}$, $q^T Aq \neq 0$. $|\Pi \cap K| = 1$ тогда и только тогда, когда уравнение **(8)** имеет два одинаковых действительных корня, то есть его дискриминант равен нулю. Это условие можно записать следующим образом:

$$((x_0^T A + a^T)q)^2 = F(x_0)\cdot q^T Aq .$$

Если $x_i \in K$, то $F(x_i)=0$, следовательно, для каждого $i=1,...,n$ должно выполняться равенство $(x_i^T A + a^T)q = 0$, а значит, выполняются равенства $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot(x_i^T A + a^T)q = 0$ и $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot(x_0^T A + a^T)q = 0$.

Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot(x_0^T - x_i^T)Aq = 0$, или $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_i^T Aq = 0$, а это противоречит тому, что q – неасимптотическое направление.

Теорема доказана. ■

Теперь становится ясен геометрический смысл различия между асимптотическим и неасимптотическим направлениями: если поверхность K «достаточно богата точками», то есть на ней можно расположить вершины симплекса (в трёхмерном случае – тетраэдра), то прямую, соответствующую неасимптотическому относительно K направлению, всегда можно подвинуть параллельно самой себе так, чтобы она пересекала K ровно в двух точках.

Теорема 8.

Пусть q – неасимптотическое направление относительно квадрики K $(q^T Aq \neq 0)$. Множество середин хорд, полученных пересечением квадрики с семейством прямых с направляющим вектором q, удовлетворяет уравнению

$$x^T Aq + a^T q = 0 \qquad (\text{или } q^T Ax + q^T a = 0) \qquad \textbf{(11)}$$

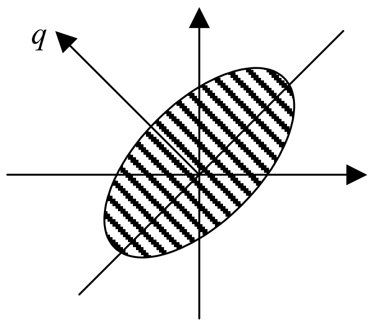
Доказательство. Запишем формулу для середины хорды x^1x^2 ($x^1 = x_0 + t_1 q$, $x^1 = x_0 + t_1 q$, где t_1, t_2 – различные вещественные корни уравнения **(8)**):

$\frac{x'+x''}{2} = x_0 + \frac{t_1+t_2}{2}\cdot q$, где $\frac{t_1+t_2}{2}$ находится по формуле Виета: $\frac{t_1+t_2}{2} = -\frac{(x_0^T A + a^T)q}{q^T Aq}$ **(12)**

Умножив обе части равенства **(12)** $x = x_0 - q\frac{(x_0^T A + a^T)q}{q^T Aq}$ на $q^T A$ слева, мы и получим равенство **(11)** . ■

Определение 8. Гиперплоскость **(11)** называется *диаметральной, сопряжённой* направлению q.

В качестве примера можно привести эллипс, пересечённый семейством прямых с направляющим вектором q. Прямая, проходящая через середины получающихся при этом хорд, и является диаметральной гиперплоскостью, сопряжённой вектору q.



Теорема 9.

Пересечение всех диаметральных гиперплоскостей совпадает множеством центров квадрики *K*.

Доказательство. Рассмотрим $\{q_i\}$ − базис из неасимптотических направлений (*лемма 1* утверждает, что такой базис всегда существует). Рассмотрим множество диаметральных гиперплоскостей, сопряжённых векторам q_i: $(x^T A + a^T)q_i = 0$. Так как $\{q_i\}$ − базис, то любой вектор q можно представить в виде линейной комбинации векторов q_i. Поэтому $(x^T A + a^T)q = 0$ для всех неасимптотических направлений квадрики, а так как множество решений системы уравнений $x^T A + a = 0$ совпадает с множеством центров квадрики, то этим теорема доказана. ■

§3. ОРТОГОНАЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

3.1. Пользуясь аффинной классификацией, можно лишь установить, какому из классов аффинной эквивалентности принадлежит данная кривая или поверхность, но при такой классификации кривые (поверхности) внутри каждого класса считаются неразличимыми между собой, например, эллипс $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$ аффинно эквивалентен окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Однако существует множество задач, для решения которых этого недостаточно − например, те задачи, где нас интересуют размеры полуосей эллипса. Поэтому естественно было бы попытаться ввести такую классификацию, чтобы, кроме класса аффинной эквивалентности, она учитывала и метрические параметры кривой (поверхности). В основе такой классификации должны лежать аффинные преобразования, оставляющие эти параметры неизменными. Поскольку, как нам уже известно, из всех линейных преобразований только ортогональные преобразования сохраняют длины (а следовательно, и углы) в евклидовом пространстве, естественно ввести следующее определение.

Определение 9. Преобразование $x = Qy + c$, **(13)**

где Q – ортогональная матрица, а c – произвольный вектор (вектор сдвига), назовём *изометрией.* Если *c=0*, то такую изометрию назовём *ортогональным* преобразованием; если *Q=E*, то назовём изометрию *сдвигом*.

Определение 10. Будем говорить, что уравнение **(1)** *ортогонально эквивалентно* уравнению **(3)**, если его можно получить из **(1)** изометрией **(13)**.

Нетрудно проверить (сделайте это), что отношение ортогональной эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Введём следующие обозначения:

при $1 \le k \le n$:

$\Delta_k(A)$ − угловой минор *к*-го порядка матрицы *A*, то есть $\Delta_k(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ .. & & .. \\ .. & & .. \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$;

$S_k(A)$ − сумма главных миноров *к*-го порядка матрицы *A*, то есть

$$S_k(A) = \sum_J \det A(J,J) = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} \begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & \dots & a_{j_1 j_k} \\ .. & & .. \\ .. & & .. \\ a_{j_k j_1} & \dots & a_{j_k j_k} \end{vmatrix};$$

и при $1 \le k \le n+1$:

$$\Delta_k(\overline{A}) = \begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,k-1} \\ .. & & .. \\ .. & & .. \\ a_{k-1,0} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{vmatrix} ;\ S_k(\overline{A}) = \sum_J \det \overline{A}(J,J) = \sum_{0 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} \begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & \dots & a_{j_1 j_k} \\ .. & & .. \\ .. & & .. \\ a_{j_k j_1} & \dots & a_{j_k j_k} \end{vmatrix} .$$

Теорема 10.

Если уравнение **(3)** получено из уравнения **(1)** изометрией **(13)**, то

(а) $B = Q^{-1}AQ$ и $\det \overline{A} = \det \overline{B}$.

(б) Если *c=0*, то $\overline{B} = \overline{Q^{-1}}\,\overline{A}\,\overline{Q}$.

(в) Если *Q=E* и $c_{r+1} = \ldots = c_n = 0$, то $\Delta_k(\overline{A}) = \Delta_k(\overline{B})$ *(k=r+1,…,n+1)*.

Для *доказательства* напомним полученные в ***§1*** формулы $B = Q^T AQ$ и $\overline{B} = \overline{Q}^T\,\overline{A}\,\overline{Q}$. Так как в рассматриваемом случае *Q* − ортогональная матрица, то $Q^T = Q^{-1}$, откуда следует утверждение *(а)*. Если *c=0*, то матрица $\overline{Q}$ тоже ортогональна, что доказывает утверждение *(б)*. В случае *(в)* матрица $\overline{Q}$ имеет вид $\overline{Q} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & .. & .. & 0 & \\ c_1 & 1 & & & & \\ .. & & .. & & & 0 \\ .. & & & .. & & \\ c_r & & & & 1 & \\ \hline & & 0 & & & E \end{array}\right)$.

Рассмотрим сначала произведение $\overline{A}\cdot\overline{Q}$: по формуле Бине-Коши **[2]** минор $\Delta_k(\overline{A}\cdot\overline{Q})$ равен сумме произведений миноров, расположенных в первых *к* строках матрицы $\overline{A}$, и миноров, расположенных в первых *к* строках матрицы $\overline{Q}$; из последних ненулевым является лишь угловой минор. Затем умножим $\overline{A}\cdot\overline{Q}$ слева на $\overline{Q}^T$ и проведём аналогичные рассуждения. Теорема доказана. ■

Следствие 1. $S_k(A) = S_k(B)$, *k=1,…,n* (величины $S_k(A)$ называются *ортогональными инвариантами*).

Следствие 2. Собственные числа матриц *A* и *B* совпадают.

Следствие 3. Если *c=0*, то $S_k(\overline{A}) = S_k(\overline{B})$, *k=1,…,n+1* (величины $S_k(\overline{A})$ называются *полуинвариантами*).

3.2 Рассмотрим упрощения, которые можно получить применением изометрии к уравнению квадрики.

Теорема 11.

Существует такая ортогональная матрица *Q*, что заменой переменных *x=Qy* уравнение **(1)** приводится к виду $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} b_j y_j + \alpha = 0$, **(14)**

в котором коэффициенты $\lambda_j \ne 0$ определяются единственным образом (с точностью до перестановки).

Эта теорема следует из теоремы о симметричных матрицах **[1]**, утверждающей, что для каждой симметричной матрицы *A* существует такая ортогональная матрица *Q*, что $Q^T AQ = Q^{-1}AQ = D$.

Напомним, что на диагонали матрицы *D* стоят собственные числа матрицы *A*, а столбцы матрицы *Q* составляют ортонормированный базис из собственных векторов матрицы *A*. Задача нахождения матриц *Q* и *D* − уже знакомая нам задача приведения квадратичной формы к главным осям.

Переставим базисные векторы так, чтобы соответствующие нулевые собственные числа (если они есть) оказались на последних местах, а ненулевые − упорядочим по убыванию, то есть будем считать, что $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_r \neq 0$, $\lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0$, где *r* − ранг матрицы *A*.

Рассмотрим соответствующую уравнению **(14)** расширенную матрицу

$$\overline{B} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} \gamma & b_1 & ... & b_r & b_{r+1} & ... & b_n \\ \hline b_1 & \lambda_1 & & & & & \\ ... & & ... & & & 0 & \\ b_r & & & \lambda_r & & & \\ \hline b_{r+1} & & & & & & \\ ... & & 0 & & & 0 & \\ b_n & & & & & & \end{array}\right)$$

и (при $k \geq 2$) её минор $\overline{B}(I,J)$ со строками из множества $I = \{i_1,...,i_k\}$ и столбцами из множества $J = \{j_1,...,j_k\}$, где $0 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ и $0 \leq j_1 < ... < j_k \leq n$. Если $i_{k-1} > r$ или $j_{k-1} > r$, то $\overline{B}(I,J) = 0$ и, следовательно, $rank\overline{B} \leq r+2$, а для выполнения неравенства $\overline{B}(I,J) \neq 0$ при *k=r+2* необходимо, чтобы $i_\nu = j_\nu = \nu - 1$ *(ν=1,...,r+1)*, и в этом случае $\overline{B}(I,J) = b_{i_{r+2}} \cdot b_{j_{r+2}} \cdot \prod_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu$.

Отсюда, в частности, следует, что $S_{r+2}(\overline{B}) = \prod_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \cdot \sum_{j=r+1}^{n} b_j^2$, **(15)**

и, так как $S_r(B) = \prod_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu$, а по <u>*теореме 10*</u> $S_r(A) = S_r(B)$ и $S_{r+2}(\overline{A}) = S_{r+2}(\overline{B})$, то $\sum_{j=r+1}^{n} b_j^2 = \dfrac{S_{r+2}(\overline{A})}{S_r(A)}$.

Нетрудно видеть, что из *теорем 10* и *11* мы получаем ещё одно следствие.

<u>*Следствие 4.*</u>

Если уравнение **(1)** ортогонально эквивалентно уравнению **(3)**, *r(A)=r* и $r(\overline{A}) \leq r(A)+1$, то $S_{r+1}(\overline{A}) = S_{r+1}(\overline{B})$; если же $r(\overline{A}) = r(A)+2$, то $S_{r+2}(\overline{A}) = S_{r+2}(\overline{B})$.

Во второй сумме в уравнении **(14)** занулим первые *r* слагаемых с помощью сдвига

$$y_j' = \begin{cases} \dfrac{b_j}{\lambda_j} + y_j, & j = 1,...,r; \\ y_j, & j = r+1,...,n. \end{cases}$$

Таким образом, мы привели уравнение **(14)** к виду $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j'^2 + 2\sum_{j=r+1}^{n} b_j y_j' + \alpha' = 0$, **(14')**

которому соответствует расширенная матрица

$$\overline{C} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} \gamma & 0 & ... & 0 & b_{r+1} & ... & b_n \\ \hline 0 & \lambda_1 & ... & 0 & & & \\ ... & ... & ... & ... & & 0 & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_r & & & \\ \hline b_{r+1} & & & & & & \\ ... & & 0 & & & 0 & \\ b_n & & & & & & \end{array}\right).$$

3.3. Дальнейшее упрощение уравнения **(14')** различается для центральных и нецентральных квадрик. Заметим, что не существует изометрии, переводящей центральную квадрику в нецентральную, так как они аффинно не эквивалентны.

Теорема 12.

Любое уравнение **(1)** центральной квадрики ортогонально эквивалентно уравнению

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j^2 + \gamma = 0, \qquad \textbf{(16)}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ − упорядоченные по убыванию ненулевые собственные числа соответствующей уравнению **(1)** матрицы *A*, а $\gamma = \dfrac{S_{r+1}(\overline{A})}{S_r(A)}$ (в частности при *r=n* $\gamma = \dfrac{\det \overline{A}}{\det A}$).

Доказательство. Воспользовавшись *теоремой 11*, приведём уравнение квадрики к виду **(14)**. Покажем, что $b_{r+1} = \ldots = b_n = 0$. Действительно, если существует такое $j \ge r+1$, что $b_j \ne 0$, то по формуле **(15)** $S_{r+2}(\overline{B}) \ne 0$ и, следовательно, $rank\,\overline{A} > rank A + 1$ вопреки предположению теоремы. Теперь для приведения уравнения **(14)** к виду **(16)** достаточно сделать сдвиг $y_j{}' = \begin{cases} y_j + \dfrac{b_j}{\lambda_j}, & j = 1, \ldots, r; \\ y_j, & j = r+1, \ldots, n. \end{cases}$

Итак, мы показали, что при некотором γ уравнение **(1)** ортогонально эквивалентно уравнению **(16)**. Отсюда по *следствию 4:* $S_{r+1}(\overline{A}) = \gamma \cdot \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$, а так как $\prod_{j=1}^{n} \lambda_j = S_r(A)$, то $\gamma = \dfrac{S_{r+1}(\overline{A})}{S_r(A)}$, что и заканчивает доказательство теоремы. ■

Полученные результаты позволяют сформулировать уже очевидный критерий ортогональной эквивалентности уравнений **(1)** и **(3)** для центральных квадрик.

Следствие 5.

Если *r(A)=r* и $r(\overline{A}) \le r+1$, то уравнение **(1)** ортогонально эквивалентно уравнению **(3)** тогда и только тогда, когда *r(B)=r*, $r(\overline{B}) \le r+1$, $S_j(A) = S_j(B)$ *(j=1,…,r)* и $S_{r+1}(\overline{A}) = S_{r+1}(\overline{B})$.

В частности, если уравнение вида $\sum_{j=1}^{\rho} \alpha_j x_j^2 + \delta = 0$ (где $\alpha_1 \ge \ldots \ge \alpha_\rho$) ортогонально эквивалентно уравнению **(16)**, то $\rho = r$, $\delta = \gamma$ и $\alpha_j = \lambda_j$ *(j=1,…,r)*.

Теорема 13.

Любое уравнение **(1)** нецентральной квадрики ортогонально эквивалентно уравнению

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j z_j^2 + 2\mu \cdot z_{r+1} = 0, \qquad \textbf{(17)}$$

где $\mu^2 = \dfrac{S_{r+2}(\overline{A})}{S_r(A)}$ и знак μ можно выбирать произвольно, а $\lambda_j (j = 1, \ldots, r)$ имеют тот же смысл, что и в *теореме 12*.

Доказательство. Снова ортогональным преобразованием приведём уравнение квадрики к виду **(14)**; при этом $S_{r+2}(\overline{A}) = S_{r+2}(\overline{B}) = \left(\prod_{j=1}^{r} \lambda_j \right) \cdot \sum_{k=r+1}^{n} b_k^2 = S_r(A) \cdot \sum_{k=r+1}^{n} b_k^2$

(см. формулу **(15)**).

Обозначим $\mu^2 = \sum_{k=r+1}^{n} b_k^2 = \frac{S_{r+2}(\overline{A})}{S_r(A)}$. Заметим, что $\mu^2 > 0$, так как из условия теоремы следует, что среди коэффициентов $b_{r+1},...,b_n$ найдётся ненулевой. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, с помощью сдвига по первым *r* координатам избавимся от $\sum_{j=1}^{r} b_j y_j$.

Найдём ортогональное преобразование, заменяющее оставшуюся сумму $\sum_{j=r+1}^{n} b_j y_j$ одним слагаемым $\mu \cdot y_j'$. Для этого в *(n-r)* − мерном пространстве строк рассмотрим вектор-строку $(b_{r+1},...,b_n) = b'$ и положим $e_{r+1}' = \frac{b'}{\mu}$. Дополним e_{r+1}' до ортонормированного базиса $e_{r+1}',...,e_n'$ (это возможно, так как $|e_{r+1}'| = 1$) и сделаем ортогональную замену переменных $Q_1 y = y'$, где

$$Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline & e_{r+1}' \\ 0 & \ldots \\ & e_n' \end{array}\right),$$ а E_r − единичная матрица порядка *r*.

Очевидно, что матрица Q_1 − ортогональная и что при такой замене: $y_k' = y_k$ для *k=1,...,r*, $y_{r+1}' = \frac{1}{\mu}\sum_{j=r+1}^{n} b_j y_j$; в новых переменных уравнение квадрики примет вид

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j'^2 + 2\mu \cdot y_{r+1}' + \gamma = 0.$$

Наконец, введём вектор переменных *z* такой, что $z_k = y_k'$ для $k \neq r+1$, а $z_{r+1} = y_{r+1}' + \frac{\gamma}{2\mu}$, в результате чего и получим уравнение **(17)**. Теорема доказана. ■

Как и для случая центральных квадрик, очевидно, справедливо

<u>Следствие 6.</u>

Если *r(A)=r* и $r(\overline{A}) = r+2$, то уравнение **(1)** ортогонально эквивалентно уравнению **(3)** тогда и только тогда, когда $S_j(A) = S_j(B)$ *(j=1,...,r)* и $S_{r+2}(\overline{A}) = S_{r+2}(\overline{B})$.

В частности, если уравнение вида $\sum_{j=1}^{\rho} \alpha_j x_j^2 + 2\nu x_{\rho+1} = 0$ ортогонально эквивалентно уравнению **(17)** и $\alpha_1 \geq ... \geq \alpha_\rho$, то $\rho = r$, $\alpha_j = \lambda_j$ *(j=1,...,r)* $\nu = \mu$ или $\nu = -\mu$.

<u>3.4.</u> Дальнейшее упрощение уравнений **(16)** и **(17)** можно получить с помощью умножения их на некоторую отличную от нуля константу (заметим, что, вообще говоря, не существует изометрии, равносильной такому преобразованию). В результате уравнение **(17)** можно заменить равносильным ему уравнением $\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_j}{\mu} z_i^2 = 2z_{r+1}$, **(17')**

причём в силу произвольности выбора знака μ можно считать, что $\frac{\lambda_1}{\mu} > 0$, а уравнение **(16)** при

$\gamma \neq 0$ − уравнением $\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_j}{-\gamma} z_i^2 = 1$, **(16')**

и при $\gamma = 0$ − уравнением $\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_j}{\lambda_1} z_i^2 = 0$. **(16'')**

Назовём уравнения **(16’)**, **(16’’)** и **(17’)** *канонsocкими*, если в каждом из них коэффициенты при z_i^2 упорядочены по убыванию. Тогда из *теорем 12 и 13* вытекает, что для любой квадрики *K* существует декартова система координат, в которой *K* задаётся одним и только одним каноническим уравнением.

Определение 11. Назовём квадрики ортогонально эквивалентными, если их уравнения можно получить одно из другого изометрией и, возможно, умножением на некоторое число $c \neq 0$.

Нетрудно убедиться, что все виды возможных канонических уравнений кривых второго порядка представлены в таблице 4:

Таблица 4.

Название кривой	Каноническое уравнение	Условия для коэффициентов	Замена коэффициентов
Эллипс	$\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\lambda_1\gamma<0$	$a_i=\sqrt{-\frac{\gamma}{\lambda_i}}, i=1,2$
Мнимый эллипс	$-\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\lambda_1\gamma>0$	$a_i=\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_i}}, i=1,2$
Пара мнимых пересекающихся прямых	$z_1^2+\frac{z_2^2}{a_2^2}=0$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\gamma=0$	$a_2=\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$
Гипербола	$\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\lambda_1\gamma<0$	$a_i=\sqrt{\left\lvert\frac{\gamma}{\lambda_i}\right\rvert}, i=1,2$
Пара пересекающихся прямых	$z_1^2-\frac{z_2^2}{a_2^2}=0$	$\lambda_1\lambda_2<0,$ $\gamma=0$	$a_2=\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$
Пара параллельных прямых	$\frac{z_1^2}{a_1^2}=1$	$\lambda_1\gamma<0,$ $\lambda_2=0$	$a_1=\sqrt{-\frac{\gamma}{\lambda_1}}$
Пара мнимых параллельных прямых	$-\frac{z_1^2}{a_1^2}=1$	$\lambda_1\gamma>0,$ $\lambda_2=0$	$a_1=\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_1}}$
Пара совпадающих прямых	$z_1^2=0$	$\gamma=\lambda_2=0$	
Парабола	$qz_1^2=2z_2$	$\lambda_2=0$	$q=-\frac{\lambda_1}{\mu}$

Предыдущие результаты при *n=2* можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 14.

Для любой кривой второго порядка существует декартова система координат, в которой эта кривая задаётся одним из канонических уравнений, представленных в таблице 4. Две кривые второго порядка ортогонально эквивалентны тогда и только тогда, когда их канонические уравнения одинаковы.

Чтобы получить аналогичный результат для *n=3*, сначала, как и в **§1**, рассмотрим канонические уравнения поверхностей второго порядка, не содержащие переменной z_3. Очевидно, что все они представлены в таблице 4 (заменить название кривой на название соответствующей цилиндрической поверхности предоставляется читателю), а канонические уравнения восьми остальных поверхностей − в таблице 5.

Теорема 15.

Для любой поверхности второго порядка существует декартова система координат, в которой она задаётся одним из канонических уравнений, перечисленных в таблицах 4 и 5. Две поверхности второго порядка ортогонально эквивалентны тогда и только тогда, когда их канонические уравнения совпадают.

Таблица 5.

Название поверхности	Каноническое уравнение	Условия для коэффициентов	Замена
Эллипсоид	$\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1\lambda_3>0$, $\lambda_1\gamma<0$	$a_i=\sqrt{-\frac{\gamma}{\lambda_i}}, i=1,2,3$
Мнимый эллипсоид	$-\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}-\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1\lambda_3>0$, $\lambda_1\gamma>0$	$a_i=\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda_i}}, i=1,2,3$
Мнимый конус	$z_1^2+\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=0$	$\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1\lambda_3>0$, $\gamma=0$	$a_i=\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_i}}, i=2,3$
Однополостный гиперболоид	$\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}-\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1\lambda_3<0$, $\lambda_1\gamma<0$	$a_i=\sqrt{\left\lvert\frac{\gamma}{\lambda_i}\right\rvert}, i=1,2,3$
Двуполостный гиперболоид	$-\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1\lambda_3<0$, $\lambda_1\gamma>0$	$a_i=\sqrt{\left\lvert\frac{\gamma}{\lambda_i}\right\rvert}, i=1,2,3$
Конус	$z_1^2+\frac{z_2^2}{a_2^2}-\frac{z_3^2}{a_3^2}=0$	$\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1\lambda_3<0$, $\gamma=0$	$a_i=\sqrt{\left\lvert\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right\rvert}, i=2,3$
Эллиптический параболоид	$\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}=2z_3$	$\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_3=0$	$a_i=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_i}}, i=1,2$
Гиперболический параболоид	$\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}=2z_3$	$\lambda_1\lambda_2<0$, $\lambda_3=0$	$a_i=\sqrt{\left\lvert\frac{\mu}{\lambda_i}\right\rvert}, i=1,2$

§4. Рассмотрим в заключение задачу о пересечении квадрики *K* с *k*–мерным линейным многообразием $L=\{Qy+c, y\in R^k\}$, полученным сдвигом на вектор *c* линейного подпространства *Qy*, натянутого на линейно независимые столбцы *(n×k)*–матрицы *Q* (частный случай этой задачи при *k=1* рассмотрен в **§2**).

Снова, подставив *x=Qy+c* в уравнение **(1)**, получим уравнение **(3)**; однако теперь матрица $B=Q^TAQ$ имеет порядок *k*. При $B\neq 0$ $K\cap L$ представляет собой *k*–мерную квадрику, и для её аффинного анализа можно воспользоваться результатами **§1**. Если же нас интересуют метрические вопросы (связанные с длинами и углами), то используем результаты **§3**, считая, что уравнение **(1)** задано в декартовых координатах. Подчеркнём, что в этом случае столбцы матрицы *Q* должны составлять ортонормированную систему векторов.

Для иллюстрации рассмотрим две задачи.

Задача 1.

Определить аффинный класс линии, получающейся при пересечении конуса $\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}-x_3^2=0$ плоскостью $2x_1+x_2+x_3=1$.

Решение. Возьмём $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ и $c=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Тогда уравнение пересечения конуса с плоскостью имеет вид $\frac{(y_1+y_2)^2}{2}+\frac{(2y_1)^2}{2}-(1-2y_2)^2=0$, или $\frac{5}{2}y_1^2-\frac{7}{2}y_2^2+y_1y_2+4y_2=1$.

В результате замены переменных $y_1'=3\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y_1+\sqrt{\frac{1}{10}}y_2\right)$; $y_2'=9\sqrt{\frac{2}{5}}y_2-\sqrt{10}$ получим каноническое уравнение гиперболы: $y_1'^2-y_2'^2=-1$.

Задача 2. Найти координаты центра и длины полуосей гиперболы в задаче 1, считая, что x_1,x_2,x_3 – декартовы координаты.

Решение. Применив процесс ортогонализации к столбцам матрицы *Q*, получим матрицу *Q'* со столбцами $q_1'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\ -2/\sqrt{5}\\ 0\end{pmatrix}$, $q_2'=\frac{q_2-(q_2,q_1')q_1'}{\|q_2-(q_2,q_1')q_1'\|}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{30}\\ 1/\sqrt{30}\\ -5/\sqrt{30}\end{pmatrix}$.

В этом случае уравнение пересечения конуса и плоскости запишется в виде

$$\frac{\left(\frac{y_1}{\sqrt{5}}+\frac{2y_2}{\sqrt{30}}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{2y_1}{\sqrt{5}}+\frac{y_2}{\sqrt{30}}\right)^2}{2}-\left(1-\frac{5}{\sqrt{30}}y_2\right)^2=\frac{y_1^2}{2}-\frac{3}{4}y_2^2+\sqrt{\frac{10}{3}}y_2-1=0.$$

Сделав сдвиг $y_2'=y_2-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$, получим: $\frac{y_1^2}{2}-\frac{3}{4}y_2'^2+\frac{1}{9}=0$, или $\frac{9}{2}y_1^2-\frac{27}{4}y_2'^2=-1$.

Таким образом, полуоси гиперболы равны соответственно $\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, а её центр находится в точке $\left(y_1^0,y_2^0\right)=\left(0,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}\right)$, или, в исходных координатах, в точке $\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)=\left(\frac{4}{9},\frac{2}{9},-\frac{1}{9}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. М. В. Милованов, М. М. Толкачёв, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. «Алгебра и аналитическая геометрия». Минск, «Вышайшая школа», 1984.
2.