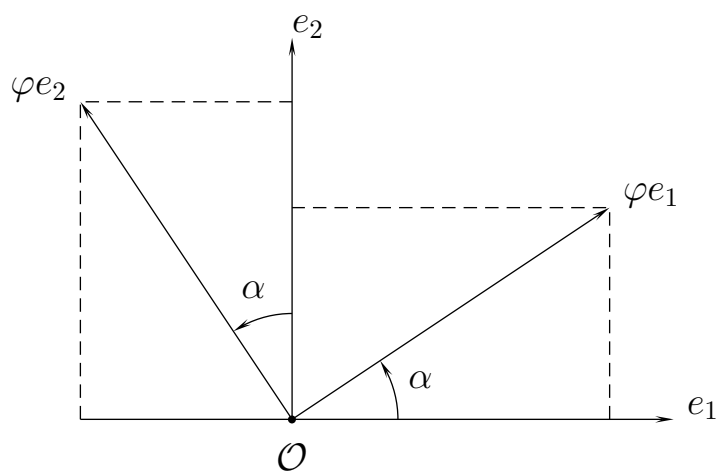


ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

*Рекомендовано методической комиссией
факультета вычислительной математики и кибернетики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
010500 «Прикладная математика и информатика»,
010400 «Информационные технологии»*

Нижний Новгород
2010

УДК 512.643
ББК 22.143
Л59

О т в е т с т в е н н ы й з а в ы п у с к :

председатель методической комиссии ф-та ВМК ННГУ,
д.ф.-м.н., проф. Л. П. Жильцова

Р е ц е н з е н т :

к.ф.-м.н., доц. каф. математического обеспечения
ф-та ВМК ННГУ А. В. Баркалов

Л59 *Линейные преобразования: учебно-методическое пособие* / Веселов С. И., Золотых Н. Ю., Смирнова Т. Г., Чирков А. Ю. — Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет, 2010. — 65 с.

В пособии содержатся теоретические сведения, примеры решения задач и контрольные задания по темам «Линейные преобразования» и «Жорданова форма линейного преобразования» курса «Геометрия и алгебра».

Предназначено для студентов факультета ВМК, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Информационные технологии».

УДК 512.643
ББК 22.143

© Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского, 2010

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим конечномерное линейное пространство V , заданное над полем F . Отображение $\varphi : V \rightarrow V$ называется *линейным преобразованием* пространства V (или *линейным оператором*, действующим в пространстве V), если для произвольных $x, y \in V$ и произвольного $\alpha \in F$ имеют место следующие равенства:

1. $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$,
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$.

Образом (или *множеством значений*) преобразования φ называется множество

$$\text{Im } \varphi = \varphi V = \{\varphi x : x \in V\}.$$

Ядром преобразования φ называется множество

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in V : \varphi x = o\}.$$

Образ и ядро линейного преобразования являются подпространствами в V . Их размерности называются соответственно рангом и дефектом преобразования и обозначаются соответственно $\text{rank } \varphi$ и $\text{def } \varphi$. Справедливо равенство $\text{rank } \varphi + \text{def } \varphi = \dim V$. Преобразование φ называется *вырожденным*, если $\text{def } \varphi > 0$. Преобразование φ называется *невырожденным*, если $\text{def } \varphi = 0$.

Произведением преобразования $\varphi : V \rightarrow V$ на число $\alpha \in F$ называется отображение $\alpha\varphi$, определяемое равенством $(\alpha\varphi)x = \alpha(\varphi x)$ для произвольного $x \in V$. *Суммой* преобразований $\varphi, \psi : V \rightarrow V$ называется отображение $\varphi + \psi$, определяемое равенством $(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x$ для произвольного $x \in V$. *Произведением* (или *композицией*) преобразований $\varphi, \psi : V \rightarrow V$ называется отображение $\varphi\psi$, определяемое равенством $(\varphi\psi)x = \varphi(\psi x)$ для

произвольного $x \in V$. Преобразование называется *обратным* к преобразованию φ и обозначается φ^{-1} , если $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$. Для преобразования φ обратное существует и единственно тогда и только тогда, когда φ невырождено.

Пусть $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис пространства V . Столбец, образованный координатами вектора x в базисе $\mathbf{e}$, обозначим через $[x]_{\mathbf{e}}$. Матрицей преобразования φ в базисе $\mathbf{e}$ называется матрица $[\varphi]_{\mathbf{e}} = ([\varphi e_1]_{\mathbf{e}}, [\varphi e_2]_{\mathbf{e}}, \dots, [\varphi e_n]_{\mathbf{e}})$, составленная из координат образов базисных векторов. Для произвольного $x \in V$ имеем

$$[\varphi x]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}}.$$

Линейное преобразование однозначно восстанавливается по образам базисных векторов. Если $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ — два базиса пространства V , а $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ — матрица перехода¹, то

$$[\varphi]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}.$$

Матрицы A, B называются *подобными*, если $B = Q^{-1}AQ$ для некоторой невырожденной матрицы Q . При этом матрица Q называется *трансформирующей*.

Образ преобразования φ является линейной оболочкой векторов, координатные столбцы которых в базисе $\mathbf{e}$ суть столбцы матрицы $[\varphi]_{\mathbf{e}}$. Ранг преобразования совпадает с рангом матрицы этого преобразования (каков бы ни был базис). Ядро преобразования определяется из системы уравнений $[\varphi]_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}} = 0$.

Для произвольных линейных преобразований φ, ψ пространства V и произвольного числа $\alpha \in F$ справедливы равенства

$$[\alpha\varphi]_{\mathbf{e}} = \alpha[\varphi]_{\mathbf{e}}, \quad [\varphi + \psi]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}} + [\psi]_{\mathbf{e}}, \quad [\varphi\psi]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}[\psi]_{\mathbf{e}}.$$

¹Матрица перехода $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = ([e'_1]_{\mathbf{e}}, [e'_2]_{\mathbf{e}}, \dots, [e'_n]_{\mathbf{e}})$ составлена из координат базисных векторов $\mathbf{e}'$ в базисе $\mathbf{e}$. Координаты вектора x в разных базисах связаны равенством $[x]_{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}'}$.

Для невырожденного преобразования φ справедливо равенство $[\varphi^{-1}]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}^{-1}$.

Нулевое преобразование θ определяется равенством $\theta x = 0$ для всех $x \in V$. *Тождественное преобразование* ε определяется равенством $\varepsilon x = x$ для всех $x \in V$. Из определения матрицы преобразования следует² $[\theta]_{\mathbf{e}} = 0$ и $[\varepsilon]_{\mathbf{e}} = E$.

Пусть

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

— многочлен с коэффициентами из поля F . Линейное преобразование

$$f(\varphi) = a_0\varphi^m + a_1\varphi^{m-1} + \dots + a_{m-1}\varphi + a_m\varepsilon$$

называют *значением многочлена* $f(\lambda)$ от преобразования φ . Матрица этого преобразования равна

$$[f(\varphi)]_{\mathbf{e}} = a_0[\varphi]_{\mathbf{e}}^m + a_1[\varphi]_{\mathbf{e}}^{m-1} + \dots + a_{m-1}[\varphi]_{\mathbf{e}} + a_mE.$$

Пусть пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств: $V = V_1 + V_2$, тогда для произвольного $x \in V$ определяются единственным образом векторы $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, такие, что $x = x_1 + x_2$. Преобразование φ , определяемое формулой $\varphi x = x_1$, называется *проектированием* пространства V на подпространство V_1 параллельно V_2 . Преобразование φ , определяемое формулой $\varphi x = x_1 - x_2$, называется *отражением* пространства V в подпространстве V_1 параллельно V_2 (или *симметрией* относительно V_1 параллельно V_2). Если пространство V — унитарное (евклидово), а подпространство V_2 является ортогональным дополнением к V_1 , то проектирование и отражение на (в) V_1 параллельно V_2 называются соответственно *ортогональным проектированием* и *ортогональным отражением*.

²Через E обозначена единичная матрица.

§ 2. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Подпространство W линейного пространства V называется *инвариантным* относительно преобразования φ , если $\varphi W \subseteq W$, т.е. $\varphi x \in W$ для любого x из W . *Сужением* (или *ограничением*) преобразования φ на инвариантное подпространство W называется преобразование $\psi : W \rightarrow W$, такое, что $\psi x = \varphi x$ для любого $x \in W$. Говорят также, что на инвариантном подпространстве W преобразование φ *индуцирует* преобразование ψ .

Ненулевой вектор $x \in V$ называется *собственным вектором* преобразования φ , если $\varphi x = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in F$. Число λ при этом называется *собственным значением* (числом) преобразования φ . Говорят также, что собственный вектор x *относится* к собственному значению λ (или *принадлежит* собственному значению λ). Множество всех собственных векторов, относящихся к одному собственному значению λ , дополненное нулевым вектором, является подпространством и называется *собственным подпространством*.

Вектор x является собственным вектором преобразования φ тогда и только тогда, когда его координатный столбец $[x]_e$ является нетривиальным решением системы линейных уравнений

$$([\varphi]_e - \lambda E) [x]_e = 0.$$

Для существования такого x необходимо и достаточно, чтобы

$$\det ([\varphi]_e - \lambda E) = 0.$$

Это уравнение, рассматриваемое относительно неизвестного λ , называется *характеристическим уравнением преобразования φ* . Оно не изменяется при замене базиса. Левая часть характеристического уравнения есть многочлен от λ степени $n = \dim V$. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом преобразования φ* .

Алгебраической кратностью собственного значения λ называется кратность числа λ как корня характеристического многочлена. *Геометрической кратностью* собственного значения λ называется размерность собственного подпространства, относящегося к собственному значению λ . Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности. Собственные векторы, относящиеся к разным собственным значениям, линейно независимы.

Все недиагональные элементы j -го столбца матрицы $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ равны нулю тогда и только тогда, когда j -й вектор базиса — собственный. При этом на диагонали в j -м столбце матрицы $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ находится собственное число. Матрица $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ диагональна тогда и только тогда, когда все векторы базиса $\mathbf{e}$ собственные. При этом на диагонали находятся соответствующие собственные числа. Преобразование называется *диагонализруемым*, если существует базис, в котором матрица преобразования диагональна.

Минор матрицы $A \in F^{n \times n}$ называется *диагональным* (или *главным*), если в нем с каждой строкой участвует столбец матрицы A с таким же номером. Сумма диагональных элементов (сумма главных миноров первого порядка) матрицы A называется ее *следом* и обозначается $\text{tr } A$. Многочлен

$$\det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + s_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + s_{n-1}(-\lambda) + s_n$$

называется *характеристическим многочленом матрицы* $A \in F^{n \times n}$. Коэффициент s_k этого многочлена равен сумме диагональных миноров порядка k . В частности, $s_1 = \text{tr } A$, $s_n = \det A$. Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

§ 3. МЕТОД ДАНИЛЕВСКОГО

Матрица вида

$$F(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

называется *матрицей Фробениуса*. Характеристический многочлен матрицы Фробениуса $F(a_1, \dots, a_n)$ равен

$$\Phi(a_1, \dots, a_n; \lambda) = (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n).$$

Каждая из следующих пар элементарных преобразований, переводит матрицу A в подобную:

- 1) Перестановка i -й и j -й строк вместе с перестановкой i -го и j -го столбца;
- 2) Домножение i -й строки на число $\alpha \neq 0$ вместе с делением i -го столбца на α ;
- 3) Прибавление к i -й строке j -й строки, умноженной на число α вместе с вычитанием из j -го столбца i -го столбца, умноженного на α .

Рассмотрим *метод Данилевского* нахождения коэффициентов характеристического уравнения заданной матрицы. Идея метода заключается в приведении матрицы с помощью элементарных преобразований, сохраняющих подобие, к блочно-треугольному виду, в котором на диагонали расположены фробениусовы клетки.

Пусть последние k строк матрицы A такие же, как у матрицы Фробениуса ($0 \leq k < n$).

1. Если $a_{n-k, n-k-1} \neq 0$, то прибавляя с подходящими множителями $(n-k-1)$ -й столбец к остальным столбцам и выполняя соответствующие преобразования, сохраняющие подобие, со строками (т. е. прибавляя с нужными множителями все строки к $(n-k-1)$ -й строке), приводим матрицу A к виду, в котором уже последние $k+1$ строк такие же, как в матрице Фробениуса.
2. Если $a_{n-k, n-k-1} = 0$, но $a_{n-k, j} \neq 0$ для некоторого $j < n-k-1$, то переставляем местами j -й и $(n-k-1)$ -й столбцы и j -ю и $(n-k-1)$ -ю строки. Получится матрица подобная исходной. Приходим к случаю 1.
3. Если $a_{n-k, j} = 0$ для всех $j < n-k$, то матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & F \end{pmatrix},$$

где B и F — квадратные матрицы, причем F — фробениусова матрица, поэтому задача сводится к вычислению характеристического многочлена для B .

§ 4. АННУЛИРУЮЩИЙ МНОГОЧЛЕН

Рассмотрим многочлен

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

с коэффициентами из поля F . *Значением* многочлена $f(\lambda)$ от преобразования φ называется преобразование

$$f(\varphi) = a_0\varphi^m + a_1\varphi^{m-1} + \dots + a_{m-1}\varphi + a_m\varepsilon.$$

Говорят, что многочлен $f(\lambda)$ *аннулирует* преобразование φ на подпространстве $W \subseteq V$, если $W \subseteq \text{Ker } f(\varphi)$, иными словами, $f(\varphi)x = 0$ для каждого вектора $x \in W$. Если подпространство W не указано, то предполагается, что $W = V$.

Аннулирующий многочлен на подпространстве W минимальной степени со старшим коэффициентом 1 называется *минимальным аннулирующим*, или просто *минимальным*. Для любого преобразования φ и любого подпространства φ минимальный аннулирующий многочлен существует и единственен.

Если $f(\lambda)$ — минимальный аннулирующий многочлен преобразования φ на W , то множество всех многочленов, аннулирующих φ на W , есть множество $\{f(\lambda)p(\lambda) : p(\lambda) \in F[\lambda]\}$.

Пусть многочлены $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ являются минимальными аннулирующими многочленами для преобразования φ на подпространствах W_1 , W_2 соответственно, причем $W_1 \subseteq W_2$. Тогда $f_1(\lambda)$ является делителем $f_2(\lambda)$.

Пусть многочлены $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ являются минимальными аннулирующими многочленами для преобразования φ на подпространствах W_1 , W_2 соответственно. Тогда $\text{НОК}(f_1(\lambda), f_2(\lambda))$ является минимальным аннулирующим многочленом для преобразования φ на подпространстве $W_1 + W_2$.

Опишем *метод Крылова* построения минимального многочлена. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ — базис подпространства W . Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ найдем такое s_i и такие

$$\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i-1, s_i},$$

что система векторов

$$e_i, \varphi e_i, \varphi^2 e_i, \dots, \varphi^{s_i-1} e_i$$

линейно независима, а система

$$e_i, \varphi e_i, \varphi^2 e_i, \dots, \varphi^{s_i} e_i$$

линейно зависима, причем

$$\alpha_{i0}e_i + \alpha_{i1}\varphi e_i + \dots + \alpha_{i,s_i-1}\varphi^{s_i-1}e_i + \varphi^{s_i}e_i = 0.$$

Легко видеть, что многочлен

$$f_i(\lambda) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\lambda + \dots + \alpha_{i,s_i-1}\lambda^{s_i-1} + \lambda^{s_i}$$

является минимальным на $L(e_i)$. Минимальным многочленом, аннулирующим φ на W , является НОК($f_1(\lambda), \dots, f_m(\lambda)$).

Теорема Гамильтона–Кэли утверждает, что характеристический многочлен преобразования является его аннулирующим многочленом на всем пространстве V . Иными словами, линейное преобразование является корнем своего характеристического многочлена.

Понятия аннулирующего и минимального многочлена естественным образом переносятся на квадратные матрицы.

§ 5. ТЕОРЕМА ЖОРДАНА

В этом параграфе предполагается, что пространство V задано над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Пусть

$$\chi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j)$$

— характеристический многочлен преобразования φ . Тогда минимальный многочлен, аннулирующий φ на всем пространстве V , имеет вид

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{l_s},$$

где $l_1, \dots, l_s$ — некоторые натуральные числа, такие, что $1 \leq l_i \leq k_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$).

Жордановой клеткой называется квадратная матрица следующего вида:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Теорема Жордана утверждает, что для каждого преобразования φ комплексного пространства существует базис, называемый *жордановым*, в котором матрица имеет блочно-диагональный вид

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

где $J_1, J_2, \dots, J_s$ — жордановы клетки. Матрица J называется *жордановой формой* преобразования φ . Жорданова форма определена единственным образом с точностью до перестановки жордановых клеток.

Пусть

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j)$$

— многочлен, аннулирующий преобразование φ на всем пространстве V . Множество

$$P_i = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$$

называется *корневым подпространством*, относящимся к собственному числу λ_i ($i = 1, 2, \dots, s$). Пространство V есть прямая сумма подпространств $P_1, P_2, \dots, P_s$:

$$V = P_1 + P_2 + \dots + P_s.$$

Каждое корневое подпространство P_i ($i = 1, 2, \dots, s$) инвариантно относительно преобразования φ . Сужение преобразования φ на P_i имеет одно собственное значение λ_i .

Схема построения жорданова базиса:

1. Определить собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$).
2. Выбирая в качестве λ поочередно каждое из собственных чисел, выполнить следующие действия:

- (a) найти $H_k = \ker \psi^k$ ($k = 1, \dots, q$), где $\psi = \varphi - \lambda E$, $q = \min \{k : H_k = H_{k+1}\}$;
- (b) найти систему $a_{11}, \dots, a_{1t_1}$, дополняющую базис пространства H_{k-1} до базиса пространства H_k ;
- (c) для каждого $h = 2, 3, \dots, q$ найти векторы $a_{h1}, \dots, a_{ht_h}$ (возможно, $t_h = 0$), дополняющие систему, состоящую из базиса пространства H_{k-h} и векторов

$$\psi^{h-1}a_{11}, \dots, \psi^{h-1}a_{1t_1}, \dots, \psi a_{h-1,1}, \dots, \psi a_{h-1,t_{h-1}},$$

до базиса пространства H_{k-h-1} (предполагается, что «базис» подпространства $H_0 = \{o\}$ не содержит векторов).

Заметим, что

$$\{o\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_q,$$

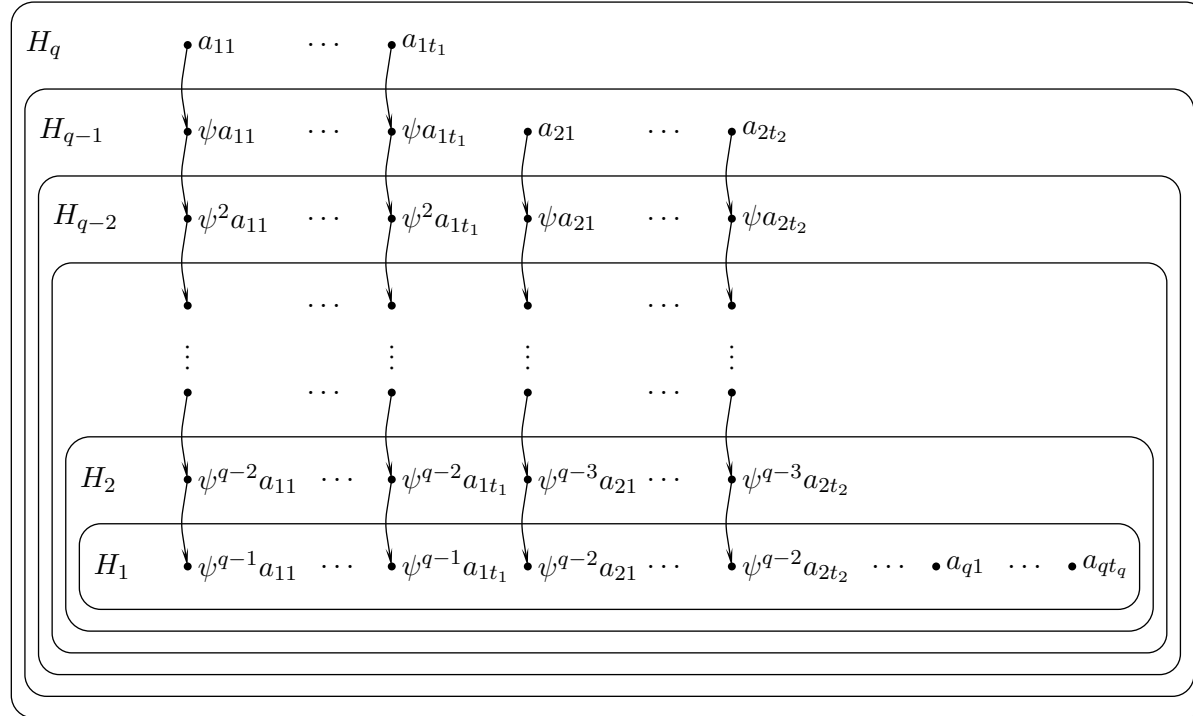


Рис. 1. Схема построения жорданова базиса

Система векторов

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \dots & & a_{1t_1} & & & & \\ \psi a_{11} \dots & & \psi a_{1t_1} & & a_{21} \dots & & a_{2t_2} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \psi^{q-1} a_{11} \dots & \psi^{q-1} a_{1t_1} & \psi^{q-2} a_{21} \dots & \psi^{q-2} a_{2t_2} \dots & a_{q1} \dots & a_{qt_q} & \end{array}$$

$$\psi^{q-1}a_{11}, \psi^{q-2}a_{11}, \dots, \psi a_{11}, a_{11}.$$

Жорданов базис получается объединением построенных базисов для всех корневых подпространств $P_1, \dots, P_s$. Каждой жордановой цепочке соответствует одна жорданова клетка.

§ 6. ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦЫ

Пусть

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

— минимальный многочлен матрицы $A \in \mathbf{C}$. Будем говорить, что функция $g(\lambda) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ задана на спектре матрицы A , если существует набор значений

[illegible]

где через $g^{(j)}(\lambda)$ обозначена j -я производная функции $g(\lambda)$. Обозначим через $g_A(\lambda)$ многочлен минимальной степени, такой, что

$$g_A^{(j)}(\lambda_i) = g^{(j)}(\lambda_i) \quad (i = 1, 2, \dots, s; j = 0, 1, \dots, k_i - 1).$$

Значение $g(A)$ функции $g(\lambda)$ определим как значение многочлена $g_A(\lambda)$ от матрицы A :

$$g(A) = g_A(A).$$

Значение функции $g(\lambda)$ от жордановой клетки $J(\lambda)$ можно найти по формуле

$$g(J(\lambda)) = \begin{pmatrix} g(\lambda) & \frac{g'(\lambda)}{1!} & \frac{g''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{g^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & g(\lambda) & \frac{g'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{g^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Если $B = Q^{-1}AQ$, то $g(B) = Q^{-1}g(A)Q$.

§ 7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1. Линейное преобразование трехмерного арифметического пространства переводит линейно независимые векторы $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 0, -1)^\top$ соответственно в векторы $b_1 = (3, 5, 0)^\top$, $b_2 = (3, 6, -1)^\top$, $b_3 = (-3, -8, 1)^\top$. Найти матрицу этого преобразования:

а) в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0)^\top$, $e_2 = (0, 1, 0)^\top$, $e_3 = (0, 0, 1)^\top$;

б) в базисе a_1, a_2, a_3 .

Решение. Искомое преобразование существует и единственно, так как векторы a_1, a_2, a_3 — линейно независимые и, следовательно, составляют базис трехмерного арифметического пространства.

а) Имеют место соотношения $b_i = [\varphi]_{\mathbf{e}} a_i$ ($i = 1, 2, 3$), которые могут быть записаны в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = [\varphi]_{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение будем решать при помощи элементарных преобразований над столбцами расширенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ \hline 3 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & -13 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ \hline 3 & 0 & -6 \\ 4 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного преобразования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Приведем два способа решения.

С п о с о б 1. Матрицу линейного преобразования в базисе $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ищем по формуле $[\varphi]_{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$, где

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{a}$. Найдем обратную матрицу³:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

³Обращение матрицы $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$ и нахождение произведения $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}$ можно выполнить одновременно, решив одно матричное уравнение $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}X = [\varphi]_{\mathbf{e}}$.

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 10 & -14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

С п о с о б 2. Столбцы матрицы $[\varphi]_{\mathbf{a}}$ представляют собой столбцы координат векторов b_1, b_2, b_3 в базисе $\mathbf{a}$. Для нахождения этих координат решим матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} [\varphi]_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & | & 5 & 6 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & | & 5 & 7 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/3 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7/3 & 10/3 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 10 & -14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2. Преобразование трехмерного пространства геометрических векторов заключается в проектировании на прямую $x = 2t, y = t, z = -t$ параллельно плоскости $x - 3y - 6z = 0$.

Вычислить матрицу этого преобразования в базисе, в котором записаны уравнения прямой и плоскости.

Решение. Рассмотрим два способа решения задачи.

Способ 1. Это решение непосредственно опирается на определение преобразования проектирования. Обозначим через $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ базис пространства, в котором записаны уравнения прямой и плоскости. Имеем $V = L(a_1) + L(a_2, a_3)$, $[a_1]_{\mathbf{e}} = (2, 1, -1)^T$, $[a_2]_{\mathbf{e}} = (3, 1, 0)^T$, $[a_3]_{\mathbf{e}} = (0, 2, -1)^T$, где a_1 — направляющий вектор прямой, a_2, a_3 — направляющие векторы рассматриваемой плоскости.

Разложим каждый из базисных векторов e_1, e_2, e_3 по системе a_1, a_2, a_3 . Для этого следует решить три системы линейных неоднородных уравнений, левая часть которых есть матрица, составленная из столбцов $[a_1]_{\mathbf{e}}, [a_2]_{\mathbf{e}}, [a_3]_{\mathbf{e}}$, а правая представляет собой координатный столбец соответствующего базисного вектора. Все три системы решим как одно матричное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -3/5 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{5}a_2 - \frac{1}{5}a_3, & \varphi e_1 &= \frac{1}{5}a_1, \\ e_2 &= -\frac{3}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2 - \frac{3}{5}a_3, & \varphi e_2 &= -\frac{3}{5}a_1, \\ e_3 &= -\frac{6}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2 - \frac{1}{5}a_3, & \varphi e_3 &= -\frac{6}{5}a_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$[\varphi e_1]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [\varphi e_2]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, [\varphi e_3]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и матрица преобразования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

С п о с о б 2. Выберем в пространстве базис, состоящий из направляющего вектора прямой a_1 и двух направляющих векторов плоскости a_2 и a_3 . В базисе $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ матрица преобразования проектирования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\mathbf{e}$ матрицу $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ преобразования ищем по формуле $[\varphi]_{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{a}}[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}$, где $[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{a}$ к базису

$\mathbf{e}$, а $[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}^{-1} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{a}$. Легко видеть, что

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу и получаем

$$[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу преобразования проектирования в базисе $\mathbf{e}$:

$$\begin{aligned} [\varphi]_{\mathbf{e}} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что преобразование проектирования диагонализировуемо. Базис из собственных векторов составляют, например, векторы a_1, a_2, a_3 .

ПРИМЕР 3. Линейное преобразование задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, диагонализируемо ли оно: а) в вещественном пространстве, б) в комплексном пространстве. Если да, то вычислить матрицу B преобразования в базисе из собственных векторов и матрицу Q перехода к этому базису.

Решение. Для нахождения коэффициентов характеристического многочлена найдем суммы главных миноров матрицы A :

$$s_1 = 5 - 1 - 2 = 2,$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Характеристический многочлен имеет вид $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$. Среди делителей $\pm 1, \pm 2$ свободного коэффициента находим один из корней $\lambda_1 = 2$. Для нахождения остальных корней исходный многочлен, умноженный на (-1) , поделим на $\lambda - 2$. Воспользуемся схемой Горнера:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 2 \cdot 1 - 2 = 0 & 2 \cdot 0 + 1 = 1 & 2 \cdot 1 - 2 = 0 \end{array}$$

В частном получаем многочлен $\lambda^2 + 1$, корни которого равны $\lambda_{2,3} = \pm i$.

а) В вещественном случае преобразование обладает лишь одним собственным значением $\lambda_1 = 2$ с алгебраической кратностью 1. Геометрическая кратность не превосходит алгебраической, следовательно, в нашем случае тоже равна 1. Максимальная линейно независимая система из собственных векторов состоит из одного вектора, следовательно, базиса из собственных векторов нет, преобразование не диагонализируемо.

б) В комплексном случае имеем три собственных значения. Для каждого из них решим систему $(A - \lambda_i E)x = 0$, где $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$.

Для $\lambda_1 = 2$ система имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (4, 6, -3)^\top$, $t \in \mathbb{C}$.

Для $\lambda_2 = i$ система имеет вид

$$\begin{cases} (5 - i)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - (1 + i)x_2 + 2x_3 = 0, \\ -6x_1 + 2x_2 - (2 + i)x_3 = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы можно воспользоваться методом Гаусса, а можно, обратив внимание на то, что определитель системы равен нулю, воспользоваться «правилом векторного произведения». Первые две строки не пропорциональны, поэтому частное решение найдем через миноры, составленные из элементов этих двух строк:

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 - i & 2 \end{vmatrix} = 2i, \quad x_2 = - \begin{vmatrix} 5 - i & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2i,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 5 - i & -1 \\ 6 & -1 - i \end{vmatrix} = -4i.$$

Общее решение: $x = \tau \cdot (2i, 2 + 2i, -4i)^\top = t \cdot (1, 1 - i, -2)^\top$, $\tau, t \in \mathbb{C}$.

Легко видеть, что для собственного числа $\lambda_3 = -i$, комплексно сопряженного с λ_2 , общее решение системы, описывающей собственное подпространство, получается из предыдущего заменой всех чисел на сопряженные: $x = t \cdot (1, 1+i, -2)^\top$, $t \in \mathbb{C}$.

Итак, в комплексном пространстве преобразование диагоналируемо. Записывая в матрицу B по диагонали собственные числа, а в матрицу Q по столбцам — координаты собственных векторов, получаем

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1-i & 1+i \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 4. Выяснить, диагоналируемо ли преобразование комплексного линейного пространства, заданное матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим характеристический многочлен: $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$. Один корень, $\lambda_1 = 1$, — простой, другой, $\lambda_{2,3} = -1$, имеет алгебраическую кратность 2.

Для собственного числа $\lambda_1 = 1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (1, -1, 1)^\top$, $t \in \mathbb{C}$.

Для собственного числа $\lambda_{2,3} = -1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (1, 0, -1)^\top$, $t \in \mathbf{C}$.

Максимальная линейно независимая система из собственных векторов содержит только два вектора, поэтому преобразование не диагонализируемо.

ПРИМЕР 5. Выяснить, диагонализируемо ли преобразование вещественного линейного пространства, заданное матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если да, то вычислить матрицу B преобразования в базисе из собственных векторов и матрицу Q перехода к этому базису.

Р е ш е н и е. Находим характеристический многочлен: $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$. Один корень, $\lambda_1 = 1$, — простой, другой, $\lambda_{2,3} = -1$, имеет алгебраическую кратность 2.

Для $\lambda_1 = 1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 \quad \quad - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 \quad \quad = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (1, -1, 1)^\top$, $t \in \mathbf{R}$. Геометрическая кратность собственного числа $\lambda_1 = 1$ равна 1.

Для $\lambda_{2,3} = -1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t_1 \cdot (1, 0, 1)^\top + t_2 \cdot (0, 1, 1)^\top$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$. Геометрическая кратность собственного числа $\lambda_{2,3} = -1$ равна 2.

Максимальная линейно независимая система из собственных векторов содержит три вектора, поэтому преобразование диагонализуемо.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 6. Найти жорданов базис и жорданову форму линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Единственным собственным числом преобразования являет-

ся $\lambda = 1$. Находим

$$B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решаем систему $Bx = 0$. Множество ее решений есть подпространство

$$H_1 = L \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Вычисляем

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

и решаем систему $B^2x = 0$. Множество ее решений есть

$$H_2 = H_1 + L \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Матрица B^3 — нулевая. Множество решений системы $B^3x = 0$ есть $H_3 = \mathbf{C}^6$. Представим его в виде

$$H_3 = H_2 + L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Процесс построения подпространств H_i на этом закончен.

Базис пространства H_2 дополняет до базиса пространства H_3 вектор $a_{11} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^\top$. Находим

$$Ba_{11} = (2, -2, 0, 0, -2, 2)^\top.$$

Базис подпространства H_1 вместе с вектором Ba_{11} дополняем до базиса пространства H_2 вектором

$$a_{21} = (0, 0, 0, -4, 0, 1)^\top.$$

Находим

$$B^2a_{11} = (0, 4, 0, 0, 0, -4)^\top, \quad Ba_{21} = (2, -6, 0, 0, 2, 6)^\top.$$

Построенную систему из двух векторов осталось дополнить до базиса подпространства H_1 . Сделаем это с помощью вектора

$$a_{31} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^\top.$$

Итак, найдена система

$$a_{11} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^\top,$$

$$Ba_{11} = (2, -2, 0, 0, -2, 2)^\top, \quad a_{21} = (0, 0, 0, -4, 0, 1)^\top,$$

$$B^2a_{11} = (0, 4, 0, 0, 0, -4)^\top, \quad Ba_{21} = (2, -6, 0, 0, 2, 6)^\top, \quad a_{31} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^\top.$$

Базис $B^2a_{11}, Ba_{11}, a_{11}, Ba_{21}, a_{21}, a_{31}$ является жордановым и в этом базисе линейное преобразование имеет матрицу $J = Q^{-1}AQ$, где

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 7. Методом Данилевского привести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

к фробениусовой форме и найти характеристическое уравнение этой матрицы.

Для того, чтобы избежать вычислений с дробями (на первом этапе), переставим местами 3-й и 4-й столбцы, 3-ю и 4-ю строки:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычитая третий столбец с подходящими множителями из всех остальных столбцов, и затем, выполняя соответствующие преобразования над строками, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & -2 \\ -18 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & -2 \\ -25 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в полученной матрице $a_{32} = 0$, а $a_{31} \neq 0$, следует переставить местами первый и второй столбцы и первую и вторую строки:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -25 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -25 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поделив второй столбец матрицы на -25 , и затем умножив

вторую строку на -25 , получаем матрицу, подобную исходной:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1/5 & -1 & -2 \\ 0 & 2/25 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1/5 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -25 & -50 \\ 0 & 1 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1/5 & 1/5 & 6/5 \\ 0 & -2 & -13 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1/5 & 1/5 & 6/5 \\ 0 & 4 & 3 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица полураспалась на два блока, поэтому характеристический многочлен есть $(\lambda - 3)(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18)$.

ПРИМЕР 8. Определить минимальный аннулирующий многочлен линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся методом Крылова.

Для базиса e_1, e_2, e_3 , в котором задана матрица преобразования, имеем

$$\begin{aligned} [e_1] &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\varphi e_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [\varphi^2 e_1] = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}; \\ [e_2] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\varphi e_2] = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi^2 e_2] = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$[e_3] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi e_3] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В каждой строке векторы линейно зависимы. Найдем их нулевые нетривиальные комбинации:

$$4e_1 - 4\varphi e_1 + \varphi^2 e_1 = 0, \quad \text{откуда} \quad f_1(\lambda) = 4 - 4\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 2)^2;$$

$$4e_2 - 4\varphi e_2 + \varphi^2 e_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad f_2(\lambda) = 4 - 4\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 2)^2;$$

$$-2e_3 + \varphi e_3 = 0, \quad \text{откуда} \quad f_3(\lambda) = -2 + \lambda = \lambda - 2.$$

Находим минимальный многочлен:

$$f(\lambda) = \text{НОК} \{f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)\} = (\lambda - 2)^2.$$

ПРИМЕР 9. Вычислить значение функции $g(\lambda) = e^\lambda$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Способ 1. Минимальный многочлен для этой матрицы совпадает с характеристическим и равен $\lambda^2(\lambda - 1)$. Следовательно, степень многочлена $g_A(\lambda)$ не превышает 2. Представим его в виде $g_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$ и найдем коэффициенты, приравняв значения функций e^λ и $g_A(\lambda)$ на спектре матрицы A :

$$\begin{cases} g_A(0) = e^0, \\ g'_A(0) = e^0, \\ g_A(1) = e^1; \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_0 + a_1 + a_2 = e. \end{cases}$$

Таким образом,

$$e^A = E + A + (e - 2)A^2 = \begin{pmatrix} 3e - 1 & e & -3e + 1 \\ 3e & e + 3 & -3e - 3 \\ 3e - 1 & e + 1 & -3e \end{pmatrix}.$$

С п о с о б 2. Жорданова форма матрицы A равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем $J = Q^{-1}AQ$, где

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (1) на стр. 16, находим

$$e^J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

откуда

$$e^A = Qe^JQ^{-1} = \begin{pmatrix} 3e - 1 & e & -3e + 1 \\ 3e & e + 3 & -3e - 3 \\ 3e - 1 & e + 1 & -3e \end{pmatrix}.$$

§ 8. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

В примерах 1.1–1.30 линейное преобразование трехмерного арифметического пространства переводит вектор a_i в вектор b_i ($i = 1, 2, 3$).

а) Показать, что такое преобразование существует и единственно.

б) Найти матрицу преобразования в базисе a_1, a_2, a_3 .

в) Найти матрицу преобразования в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$.

г) Найти ядро и образ данного преобразования.

д) Диагонализуемо ли преобразование? Если да, то указать диагональный вид преобразования и найти базис, в котором матрица преобразования диагональна.

1.1. $a_1 = (1, 1, -1)^T$, $a_2 = (-1, 1, 0)^T$, $a_3 = (0, -1, 1)^T$, $b_1 = (-5, -9, 3)^T$, $b_2 = (9, 15, -4)^T$, $b_3 = (0, 1, -1)^T$;

1.2. $a_1 = (1, 1, 1)^T$, $a_2 = (0, 1, 0)^T$, $a_3 = (1, 0, 2)^T$, $b_1 = (3, 7, -3)^T$, $b_2 = (4, 7, -2)^T$, $b_3 = (3, 8, -4)^T$;

1.3. $a_1 = (1, 0, 2)^T$, $a_2 = (-1, -2, 2)^T$, $a_3 = (1, 0, 0)^T$, $b_1 = (3, 8, -4)^T$, $b_2 = (5, 10, -4)^T$, $b_3 = (-5, -8, 2)^T$;

1.4. $a_1 = (1, -1, 1)^T$, $a_2 = (1, 2, 0)^T$, $a_3 = (1, 1, 1)^T$, $b_1 = (-5, -7, 1)^T$, $b_2 = (3, 6, -2)^T$, $b_3 = (3, 7, -3)^T$;

1.5. $a_1 = (1, 1, -1)^T$, $a_2 = (0, -1, 0)^T$, $a_3 = (1, 2, 0)^T$, $b_1 = (-5, -9, 3)^T$, $b_2 = (-4, -7, 2)^T$, $b_3 = (3, 6, -2)^T$;

1.6. $a_1 = (2, 0, -1)^T$, $a_2 = (1, 1, 1)^T$, $a_3 = (1, 1, -1)^T$, $b_1 = (-14, -24, 7)^T$, $b_2 = (3, 7, -3)^T$, $b_3 = (-5, -9, 3)^T$;

1.7. $a_1 = (1, 1, 1)^T$, $a_2 = (-1, 1, 0)^T$, $a_3 = (0, -1, 1)^T$, $b_1 = (4, 2, 6)^T$, $b_2 = (-4, 2, -4)^T$, $b_3 = (-3, -2, -4)^T$;

1.8. $a_1 = (1, 1, 1)^T$, $a_2 = (0, 1, 0)^T$, $a_3 = (1, 0, 2)^T$, $b_1 = (4, 2, 6)^T$, $b_2 = (1, 2, 2)^T$, $b_3 = (1, 0, 2)^T$;

1.9. $a_1 = (1, 0, 2)^T$, $a_2 = (-1, -2, 2)^T$, $a_3 = (1, 0, 0)^T$, $b_1 = (1, 0, 2)^T$, $b_2 = (-11, -4, -14)^T$, $b_3 = (5, 0, 6)^T$;

- 1.10. $a_1 = (1, -1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 1, 1)^\top$, $b_1 = (2, -2, 2)^\top$, $b_2 = (7, 4, 10)^\top$, $b_3 = (4, 2, 6)^\top$;
- 1.11. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (0, -1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 2, 0)^\top$, $b_1 = (8, 2, 10)^\top$, $b_2 = (-1, -2, -2)^\top$, $b_3 = (7, 4, 10)^\top$;
- 1.12. $a_1 = (2, 0, -1)^\top$, $a_2 = (1, 1, 1)^\top$, $a_3 = (1, 1, -1)^\top$, $b_1 = (12, 0, 14)^\top$, $b_2 = (4, 2, 6)^\top$, $b_3 = (8, 2, 10)^\top$;
- 1.13. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-5, 1, -5)^\top$, $b_2 = (2, 1, 3)^\top$, $b_3 = (6, -1, 7)^\top$;
- 1.14. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (0, 1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 0, 2)^\top$, $b_1 = (-5, 1, -5)^\top$, $b_2 = (-3, 1, -3)^\top$, $b_3 = (1, 0, 2)^\top$;
- 1.15. $a_1 = (1, 0, 2)^\top$, $a_2 = (-1, -2, 2)^\top$, $a_3 = (1, 0, 0)^\top$, $b_1 = (1, 0, 2)^\top$, $b_2 = (17, -2, 20)^\top$, $b_3 = (-5, 0, -6)^\top$;
- 1.16. $a_1 = (1, -1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 1, 1)^\top$, $b_1 = (1, -1, 1)^\top$, $b_2 = (-11, 2, -12)^\top$, $b_3 = (-5, 1, -5)^\top$;
- 1.17. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (0, -1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 2, 0)^\top$, $b_1 = (-11, 1, -13)^\top$, $b_2 = (3, -1, 3)^\top$, $b_3 = (-11, 2, -12)^\top$;
- 1.18. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-11, 1, -13)^\top$, $b_2 = (2, 1, 3)^\top$, $b_3 = (6, -1, 7)^\top$;
- 1.19. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-10, 8, -10)^\top$, $b_2 = (1, -1, 0)^\top$, $b_3 = (9, -8, 8)^\top$;
- 1.20. $a_1 = (1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (0, 1, 0)^\top$, $a_3 = (1, 0, 2)^\top$, $b_1 = (-10, 8, -10)^\top$, $b_2 = (-6, 5, -6)^\top$, $b_3 = (-1, 0, -2)^\top$;
- 1.21. $a_1 = (1, 0, 2)^\top$, $a_2 = (-1, -2, 2)^\top$, $a_3 = (1, 0, 0)^\top$, $b_1 = (-1, 0, -2)^\top$, $b_2 = (25, -22, 22)^\top$, $b_3 = (-7, 6, -6)^\top$;
- 1.22. $a_1 = (1, -1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 1, 1)^\top$, $b_1 = (2, -2, 2)^\top$, $b_2 = (-19, 16, -18)^\top$, $b_3 = (-10, 8, -10)^\top$;
- 1.23. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-16, 14, -14)^\top$, $b_2 = (1, -1, 0)^\top$, $b_3 = (9, -8, 8)^\top$;
- 1.24. $a_1 = (-1, 2, 1)^\top$, $a_2 = (0, -1, 1)^\top$, $a_3 = (1, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-2, 1, -4)^\top$, $b_2 = (9, -8, 8)^\top$, $b_3 = (2, -2, 2)^\top$;
- 1.25. $a_1 = (1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (0, -1, 1)^\top$, $b_1 = (-3, -7, 3)^\top$, $b_2 = (3, 9, -4)^\top$, $b_3 = (2, 3, -1)^\top$;

$$1.26. a_1 = (1, 1, 1)^\top, a_2 = (0, 1, 0)^\top, a_3 = (1, 0, 2)^\top, b_1 = (5, 9, -3)^\top, b_2 = (2, 5, -2)^\top, b_3 = (7, 12, -4)^\top;$$

$$1.27. a_1 = (1, 0, 2)^\top, a_2 = (-1, -2, 2)^\top, a_3 = (1, 0, 0)^\top, b_1 = (7, 12, -4)^\top, b_2 = (5, 10, -4)^\top, b_3 = (-1, -4, 2)^\top;$$

$$1.28. a_1 = (1, -1, 1)^\top, a_2 = (1, 2, 0)^\top, a_3 = (1, 1, 1)^\top, b_1 = (1, -1, 1)^\top, b_2 = (3, 6, -2)^\top, b_3 = (5, 9, -3)^\top;$$

$$1.29. a_1 = (1, 1, -1)^\top, a_2 = (0, -1, 0)^\top, a_3 = (1, 2, 0)^\top, b_1 = (-3, -7, 3)^\top, b_2 = (-2, -5, 2)^\top, b_3 = (3, 6, -2)^\top;$$

$$1.30. a_1 = (2, 0, -1)^\top, a_2 = (1, 1, 1)^\top, a_3 = (1, 1, -1)^\top, b_1 = (-6, -16, 7)^\top, b_2 = (5, 9, -3)^\top, b_3 = (-3, -7, 3)^\top.$$

В задачах 2.1–2.30 в базисе, в котором записаны уравнения подпространств, найти матрицу линейного преобразования φ трехмерного геометрического векторного пространства, указать собственные числа и собственные векторы преобразования, описать его ядро и образ, если φ есть:

2.1. проектирование на прямую $x = t, y = -t, z = 2t$ параллельно плоскости $x + y + 2z = 0$;

2.2. симметрия относительно плоскости $x - 2y + 3z = 0$ параллельно прямой $x + z = 0, y + z = 0$;

2.3. проектирование на плоскость $3x + y + 2z = 0$ параллельно прямой $x = z, x + 2y - 3z = 0$;

2.4. симметрия относительно прямой $x = 2t, y = t, z = -t$ параллельно плоскости $x - 3y - 6z = 0$;

2.5. поворот вокруг прямой $y + z = 0, 2x + y + 2z = 0$ на угол $\pi/2$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.6. проектирование на прямую $x = y, 2x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x - 2y + 3z = 0$;

2.7. симметрия относительно плоскости $x + 3y + 3z = 0$ параллельно прямой $y = z, x + y + z = 0$;

2.8. проектирование на плоскость $x - y + 2z = 0$ параллельно прямой $2x = y = z$;

2.9. симметрия относительно прямой $x + 2y = 0$, $x - y + z = 0$ параллельно плоскости $2x + y - z = 0$;

2.10. поворот вокруг прямой $x = 2t$, $y = t$, $z = -2t$ на угол $\pi/6$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.11. проектирование на прямую $x = t$, $y = 2t$, $z = -2t$ параллельно плоскости $2x + y - z = 0$;

2.12. симметрия относительно плоскости $x - 2y - 2z = 0$ параллельно прямой $x = 2t$, $y = t$, $z = 3t$;

2.13. проектирование на плоскость $2x + y + z = 0$ параллельно прямой $2x - y = 0$, $x + y - z = 0$;

2.14. симметрия относительно прямой $x = t$, $y = -2t$, $z = 3t$ параллельно плоскости $2x + y - z = 0$;

2.15. поворот вокруг прямой $x + z = 0$, $x + 2y + 2z = 0$ на угол $\pi/4$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.16. проектирование на прямую $x = z$, $x + 2y - 3z = 0$ параллельно плоскости $3x - y + 2z = 0$;

2.17. симметрия относительно плоскости $2x + y - z = 0$ параллельно прямой $x = 2z$, $x - y + z = 0$;

2.18. проектирование на плоскость $2x + y + z = 0$ параллельно прямой $x = t$, $y = 2t$, $z = 2t$;

2.19. симметрия относительно прямой $y - 3z = 0$, $x + y - z = 0$ параллельно плоскости $2x - y + z = 0$;

2.20. поворот вокруг прямой $x = 2t$, $y = -2t$, $z = t$ на угол $\pi/2$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.21. проектирование на прямую $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$ параллельно плоскости $2x + 2y - z = 0$;

2.22. симметрия относительно плоскости $x - y - 2z = 0$ параллельно прямой $x = -2y = -2z$;

2.23. проектирование на плоскость $2x - y - z = 0$ параллельно прямой $2x + y = 0$, $2x + z = 0$;

2.24. симметрия относительно прямой $x = y$, $2x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x - 2y + 3z = 0$;

2.25. поворот вокруг прямой $x + y = 0$, $x + 2y + 2z = 0$ на угол $\pi/4$ (базис ортонормированный, два возможных решения);

2.26. проектирование на прямую $x + 2y = 0$, $x - y + 3z = 0$ параллельно плоскости $x - y - 2z = 0$;

2.27. симметрия относительно плоскости $3x + y + 2z = 0$ параллельно прямой $x = z$, $x + 2y - 3z = 0$;

2.28. проектирование на плоскость $x - 2y + 3z = 0$ параллельно прямой $x = y = -z$;

2.29. симметрия относительно прямой $x = y$, $2x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x - 2y + 3z = 0$;

2.30. поворот вокруг прямой $x = 2t$, $y = t$, $z = -2t$ на угол $\pi/3$ (базис ортонормированный, два возможных решения).

В задачах 3.1–3.10 подпространство W натянуто на систему векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе координатными столбцами. В этом базисе построить матрицу линейного преобразования, заключающегося в ортогональном проектировании на W , указать собственные числа и собственные векторы преобразования, описать его ядро и образ.

3.1. $(11, 25, -27, -9)^\top$, $(4, 8, -9, -3)^\top$;

3.2. $(11, 11, -48, 26)^\top$, $(4, 4, -15, 7)^\top$;

3.3. $(2, -16, -21, 35)^\top$, $(1, -5, -6, 10)^\top$;

3.4. $(11, 11, -34, -16)^\top$, $(4, 4, -11, -5)^\top$;

3.5. $(2, -16, -7, -7)^\top$, $(1, -5, -2, -2)^\top$;

3.6. $(1, -8, 1, -8)^\top$, $(1, -5, 1, -5)^\top$, $(1, 1, -5, -5)^\top$;

3.7. $(1, -8, 1, -8)^\top$, $(1, -5, 1, -5)^\top$, $(1, -5, -5, 1)^\top$;

3.8. $(1, 1, -8, -8)^\top$, $(1, 1, -5, -5)^\top$, $(1, -5, -5, 1)^\top$;

3.9. $(1, 8, -8, -1)^\top$, $(1, 5, -5, -1)^\top$, $(1, -1, -5, 5)^\top$;

3.10. $(1, -8, -1, 8)^\top$, $(1, -5, -1, 5)^\top$, $(4, -5, 8, -1)^\top$.

В задачах 3.11–3.30 подпространство W четырехмерного евклидова пространства задано в некотором ортонормированном

базисе системой линейных уравнений. Найти в этом базисе матрицу линейного преобразования, заключающегося в ортогональном проектировании пространства на W , указать собственные числа и собственные векторы преобразования, описать его ядро и образ.

$$3.11. 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0;$$

$$3.12. x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0;$$

$$3.13. x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0;$$

$$3.14. 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0;$$

$$3.15. \begin{cases} 2x_1 - 16x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3.16. \begin{cases} x_1 - 8x_2 - 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} x_1 - x_2 - 8x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} x_1 + x_2 - 8x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} x_1 - 8x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} x_1 - 8x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3.21. \begin{cases} x_1 + x_2 - 8x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
3.22. \quad & \begin{cases} x_1 + 8x_2 - 8x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases} \\
3.23. \quad & \begin{cases} x_1 - 8x_2 - x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \\
3.24. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 23x_2 - 16x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases} \\
3.25. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 16x_3 - 23x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases} \\
3.26. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 16x_3 - 23x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \\
3.27. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 16x_2 - 21x_3 + 35x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 10x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 15x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases} \\
3.28. \quad & \begin{cases} 2x_1 - 16x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 11x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases} \\
3.29. \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 - 26x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 17x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 11x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$3.30. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 - 26x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 17x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

В задачах 4.1–4.15 доказать, что формула $\varphi(X) = A^\top X A$ определяет линейное преобразование пространства симметрических матриц ($X^\top = X$). Найти жорданов базис и жорданову форму преобразования.

$$4.1. A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4.2. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$4.3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad 4.4. A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$4.5. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad 4.6. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$4.7. A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad 4.8. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$4.9. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4.10. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$4.11. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad 4.12. A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$4.13. A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 4.14. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$4.15. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

В задачах 4.16–4.30 доказать, что формула $\varphi(X) = A^\top X A$ определяет линейное преобразование пространства кососиммет-

рических матриц ($X^T = -X$). Найти жорданов базис и жорданову форму преобразования.

$$\begin{aligned}
 4.16. A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & 4.17. A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 4.18. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; & 4.19. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \\
 4.20. A &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & 4.21. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 4.22. A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}; & 4.23. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 4.24. A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; & 4.25. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 4.26. A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; & 4.27. A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 4.28. A &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & 4.29. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

$$4.30. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пусть фиксированные ненулевые векторы a и n трехмерного пространства неортогональны между собой. В задачах 5.1–5.15 надо доказать линейность преобразования и выяснить его геометрический смысл.

$$5.1. \varphi x = (a, x) \frac{a}{|a|^2};$$

$$5.2. \varphi x = \frac{(a, x)}{(a, n)} n;$$

$$5.3. \varphi x = x - (a, x) \frac{a}{|a|^2};$$

$$5.4. \varphi x = x - \frac{(a, x)}{(a, n)} n;$$

$$5.5. \varphi x = x - 2(a, x) \frac{a}{|a|^2};$$

$$5.6. \varphi x = 2(a, x) \frac{a}{|a|^2} - x;$$

$$5.7. \varphi x = x - 2 \frac{(a, x)}{(a, n)} n;$$

$$5.8. \varphi x = 2 \frac{(a, x)}{(a, n)} n - x;$$

$$5.9. \varphi x = (a, x)a;$$

$$5.10. \varphi x = (n, x)a - (a, x)n;$$

$$5.11. \varphi x = (a, a)x - (a, x)a;$$

$$5.12. \varphi x = (a, a)x - 2(a, x)a;$$

$$5.13. \varphi x = 2(a, x)a - (a, a)x;$$

$$5.14. \varphi x = [a, x] \quad (|a| = 1);$$

$$5.15. \varphi x = (a, x)n - (n, x)a.$$

В примерах 6.1–6.30 построить жорданов базис, найти жорданову форму и минимальный аннулирующий многочлен матрицы.

$$6.1. \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6.2. \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -4 & 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6.3. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$6.4. \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6.5. \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$6.6. \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$6.7. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6.8. \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -3 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6.9. \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & -2 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6.10. \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$6.11. \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$6.12. \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$6.13. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6.14. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6.15. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$6.16. \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$6.17. \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6.18. \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$6.19. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6.20. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6.21. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6.22. \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$6.23. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6.24. \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$6.25. \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$6.26. \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$6.27. \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6.28. \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6.29. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6.30. \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

В примерах 7.1–7.15 построить жорданов базис и жорданову форму матрицы линейного преобразования φ пространства многочленов с комплексными коэффициентами степени не превосходящих n . Рассмотреть случаи, когда $n = 3, 4, 5, 6$.

$$7.1. \varphi(f(x)) = f'(x);$$

$$7.2. \varphi(f(x)) = f''(x);$$

$$7.3. \varphi(f(x)) = f'''(x);$$

$$7.4. \varphi(f(x)) = f(x+1);$$

$$7.5. \varphi(f(x)) = f(x+1) - f(x);$$

$$7.6. \varphi(f(x)) = f(x+1) + f(x-1);$$

$$7.7. \varphi(f(x)) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1);$$

$$7.8. \varphi(f(x)) = f(x+1) - f(x) - f'(x);$$

$$7.9. \varphi(f(x)) = f(x+1) + 3f(x-1) - f(x-2);$$

$$7.10. \varphi(f(x)) = f(x+1) - 3f(x) + 3f(x-1) - f(x-2);$$

$$7.11. \varphi(f(x)) = f(x+2) - 3f(x+1) - f(x-1);$$

$$7.12. \varphi(f(x)) = x^n f(1/x) + f(x);$$

$$7.13. \varphi(f(x)) = f(1)(x-1)^n + f'(1)(x-1)^{n-1};$$

$$7.14. \varphi(f(x)) = (f(2)x^{n-1} - f(1))(x-2);$$

$$7.15. \varphi(f(x)) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} f^{(i)}(1)(x-1)^{n-i}.$$

В примерах 8.1–8.30 привести матрицу к фробениусовой форме методом Данилевского и найти характеристическое уравнение этой матрицы.

$$8.1. \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & -1 & 6 \\ 14 & 4 & -3 & 10 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad 8.2. \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & -1 \\ -5 & 6 & 7 & -2 \\ 2 & -4 & -3 & 2 \\ -7 & 9 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$8.3. \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & -6 \\ -3 & -4 & 9 & 8 \\ -5 & -3 & 5 & 7 \\ 7 & 4 & -5 & -8 \end{pmatrix} \quad 8.4. \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ -9 & 2 & 3 & 6 \\ -10 & 4 & 3 & 10 \\ 7 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$8.5. \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 5 \\ 10 & 2 & -5 & 8 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad 8.6. \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$8.7. \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & -4 & -10 \\ 2 & 3 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 8.8. \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
8.9. \begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 & -12 \\ -3 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 4 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} & 8.10. \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -13 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \\
8.11. \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 14 & -3 & 10 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \\ 7 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} & 8.12. \begin{pmatrix} -3 & 9 & 10 & -7 \\ -2 & 6 & 7 & -5 \\ 2 & -4 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
8.13. \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 & -3 \\ -5 & -8 & 7 & 4 \\ -5 & -6 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & -3 & -4 \end{pmatrix} & 8.14. \begin{pmatrix} 3 & 10 & -10 & 4 \\ -2 & -3 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 2 \end{pmatrix} \\
8.15. \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 & 1 \\ -5 & 8 & 10 & 2 \end{pmatrix} & 8.16. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & -11 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \\
8.17. \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & -3 \\ -4 & -10 & 6 & 5 \end{pmatrix} & 8.18. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & -7 & 1 \\ 3 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
8.19. \begin{pmatrix} -2 & 7 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & -12 & 2 & -7 \\ -5 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} & 8.20. \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 3 & -1 & -6 & 7 \\ 6 & 1 & -7 & 5 \end{pmatrix} \\
8.21. \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -1 \\ 10 & -3 & 14 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} & 8.22. \begin{pmatrix} -3 & 10 & 9 & -7 \\ 2 & -3 & -4 & 2 \\ -2 & 7 & 6 & -5 \\ -1 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
8.23. \begin{pmatrix} -8 & -5 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & -3 & -5 \\ 8 & 9 & -4 & -3 \\ -6 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} & 8.24. \begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 & 6 \\ 4 & 3 & -10 & 10 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \\
8.25. \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & -5 & 2 \end{pmatrix} & 8.26. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -11 & 6 \end{pmatrix} \\
8.27. \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 3 & 2 \\ -10 & -4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} & 8.28. \begin{pmatrix} -6 & 3 & 7 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -7 & 6 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \\
8.29. \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -3 \\ 7 & 4 & -2 & -1 \\ -12 & -7 & 4 & 2 \end{pmatrix} & 8.30. \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}
\end{array}$$

В примерах 9.1–9.30 вычислить значения функций от матриц.

$$9.1. \quad \ln A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$9.2. \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$9.3. \quad e^A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$9.4. \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 6 \\ -9 & -3 & -5 \end{pmatrix};$$

$$9.5. \quad \arcsin A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & -16 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$9.6. \quad \arccos A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$9.7. \quad \ln A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$9.8. \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$9.9. \quad e^A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -15 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$9.10. \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$9.11. \quad \arcsin A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -13 & -8 \end{pmatrix};$$

$$9.12. \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -4 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix};$$

$$9.13. \quad \arccos A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & -6 & -15 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$9.14. \quad \cos(\pi A), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -10 \\ -4 & 2 & 8 \\ 5 & -1 & -7 \end{pmatrix};$$

$$9.15. \quad \ln A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix};$$

$$9.16. \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix};$$

$$9.17. \quad e^A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$9.18. \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$9.19. \quad \arcsin A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -14 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -8 \end{pmatrix};$$

$$9.20. \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix};$$

$$9.21. \quad \arccos A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -4 & -8 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$9.22. \quad \ln A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$9.23. \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 6 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$9.24. \quad e^A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$9.25. \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$9.26. \quad \arcsin A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 11 & -3 & 8 \end{pmatrix};$$

$$9.27. \quad \cos \pi A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$9.28. \quad \arccos A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 8 & -2 & 4 \\ 12 & -3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$9.29. \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}A\right), \text{ где } A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -9 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix};$$

$$9.30. \quad \cos(\pi A), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

В примерах 10.1–10.30 преобразование задано матрицей в некотором ортонормированном базисе. Найти ортонормированный базис, в котором матрица линейного преобразования имеет верхнетреугольный вид.

$$10.1. \quad \begin{pmatrix} 17 & -5 & 1 \\ 10 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 10.2. \quad \begin{pmatrix} 15 & -3 & 0 \\ 6 & 9 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10.3. \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 2 & 13 & -5 \\ 8 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad 10.4. \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10.5. \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 10.6. \quad \begin{pmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 10 & 5 & -1 \\ 16 & -10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$10.7. \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 8 & 7 & -2 \\ 20 & -14 & 13 \end{pmatrix} \quad 10.8. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
10.9. \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} & 10.10. \begin{pmatrix} 11 & -5 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & -10 & 17 \end{pmatrix} \\
10.11. \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -14 & 11 & 5 \\ -8 & -4 & 17 \end{pmatrix} & 10.12. \begin{pmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -10 & 7 & 7 \\ -16 & 4 & 13 \end{pmatrix} \\
10.13. \begin{pmatrix} 17 & -5 & 1 \\ 10 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} & 10.14. \begin{pmatrix} 11 & -8 & 7 \\ -8 & 5 & 8 \\ -20 & 8 & 11 \end{pmatrix} \\
10.15. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} & 10.16. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 4 & -8 & 9 \end{pmatrix} \\
10.17. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 8 & -12 & 11 \end{pmatrix} & 10.18. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -10 & 7 & 7 \\ -4 & -8 & 19 \end{pmatrix} \\
10.19. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} & 10.20. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -8 & 9 \end{pmatrix} \\
10.21. \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 9 & -7 & 7 \\ 8 & -12 & 11 \end{pmatrix} & 10.22. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -5 & 9 \\ 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$10.23. \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 0 & -7 & 10 \\ -4 & -6 & 11 \end{pmatrix} \quad 10.24. \begin{pmatrix} 9 & -11 & 8 \\ 2 & -9 & 11 \\ -8 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$10.25. \begin{pmatrix} 7 & -9 & 7 \\ -2 & -5 & 9 \\ -12 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad 10.26. \begin{pmatrix} 3 & -7 & 6 \\ -6 & -1 & 7 \\ -16 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$10.27. \begin{pmatrix} 11 & -4 & 0 \\ 6 & 5 & -5 \\ -4 & 12 & -7 \end{pmatrix} \quad 10.28. \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -6 \\ 0 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$10.29. \begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 8 & 3 & -4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad 10.30. \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 2 & -9 & -7 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В о е в о д и н В. В. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980. — 200 с.
2. Б е к л е м и ш е в Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1971. — 328 с.
3. Г а н т м а х е р Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

Содержание

§ 1. Линейные преобразования	3
§ 2. Собственные векторы линейного преобразования . . .	6
§ 3. Метод Данилевского	8
§ 4. Аннулирующий многочлен	9
§ 5. Теорема Жордана	11
§ 6. Значение функции от матрицы	15
§ 7. Примеры решения задач	16
§ 8. Контрольные задания	35
Список литературы	63

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

*Сергей Иванович Веселов,
Николай Юрьевич Золотых,
Татьяна Геннадьевна Смирнова,
Александр Юрьевич Чирков*

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Антика.
Усл. печ. л. 3,75. Уч.-изд. л. 4.
Заказ № Тираж 300 экз.

Отпечатано в типографии
Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18–0099 от 14.05.01