ОБЗОРНАЯ ЛЕКЦИЯ ПО КУРСУ «ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА»

Золотых Николай Юрьевич

1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и линейные многообразия

1.1. **Линейные многообразия.**

Обозначение 1. $A \in F^{m\times n}$ *— матрица из* m *строк и* n *столбцов, с элеменами из поля* F, $r = rank(A|b)$

Обозначение 2. $L(C_1, C_2, \ldots, C_s)$ *— выпуклая оболочка векторов* $C_1, C_2, \ldots, C_s$.

Определение 1. $\{x\colon Ax = b\} = C_0 + L(C_1, C_2, \ldots, C_{n-r})$ *— линейное многообразие*

1.2. **Связь множества решений однородной и неоднородной СЛАУ.**

Определение 2. $\{x\colon Ax = 0\} = L(C_1, C_2, \ldots, C_{n-r})$ *— несущее подпространство соответствующей неоднородной СЛАУ.*

Лемма 1. $\{x\colon Ax = b\} = C_0 + L(C_1, C_2, \ldots, C_{n-r})$ *, где* C_0 *— частное решение неоднородной СЛАУ.*

1.3. **Решение СЛАУ.**

Задача 1. *Найти общее решение системы линейных уравнений.*

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 2 \\ x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

Решение. Методом Гаусса система приводится к упрощенному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 4 & 2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2\cdot(1),(3)-(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\cancel{(3)}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-3\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 14 & 8 & 0 & -13 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Date: 2011 год.

Конспект: Кукаева Светлана

Верстка: Носов Сергей.

Соответствующая упрощенной матрице система:

$$\begin{cases} x_1 \quad +14x_2+8x_3 \qquad = -13 \\ \qquad -3x_2-2x_3+x_4 = 4 \end{cases}$$

x_1, x_4 — базисные переменные, выражаем их через оставшиеся:

$$\begin{cases} x_1 & = -13-14t_1-8t_2 \\ x_2 & = t_1 \\ x_3 & = t_2 \\ x_4 & = 4+3t_1+2t_2 \end{cases}$$

Подставив $t_1 = 0, t_2 = 0$, получим одно из частных решений системы:

$$x^* = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Общее решение запишется в виде:

$$x = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t_2$$

□

Теорема 2 (Кронекер-Капелли)**.**

$$\{x\colon Ax = b\} \neq \emptyset \Leftrightarrow rank(A|b) = rank(A)$$

Замечание 1.1. *В рассмотренной задаче*

$$rank(A|b) = rank(A) = 2$$

1.4. **Получение СЛАУ, задающее линейное многообразие.**

Задача 2. *Записать в виде множества решений СЛАУ линейную оболочку векторов*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & -2 & x_3-x_1 \\ 0 & \boxed{-1} & x_4-x_1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1-x_4 \\ 0 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & x_1+x_3-2x_4 \end{array}\right)$$

Для выполнения условия теоремы 2 необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Это и есть искомая система. □

Задача 3. *Задать как множество решений неоднородной СЛАУ линейное многообразие* $M = C_0 + L(C_1, C_2)$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Решение. Подставив вектор C_0 в систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

получим вектор $b^T = (2, 3)$.

$$M = C_0 + L(C_1, C_2) = \left\{ x \colon \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases} \right\}$$ □

Задача 4. *Условие такое же, как в задаче 2*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решение (альтернативный способ). Вспомогательная система, задающая подпространство W:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Пусть $L = L(C_1, C_2, C_3)$, тогда заметим, что $W = L^{\perp}$, т.е. W— ортогональное дополнение L.

Базис W был найден в задаче 1:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Искомая система запишется в виде:

$$\begin{cases} -14x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ -8x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$ □

2. Линейные преобразования

2.1. Определения и обозначения.

Обозначение 3. *Пусть V — линейное пространство над полем F.*

Определение 3. *Преобразование $\varphi\colon V \times V$ называется линейным, если и только если*

(1) $\forall x, y \in V : \varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$
(2) $\forall \alpha \in F, \forall x \in V : \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi x$

Обозначение 4. *Пусть $< e_1, e_2, \ldots, e_n >$ — базис V.*

Обозначение 5. *Можно найти $\varphi e_j = \alpha_{1j}e_1 + \alpha_{2j}e_2 + \cdots + \alpha_{nj}e_n$, для $j = \overline{1, n}$ и записать результат в матрицу.*

$$[\varphi]_e = A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Столбец с номером j этой матрицы равен $[\varphi e_j]_e$.

Лемма 3.

$$[\varphi x]_e = [\varphi]_e[x]_e$$

2.2. Переход от одного базиса к другому.

Определение 4. *Пусть в V заданы 2 базиса — e и e'.*

$$e'_j = \beta_{1j}e_1 + \beta_{2j}e_2 + \cdots + \beta_{nj}e_n$$

Тогда матрица

$$[e']_e = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода из базиса e в базис e'.

Лемма 4.

$$[x]_e = [e']_e[x]_{e'}$$

Лемма 5.

$$[\varphi]_{e'} = [e']_e^{-1}[\varphi]_e[e']_e$$

$[\varphi]_{e'}$ — *матрица преобразования в новом базисе*

$[\varphi]_e$ — *матрица преобразования в старом базисе*

$[e']_e$ — *матрица перехода из старого базиса в новый*

Задача 5. *Линейное преобразование переводит вектора*

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

соответственно в вектора

$$b_1 = \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}3\\6\\-1\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого преобразования

(1) *в стандартном базисе*
(2) *в базисе* $< a_1, a_2, a_3 >$

Решение.

(1) $[\varphi]_e = X$

$$\begin{cases} b_1 = Xa_1 \\ b_2 = Xa_2 \\ b_3 = Xa_3 \end{cases}$$

Эту систему можно переписать в матричном виде:

$$B = XA$$

В нашем случае матрица A является невырожденной, а значит X можно однозначно найти:

$$X = BA^{-1}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right) \xrightarrow{\text{столбцовые преобразования}} \left(\frac{E}{BA^{-1}}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ \hline 3 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & -13 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \boxed{-3} \\ \hline 3 & 0 & -6 \\ 4 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(2) Для нахождения $[\varphi]_a$ воспользуемся формулой из леммы 5

$$[\varphi]_a = [a]_e^{-1}[\varphi]_e[a]_e = A^{-1}XA = A^{-1}B \qquad \square$$

Замечание 5.1. *В предыдущей задаче был показан метод решения матричного уравнения* $XA = B$

Уравнение $AX = B$ *решается аналогично:*

$$\begin{pmatrix}A & | & B\end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{строчеченые преобразования}} \begin{pmatrix}E & | & A^{-1}B\end{pmatrix}$$

Задача 6. *Преобразование трехмерного пространства заключается в проектировании на прямую*

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

параллельно плоскости $x - 3y - 6z = 0$.

Найти матрицу этого преобразования в исходном базисе.

Решение. Матрицу искомого преобразования легко записать в базисе $< a_1, a_2, a_3 >$, где

$$[a_1]_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [a_2]_e = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [a_3]_e = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В качестве $[a_2]_e, [a_3]_e$ можно выбрать любые 2 линейно независимых вектора, удовлетворяющие уравнению плоскости.

По описанию преобразования:

$$\begin{aligned} \varphi a_1 &= a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \\ \varphi a_2 &= 0 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \\ \varphi a_3 &= 0 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \end{aligned}$$

$$[\varphi]_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[a]_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся формулой из леммы 5

$$[\varphi]_e = [e]_a^{-1}[\varphi]_a[e]_a = [a]_e[\varphi]_a[a]_e^{-1}$$

Вычислив, получаем:

$$[\varphi]_e = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -12 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Замечание 6.1. *Найти вектора $[a_2]_e, [a_3]_e$ можно подбором, либо решив СЛАУ из единственного уравнения, задающего плоскость.*

2.3. Собственные числа и собственные вектора.

Определение 5. *$x \neq 0$ называется собственным вектором линейного преобразования φ, если $\varphi x = \lambda x$, для некоторого $\lambda \in F$, называемого собственным числом вектора x.*

Замечание 6.2. *В задаче 6 для преобразования φ верны утверждения:*

(1) *любой вектор заданной прямой — собственный с $\lambda = 1$*
(2) *любой вектор заданной плоскости — собственный с $\lambda = 0$*

Определение 6. *Линейное преобразование называется диагонализируемым, если и только если существует базис, в котором его матрица диагональна.*

Лемма 6.

$$\begin{cases} \varphi x = \lambda x \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ([\varphi] - \lambda E)[x] = 0 \\ [x] \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow det([\varphi] - \lambda E) = 0$$

Лемма 7.

$det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + S_{n-1}(-\lambda)^1 + S_n$, *где S_k — сумма главных миноров порядка k.*

Задача 7. *Линейное преобразование задано матрицей:*

$$[\varphi]_e = A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Выяснить диагонализируемо ли оно

(1) *над* $\mathbb{R}$
(2) *над* $\mathbb{C}$

Решение.

$$\begin{aligned} det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 2 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ -6 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-\lambda)^3 + S_1(-\lambda)^2 + S_2(-\lambda) + S_3 = \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (2-\lambda)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

(1) Характеристическое уравнение имеет лишь один вещественный корень, значит преобразование *не* диагонализируемо над $\mathbb{R}$.

(2)

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = i$$
$$\lambda_3 = -i$$

Подставляем каждое λ в характеристическое уравнение и находим соответствующие собственные вектора.

$$(A-\lambda_1 E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Аналогично,

$$\lambda_2 = i, C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -i, C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

В итоге получаем

$$[\varphi]_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, [C]_e = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1-i & 1+i \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Замечание 7.1. *В предыдущей задаче коэффициенты S_1, S_2, S_3 могли быть также вычислены по формуле, указанной в лемме 7:*

$$S_1 = 5 - 1 - 2 = 2$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$S_3 = det A = 2$$

3. Билинейные функции и квадратичные формы

3.1. **Определения и обозначения.**

Определение 7. *Функция $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ называется билинейной, если и только если для $\forall x, y \in V$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ справедливо:*

(1) $f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z)$
(2) $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$
(3) $f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z)$
(4) $f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$

Определение 8. *Билинейная функция f называется симметричной, если и только если $f(x, y) = f(y, x)$.*

Определение 9. *Функция $g\colon V \to \mathbb{R}$ называется квадратичной, если и только если существует билинейная функция f, что*

$$g(x) = f(x, x)$$

Определение 10. *Пусть $< e_1, e_2, \ldots, e_n >$ — базис V.*

$$f(e_i, e_j) = \alpha_{ij}, i, j = \overline{1, n}$$

$[f]_e = A = (\alpha_{ij})$ *называется матрицей билинейной функции f в базисе $< e_1, e_2, \ldots, e_n >$.*

3.2. Основные свойства.

Лемма 8. $f(x, y) = [x]_e^T [f]_e [y]_e$

Лемма 9. *f — симметричная билинейная форма, если и только если $[f]_e^T = [f]_e$.*

3.3. Нахождение различных базисов для билинейных функций.

Лемма 10. *Для любой билинейной функции f существует т.н. нормальный базис $< a_1, a_2, \ldots, a_n >$, в котором*

$$[f]_a = diag(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{r-s}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r}), \text{ где } r = rank[f]_a$$

Иначе,

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{s} x_i y_i - \sum_{i=s+1}^{r} x_i y_i$$

Задача 8. *Для заданной квадратичной функции найти нормальный базис*

$$g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Решение. Найти нормальный базис можно, выделив в формуле для g полные квадраты:

$$\begin{aligned} g(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 = \\ &= (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\square$

Замечание 8.1. *Матрица Q в предыдущей задаче невырождена, а значит является матрицей перехода между двумя базисами.*

$$Q = [e]_{e'}, Q^{-1} = [e']_e$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

Лемма 11. *Для любой симметричной билинейной (квадратичной) функции найдется ортонормированный базис, в котором её матрица диагональна.*

Задача 9. *Найти ортонормированный базис, в котором матрица квадратичной функции диагональна.*

$$g(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Решение.

$$\begin{aligned} g(x) &= x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 \\ &= \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2(\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{13}x_1x_3 + \alpha_{23}x_2x_3) \end{aligned}$$

$$[g]_e = A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Находим собственные числа матрицы A.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 6), \begin{matrix} \lambda_1 & = 6 \\ \lambda_{2,3} & = 0 \end{matrix}$$

Соответствующие им собственые вектора.

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $c_1 \perp c_2, c_1 \perp c_3$, поскольку вектора в каждой паре соответствуют разным собственным числам.

Также $c_2 \perp c_3$, однако не для любой пары собственных векторов c_2 и c_3 это было бы справедливо. Поэтому, если были найдены неортогональные вектора c_2 и c_3, их нужно ортоганализировать, например, применив процесс Грама-Шмидта.

Нормируем полученные векторы.

$$c_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$Q = [e']_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$B = [A]_e = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$g(x) = 6(x_1')^2$$ □

Замечание 9.1. *В предыдущей задаче кроме процесса ортогонализации Грама-Шмидта, для получения ортогональных векторов c_2 и c_3, можно было поступить следующим образом.*

$$(A - \lambda_2 E) = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, rank A = 1$$

$$\{x\colon Ax = 0\} = \left\{x\colon \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = 0\right\} = L(c_2, c_3)$$

Найдем какой-нибудь походящий вектор — $c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$.

Вектор $c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ найдем, как решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \text{ (условие ортогональности } c_2) \end{cases}$$

Замечание 9.2. *В пердыдущей задаче матрица Q является ортонормирваонной, т.е.*

$$Q^T Q = E, Q^T = Q^{-1}$$

Задача 10. *Поверхность второго порядка задана уравнением*

$$x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4 = 0$$

Найти прямоугольную систему координат, в которой поверхность имеет канонический вид.

Решение.

$$\underbrace{x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3}_{\text{квадратичная форма}} + \underbrace{2x_1 + 6x_2 - 2x_3}_{\text{линейная форма}} + \underbrace{4}_{\text{константа}} = 0$$

(1) Найдем систему координат, в которой квадратичная форма имеет канонический вид

$$6(x_1')^2$$

(2) Подставляем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$6(x_1')^2 - 2\sqrt{6}x_1' + 2\sqrt{2}x_2' + 2\sqrt{3}x_3' + 4 = 0$$

(3) Выделяем полный квадрат:

$$\underbrace{6(x_1 - \frac{\sqrt{6}}{6})^2}_{x_1''} + \underbrace{2\sqrt{2}x_2' + 2\sqrt{3}x_3' + 3}_{-2\sqrt{5}x_2''} = 0$$

$$\begin{cases} x_1'' & = -\frac{\sqrt{6}}{6} + x_1' \\ x_2'' & = -\frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x_2' - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x_3' \\ x_3'' & = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x_2' - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x_3' \end{cases}$$

$$q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{3}{2\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = q + Q' \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

Пояснения требуют два момента:

(1) Замена $-2\sqrt{5}x_2''$ была осуществлена так, чтобы соответствующая ей строчка Q' была нормированной

(2) Третья строчка матрицы Q' определяется из условий:
   (a) она должна быть ортогональна первым двум строчкам
   (b) она должна быть нормированной

Канонический вид уравнения поверхности, в нашем случае являющейся параболическим цилиндром:

$$(x_1'')^2 = \frac{\sqrt{5}}{3}x_2'' \qquad \square$$

Задача 11. *Показать, что прямые, заданные своими уравнениями, пересекаются. Написать уравнение биссектрисы тупого угла между ними.*

$$l_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r_1 + a_1 t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

$$l_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r_2 + a_2 t = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Проверим, пересекаются ли прямые, для этого решим СЛАУ:

$$\begin{cases} 1+2t & = 11+8\tau \\ 2t & = 6+4\tau \\ t & = 2+\tau \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $t = 1, \tau = -1$, значит прямые пересекаются в точке

$$r_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку скалярное произведение $(a_1, a_2) > 0$, угол между векторами a_1 и a_2 — острый. Значит требуется найти биссектрису угла между векторами $a_1' = a_1$ и $a_2' = -a_2$ с основанием в r_0.

Построим вектора $a_1'' = 3a_1', a_2'' = a_2$ так, чтобы их нормы были равны. Тогда нетрудно видеть, что направляющий вектор искомой биссектрисы

$$b = a_1'' + a_2'' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

А значит ее можно задать в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r_0 + \frac{1}{2}bt = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Замечание 11.1. *При решении системы в предыдущей задаче могли возникнуть три ситуации*

(1) *решение единственное — прямые пересекаются*
(2) *решений нет — прямые скрещиваются или параллельны*
(3) *решений множество — прямые совпадают*

Замечание 11.2. *Определить взаимное расположение прямых можно было иначе:*

$$rank(a_1, a_2, r_2 - r_1) = \begin{cases} 1, & \text{прямые совпадают} \\ 2, & \begin{cases} rank(a_1, a_2) = 1, & \text{прямые параллельны} \\ rank(a_1, a_2) = 2, & \text{прямые пересекаются} \end{cases} \\ 3, & \text{прямые скрещиваются} \end{cases}$$

ННГУ им. Лобачевского, факультет ВМК
E-mail address: nikolai.zolotykh@gmail.com
URL: http://www.uic.unn.ru/~zny/