
КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

*Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки
010400 «Информационные технологии»,
010500 «Прикладная математика и информатика»*

**Нижний Новгород
2007**

ББК В22.143

К44

УДК 512.64

Контрольные работы по линейной алгебре: / Сост. Л.Г. Киселева, С.В. Сидоров. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2007. — 40 с.

Сборник содержит контрольные работы по различным темам линейной алгебры.

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Информационные технологии».

Рецензент:

В.И. Лукьянов, к.ф.-м.н., доц. каф. ЧиФА

УДК 512.64

© Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского, 2007

В данном сборнике предлагаются контрольные работы, содержащие типовые задачи по темам «Линейные пространства», «Системы линейных уравнений», «Определители». Приводимые задачи направлены на усвоение основных понятий из этих тем, таких как линейная зависимость и независимость системы векторов, база и ранг системы векторов, линейная оболочка системы, базис и размерность пространства, подпространство, координаты вектора в базисе, матрица перехода от одного базиса к другому, сумма и пересечение подпространств; фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений, общее решение системы линейных уравнений; определитель матрицы.

1 Контрольная работа 1

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ — система векторов арифметического пространства $\mathbf{R}^4$.

- а) Найти ранг и какую-нибудь базу системы A .
- б) Векторы, не входящие в базу, выразить через векторы базы.

1. $a_1 = (2, 1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 1, 3, -2)^\top$, $a_3 = (0, -1, -5, 3)^\top$,
 $a_4 = (3, 1, -1, 0)^\top$
2. $a_1 = (5, 1, -1, 2)^\top$, $a_2 = (4, -1, -1, 6)^\top$, $a_3 = (-3, 3, 1, -10)^\top$,
 $a_4 = (6, 3, -1, -2)^\top$
3. $a_1 = (0, 4, 7, 2)^\top$, $a_2 = (-2, 4, 3, -1)^\top$, $a_3 = (4, -4, 1, 4)^\top$,
 $a_4 = (2, 4, 11, 5)^\top$
4. $a_1 = (4, 1, 2, 5)^\top$, $a_2 = (5, -2, 5, 7)^\top$, $a_3 = (-6, 5, -8, -9)^\top$,
 $a_4 = (3, 4, -1, 3)^\top$
5. $a_1 = (5, -1, 1, 3)^\top$, $a_2 = (2, 4, -1, 6)^\top$, $a_3 = (1, -9, 3, -9)^\top$,
 $a_4 = (8, -6, 3, 0)^\top$
6. $a_1 = (5, 7, 3, 6)^\top$, $a_2 = (2, -2, 0, 1)^\top$, $a_3 = (3, 9, 3, 5)^\top$,
 $a_4 = (7, 5, 3, 7)^\top$
7. $a_1 = (4, 1, 2, 4)^\top$, $a_2 = (-2, 2, 3, -1)^\top$, $a_3 = (6, -1, -1, 5)^\top$,
 $a_4 = (2, 3, 5, 3)^\top$
8. $a_1 = (3, -2, 2, 7)^\top$, $a_2 = (-2, 0, 2, 3)^\top$, $a_3 = (5, -2, 0, 4)^\top$,
 $a_4 = (1, -2, 4, 10)^\top$

9. $a_1 = (1, 3, 6, 3)^\top$, $a_2 = (2, -1, 7, -2)^\top$, $a_3 = (-1, 4, -1, 5)^\top$,
 $a_4 = (3, 2, 13, 1)^\top$
10. $a_1 = (6, 5, 2, -1)^\top$, $a_2 = (4, -2, 1, 6)^\top$, $a_3 = (2, 7, 1, -7)^\top$,
 $a_4 = (10, 3, 3, 5)^\top$
11. $a_1 = (-1, 2, 1, 4)^\top$, $a_2 = (2, 4, 4, 0)^\top$, $a_3 = (2, -2, -1, 3)^\top$,
 $a_4 = (-1, 8, 6, 1)^\top$
12. $a_1 = (2, 6, 1, 3)^\top$, $a_2 = (7, 6, 3, 2)^\top$, $a_3 = (2, -1, 5, 2)^\top$,
 $a_4 = (7, 13, -1, 3)^\top$
13. $a_1 = (-2, 1, 7, 3)^\top$, $a_2 = (2, 6, 3, 6)^\top$, $a_3 = (1, 5, -2, 7)^\top$,
 $a_4 = (-1, 2, 12, 2)^\top$
14. $a_1 = (5, -2, 0, -2)^\top$, $a_2 = (1, 3, 6, 0)^\top$, $a_3 = (6, 7, -1, 7)^\top$,
 $a_4 = (0, -6, 7, -9)^\top$
15. $a_1 = (6, 5, 4, -2)^\top$, $a_2 = (-2, 1, -2, 0)^\top$, $a_3 = (1, 7, -2, 3)^\top$,
 $a_4 = (3, -1, 4, -5)^\top$
16. $a_1 = (2, 3, 1, 1)^\top$, $a_2 = (5, -2, 0, 4)^\top$, $a_3 = (3, -1, 5, 7)^\top$,
 $a_4 = (-4, 9, -3, -9)^\top$
17. $a_1 = (5, 0, -2, 1)^\top$, $a_2 = (4, 2, -2, 2)^\top$, $a_3 = (6, 0, 6, 7)^\top$,
 $a_4 = (0, -2, -8, -7)^\top$
18. $a_1 = (5, -1, 5, 2)^\top$, $a_2 = (-1, 4, 1, 4)^\top$, $a_3 = (6, 4, 2, -1)^\top$,
 $a_4 = (5, -10, 7, 1)^\top$
19. $a_1 = (1, 3, 4, 5)^\top$, $a_2 = (6, 4, 4, 3)^\top$, $a_3 = (2, 4, 3, 4)^\top$,
 $a_4 = (-6, -2, 1, 3)^\top$
20. $a_1 = (5, 3, 2, -1)^\top$, $a_2 = (6, 4, 3, 0)^\top$, $a_3 = (7, 5, -1, -1)^\top$,
 $a_4 = (-3, -3, 2, -1)^\top$
21. $a_1 = (0, 5, 7, 7)^\top$, $a_2 = (2, -1, -2, 6)^\top$, $a_3 = (3, 7, 5, 7)^\top$,
 $a_4 = (1, 13, 14, 8)^\top$, $a_5 = (-5, 4, 11, 1)^\top$
22. $a_1 = (4, 1, 5, 4)^\top$, $a_2 = (4, 2, 2, 1)^\top$, $a_3 = (1, 5, 5, 3)^\top$,
 $a_4 = (1, 4, 8, 6)^\top$, $a_5 = (3, -5, 3, 4)^\top$
23. $a_1 = (2, 1, 1, 4)^\top$, $a_2 = (2, 1, 5, 5)^\top$, $a_3 = (1, 4, 2, 1)^\top$,
 $a_4 = (1, 4, -2, 0)^\top$, $a_5 = (1, -3, -5, 2)^\top$

24. $a_1 = (2, 2, 3, 1)^\top$, $a_2 = (2, 5, 1, 5)^\top$, $a_3 = (1, 2, 1, 5)^\top$,
 $a_4 = (1, -1, 3, 1)^\top$, $a_5 = (1, -3, 4, -8)^\top$
25. $a_1 = (1, 5, 2, 2)^\top$, $a_2 = (2, 3, 2, 4)^\top$, $a_3 = (4, 1, 1, 1)^\top$,
 $a_4 = (3, 3, 1, -1)^\top$, $a_5 = (-4, 6, 1, -1)^\top$
26. $a_1 = (2, 1, 5, 5)^\top$, $a_2 = (2, 3, 1, 4)^\top$, $a_3 = (1, 5, 4, 5)^\top$,
 $a_4 = (1, 0, -7, -2)^\top$, $a_5 = (1, 3, 8, 6)^\top$
27. $a_1 = (4, 5, 4, 3)^\top$, $a_2 = (4, 2, 5, 1)^\top$, $a_3 = (2, 1, 1, 3)^\top$,
 $a_4 = (2, -2, 5, -4)^\top$, $a_5 = (2, 4, 0, 5)^\top$
28. $a_1 = (3, 3, 1, 1)^\top$, $a_2 = (5, 4, 1, 2)^\top$, $a_3 = (5, 4, 3, 2)^\top$,
 $a_4 = (2, 1, -2, 1)^\top$, $a_5 = (3, 3, 3, 1)^\top$
29. $a_1 = (3, 3, 5, 4)^\top$, $a_2 = (1, 5, 4, 1)^\top$, $a_3 = (3, 5, 3, 1)^\top$,
 $a_4 = (-4, 2, 0, -3)^\top$, $a_5 = (5, 3, 4, 4)^\top$
30. $a_1 = (3, 4, 3, 1)^\top$, $a_2 = (3, 2, 3, 5)^\top$, $a_3 = (2, 1, 2, 2)^\top$,
 $a_4 = (1, -1, 1, 7)^\top$, $a_5 = (2, 3, 2, -2)^\top$

2 Контрольная работа 2

Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ — линейно независимая система векторов в некотором линейном пространстве V .

Для заданной системы $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$:

- Выяснить, является ли система B линейно зависимой.
- Найти ранг и все базы системы B . Для одной из баз выразить векторы, не входящие в базу, через векторы базы.
- Выяснить, являются ли системы A и B эквивалентными.
- Найти размерность и базис $W = L(B)$, где $L(B)$ — линейная оболочка, натянутая на систему B .

- $b_1 = 5a_1 + 4a_2 + 3a_3$, $b_2 = 6a_1 + 3a_2 + 4a_3$, $b_3 = 4a_1 + 5a_2 + 2a_3$,
 $b_4 = 9a_1 + 9a_2 + 5a_3$, $b_5 = 3a_1 + 6a_2 + a_3$
- $b_1 = 3a_1 + 4a_2 + 5a_3$, $b_2 = 4a_1 + 5a_2 + 6a_3$, $b_3 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3$,
 $b_4 = 5a_1 + 7a_2 + 9a_3$, $b_5 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$
- $b_1 = 3a_1 + 3a_2 + 4a_3$, $b_2 = a_1 + 6a_2 + 5a_3$, $b_3 = 5a_1 + 3a_3$,
 $b_4 = 8a_1 + 3a_2 + 7a_3$, $b_5 = 7a_1 - 3a_2 + 2a_3$

4. $b_1 = 3a_1 + 3a_2 + a_3$, $b_2 = 5a_1 + 4a_2 + 6a_3$, $b_3 = a_1 + 2a_2 - 4a_3$,
 $b_4 = 4a_1 + 5a_2 - 3a_3$, $b_5 = -a_1 + a_2 - 9a_3$
5. $b_1 = a_1 + 3a_2 + 5a_3$, $b_2 = 5a_1 + 5a_2 + 6a_3$, $b_3 = -3a_1 + a_2 + 4a_3$,
 $b_4 = -2a_1 + 4a_2 + 9a_3$, $b_5 = -7a_1 - a_2 + 3a_3$
6. $b_1 = -a_1 + a_2 + 2a_3$, $b_2 = 2a_1 - a_2 - a_3$, $b_3 = -4a_1 + 3a_2 + 5a_3$,
 $b_4 = -5a_1 + 4a_2 + 7a_3$, $b_5 = -7a_1 + 5a_2 + 8a_3$
7. $b_1 = 3a_1 - a_2 - a_3$, $b_2 = 4a_1 + 4a_2 + a_3$, $b_3 = 2a_1 - 6a_2 - 3a_3$,
 $b_4 = 5a_1 - 7a_2 - 4a_3$, $b_5 = a_1 - 11a_2 - 5a_3$
8. $b_1 = 4a_1 + 5a_2 - 3a_3$, $b_2 = 2a_1 + 3a_2 - 2a_3$, $b_3 = 6a_1 + 7a_2 - 4a_3$,
 $b_4 = 10a_1 + 12a_2 - 7a_3$, $b_5 = 8a_1 + 9a_2 - 5a_3$
9. $b_1 = 4a_1 + a_2 + 2a_3$, $b_2 = -3a_1 + 3a_2 - a_3$, $b_3 = 11a_1 - a_2 + 5a_3$,
 $b_4 = 15a_1 + 7a_3$, $b_5 = 18a_1 - 3a_2 + 8a_3$
10. $b_1 = 5a_1 + 4a_2 + 3a_3$, $b_2 = 6a_1 + 5a_2 + 4a_3$, $b_3 = 4a_1 + 3a_2 + 2a_3$,
 $b_4 = 9a_1 + 7a_2 + 5a_3$, $b_5 = 3a_1 + 2a_2 + a_3$
11. $b_1 = 5a_1 + 3a_2 + 5a_3$, $b_2 = 3a_1 + 2a_2 + 7a_3$, $b_3 = 7a_1 + 4a_2 + 3a_3$,
 $b_4 = 12a_1 + 7a_2 + 8a_3$, $b_5 = 9a_1 + 5a_2 + a_3$
12. $b_1 = 3a_1 + 4a_2 + 4a_3$, $b_2 = 4a_1 + 7a_2 + 5a_3$, $b_3 = 2a_1 + a_2 + 3a_3$,
 $b_4 = 5a_1 + 5a_2 + 7a_3$, $b_5 = a_1 - 2a_2 + 2a_3$
13. $b_1 = 4a_1 + 7a_2 + 7a_3$, $b_2 = 5a_1 + 4a_2 + 6a_3$, $b_3 = 3a_1 + 10a_2 + 8a_3$,
 $b_4 = 7a_1 + 17a_2 + 15a_3$, $b_5 = 2a_1 + 13a_2 + 9a_3$
14. $b_1 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3$, $b_2 = 5a_1 + 7a_2 + 3a_3$, $b_3 = -a_1 - a_2 + 5a_3$,
 $b_4 = a_1 + 2a_2 + 9a_3$, $b_5 = -4a_1 - 5a_2 + 6a_3$
15. $b_1 = 3a_1 + 4a_2 + 2a_3$, $b_2 = 5a_1 + 7a_2 + 7a_3$, $b_3 = a_1 + a_2 - 3a_3$,
 $b_4 = 4a_1 + 5a_2 - a_3$, $b_5 = -a_1 - 2a_2 - 8a_3$
16. $b_1 = -a_1 - 5a_2 - 3a_3$, $b_2 = 6a_1 - a_2$, $b_3 = -5a_1 - 6a_2 - 4a_3$,
 $b_4 = 2a_1 - 2a_2 - a_3$, $b_5 = -12a_2 - 7a_3$
17. $b_1 = -3a_1 + 2a_3$, $b_2 = 6a_1 - a_2$, $b_3 = -5a_1 + a_2 - a_3$,
 $b_4 = 4a_1 - 3a_3$, $b_5 = -2a_1 + a_3$
18. $b_1 = -a_1 - 2a_3$, $b_2 = 2a_1 + 5a_2 + 5a_3$, $b_3 = 6a_2 + a_3$,
 $b_4 = 3a_1 + 11a_2 + 8a_3$, $b_5 = a_1 + 11a_2 + 4a_3$
19. $b_1 = -5a_1 - 2a_2 + 3a_3$, $b_2 = -2a_1 + 3a_2 - 2a_3$, $b_3 = -6a_1 - 4a_2 + 5a_3$,
 $b_4 = -3a_1 + a_2$, $b_5 = -13a_1 - 3a_2 + 6a_3$
20. $b_1 = -2a_1 + 3a_2 + 2a_3$, $b_2 = -3a_1 - a_2 + 5a_3$, $b_3 = -3a_1 + 2a_2 + 4a_3$,
 $b_4 = -4a_1 - 2a_2 + 7a_3$, $b_5 = -8a_1 - 4a_2 + 11a_3$

21. $b_1 = 3a_1 + 4a_3, b_2 = 6a_1 - 2a_2 + a_3, b_3 = 4a_1 - 3a_2 - 5a_3,$
 $b_4 = 7a_1 - 5a_2 - 8a_3, b_5 = 13a_1 - 5a_2$
22. $b_1 = 3a_1 + 3a_2 - a_3, b_2 = -6a_1 + 2a_2 + a_3, b_3 = -5a_1 + a_3,$
 $b_4 = -14a_1 - a_2 + 3a_3, b_5 = -8a_1 + 5a_2 + a_3$
23. $b_1 = a_1 - 3a_2 - 5a_3, b_2 = 3a_2 + 5a_3, b_3 = -6a_1 + 2a_2 + 3a_3,$
 $b_4 = -7a_1 + 8a_2 + 13a_3, b_5 = -5a_1 + 2a_2 + 3a_3$
24. $b_1 = 5a_2 - 3a_3, b_2 = -a_1 + 6a_2 - 2a_3, b_3 = -4a_1 + 6a_2 + 3a_3,$
 $b_4 = -5a_1 + 7a_2 + 4a_3, b_5 = -5a_1 + 17a_2 - 2a_3$
25. $b_1 = -6a_1 + 3a_2 + 4a_3, b_2 = -a_1 + 6a_2 - 2a_3, b_3 = 2a_1 - 5a_2 - 3a_3,$
 $b_4 = 7a_1 - 14a_2 - 9a_3, b_5 = -5a_1 - 8a_2 - a_3$
26. $b_1 = 6a_1 - a_2 + 3a_3, b_2 = a_1 + 2a_3, b_3 = -2a_1 + a_2 + 6a_3,$
 $b_4 = -7a_1 + 2a_2 + 5a_3, b_5 = 5a_1 + 11a_3$
27. $b_1 = 5a_2 - 2a_3, b_2 = a_1 + a_2 + 2a_3, b_3 = 3a_1 + 5a_2 + 5a_3,$
 $b_4 = 4a_1 + a_2 + 9a_3, b_5 = 4a_1 + 11a_2 + 5a_3$
28. $b_1 = 4a_1 - 2a_2 + 3a_3, b_2 = a_2 - 2a_3, b_3 = 5a_1 - 2a_2 + 3a_3,$
 $b_4 = a_1 + a_2 - 2a_3, b_5 = 9a_1 - 3a_2 + 4a_3$
29. $b_1 = 4a_1 + 2a_2 + 3a_3, b_2 = 6a_1 + 3a_2 + 4a_3, b_3 = a_1 + a_2 - 2a_3,$
 $b_4 = 3a_1 + 2a_2 - a_3, b_5 = 11a_1 + 6a_2 + 5a_3$
30. $b_1 = 2a_1 + a_2 + 4a_3, b_2 = 5a_1 - 2a_2, b_3 = a_1 + a_3,$
 $b_4 = 4a_1 - 3a_2 - 3a_3, b_5 = 8a_1 - a_2 + 5a_3$

3 Контрольная работа 3

Пусть $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ — две системы векторов из арифметического пространства $\mathbf{R}^3$.

а) Доказать, что обе системы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются базисами пространства $\mathbf{R}^3$.

б) Найти матрицы перехода от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ и от $\mathbf{b}$ к $\mathbf{a}$.

с) Найти координатный столбец вектора x в базисах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

1. $a_1 = (5, 7, 8)^\top, a_2 = (3, 4, 5)^\top, a_3 = (2, 2, 3)^\top$
 $b_1 = (2, 1, 1)^\top, b_2 = (3, 1, 2)^\top, b_3 = (3, 2, 2)^\top,$
 $x = (2, 1, 3)^\top$

2. $a_1 = (1, 3, -4)^\top$, $a_2 = (-1, 3, -1)^\top$, $a_3 = (-1, 2, 0)^\top$
 $b_1 = (6, -4, -5)^\top$, $b_2 = (5, -3, -4)^\top$, $b_3 = (8, -5, -7)^\top$,
 $x = (-4, 4, 3)^\top$
3. $a_1 = (4, 2, 1)^\top$, $a_2 = (2, 1, 1)^\top$, $a_3 = (-1, -1, 2)^\top$
 $b_1 = (-6, -5, 4)^\top$, $b_2 = (-10, -8, 7)^\top$, $b_3 = (-7, -6, 5)^\top$,
 $x = (4, 3, -4)^\top$
4. $a_1 = (0, 6, -5)^\top$, $a_2 = (-1, 8, -5)^\top$, $a_3 = (-1, 7, -4)^\top$
 $b_1 = (3, -10, 4)^\top$, $b_2 = (2, -4, 1)^\top$, $b_3 = (4, -13, 5)^\top$,
 $x = (3, -16, 8)^\top$
5. $a_1 = (3, 4, 6)^\top$, $a_2 = (2, 4, 3)^\top$, $a_3 = (1, 3, 1)^\top$
 $b_1 = (-1, -4, 1)^\top$, $b_2 = (-1, -2, 0)^\top$, $b_3 = (-1, -5, 2)^\top$,
 $x = (-1, -6, 1)^\top$
6. $a_1 = (8, 3, 0)^\top$, $a_2 = (2, 0, -1)^\top$, $a_3 = (-1, -1, -1)^\top$
 $b_1 = (6, 5, 3)^\top$, $b_2 = (2, 3, 2)^\top$, $b_3 = (9, 7, 4)^\top$,
 $x = (8, 5, 3)^\top$
7. $a_1 = (5, 3, 2)^\top$, $a_2 = (5, 2, 2)^\top$, $a_3 = (3, 1, 1)^\top$
 $b_1 = (-8, -1, -4)^\top$, $b_2 = (-7, -1, -4)^\top$, $b_3 = (-10, -1, -5)^\top$,
 $x = (-6, -1, -2)^\top$
8. $a_1 = (7, 6, 7)^\top$, $a_2 = (4, 4, 5)^\top$, $a_3 = (2, 1, 1)^\top$
 $b_1 = (1, -6, -10)^\top$, $b_2 = (1, -8, -13)^\top$, $b_3 = (2, -7, -12)^\top$,
 $x = (-1, 0, 0)^\top$
9. $a_1 = (2, 7, 2)^\top$, $a_2 = (1, 4, 1)^\top$, $a_3 = (2, 4, 1)^\top$
 $b_1 = (7, 9, 3)^\top$, $b_2 = (10, 13, 4)^\top$, $b_3 = (9, 12, 4)^\top$,
 $x = (-3, -5, -1)^\top$
10. $a_1 = (1, 3, 2)^\top$, $a_2 = (2, 7, 3)^\top$, $a_3 = (2, 8, 3)^\top$
 $b_1 = (-3, -8, -3)^\top$, $b_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $b_3 = (-4, -11, -4)^\top$,
 $x = (-5, -20, -7)^\top$
11. $a_1 = (3, -2, -1)^\top$, $a_2 = (-6, 1, 0)^\top$, $a_3 = (-4, 2, 1)^\top$
 $b_1 = (-1, -3, -2)^\top$, $b_2 = (-1, 2, 1)^\top$, $b_3 = (2, 4, 3)^\top$,
 $x = (-7, 1, 0)^\top$
12. $a_1 = (-1, 5, -4)^\top$, $a_2 = (2, -3, 3)^\top$, $a_3 = (2, -6, 5)^\top$

- $b_1 = (1, 6, -4)^\top$, $b_2 = (-1, -3, 2)^\top$, $b_3 = (0, -10, 7)^\top$,
 $x = (3, -4, 4)^\top$
- 13.** $a_1 = (2, -1, -2)^\top$, $a_2 = (-4, 7, 3)^\top$, $a_3 = (-3, 7, 2)^\top$
 $b_1 = (-1, 11, -1)^\top$, $b_2 = (0, -11, 2)^\top$, $b_3 = (1, -5, 0)^\top$,
 $x = (-5, 13, 3)^\top$
- 14.** $a_1 = (2, -3, 3)^\top$, $a_2 = (-1, 4, -3)^\top$, $a_3 = (-3, 5, -5)^\top$
 $b_1 = (2, 0, 1)^\top$, $b_2 = (0, -1, 1)^\top$, $b_3 = (-5, 3, -5)^\top$,
 $x = (-2, 6, -5)^\top$
- 15.** $a_1 = (1, -2, -2)^\top$, $a_2 = (-3, 3, 4)^\top$, $a_3 = (1, 2, 1)^\top$
 $b_1 = (1, -1, -1)^\top$, $b_2 = (-5, 2, 4)^\top$, $b_3 = (5, 0, -3)^\top$,
 $x = (-1, 3, 3)^\top$
- 16.** $a_1 = (-1, -4, 4)^\top$, $a_2 = (3, 7, -5)^\top$, $a_3 = (2, 5, -4)^\top$
 $b_1 = (2, 0, 3)^\top$, $b_2 = (-1, 2, -4)^\top$, $b_3 = (-2, -1, -2)^\top$,
 $x = (4, 8, -5)^\top$
- 17.** $a_1 = (-3, -2, -2)^\top$, $a_2 = (2, 4, 3)^\top$, $a_3 = (1, 3, 2)^\top$
 $b_1 = (-6, 1, -1)^\top$, $b_2 = (7, 0, 2)^\top$, $b_3 = (3, -1, 0)^\top$,
 $x = (0, 5, 3)^\top$
- 18.** $a_1 = (-5, -4, 3)^\top$, $a_2 = (3, 0, -2)^\top$, $a_3 = (5, 3, -3)^\top$
 $b_1 = (-7, -9, 4)^\top$, $b_2 = (5, 6, -3)^\top$, $b_3 = (9, 11, -5)^\top$,
 $x = (3, -1, -2)^\top$
- 19.** $a_1 = (3, -4, -1)^\top$, $a_2 = (-5, 7, 2)^\top$, $a_3 = (-3, 5, 1)^\top$
 $b_1 = (1, 0, 0)^\top$, $b_2 = (-3, 2, 1)^\top$, $b_3 = (1, -1, -1)^\top$,
 $x = (-5, 8, 2)^\top$
- 20.** $a_1 = (-5, -6, 4)^\top$, $a_2 = (4, 6, -3)^\top$, $a_3 = (3, 5, -2)^\top$
 $b_1 = (-8, -7, 7)^\top$, $b_2 = (9, 8, -8)^\top$, $b_3 = (5, 5, -4)^\top$,
 $x = (2, 5, -1)^\top$
- 21.** $a_1 = (-5, -1, 5)^\top$, $a_2 = (-4, -1, 3)^\top$, $a_3 = (7, 2, -5)^\top$
 $b_1 = (-1, -1, 2)^\top$, $b_2 = (-3, 0, 1)^\top$, $b_3 = (6, 2, -5)^\top$,
 $x = (-8, -2, 7)^\top$
- 22.** $a_1 = (-4, -6, 5)^\top$, $a_2 = (-2, -3, 2)^\top$, $a_3 = (3, 4, -2)^\top$
 $b_1 = (-1, 1, -2)^\top$, $b_2 = (-1, -4, 4)^\top$, $b_3 = (3, 3, -1)^\top$,
 $x = (-5, -7, 5)^\top$

23. $a_1 = (2, 3, -2)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 0)^\top$, $a_3 = (2, 0, -1)^\top$
 $b_1 = (5, -5, 1)^\top$, $b_2 = (-6, 6, -1)^\top$, $b_3 = (-1, 2, -1)^\top$,
 $x = (1, 2, -1)^\top$
24. $a_1 = (4, 3, -2)^\top$, $a_2 = (2, 1, -1)^\top$, $a_3 = (-1, 0, 0)^\top$
 $b_1 = (-9, -5, 7)^\top$, $b_2 = (11, 6, -8)^\top$, $b_3 = (3, 2, -3)^\top$,
 $x = (3, 2, -1)^\top$
25. $a_1 = (-1, 3, 3)^\top$, $a_2 = (1, 0, -2)^\top$, $a_3 = (-2, 1, 4)^\top$
 $b_1 = (-3, 1, 8)^\top$, $b_2 = (4, -1, -10)^\top$, $b_3 = (0, 0, -1)^\top$,
 $x = (0, 2, 1)^\top$
26. $a_1 = (-1, 2, -2)^\top$, $a_2 = (0, 1, -1)^\top$, $a_3 = (1, 0, 1)^\top$
 $b_1 = (-7, -7, 2)^\top$, $b_2 = (7, 8, -3)^\top$, $b_3 = (4, 3, 0)^\top$,
 $x = (-2, 1, -2)^\top$
27. $a_1 = (3, 2, -4)^\top$, $a_2 = (0, -1, 1)^\top$, $a_3 = (1, 2, -3)^\top$
 $b_1 = (1, 5, -4)^\top$, $b_2 = (-1, -6, 5)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0)^\top$,
 $x = (2, 1, -2)^\top$
28. $a_1 = (3, 1, -2)^\top$, $a_2 = (0, -1, 1)^\top$, $a_3 = (2, 4, -5)^\top$
 $b_1 = (-4, -7, 10)^\top$, $b_2 = (4, 6, -9)^\top$, $b_3 = (3, 6, -8)^\top$,
 $x = (1, -2, 2)^\top$
29. $a_1 = (2, -5, -5)^\top$, $a_2 = (2, -3, -2)^\top$, $a_3 = (-3, 4, 2)^\top$
 $b_1 = (-3, 3, 2)^\top$, $b_2 = (5, -6, -4)^\top$, $b_3 = (-1, 2, 1)^\top$,
 $x = (3, -6, -5)^\top$
30. $a_1 = (-3, -5, 3)^\top$, $a_2 = (-2, -4, 3)^\top$, $a_3 = (3, 6, -5)^\top$
 $b_1 = (1, 4, -2)^\top$, $b_2 = (-3, -8, 5)^\top$, $b_3 = (2, 3, -3)^\top$,
 $x = (-4, -7, 5)^\top$

4 Контрольная работа 4

Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в некотором трехмерном пространстве V .

- Доказать, что система $\mathbf{e}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ является базисом V .
- Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}'$ к базису $\mathbf{e}$.
- Найти координаты вектора x в базисе $\mathbf{e}'$, зная его координаты в базисе $\mathbf{e}$.

1. $e'_1 = -6e_1 + 10e_2 + e_3$, $e'_2 = -2e_1 + 3e_2 + 5e_3$, $e'_3 = -5e_1 + 8e_2 + 6e_3$,
 $x = -3e_1 + 5e_2$
2. $e'_1 = 6e_1 - e_2 - 3e_3$, $e'_2 = -3e_1 + 5e_2 + 7e_3$, $e'_3 = 2e_1 - 2e_2 - 3e_3$,
 $x = e_1 + 6e_2 + 7e_3$
3. $e'_1 = e_1 - 9e_2 + 8e_3$, $e'_2 = 2e_1 + e_2 - 2e_3$, $e'_3 = -7e_1 + 5e_2 - e_3$,
 $x = 10e_1 - 13e_2 + 7e_3$
4. $e'_1 = 5e_1 - 3e_2 - 6e_3$, $e'_2 = -e_2 + 2e_3$, $e'_3 = 7e_1 - 4e_2 - 9e_3$,
 $x = -2e_1 + 5e_3$
5. $e'_1 = 3e_1 - 3e_2 + e_3$, $e'_2 = -4e_1 + 3e_2 - 2e_3$, $e'_3 = 8e_1 + 2e_2 + 9e_3$,
 $x = -9e_1 - 2e_2 - 10e_3$
6. $e'_1 = -8e_1 - e_2 + 9e_3$, $e'_2 = -7e_1 + 2e_2 + 6e_3$, $e'_3 = 4e_1 - 8e_2 + e_3$,
 $x = -19e_1 + 9e_2 + 14e_3$
7. $e'_1 = -2e_1 + e_2 + 6e_3$, $e'_2 = e_1 + 4e_2 + 2e_3$, $e'_3 = -4e_1 - 6e_2 + 3e_3$,
 $x = 3e_1 + 11e_2 + 5e_3$
8. $e'_1 = -e_1 - e_2 + 3e_3$, $e'_2 = -3e_1 - 4e_2 + 7e_3$, $e'_3 = 3e_1 + 9e_2 + 4e_3$,
 $x = -7e_1 - 14e_2 + 6e_3$
9. $e'_1 = 8e_1 - 10e_2 - 9e_3$, $e'_2 = 5e_1 - 7e_2 - 7e_3$, $e'_3 = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$,
 $x = 14e_1 - 21e_2 - 22e_3$
10. $e'_1 = -8e_1 + 3e_2 + 7e_3$, $e'_2 = -7e_1 + 2e_2 + 7e_3$, $e'_3 = -7e_1 + 10e_3$,
 $x = -8e_1 + 5e_2 + 4e_3$
11. $e'_1 = -2e_1 - 3e_2 + 6e_3$, $e'_2 = 3e_1 - e_3$, $e'_3 = -10e_1 + 7e_2 - 9e_3$,
 $x = -15e_1 + 4e_2 - 2e_3$
12. $e'_1 = -e_1 - 6e_2 - 10e_3$, $e'_2 = -7e_1 + e_2 + 6e_3$, $e'_3 = 3e_1 + 5e_2 + 7e_3$,
 $x = 9e_1 - 2e_2 - 9e_3$
13. $e'_1 = -5e_1 - e_2 - e_3$, $e'_2 = -e_1 - 6e_2 + 9e_3$, $e'_3 = -3e_1 - 6e_2 + 8e_3$,
 $x = -7e_1 - e_2 - 2e_3$
14. $e'_1 = -2e_1 + 4e_2 + 3e_3$, $e'_2 = -10e_1 - 9e_2 + 2e_3$, $e'_3 = 9e_1 - 8e_2 - 9e_3$,
 $x = 17e_1 + 5e_2 - 8e_3$
15. $e'_1 = -8e_2 + 9e_3$, $e'_2 = e_1 - 3e_2 - 5e_3$, $e'_3 = e_1 - 10e_2 + 3e_3$,
 $x = -15e_2 + 17e_3$
16. $e'_1 = 3e_1 - 10e_2 - 7e_3$, $e'_2 = -e_1 + 5e_2 + 8e_3$, $e'_3 = -2e_1 + 3e_2 - 8e_3$,
 $x = 2e_1 - 12e_2 - 23e_3$
17. $e'_1 = e_1 + 2e_3$, $e'_2 = 4e_1 + 4e_2 + 7e_3$, $e'_3 = -e_1 + 3e_2 - 3e_3$,
 $x = -4e_1 - e_2 - 8e_3$

18. $e'_1 = -2e_1 + e_2 - 4e_3$, $e'_2 = 5e_1 - 4e_2 - e_3$, $e'_3 = 7e_1 - 4e_2 + 10e_3$,
 $x = e_2 + 7e_3$
19. $e'_1 = 7e_1 + 6e_2 - 7e_3$, $e'_2 = -e_1 - 5e_2 - 9e_3$, $e'_3 = -4e_1 - 8e_2 - 7e_3$,
 $x = 4e_1 + 3e_2 - 5e_3$
20. $e'_1 = 7e_1 - 6e_2 - e_3$, $e'_2 = 7e_1 - 9e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 - e_2$,
 $x = e_1 + 2e_2 - 2e_3$
21. $e'_1 = 5e_1 - 7e_2 - 2e_3$, $e'_2 = 6e_1 - e_2 + 10e_3$, $e'_3 = 3e_2 + 5e_3$,
 $x = e_1 + 9e_2 + 17e_3$
22. $e'_1 = 8e_1 + 4e_2 - 9e_3$, $e'_2 = -4e_1 - 9e_2 + 9e_3$, $e'_3 = e_1 + 5e_2 - 4e_3$,
 $x = -11e_1 - 8e_2 + 14e_3$
23. $e'_1 = e_1 + 10e_2 - 9e_3$, $e'_2 = -e_1 - 7e_2 + 5e_3$, $e'_3 = -e_1 - 5e_2 + 2e_3$,
 $x = -3e_1 - 22e_2 + 16e_3$
24. $e'_1 = -9e_1 - 4e_2 - 9e_3$, $e'_2 = 8e_1 - 4e_2 + 3e_3$, $e'_3 = 8e_1 - 7e_2 + e_3$,
 $x = 25e_1 - 7e_2 + 13e_3$
25. $e'_1 = 4e_1 - 7e_2 + 7e_3$, $e'_2 = 2e_1 + 5e_3$, $e'_3 = -3e_1 + 6e_2 - 5e_3$,
 $x = -5e_1 + 13e_2 - 7e_3$
26. $e'_1 = 7e_1 + 8e_2 - 10e_3$, $e'_2 = -3e_1 - 7e_2 + 8e_3$, $e'_3 = 3e_1 + 8e_2 - 9e_3$,
 $x = -7e_1 - 7e_2 + 9e_3$
27. $e'_1 = 8e_1 - 3e_3$, $e'_2 = -10e_1 - e_2 + 3e_3$, $e'_3 = -5e_1 + 8e_2 + 8e_3$,
 $x = -23e_1 + 7e_2 + 14e_3$
28. $e'_1 = -e_1 + 2e_2 - 5e_3$, $e'_2 = -7e_1 - 4e_2 + 2e_3$, $e'_3 = -e_2 + 2e_3$,
 $x = -6e_1 - 7e_2 + 9e_3$
29. $e'_1 = -3e_1 + 3e_2 - 7e_3$, $e'_2 = e_2 - 10e_3$, $e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + 5e_3$,
 $x = 5e_1 - 4e_2 + 2e_3$
30. $e'_1 = 3e_1 - 4e_2 + 10e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 5e_2 + 6e_3$, $e'_3 = 2e_1 - 8e_2 + 9e_3$,
 $x = 2e_1 + e_2 + 5e_3$

5 Контрольная работа 5

Пусть $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3\}$ и $\mathbf{g} = \{g_1, g_2, g_3\}$ — две системы многочленов из пространства многочленов степени не выше 2.

а) Доказать, что обе системы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ являются базисами рассматриваемого пространства.

б) Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{f}$ к базису $\mathbf{g}$.

с) Найти координаты многочлена $h(t) = 1 + t + t^2$ в обоих базисах.

1. $f_1 = 1 + 4t + 2t^2$, $f_2 = 1 + t + t^2$, $f_3 = 1 + 3t + 2t^2$,
 $g_1 = 2 + t + 4t^2$, $g_2 = 1 + t + 5t^2$, $g_3 = 2 + t + 3t^2$
2. $f_1 = 3t + t^2$, $f_2 = 1 + 3t + 2t^2$, $f_3 = 1 + 5t + 3t^2$,
 $g_1 = 1 - t^2$, $g_2 = 2 + t + 3t^2$, $g_3 = 3 + t + t^2$
3. $f_1 = 1 + 5t + 5t^2$, $f_2 = -1 - 3t - 4t^2$, $f_3 = -3t - t^2$,
 $g_1 = 5 + t - 7t^2$, $g_2 = -4 - t + 5t^2$, $g_3 = -1 + t^2$
4. $f_1 = 1 - t + 2t^2$, $f_2 = 1 + 2t + 4t^2$, $f_3 = -t - t^2$,
 $g_1 = 2 + t - t^2$, $g_2 = 4 + t - 6t^2$, $g_3 = -1 + 3t^2$
5. $f_1 = -2 + 2t - 3t^2$, $f_2 = 3 - 4t + 4t^2$, $f_3 = -2 + 3t - 2t^2$,
 $g_1 = -3 - 2t - 2t^2$, $g_2 = 4 + 3t + 4t^2$, $g_3 = -2 - 2t - 5t^2$
6. $f_1 = 1 + 2t + 2t^2$, $f_2 = 3t + t^2$, $f_3 = 2 + 2t + 3t^2$,
 $g_1 = 2 + t + 2t^2$, $g_2 = 1 - t^2$, $g_3 = 3 + 2t + 6t^2$
7. $f_1 = 1 + 5t + 3t^2$, $f_2 = 1 + 2t + 2t^2$, $f_3 = 1 + 3t + 2t^2$,
 $g_1 = 3 + t + t^2$, $g_2 = 2 + t + 2t^2$, $g_3 = 2 + t + 3t^2$
8. $f_1 = 2 + 3t + 6t^2$, $f_2 = 1 + 3t + 4t^2$, $f_3 = 2t + t^2$,
 $g_1 = 6 + 2t - 5t^2$, $g_2 = 4 + t - 5t^2$, $g_3 = 1 - 2t^2$
9. $f_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $f_2 = 2 + 7t + 7t^2$, $f_3 = 2 + 5t + 6t^2$,
 $g_1 = 3 + t - 2t^2$, $g_2 = 7 + 2t - 5t^2$, $g_3 = 6 + 2t - 3t^2$
10. $f_1 = 2 + 3t + 4t^2$, $f_2 = 3 + t + 5t^2$, $f_3 = 1 + t + 2t^2$,
 $g_1 = 4 + 2t + 3t^2$, $g_2 = 5 + 3t + 5t^2$, $g_3 = 2 + t + t^2$
11. $f_1 = 4 + 3t^2$, $f_2 = 1 + t^2$, $f_3 = t$,
 $g_1 = 3 + 2t + 5t^2$, $g_2 = 2 + t + 3t^2$, $g_3 = 2 + t^2$
12. $f_1 = -2 - t - 2t^2$, $f_2 = 3 + 2t + 3t^2$, $f_3 = 2t + t^2$,
 $g_1 = -6 - 2t - 7t^2$, $g_2 = 10 + 3t + 11t^2$, $g_3 = 9 + 2t + 9t^2$
13. $f_1 = 3 + 2t + 2t^2$, $f_2 = 4 + t + 2t^2$, $f_3 = 6 + t + 3t^2$,
 $g_1 = 5 + t + 4t^2$, $g_2 = -t^2$, $g_3 = -1 - 2t^2$
14. $f_1 = 7 + 4t^2$, $f_2 = 5 + 3t^2$, $f_3 = 2 + t + 2t^2$,
 $g_1 = -1 + t$, $g_2 = t + t^2$, $g_3 = 6 + 2t + 7t^2$
15. $f_1 = 3 + 2t^2$, $f_2 = 4 + 4t + t^2$, $f_3 = 2 + t + t^2$,
 $g_1 = 1 + t + 2t^2$, $g_2 = 1 - 2t - 5t^2$, $g_3 = 1$
16. $f_1 = 7 + 2t + 4t^2$, $f_2 = 6 + t + 4t^2$, $f_3 = 5 + t + 3t^2$,
 $g_1 = 3 + t + 2t^2$, $g_2 = 4 + 2t + 5t^2$, $g_3 = 2 + t + 2t^2$

17. $f_1 = -3 - t^2, f_2 = 3 + t + 2t^2, f_3 = -1 + t + t^2,$
 $g_1 = 4 + t + 5t^2, g_2 = 3 + t + 3t^2, g_3 = 10 + 3t + 12t^2$
18. $f_1 = 2 - t + t^2, f_2 = -3 - 2t - t^2, f_3 = -1 + 3t - t^2,$
 $g_1 = -3 - 2t^2, g_2 = t + 3t^2, g_3 = 4 - t$
19. $f_1 = 1 - t, f_2 = 2 + 3t + 2t^2, f_3 = -2 - t^2,$
 $g_1 = -5 - t - 5t^2, g_2 = 10 + 2t + 9t^2, g_3 = 1 + t^2$
20. $f_1 = 1 - t + t^2, f_2 = 5 - 4t + 5t^2, f_3 = 4 - t + 3t^2,$
 $g_1 = t + 2t^2, g_2 = 2 + 5t + 11t^2, g_3 = 1 + 2t + 4t^2$
21. $f_1 = 3 + 2t, f_2 = 4 + 4t + t^2, f_3 = 3 + t - t^2,$
 $g_1 = 4 + 2t + 5t^2, g_2 = 6 + 3t + 7t^2, g_3 = 3 + t + 4t^2$
22. $f_1 = -1 + t + t, f_2 = 2t + t^2, f_3 = -3 + 2t + 3t^2,$
 $g_1 = -1 - t - 4t^2, g_2 = -t - 5t^2, g_3 = -2 - t - 4t^2$
23. $f_1 = 4 + 2t - t^2, f_2 = 6 + 5t, f_3 = 3 + 4t + t^2,$
 $g_1 = 4 + t + t^2, g_2 = 7 + 2t + 2t^2, g_3 = 4 + t$
24. $f_1 = -3 + t + 2t^2, f_2 = -2 + t^2, f_3 = 3 - t^2,$
 $g_1 = -3 - 2t - 7t^2, g_2 = -2 - t - 3t^2, g_3 = 4 + 3t + 10t^2$
25. $f_1 = -2 + 3t + 4t^2, f_2 = 1 + t + t^2, f_3 = 2 - 2t - 3t^2,$
 $g_1 = 1 + 2t + 6t^2, g_2 = 3 + 3t + 10t^2, g_3 = -t - 3t^2$
26. $f_1 = 1 - 3t - 2t^2, f_2 = 2 - 3t - 3t^2, f_3 = -4 + 5t + 6t^2,$
 $g_1 = 1 + 2t + 9t^2, g_2 = 1 + t + 5t^2, g_3 = -1 - 2t^2$
27. $f_1 = -3 + t + 3t^2, f_2 = -4 + t + 4t^2, f_3 = 3 + t - 2t^2,$
 $g_1 = -1 + t + 4t^2, g_2 = -1 + 2t + 8t^2, g_3 = 1 - 2t - 9t^2$
28. $f_1 = -1 + 6t + 5t^2, f_2 = 3t + 2t^2, f_3 = -1 - t,$
 $g_1 = 2 + t, g_2 = 1 - 2t^2, g_3 = -1 + t^2$
29. $f_1 = 3 + t - t^2, f_2 = 5 + 4t, f_3 = 1 + 2t + t^2,$
 $g_1 = 3 + t + 2t^2, g_2 = 6 + 2t + 3t^2, g_3 = 2 + t + 2t^2$
30. $f_1 = 4 - t - 4t^2, f_2 = -2 + 2t + 3t^2, f_3 = 3 - 2t - 4t^2,$
 $g_1 = 1 - 2t - 8t^2, g_2 = t + 3t^2, g_3 = -2t - 7t^2$

6 Контрольная работа 6

Найти ранг матрицы.

1. $\begin{pmatrix} -3 & 7 & -9 & 9 & 6 \\ 7 & -4 & -5 & -2 & 4 \\ -7 & 3 & 5 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -6 & -9 \\ 9 & -7 & -3 & -7 & -7 \\ -9 & -6 & 1 & 10 & -1 \\ -4 & -3 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 9 & 1 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ -1 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & -1 & 10 & 9 \\ 0 & 10 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & 9 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 6 & -3 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & -2 & 9 & 8 \\ 6 & 10 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & 4 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 10 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll}
17. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & -1 & 6 \\ 7 & -3 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix} & 18. \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
19. \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} & 20. \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 6 \\ -3 & 5 & 5 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \\
21. \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} & 22. \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
23. \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} & 24. \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
25. \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & 26. \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
27. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} & 28. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\
29. \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} & 30. \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

7 Контрольная работа 7

Для данной матрицы A :

- найти столбцовую базу; столбцы, не входящие в базу, выразить через базу;
- найти строчечную базу; строки, не входящие в базу, выразить через базу;
- найти базисный минор.

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{1.} \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{2.} \ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & 1 & -10 \\ 6 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{3.} \ A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 & 5 \end{pmatrix} & \mathbf{4.} \ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & 5 & 7 \\ -6 & 5 & -8 & -9 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{5.} \ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & -9 & 3 & -9 \\ 8 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{6.} \ A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\
\mathbf{7.} \ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \mathbf{8.} \ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \\
\mathbf{9.} \ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{10.} \ A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \\ 10 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
\mathbf{11.} \ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{12.} \ A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 7 & 13 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{13.} \ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} & \mathbf{14.} \ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 6 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & -6 & 7 & -9 \end{pmatrix} \\
\mathbf{15.} \ A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} & \mathbf{16.} \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 7 \\ -4 & 9 & -3 & -9 \end{pmatrix} \\
\mathbf{17.} \ A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & -8 & -7 \end{pmatrix} & \mathbf{18.} \ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & -10 & 7 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
19. A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ -6 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & 20. A &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
21. A &= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 7 \\ 1 & 13 & 14 & 8 \\ -5 & 4 & 11 & 1 \end{pmatrix} & 22. A &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
23. A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 2 \end{pmatrix} & 24. A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -8 \end{pmatrix} \\
25. A &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 26. A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -7 & -2 \\ 1 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} \\
27. A &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} & 28. A &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
29. A &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} & 30. A &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

8 Контрольная работа 8

а) Для заданной системы линейных однородных уравнений $Ax = 0$ найти фундаментальную систему решений. Найти размерность пространства решений.

б) Для неоднородной системы уравнений $Ax = b$ найти общее решение.

$$\begin{aligned}
\mathbf{1.} \quad A &= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 10 & 5 & -3 & 2 \\ 5 & 8 & 8 & -5 & 2 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{2.} \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 11 & 4 & 8 & 5 \\ 7 & 8 & 6 & 25 & 10 \\ -1 & -4 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & 10 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{3.} \quad A &= \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 & 21 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{4.} \quad A &= \begin{pmatrix} 9 & -4 & 5 & 11 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 12 & 6 \\ 4 & 14 & 7 & 14 & 8 \\ 6 & -1 & 3 & 15 & 5 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\
\mathbf{5.} \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 11 & 4 & 8 & 5 \\ 3 & 13 & 6 & 12 & 7 \\ 6 & 1 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{6.} \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & 11 & 6 & 6 & 5 \\ 9 & -4 & 4 & 19 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & -3 & 3 & 16 & 5 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \\
\mathbf{7.} \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & 14 & 7 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 18 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 6 & 14 & 6 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \\
\mathbf{8.} \quad A &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 8 & 5 & 7 & 15 & 7 \\ 9 & 4 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{9.} \quad A &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 13 & 6 \\ 6 & 17 & 10 & 13 & 9 \\ 4 & 17 & 8 & 15 & 9 \\ 10 & 2 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{10.} \quad A &= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 & 3 & 3 \\ 4 & 15 & 8 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 5 & 5 & 4 \\ 1 & 9 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{11.} \quad A &= \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 14 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 11 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{12.} \quad A &= \begin{pmatrix} 5 & 19 & 6 & 13 & 9 \\ 4 & 4 & 6 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 5 & 10 & 3 \\ 3 & 15 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \\
\mathbf{13.} \quad A &= \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 & 16 & 2 \\ 7 & 0 & 3 & 13 & 2 \\ 3 & 18 & 7 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{14.} \quad A &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 10 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 8 & 3 \\ 3 & 8 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 16 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{15.} \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 6 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 14 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 9 & 5 \\ 9 & 8 & 5 & 19 & 6 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{16.} \quad A &= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 & 13 & 4 \\ 4 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 17 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \\
\mathbf{17.} \quad A &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 10 & 8 & -2 & 2 \\ 7 & 8 & 7 & 11 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{18.} \quad A &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 10 & 2 \\ 3 & 11 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 13 & 4 & 8 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 11 & 4 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 2 & 13 & 5 \\ 3 & 16 & 5 & 8 & 7 \\ 6 & 11 & 3 & 16 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$20. A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & -5 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 9 & 2 & 14 & 6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 8 & -5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 31 \\ 15 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & -9 & 7 \\ 5 & 14 & 10 & -6 & 9 \\ -2 & -3 & -3 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 29 \\ 42 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$23. A = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 1 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & -3 & 5 & 7 \\ 11 & -3 & 4 & -11 & 4 \\ -7 & 2 & -3 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 12 & -11 & 7 \\ 5 & -13 & -3 & -7 & -5 \\ 2 & -4 & 2 & -8 & -4 \\ 2 & -11 & -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 39 \\ -26 \\ -10 \\ -22 \end{pmatrix}$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & -1 & 7 \\ 9 & -5 & 2 & -9 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ 1 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 17 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & -8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & -7 & 6 \\ 7 & 2 & 7 & -12 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 5 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & -5 & 2 \\ 3 & 9 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 31 \\ 16 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 & -8 & 7 \\ 10 & -1 & 5 & -11 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$30. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 3 & -1 & 7 \\ 6 & 6 & 7 & -8 & 5 \\ 4 & 3 & 6 & -9 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}$$

9 Контрольная работа 9

Пусть $V_1 = L(a_1, a_2)$, $V_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ — два подпространства в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^5$.

- Найти размерности и базисы подпространств V_1 , V_2 , $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.
- Дополнить базис пересечения до базисов каждого из подпространств V_1 , V_2 , $V_1 + V_2$.
- Дополнить базисы V_1 и V_2 до базиса $V_1 + V_2$.
- Разложить базис пересечения по системам $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ и по базису суммы.
- Является ли сумма $V_1 + V_2$ прямой?
- Дополнить базис суммы до базиса всего пространства $\mathbf{R}^5$.

- $a_1 = (1, 1, 0, 3, 2)^\top$, $a_2 = (3, 3, 0, 4, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, 2, 0, 3, 3)^\top$, $b_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^\top$, $b_3 = (0, 1, 0, 1, 1)^\top$
- $a_1 = (-1, 1, 0, 1, 2)^\top$, $a_2 = (-3, 3, 0, -2, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, -1, 3)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -2, 0)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$
- $a_1 = (2, 1, 0, 4, 2)^\top$, $a_2 = (6, 3, 0, 7, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, 0, 0, 1, 3)^\top$, $b_2 = (0, 0, 0, -1, 0)^\top$, $b_3 = (0, 0, 0, 4, 1)^\top$
- $a_1 = (2, 1, 0, 2, 4)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -4, 2)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, 0, 4)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -3, -1)^\top$, $b_3 = (0, 1, 0, 1, 1)^\top$
- $a_1 = (-2, 1, 0, 0, 2)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -5, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, -1, 3)^\top$, $b_2 = (0, 1, 0, 1, 1)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -2, 0)^\top$

6. $a_1 = (2, 1, 0, 4, 2)^\top$, $a_2 = (6, 3, 0, 7, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, 2, 0, 3, 3)^\top$, $b_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^\top$, $b_3 = (0, 3, 0, 1, 1)^\top$
7. $a_1 = (-1, 1, 0, 3, 4)^\top$, $a_2 = (-3, 3, 0, -1, 2)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, 0, 4)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -3, -1)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, 1, 5)^\top$
8. $a_1 = (-2, 1, 0, 2, 4)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -4, 2)^\top$,
 $b_1 = (0, 0, 0, 2, 4)^\top$, $b_2 = (0, 0, 0, -2, -1)^\top$, $b_3 = (0, 0, 0, 4, 1)^\top$
9. $a_1 = (-3, 1, 0, 1, 4)^\top$, $a_2 = (-9, 3, 0, -7, 2)^\top$,
 $b_1 = (0, 4, 0, 6, 4)^\top$, $b_2 = (0, 2, 0, 0, -1)^\top$, $b_3 = (0, 2, 0, 2, 1)^\top$
10. $a_1 = (0, 4, 0, 3, 1)^\top$, $a_2 = (0, 2, 0, 3, 2)^\top$,
 $b_1 = (-3, 1, 0, -5, -2)^\top$, $b_2 = (-9, 3, 0, -10, -1)^\top$, $b_3 = (3, -1, 0, 3, 0)^\top$
11. $a_1 = (-2, 1, 0, -6, -4)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -8, -2)^\top$,
 $b_1 = (0, 4, 0, 2, 0)^\top$, $b_2 = (0, 2, 0, 4, 3)^\top$, $b_3 = (0, 2, 0, 2, 1)^\top$
12. $a_1 = (2, 1, 0, 4, 2)^\top$, $a_2 = (6, 3, 0, 7, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, -1, 3)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -2, 0)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$
13. $a_1 = (0, 4, 0, 3, 1)^\top$, $a_2 = (0, 2, 0, 3, 2)^\top$,
 $b_1 = (-2, 1, 0, -4, -2)^\top$, $b_2 = (-6, 3, 0, -7, -1)^\top$, $b_3 = (2, -1, 0, 2, 0)^\top$
14. $a_1 = (1, 1, 0, 3, 2)^\top$, $a_2 = (3, 3, 0, 4, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, -1, 3)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -2, 0)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$
15. $a_1 = (-2, 1, 0, 4, 6)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -3, 3)^\top$,
 $b_1 = (0, 4, 0, 7, 5)^\top$, $b_2 = (0, 2, 0, -1, -2)^\top$, $b_3 = (0, 2, 0, 2, 1)^\top$
16. $a_1 = (1, 1, 0, 7, 6)^\top$, $a_2 = (3, 3, 0, 6, 3)^\top$,
 $b_1 = (0, 6, 0, 9, 5)^\top$, $b_2 = (0, 3, 0, 0, -2)^\top$, $b_3 = (0, 3, 0, 3, 1)^\top$
17. $a_1 = (1, 1, 0, 3, 2)^\top$, $a_2 = (3, 3, 0, 4, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, 2, 0, 3, 3)^\top$, $b_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^\top$, $b_3 = (0, 1, 0, 1, 1)^\top$
18. $a_1 = (-1, 1, 0, 1, 2)^\top$, $a_2 = (-3, 3, 0, -2, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, -1, 3)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -2, 0)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$
19. $a_1 = (2, 1, 0, 4, 2)^\top$, $a_2 = (6, 3, 0, 7, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, 0, 0, 1, 3)^\top$, $b_2 = (0, 0, 0, -1, 0)^\top$, $b_3 = (0, 0, 0, 4, 1)^\top$
20. $a_1 = (-2, 1, 0, 2, 4)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -4, 2)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, 0, 4)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -3, -1)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$
21. $a_1 = (-2, 1, 0, 0, 2)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -5, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, -1, 3)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -2, 0)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$
22. $a_1 = (2, 1, 0, 4, 2)^\top$, $a_2 = (6, 3, 0, 7, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, 2, 0, 3, 3)^\top$, $b_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^\top$, $b_3 = (0, 1, 0, 1, 1)^\top$

23. $a_1 = (-1, 1, 0, 3, 4)^\top$, $a_2 = (-3, 3, 0, -1, 2)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, 0, 4)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -3, -1)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$
24. $a_1 = (-2, 1, 0, 2, 4)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -4, 2)^\top$,
 $b_1 = (0, 0, 0, 2, 4)^\top$, $b_2 = (0, 0, 0, -2, -1)^\top$, $b_3 = (0, 0, 0, 4, 1)^\top$
25. $a_1 = (-3, 1, 0, 1, 4)^\top$, $a_2 = (-9, 3, 0, -7, 2)^\top$,
 $b_1 = (0, 4, 0, 6, 4)^\top$, $b_2 = (0, 2, 0, 0, -1)^\top$, $b_3 = (0, 2, 0, 2, 1)^\top$
26. $a_1 = (0, 4, 0, 3, 1)^\top$, $a_2 = (0, 2, 0, 3, 2)^\top$,
 $b_1 = (-3, 1, 0, -5, -2)^\top$, $b_2 = (-9, 3, 0, -10, -1)^\top$, $b_3 = (3, -1, 0, 3, 0)^\top$
27. $a_1 = (-2, 1, 0, -6, -4)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -8, -2)^\top$,
 $b_1 = (0, 4, 0, 2, 0)^\top$, $b_2 = (0, 2, 0, 4, 3)^\top$, $b_3 = (0, 2, 0, 2, 1)^\top$
28. $a_1 = (2, 1, 0, 4, 2)^\top$, $a_2 = (6, 3, 0, 7, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, -1, 3)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -2, 0)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$
29. $a_1 = (0, 4, 0, 3, 1)^\top$, $a_2 = (0, 2, 0, 3, 2)^\top$,
 $b_1 = (-2, 1, 0, -4, -2)^\top$, $b_2 = (-6, 3, 0, -7, -1)^\top$, $b_3 = (2, -1, 0, 2, 0)^\top$
30. $a_1 = (1, 1, 0, 3, 2)^\top$, $a_2 = (3, 3, 0, 4, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, -2, 0, -1, 3)^\top$, $b_2 = (0, -1, 0, -2, 0)^\top$, $b_3 = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$
31. $a_1 = (-2, 1, 0, 4, 6)^\top$, $a_2 = (-6, 3, 0, -3, 3)^\top$,
 $b_1 = (0, 4, 0, 7, 5)^\top$, $b_2 = (0, 2, 0, -1, -2)^\top$, $b_3 = (0, 2, 0, 2, 1)^\top$
32. $a_1 = (1, 1, 0, 7, 6)^\top$, $a_2 = (3, 3, 0, 6, 3)^\top$,
 $b_1 = (0, 6, 0, 9, 5)^\top$, $b_2 = (0, 3, 0, 0, -2)^\top$, $b_3 = (0, 3, 0, 3, 1)^\top$
33. $a_1 = (1, 1, 0, 3, 2)^\top$, $a_2 = (3, 3, 0, 4, 1)^\top$,
 $b_1 = (0, 2, 0, 3, 3)^\top$, $b_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^\top$, $b_3 = (0, 1, 0, 1, 1)^\top$

10 Контрольная работа 10

а) Задать системой линейных уравнений подпространство
 $W = L(a_1, \dots, a_s)$.

б) Задать системой линейных уравнений линейное многообразие
 $M = q + W$.

1. $a_1 = (1, 1, -1, 0)^\top$, $a_2 = (-2, 0, 1, 1)^\top$, $a_3 = (8, 2, -5, -3)^\top$,
 $q = (2, 3, -2, 1)^\top$
2. $a_1 = (-1, 1, 0, 1)^\top$, $a_2 = (0, 2, -1, 1)^\top$, $a_3 = (-2, -4, 3, -1)^\top$,
 $q = (0, 3, -1, 2)^\top$

3. $a_1 = (1, 3, -2, 1)^\top$, $a_2 = (4, 2, -3, -1)^\top$, $a_3 = (-10, 0, 5, 5)^\top$,
 $q = (2, 5, -3, 2)^\top$
4. $a_1 = (5, 3, -4, -1)^\top$, $a_2 = (3, 1, -2, -1)^\top$, $a_3 = (1, 3, -2, 1)^\top$,
 $q = (6, 5, -5, 0)^\top$
5. $a_1 = (-2, 4, -1, 3)^\top$, $a_2 = (-3, 1, 1, 2)^\top$, $a_3 = (5, 5, -5, 0)^\top$,
 $q = (-1, 6, -2, 4)^\top$
6. $a_1 = (8, 2, -5, -3)^\top$, $a_2 = (7, 3, -5, -2)^\top$, $a_3 = (-5, -5, 5, 0)^\top$,
 $q = (9, 4, -6, -2)^\top$
7. $a_1 = (5, 1, -3, -2)^\top$, $a_2 = (6, 4, -5, -1)^\top$, $a_3 = (-8, -10, 9, -1)^\top$,
 $q = (6, 3, -4, -1)^\top$
8. $a_1 = (-1, 5, -2, 3)^\top$, $a_2 = (10, 4, -7, -3)^\top$, $a_3 = (-32, -2, 17, 15)^\top$,
 $q = (0, 7, -3, 4)^\top$
9. $a_1 = (11, 5, -8, -3)^\top$, $a_2 = (5, 7, -6, 1)^\top$, $a_3 = (7, -11, 2, -9)^\top$,
 $q = (12, 7, -9, -2)^\top$
10. $a_1 = (14, 6, -10, -4)^\top$, $a_2 = (7, 5, -6, -1)^\top$, $a_3 = (7, -3, -2, -5)^\top$,
 $q = (15, 8, -11, -3)^\top$
11. $a_1 = (0, 1, -1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (-3, -1, -8, 2)^\top$,
 $q = (1, 2, 0, 3)^\top$
12. $a_1 = (-1, 0, -3, 1)^\top$, $a_2 = (-1, 1, -4, 2)^\top$, $a_3 = (1, -3, 6, -4)^\top$,
 $q = (0, 1, -2, 3)^\top$
13. $a_1 = (-1, 2, -5, 3)^\top$, $a_2 = (2, 1, 5, -1)^\top$, $a_3 = (-8, 1, -25, 9)^\top$,
 $q = (0, 3, -4, 5)^\top$
14. $a_1 = (3, 2, 7, -1)^\top$, $a_2 = (-1, 3, -6, 4)^\top$, $a_3 = (9, -5, 32, -14)^\top$,
 $q = (4, 3, 8, 1)^\top$
15. $a_1 = (-2, 1, -7, 3)^\top$, $a_2 = (3, 1, 8, -2)^\top$, $a_3 = (1, 2, 1, 1)^\top$,
 $q = (-1, 2, -6, 5)^\top$
16. $a_1 = (-4, -1, -11, 3)^\top$, $a_2 = (-3, 1, -10, 4)^\top$, $a_3 = (1, -5, 8, -6)^\top$,
 $q = (-3, 0, -10, 5)^\top$
17. $a_1 = (-4, -2, -10, 2)^\top$, $a_2 = (2, -3, 9, -5)^\top$, $a_3 = (6, -1, 19, -7)^\top$,
 $q = (-3, -1, -9, 4)^\top$
18. $a_1 = (-5, -2, -13, 3)^\top$, $a_2 = (-3, 2, -11, 5)^\top$, $a_3 = (1, 10, -7, 9)^\top$,
 $q = (-4, -1, -12, 5)^\top$
19. $a_1 = (-7, -1, -20, 6)^\top$, $a_2 = (-5, -3, -12, 2)^\top$, $a_3 = (1, 7, -4, 6)^\top$,
 $q = (-6, 0, -19, 8)^\top$

20. $a_1 = (5, 7, 8, 2)^\top$, $a_2 = (2, 3, 3, 1)^\top$, $a_3 = (4, 5, 7, 1)^\top$,
 $q = (6, 8, 9, 4)^\top$
21. $a_1 = (-1, 0, 1, 1)^\top$, $a_2 = (1, 1, 0, 2)^\top$, $a_3 = (-5, -3, 2, -4)^\top$,
 $q = (0, 2, 3, 4)^\top$
22. $a_1 = (-2, -1, 1, -1)^\top$, $a_2 = (-3, -1, 2, 0)^\top$, $a_3 = (5, 1, -4, -2)^\top$,
 $q = (-1, 1, 3, 2)^\top$
23. $a_1 = (-4, -1, 3, 1)^\top$, $a_2 = (3, 2, -1, 3)^\top$, $a_3 = (7, 3, -4, 2)^\top$,
 $q = (-3, 1, 5, 4)^\top$
24. $a_1 = (4, 3, -1, 5)^\top$, $a_2 = (-5, -1, 4, 2)^\top$, $a_3 = (9, 4, -5, 3)^\top$,
 $q = (5, 5, 1, 8)^\top$
25. $a_1 = (-5, -2, 3, -1)^\top$, $a_2 = (5, 3, -2, 4)^\top$, $a_3 = (-25, -13, 12, -14)^\top$,
 $q = (-4, 0, 5, 2)^\top$
26. $a_1 = (-1, 2, 3, 7)^\top$, $a_2 = (1, 3, 2, 8)^\top$, $a_3 = (-5, -5, 0, -10)^\top$,
 $q = (0, 4, 5, 10)^\top$
27. $a_1 = (1, 2, 1, 5)^\top$, $a_2 = (-1, 1, 2, 4)^\top$, $a_3 = (5, 1, -4, -2)^\top$,
 $q = (2, 4, 3, 8)^\top$
28. $a_1 = (2, 3, 1, 7)^\top$, $a_2 = (-2, 1, 3, 5)^\top$, $a_3 = (10, 3, -7, -1)^\top$,
 $q = (3, 5, 3, 10)^\top$
29. $a_1 = (3, 4, 1, 9)^\top$, $a_2 = (-3, 1, 4, 6)^\top$, $a_3 = (15, 5, -10, 0)^\top$,
 $q = (4, 6, 3, 12)^\top$
30. $a_1 = (3, 5, 2, 12)^\top$, $a_2 = (-3, 1, 4, 6)^\top$, $a_3 = (15, 7, -8, 6)^\top$,
 $q = (4, 7, 4, 15)^\top$

11 Контрольная работа 11

Пусть A — квадратная матрица порядка 5 с элементами a_{ij} . Вычислить определитель матрицы A :

- а) с помощью метода Гаусса;
- б) с помощью теоремы Лапласа, раскладывая по строкам $\{i_1, i_2, i_3\}$ и по столбцам $\{j_1, j_2\}$.

1. $a_{ij} = i + j$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$
2. $a_{ij} = i - j$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 4\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 3\}$
3. $a_{ij} = j - i$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 4\}$
4. $a_{ij} = |i - j|$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 3, 4\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 5\}$

5. $a_{ij} = |i - j| + 2j$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 3, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{2, 3\}$
6. $a_{ij} = |i - j| - 2i$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 4, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{2, 4\}$
7. $a_{ij} = 2i - j$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{2, 3, 4\}$, $\{j_1, j_2\} = \{2, 5\}$
8. $a_{ij} = 3i - 2j$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{2, 3, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{3, 4\}$
9. $a_{ij} = |2i - j|$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{2, 4, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{3, 5\}$
10. $a_{ij} = |3i - 2j|$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{3, 4, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{4, 5\}$
11. $a_{ij} = |2i - j| - i$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$, $\{j_1, j_2\} = \{4, 5\}$
12. $a_{ij} = |3i - 2j| - 2i$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 4\}$, $\{j_1, j_2\} = \{3, 5\}$
13. $a_{ij} = res_{i+1}j$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{3, 4\}$
14. $a_{ij} = res_{j+1}i$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 3, 4\}$, $\{j_1, j_2\} = \{2, 5\}$
15. $a_{ij} = res_{i+1}(2j)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 3, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{2, 4\}$
16. $a_{ij} = res_{j+1}(2i)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 4, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{2, 3\}$
17. $a_{ij} = res_{i+1}(i + j)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{2, 3, 4\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 5\}$
18. $a_{ij} = res_{j+1}(i + j)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{2, 3, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 4\}$
19. $a_{ij} = res_{i+2}(3j)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{2, 4, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 3\}$
20. $a_{ij} = res_{j+2}(3i)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{3, 4, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$
21. $a_{ij} = 2(i + j)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$, $\{j_1, j_2\} = \{2, 3\}$
22. $a_{ij} = 2(i - j)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 4\}$, $\{j_1, j_2\} = \{2, 4\}$
23. $a_{ij} = res_{i+1}(ij)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{2, 5\}$
24. $a_{ij} = res_{j+1}(ij)$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 3, 4\}$, $\{j_1, j_2\} = \{3, 4\}$
25. $a_{ij} = ij - i - j$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 3, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{3, 5\}$
26. $a_{ij} = (i - j)^2$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 4, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{4, 5\}$
27. $a_{ij} = i^2 - ij$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{2, 3, 4\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$
28. $a_{ij} = j^2 - ij$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{2, 3, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 3\}$
29. $a_{ij} = i^2 - j^2$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{2, 4, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 4\}$
30. $a_{ij} = \binom{j-1}{i}$, $\{i_1, i_2, i_3\} = \{3, 4, 5\}$, $\{j_1, j_2\} = \{1, 5\}$

12 Контрольная работа 12

Для заданной системы матриц:

а) Найти ранг и какую-нибудь базу; матрицы, не входящие в базу, выразить через базу

б) Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы.

1. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
13. & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \\
14. & \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
15. & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} -3 & 4 & -9 \\ 1 & -9 & 0 \end{pmatrix} \\
16. & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix} \\
17. & \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 0 & -9 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \end{pmatrix} \\
18. & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 9 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
19. & \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -5 & -1 \\ -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ -2 & -8 & -11 \end{pmatrix} \\
20. & \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 \\ 5 & -4 & -9 \end{pmatrix} \\
21. & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22. & \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -5 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 5 & 2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \\
23. & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \\
24. & \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \\
25. & \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 6 & 8 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \\
26. & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 5 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \\
27. & \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & -4 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} \\
28. & \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 0 & 6 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} \\
29. & \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\
30. & \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

13 Контрольная работа 13

- а) Доказать, что система матриц $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ образует базис вещественного пространства матриц второго порядка.
 б) Найти координаты матрицы B в этом базисе.
 в) Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{A}$ к стандартному базису.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$
5. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
7. $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
9. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
& A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\
\mathbf{10.} \quad & A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\
\mathbf{11.} \quad & A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{12.} \quad & A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\
\mathbf{13.} \quad & A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{14.} \quad & A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{15.} \quad & A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -11 & -3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{16.} \quad & A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{17.} \quad & A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

18. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
19. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$
20. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$
21. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
22. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$
23. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$
24. $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$
25. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
 $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
26. $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
& A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \\
27. & A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\
28. & A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\
29. & A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\
30. & A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \\
& A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

14 Контрольная работа 14

Для заданной системы многочленов:

- Найти ранг и какую-нибудь базу
- Многочлены, не входящие в базу, выразить через базу
- Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы многочленов.

- $f_1 = -3 - t + 5t^2 + 6t^3$, $f_2 = 4 - 5t + 3t^2 - 3t^3$, $f_3 = -10 + 3t + 7t^2 + 15t^3$, $f_4 = 5 - 11t + 11t^2$
- $f_1 = -t + 4t^2 + t^3$, $f_2 = t - 5t^2 - 2t^3$, $f_3 = -3t + 13t^2 + 4t^3$, $f_4 = t - 6t^2 - 3t^3$
- $f_1 = 1 + 3t - 3t^2 - 3t^3$, $f_2 = 2 + 2t - 3t^3$, $f_3 = 4t - 6t^2 - 3t^3$, $f_4 = 5 + 7t - 3t^2 - 9t^3$
- $f_1 = 1 - 3t + 3t^2$, $f_2 = -1 + 3t + t^2 - 2t^3$, $f_3 = 3 - 9t + 5t^2 + 2t^3$, $f_4 = -1 + 3t + 5t^2 - 4t^3$

5. $f_1 = 2 + t - t^2$, $f_2 = -2 + 2t + 2t^2 + t^3$, $f_3 = 6 - 4t^2 - t^3$, $f_4 = -2 + 5t + 3t^2 + 2t^3$
6. $f_1 = 2 + 5t + 5t^2 + 3t^3$, $f_2 = 1 + 2t + 4t^2 + 3t^3$, $f_3 = 3 + 8t + 6t^2 + 3t^3$, $f_4 = 4 + 9t + 13t^2 + 9t^3$
7. $f_1 = 2 + t + 2t^2 + 4t^3$, $f_2 = 2 + 4t + 4t^2 + t^3$, $f_3 = 2 - 2t + 7t^3$, $f_4 = 6 + 9t + 10t^2 + 6t^3$
8. $f_1 = 3 + 5t + 2t^2 + t^3$, $f_2 = 1 + t + 4t^2 + 3t^3$, $f_3 = 5 + 9t - t^3$, $f_4 = 5 + 7t + 10t^2 + 7t^3$
9. $f_1 = 1 + t + 5t^2 + 3t^3$, $f_2 = 5 + 4t + t^2 + t^3$, $f_3 = -3 - 2t + 9t^2 + 5t^3$, $f_4 = 11 + 9t + 7t^2 + 5t^3$
10. $f_1 = 2 + 3t + 2t^2 + 4t^3$, $f_2 = 4 + t + 4t^2 + 2t^3$, $f_3 = 5t + 6t^3$, $f_4 = 10 + 5t + 10t^2 + 8t^3$
11. $f_1 = 2 + 4t + t^2 - t^3$, $f_2 = 2 - t + 3t^3$, $f_3 = 3 - 3t - 2t^2 + 3t^3$, $f_4 = 3 + 2t - t^2 - t^3$
12. $f_1 = 2 + t + 3t^3$, $f_2 = 4 + 4t - 3t^2 - t^3$, $f_3 = 4 - 2t + t^3$, $f_4 = 2 - 5t + 3t^2 + 5t^3$
13. $f_1 = 2 + 5t + 5t^2 - t^3$, $f_2 = 1 - t - 3t^2 + 4t^3$, $f_3 = 2t - 3t^2 + 4t^3$, $f_4 = 1 + 8t + 5t^2 - t^3$
14. $f_1 = -3 + 2t + t^2 - t^3$, $f_2 = -2 - 3t^2 + 5t^3$, $f_3 = 2 + 5t + 4t^2 + 5t^3$, $f_4 = 1 + 7t + 8t^2 - t^3$
15. $f_1 = -2 + 5t + 3t^2 + 3t^3$, $f_2 = -2 + 3t + 4t^2 + 2t^3$, $f_3 = 3 - t + 2t^2 + 3t^3$, $f_4 = 3 + t + t^2 + 4t^3$
16. $f_1 = t^2 + t^3$, $f_2 = -2 + 2t + 4t^2 - 3t^3$, $f_3 = -3 + 2t + t^2 - 2t^3$, $f_4 = 1 + 4t^2$
17. $f_1 = 3 + 2t^2 + 5t^3$, $f_2 = 3t + 5t^2 + 5t^3$, $f_3 = 1 - 3t + 3t^2 + 4t^3$, $f_4 = 2 + 6t + 4t^2 + 6t^3$
18. $f_1 = -2 - t + 4t^2$, $f_2 = 3 + 4t - 2t^2 - 3t^3$, $f_3 = 5 + t + 2t^2 + 4t^3$, $f_4 = -4 + 2t - 7t^3$
19. $f_1 = 4 - t^3$, $f_2 = 2 + 2t - t^2 - 3t^3$, $f_3 = 4 + 4t + 2t^2 + 4t^3$, $f_4 = 2 - 2t - 3t^2 - 8t^3$
20. $f_1 = -1 - 3t - 3t^2 + 4t^3$, $f_2 = 2 + t + 4t^2 - t^3$, $f_3 = -2t + 4t^2 + 5t^3$, $f_4 = 1 - 3t^2 - 2t^3$
21. $f_1 = 5 + 2t + 4t^3$, $f_2 = t + t^3$, $f_3 = 4 + 2t + t^2 + 5t^3$, $f_4 = 6 + t - t^2 + 2t^3$
22. $f_1 = t^3$, $f_2 = 1 + 4t + 5t^2 + 3t^3$, $f_3 = 2 + 4t + 2t^2$, $f_4 = -3 - 8t - 7t^2 - t^3$

23. $f_1 = 2 + 4t + t^2 + 3t^3$, $f_2 = 2 + t + 4t^2 + t^3$, $f_3 = 4 + 2t + 2t^2 + 4t^3$,
 $f_4 = -2 + 5t - 4t^2 + t^3$
24. $f_1 = 2 + 2t + 5t^2 + 2t^3$, $f_2 = 4 + 4t^2 + 3t^3$, $f_3 = t + 3t^2$, $f_4 = 3t + 3t^2 + t^3$
25. $f_1 = 3 + t + 2t^2 + t^3$, $f_2 = 3 + 2t^2 + 5t^3$, $f_3 = 1 + t + 3t^2 + 5t^3$,
 $f_4 = 2 + t - t^2 - 8t^3$
26. $f_1 = 3 + 2t - t^2 - t^3$, $f_2 = 1 + 3t + t^2 - t^3$, $f_3 = 2 + t - t^2 + 2t^3$,
 $f_4 = -3 + 3t + 4t^2 - 3t^3$
27. $f_1 = 4 - 3t + 2t^2 + 2t^3$, $f_2 = 3 + 4t + 3t^2 + t^3$, $f_3 = 4 - t + 2t^2 - t^3$,
 $f_4 = -2 + 12t + 2t^2 + t^3$
28. $f_1 = 4 + t - 2t^2 + 4t^3$, $f_2 = 3 + 2t^2 + t^3$, $f_3 = 5t + t^2$, $f_4 =$
 $2 - 6t + 5t^2 - 2t^3$
29. $f_1 = 5 + t - 2t^2 + 4t^3$, $f_2 = 2 + t + 5t^3$, $f_3 = 1 + t - t^3$, $f_4 = -2 + 2t^2 + 7t^3$
30. $f_1 = 4 + 3t - t^2 - 2t^3$, $f_2 = 3 + 5t + 5t^2 + t^3$, $f_3 = 3 + 5t + 4t^2 + t^3$,
 $f_4 = -1 + 2t + 7t^2 + 3t^3$

15 Контрольная работа 15

Пусть $W_1 = L(f_1, f_2)$ и $W_2 = L(g_1, g_2)$ — подпространства пространства $R_{\leq 3}[t]$ многочленов степени не выше 3.

- а) Доказать, что $R_{\leq 3}[t]$ есть прямая сумма W_1 и W_2 .
 - б) Найти проекцию вектора h на W_1 параллельно W_2 .
 - в) Найти проекцию вектора h на W_2 параллельно W_1 .
1. $f_1 = 5 - 3t + t^2$, $f_2 = 4 + 3t - 5t^3$, $g_1 = 4 - t + t^2 + 3t^3$, $g_2 =$
 $5 + 3t - 4t^2 - t^3$, $h = -16t + 11t^2 + 10t^3$
 2. $f_1 = 3 + 2t - 2t^2 - 2t^3$, $f_2 = -2 + 2t^2 - 2t^3$, $g_1 = 4 + t - t^2 + 2t^3$,
 $g_2 = 5 + 3t - 4t^2 - t^3$, $h = 10 + 7t - 11t^2 - 2t^3$
 3. $f_1 = 3 + 5t + 4t^3$, $f_2 = -4 + 5t - 3t^2 - 3t^3$, $g_1 = 4 + 3t - 4t^2 - 5t^3$,
 $g_2 = 4 - 3t - 2t^2 + 2t^3$, $h = 6 + 14t + 3t^2 + 2t^3$
 4. $f_1 = -2 - 5t^2 + 5t^3$, $f_2 = 1 - t - 2t^3$, $g_1 = -1 - 3t + t^2 + 3t^3$,
 $g_2 = 2t - 3t^2 - t^3$, $h = -6 - 6t - 3t^2 + 17t^3$
 5. $f_1 = 3 + 2t + t^3$, $f_2 = 3 - 5t + t^2 - 5t^3$, $g_1 = -1 - 2t + 4t^2 - 5t^3$,
 $g_2 = 3 + 5t + 5t^2 + 3t^3$, $h = -4 - 3t - 7t^2 - 4t^3$
 6. $f_1 = -1 - 3t^2 + 2t^3$, $f_2 = -2 + 5t + 2t^2 - t^3$, $g_1 = 3 - 3t - t^2 + 5t^3$,
 $g_2 = 2 - 3t + 4t^2 + t^3$, $h = -1 - 2t - 17t^2 + 8t^3$

7. $f_1 = -2 - 3t - 3t^2 + 2t^3$, $f_2 = -2 - 4t^2 + 2t^3$, $g_1 = -1 + 4t + 4t^2 + t^3$,
 $g_2 = 4t + 4t^2 + 2t^3$, $h = -3 - 10t - 6t^2 - t^3$
8. $f_1 = 3 + 2t - 2t^2 - 2t^3$, $f_2 = -2 + 2t^2 - 2t^3$, $g_1 = 4 + t - t^2 + 2t^3$,
 $g_2 = 1 - t + 2t^2 + t^3$, $h = 10 + 7t - 11t^2 - 2t^3$
9. $f_1 = -2 - 5t^2 + 5t^3$, $f_2 = 1 - t - 2t^3$, $g_1 = -1 - 3t + t^2 + 3t^3$,
 $g_2 = 2t - 3t^2 - t^3$, $h = -6 - 6t - 3t^2 + 17t^3$
10. $f_1 = 4 - t + t^2 + 3t^3$, $f_2 = -3 + 4t + t^2 + t^3$, $g_1 = -3 + t + 5t^2 - 2t^3$,
 $g_2 = 2 - t + t^2 + 2t^3$, $h = 4 - 3t + 4t^2 - t^3$
11. $f_1 = -1 - t + 2t^2 + 4t^3$, $f_2 = -1 - t + t^2 + t^3$, $g_1 = 2 + 3t^2$,
 $g_2 = -3 + 2t + 5t^2 + 3t^3$, $h = 6 - t - 2t^2 - t^3$
12. $f_1 = 3 - t + 5t^2 - 5t^3$, $f_2 = 1 - 2t + 4t^2 - 2t^3$, $g_1 = 2 - 5t - 2t^2$,
 $g_2 = -1 + t + t^2 - 4t^3$, $h = 4 - 3t - 6t^2 + 3t^3$
13. $f_1 = 4 + 3t + 3t^2 + 3t^3$, $f_2 = 2 - 3t - 2t^2 + t^3$, $g_1 = -5t - 5t^2 - 3t^3$,
 $g_2 = -1 + 4t^2 + t^3$, $h = 1 + 4t - 2t^2 - 3t^3$
14. $f_1 = 1 - 5t - 2t^2 + t^3$, $f_2 = -4 + t - 3t^2 + t^3$, $g_1 = 5t^3$, $g_2 =$
 $-2 - t - 2t^2 - t^3$, $h = 11 - 6t + 6t^2 + 5t^3$
15. $f_1 = 4 + 3t + 5t^2 + t^3$, $f_2 = -5 + t + 3t^2 + 5t^3$, $g_1 = -3 + 2t + 5t^3$,
 $g_2 = 2 - 3t - t^2 - 4t^3$, $h = 9 + 6t$
16. $f_1 = 5 - 2t - 5t^2 + 3t^3$, $f_2 = 4 - 2t - 3t^2 + 5t^3$, $g_1 = -4 + 5t + 2t^2 + 4t^3$,
 $g_2 = -3 - 5t^2 + 4t^3$, $h = -4 + 7t + 8t^2 - 7t^3$
17. $f_1 = -5 - 3t^2 + 2t^3$, $f_2 = -3 + 5t - 4t^2$, $g_1 = 4 + 5t - 2t^2 - t^3$,
 $g_2 = -4t - 4t^2$, $h = 5 - t + 7t^2 + t^3$
18. $f_1 = 2 - t - 2t^2 - 2t^3$, $f_2 = 4 + t - 3t^2 + 5t^3$, $g_1 = 2 - 3t + 2t^2 + 2t^3$,
 $g_2 = -4 - 5t - 3t^2 - 4t^3$, $h = -t + 9t^2 - 6t^3$
19. $f_1 = -5 - 2t + 4t^2 + 4t^3$, $f_2 = -2 + 4t + t^3$, $g_1 = 1 + 2t + t^2 + 2t^3$,
 $g_2 = 2t + t^3$, $h = -10t + 5t^2 + 3t^3$
20. $f_1 = 3 + 4t + 5t^2$, $f_2 = 1 + 3t - t^2$, $g_1 = -4 - 4t - 3t^2 - 4t^3$,
 $g_2 = -4 + 3t^2 - 2t^3$, $h = 1 - 6t + t^2 - 2t^3$
21. $f_1 = -2 - t + 4t^2 - 5t^3$, $f_2 = 2t - t^2 - 3t^3$, $g_1 = 5 + 6t + 6t^2 - t^3$,
 $g_2 = 2 + t - 3t^2 - 2t^3$, $h = 5 + 4t + 8t^2 - 5t^3$
22. $f_1 = 2 + t^2 - t^3$, $f_2 = -4 - 2t + t^2 - 4t^3$, $g_1 = -4 + t - 2t^2 - 4t^3$,
 $g_2 = 1 - t - 2t^2 + 6t^3$, $h = 3 + 2t - 4t^2 + 5t^3$
23. $f_1 = -3t + 4t^2 - 2t^3$, $f_2 = -5 + 6t + 2t^3$, $g_1 = 1 + 6t - 3t^2 + 3t^3$,
 $g_2 = -4 - t - 4t^2 - t^3$, $h = 2 - 4t - 3t^2 - 2t^3$

24. $f_1 = 5t - t^2 + 4t^3$, $f_2 = 6 + 4t + 5t^2 + 2t^3$, $g_1 = -2 - 3t + 2t^3$,
 $g_2 = 4t - 5t^2 + 3t^3$, $h = -8 + 2t - 11t^2 + 7t^3$
25. $f_1 = 6 + t + 5t^2 - 3t^3$, $f_2 = -3 + 5t + 3t^2 + 6t^3$, $g_1 = 3t + 3t^2 - 5t^3$,
 $g_2 = -1 - 5t - 5t^2 + 4t^3$, $h = 8 - 6t - 10t^3$
26. $f_1 = 2 + t + 6t^2 - 2t^3$, $f_2 = -3 + t - t^3$, $g_1 = -5 - t + 6t^2 + t^3$,
 $g_2 = 4 + 2t + 3t^2 - 4t^3$, $h = 4 + t + 15t^2 - 4t^3$
27. $f_1 = -1 - 5t + 5t^2 + 4t^3$, $f_2 = -2 + 5t + 4t^2 - 4t^3$, $g_1 = 3 + 5t + 4t^2 + 6t^3$,
 $g_2 = 2 - t - t^2 + 6t^3$, $h = 6 - 6t + 4t^2 + 20t^3$
28. $f_1 = -2 + t - t^2 + 2t^3$, $f_2 = -1 - 4t + t^3$, $g_1 = -2 + 2t + t^2 - 2t^3$,
 $g_2 = -4t + 4t^2 - 4t^3$, $h = -3 + 3t + 4t^2 - 5t^3$
29. $f_1 = 5t - 2t^3$, $f_2 = -5 + 2t + 2t^2 + 3t^3$, $g_1 = 6 - t - 5t^2 + 5t^3$,
 $g_2 = -2 + t + 4t^2 - 5t^3$, $h = 9 + 3t - 3t^2 - 5t^3$
30. $f_1 = 1 - 4t - 5t^2 - 5t^3$, $f_2 = -3 + t + 2t^2 + t^3$, $g_1 = 2 - t + 3t^2 - 4t^3$,
 $g_2 = 1 + 6t - 2t^2 + t^3$, $h = 7 - 6t^2 - 9t^3$

Содержание

1	Контрольная работа 1	3
2	Контрольная работа 2	5
3	Контрольная работа 3	7
4	Контрольная работа 4	10
5	Контрольная работа 5	12
6	Контрольная работа 6	15
7	Контрольная работа 7	16
8	Контрольная работа 8	18
9	Контрольная работа 9	22
10	Контрольная работа 10	24
11	Контрольная работа 11	26
12	Контрольная работа 12	28
13	Контрольная работа 13	30
14	Контрольная работа 14	34
15	Контрольная работа 15	36

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

(методическая разработка)

Составители:

Лариса Георгиевна Киселева, к.ф.-м.н., доц. каф. МЛчВА
Сергей Владимирович Сидоров, асс. каф. МЛчВА

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Литературная.
Усл. печ. л. 2,5. Заказ Тираж 300 экз.

Отпечатано в типографии
Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18 – 0099 от 14.05.01