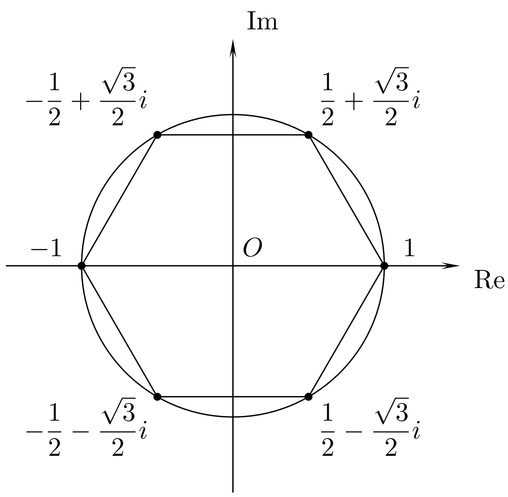
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

Н.Ю. Золотых

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебное пособие

3-е издание

*Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки
010500 «Прикладная математика и информатика»,
010502 «Прикладная информатика»,
010400 «Информационные технологии»*

Нижний Новгород
2007

ББК 22.151.5
З80
УДК 512.647.2

Золотых Н.Ю. Комплексные числа: Учебное пособие. 3-е издание. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2007. — 56 с.

Пособие содержит необходимый теоретический материал, примеры решения задач и упражнения по теме «Комплексные числа». Часть материала предназначена для самостоятельной работы студентов.

Для студентов, обучающихся по направлениям (специальностям) «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика», «Информационные технологии»

Рецензент: А.И. Гавриков, к.ф.-м.н., доц. каф. ЧиФА

УДК 512.647.2

В 1545 г. итальянский математик Дж. Кардано (G. Cardano) в книге «Великое искусство, или об алгебраических правилах» («Artis magnae, sive de Regvlis algebraicis») для системы уравнений Число 10 разделить на две такие части, произведение которых равно 40.

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 40. \end{cases}$$

привел два корня $5 + \sqrt{-15}$, $5 - \sqrt{-15}$. Никакой практической ценности в таком «мнимом» решении Кардано не увидел. Скорее, этот пример был приведен как некий курьез. Интересно отметить, что в том же сочинении была впервые опубликована найденная С. Ферро и Н. Тарталья (S. Ferro, N. Tartaglia) формула для решения кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1}$$

Его корни предлагалось находить по формуле

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}, \tag{2}$$

где u, v есть решения системы

$$\begin{cases} u + v = -q, \\ uv = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases} \tag{3}$$

В некоторых случаях, несмотря на то, что уравнение (1) заведомо имело корни, система (3) действительных решений не имела и формула (2) считалась бесполезной. Другой итальянец Р. Бомбелли (R. Bombelli) в своем труде «Алгебра» (1572) показал, что действительные корни уравнения (1) в таких случаях выражаются через радикалы от «мнимых» величин, он разработал простейшие правила действия с ними и подошел, таким образом, к созданию теории комплекных чисел.

1. Понятие комплексного числа

На протяжении всего изложения мы используем следующие стандартные обозначения числовых множеств:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество вещественных (действительных) чисел.

Комплексным числом называется упорядоченная пара[1] действительных чисел (a, b). Два комплексных числа (a, b) и (c, d) *равны* тогда и только тогда, когда $a = c$, $b = d$. На множестве всех комплексных чисел $\mathbb{C}$ определены операции сложения и умножения по правилам[2]:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{4}$$

Эти операции обладают следующими свойствами:

- ассоциативность:

$$(a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big) = \big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f),$$
$$(a, b) \cdot \big((c, d) \cdot (e, f)\big) = \big((a, b) \cdot (c, d)\big) \cdot (e, f);$$

- коммутативность:

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b);$$

- дистрибутивность:

$$(a, b) \cdot \big((c, d) + (e, f)\big) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f).$$

Докажем, например, дистрибутивность. Пользуясь правилами (4) сложения и умножения комплексных чисел, а также законами (ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность), справедливыми для вещественных чисел, получаем:

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot \big((c, d) + (e, f)\big) &= (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\ &= \big(a \cdot (c + e) - b \cdot (d + f), a \cdot (d + f) + b \cdot (c + e)\big) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be);\end{aligned}$$

[1] Упорядоченная в том смысле, что задано, какое число в паре — первое, какое — второе.

[2] Как и в случае вещественных чисел, знак умножения «·» часто опускается.

с другой стороны,

$$\begin{aligned}(a,b)(c,d)+(a,b)(e,f)&=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\&=(ac-bd+ae-bf,ad+bc+af+be);\end{aligned}$$

левая и правая части совпали.

Упражнение 1. Доказать ассоциативность и коммутативность операций сложения и умножения комплексных чисел.

Нулем называется такое комплексное число (x,y), что для произвольного числа (a,b) выполняется равенство

$$(a,b)+(x,y)=(a,b).$$

Из определения получаем $a+x=a$, $b+y=b$, откуда $x=0$, $y=0$. Следовательно, нулем является пара $(0,0)$ (и только она).

Числом *противоположным* к (a,b) называется такая пара (x,y), что

$$(a,b)+(x,y)=(0,0).$$

Противоположное число обозначается $-(a,b)$. Нетрудно видеть, что $-(a,b)=(-a,-b)$.

Разностью (или числом, полученным в результате *вычитания*) комплексных чисел (c,d) и (a,b) называется решение (x,y) уравнения

$$(a,b)+(x,y)=(c,d).$$

Разность обозначается $(c,d)-(a,b)$ и, очевидно, равна $(c-a,d-b)$. Легко видеть, что разность $(c,d)-(a,b)$ есть сумма (c,d) и числа, противоположного к (a,b), т. е. $(c,d)-(a,b)=(c,d)+[-(a,b)]$.

Единицей называется такое комплексное число (x,y), что для произвольного числа (a,b) выполняется равенство

$$(a,b)(x,y)=(a,b).$$

Из определения произведения получаем

$$\begin{cases} ax-by=a,\\ bx+ay=b.\end{cases}$$

В случае, если $a^2+b^2\neq 0$, т. е. $(a,b)\neq(0,0)$, имеем единственное решение предыдущей системы: $x=1$, $y=0$. Таким образом, $(a,b)(1,0)=$

(a, b) для любого (a, b) в том числе, как нетрудно проверить, и для $(a, b) = (0, 0)$. Следовательно, $(1, 0)$ — единица.

Числом *обратным* к (a, b) называется такая пара (x, y), что

$$(a, b)(x, y) = (1, 0).$$

Обратное число обозначается $(a, b)^{-1}$. Система

$$\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

в случае, когда $(a, b) \neq (0, 0)$, имеет единственное решение

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right), \tag{5}$$

а в случае $(a, b) = (0, 0)$ — неразрешима.

Частным от деления (или числом, полученным в результате деления) комплексных чисел (c, d) и (a, b) называется решение (x, y) уравнения

$$(a, b)(x, y) = (c, d).$$

Частное обозначается $(c, d)/(a, b)$. Его мы можем получить из системы

$$\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d. \end{cases} \tag{6}$$

Домножая первое уравнение на a, второе — на b и складывая, получаем: $(a^2 + b^2)x = ac + bd$, затем, домножая первое уравнение системы (6) на b, второе — на a и вычитая первое из второго, получаем: $(a^2 + b^2)y = ad - cb$. В случае $a^2 + b^2 \neq 0$ имеем:

$$\frac{(c, d)}{(a, b)} = \left(\frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \frac{ad - cb}{a^2 + b^2} \right), \tag{7}$$

если же $a^2 + b^2 = 0$, то результат деления, как легко видеть из (6), не определен. Сравнивая (5) и (7), получаем, что частное $(c, d)/(a, b)$ есть произведение (c, d) на величину, обратную к (a, b): $(c, d)/(a, b) = (c, d) \cdot (a, b)^{-1}$.

Отождествим комплексные числа вида $(a, 0)$ с действительными числами. А именно, положим $(a, 0) = a$. Из правил сложения и умножения комплексных чисел следует, что

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

для любых a, b. Таким образом, результаты выполнения арифметических операций над числами такого вида не зависят от того, как эти результаты были получены: по правилам сложения и умножения комплексных чисел, рассмотренным в данном разделе, или по законам действительных чисел. Обозначим $i = (0, 1)$. Число i называется *мнимой единицей*. Легко проверить, что $(0, b) = (b, 0) \cdot i = bi$ и, следовательно, $(a, b) = a + bi$.

Запись $a + bi$ называется *алгебраической формой комплексного числа* (a, b). Ее использование освобождает нас от заучивания правил арифметических операций (4): легко проверить, что $i^2 = -1$, поэтому *работать с комплексными числами можно как с алгебраическими двучленами, зависящими от символа* i*, с заменой, где необходимо,* i^2 *на* -1. Например, для нахождения произведения $(a+bi)(c+di)$ раскроем скобки и получим $ac + adi + bci + bdi^2$, так как $i^2 = -1$, то

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad - bd)i.$$

Для нахождения частного $(c+di)/(a+bi)$ домножим числитель и знаменатель дроби на число $a-bi$, называемое *сопряженным* к $a+bi$, получим:

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i.$$

Результат согласуется с (7).

Пример 2.

1) $(4+i)(5+3i)+(3+i)(3-2i) = 20+12i+5i-3+9-6i+3i+2 = 28 + 14i$;
2)

$$\begin{aligned}\frac{(5 + i)(7 - 6i)}{3 + i} &= \frac{35 - 30i + 7i + 6}{3 + i} \\ &= \frac{41 - 23i}{3 + i} = \frac{(41 - 23i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} \\ &= \frac{123 - 41i - 69i - 23}{10} = \frac{100 - 110i}{10} = 10 - 11i.\end{aligned}$$

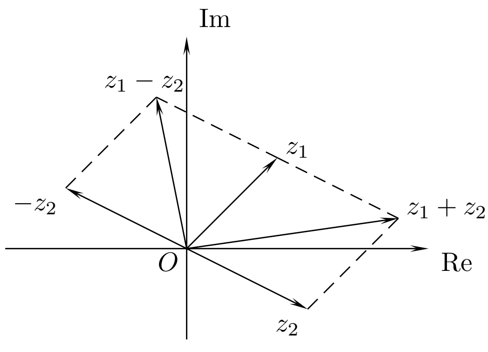
Упражнение 3. Вычислить

1) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; 2) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$.

Обычно комплексное число обозначают одной буквой, например: $z = a + bi$, здесь a называется *действительной частью* числа z, b — *мнимой частью*. Используются обозначения: $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$, или $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

2. Геометрическая интерпретация и тригонометрическая форма записи комплексных чисел

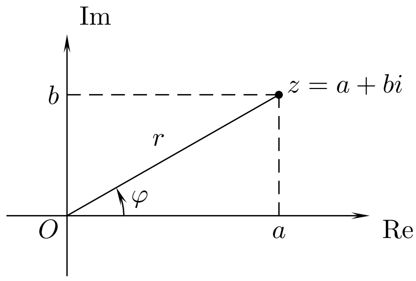
Если на плоскости задана прямоугольная система координат, то произвольному комплексному числу $(a, b) = a + bi$ можно сопоставить точку с координатами (a, b). Плоскость, точки которой проинтерпретированы таким образом, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс (называемая в данном случае *действительной осью* и обозначаемая Re) при такой интерпретации будет соответствовать множеству действительных чисел. Ось ординат (называемая в данном случае *мнимой осью* и обозначаемая Im) — множеству *чисто мнимых* чисел, т. е. чисел вида bi, где b — любое вещественное. Начало координат соответствует нулю.



Наглядную геометрическую интерпретацию приобретают в данном случае сложение и вычитание комплексных чисел — это просто сложение и вычитание их радиус-векторов по правилу параллелограмма.

Модулем, или *абсолютной величиной*, комплексного числа $z = a + bi$ называется расстояние r точки z до начала координат. Модуль числа обозначается $|z|$. Очевидно данное определение согласуется с определением модуля вещественных чисел. Далее, $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Аргументом числа z назовем угол φ, отсчитываемый в положительном направлении (против часовой стрелки), между направлением оси Re и радиус-вектором точки z.



Аргумент обозначается $\arg z$. Арумент определен с точностью до $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Число 0 аргумента не имеет.

Очевидно, по паре (r, φ) комплексное число z определяется однозначно.

Применяя теорему Пифагора и формулы тригонометрии, получаем

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

откуда

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Запись $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа $a + bi$. Для числа 0 тригонометрической формы записи не существует.

Пример 4. Найдем тригонометрическую форму записи числа:

1) $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$;

2) $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$;

3) $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$;

4) $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, действительно, $|1-i|=\sqrt{2}$, одним из решений системы

$$\begin{cases} 1=\sqrt{2}\cos\varphi, \\ -1=\sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}$$

является $\varphi=-\pi/4$;

5) $-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$;

6) $\cos\alpha-i\sin\alpha=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$;

7) $\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

8) $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$, если $\varphi\in[-\pi,\pi]$: воспользовавшись формулами двойного угла, получаем:

$$2\cos^2\frac{\varphi}{2}+i2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Упражнение 5. Найти тригонометрическую форму числа:

1) $1-i$; 2) $1-i\sqrt{3}$; 3) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

Пример 6. Опишем множество точек, изображающих комплексные числа z, удовлетворяющие уравнению $|z-z_0|=r$, где $z\in\mathbb{R}, z_0\in\mathbb{R}, r\in\mathbb{R}, r>0$.

1 способ. Пусть $z=x+yi$, $z_0=x_0+y_0i$, тогда исходное уравнение будет эквивалентно уравнению $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Множество точек, ему удовлетворяющих, есть окружность радиуса r с центром в точке $z_0=x_0+iy_0$.

2 способ. Нетрудно видеть, что $|z-z_0|$ есть расстояние между точками z и z_0. Таким образом, речь идет о всех точках z, для которых расстояние до фиксированной точки z_0 есть постоянная величина r. Описанное геометрическое место точек — окружность.

Пример 7. Опишем множество точек, изображающих комплексные числа z, удовлетворяющие уравнению $|z-z_1|=|z-z_2|$. Используя геометрическую интерпретацию для $|z-z_1|$ и $|z-z_2|$, получаем, что описанная уравнением $|z-z_1|=|z-z_2|$ совокупность есть множество точек, равноудаленных от z_1 и z_2, т. е. серединный перпендикуляр отрезка $[z_1,z_2]$.

Упражнение 8. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, соответствующих числам z, таким, что:

1) $1 \le |z - 2 + i| < 2$; 2) $|\arg z| < \pi/4$; 3) $\operatorname{Im} z = 3$.

Рассмотрим произведение двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Применяя формулы для суммы и разности тригонометрических функций, получаем:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r\rho(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)) \\ &= r\rho\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right). \end{aligned}$$

В конце полученной цепочки равенств имеем комплексное число, опять записанное в тригонометрической форме. Его модуль равен $r\rho$, аргумент равен $\varphi + \psi$. Иными словами,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

В геометрической интерпретации *произведению $z_1 z_2$ соответствует точка, радиус-вектор которой получен поворотом радиус-вектора точки z_1 на угол $\arg(z_2)$ и растяжением в $|z_2|$ раз.*

Нетрудно проверить, что, если $\rho \ne 0$, то

$$\left(\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\right)^{-1} = \rho^{-1}\left(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)\right),$$

поэтому

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{r}{\rho}\left(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\right),$$

или

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

В геометрической интерпретации *частному z_1/z_2 соответствует точка, радиус-вектор которой получен поворотом радиус-вектора точки z_1 на угол $-\arg z_2$ и сжатием в $|z_2|$ раз.*

Пример 9. Выполним действия:

1)

$$
\begin{aligned}
&(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&\quad = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&\quad = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right);
\end{aligned}
$$

2)

$$
\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi - i\sin\psi} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)} = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi).
$$

Пример 10. Найдем тригонометрическую форму числа $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$, если $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Данный пример уже был рассмотрен (пример 4 8). Приведем другой способ решения:

$$
\begin{aligned}
&1 + \cos\varphi + i\sin\varphi \\
&\quad = (\cos 0 + i\sin 0) + (\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&\quad = \left(\cos(-\frac{\varphi}{2}) + i\sin(-\frac{\varphi}{2})\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 \\
&\quad = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Пусть n — произвольное натуральное число. Как и для вещественных чисел, будем говорить, что ζ есть n-я степерь комплексного числа z и записывать $\zeta = z^n$, если

$$
\zeta = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ сомножителей}}.
$$

Мы уже определили z^{-1} как число, обратное к $z \neq 0$. Для произвольного $z \neq 0$ определим $z^0 = 1$ и $z^{-n} = (z^{-1})^n$. Докажем, что

$$
(z^{-1})^n = (z^n)^{-1}.
$$

Действительно,

$$
(z^{-1})^n z^n = z^{-1} \cdot \ldots \cdot z^{-1} z \cdot \ldots \cdot z = (z^{-1} \cdot \ldots \cdot (z^{-1} z) \cdot \ldots \cdot z) = 1.
$$

Упражнение 11. Доказать, что
$$(z^m)^n = z^{mn}, \quad z^m z^n = z^{m+n}, \quad z_1^n z_2^n = (z_1 z_2)^n$$
для произвольных целых m, n.

Используя метод математической индукции, теперь легко доказать *формулу Муавра* (A. de Moivre, 1736):
$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big),$$
справедливую для произвольного целого n.

Пример 12. Вычислим:
$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^{150} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{150}\\ &= 2^{150}\left(\cos\frac{150\pi}{3} + i\sin\frac{150\pi}{3}\right)\\ &= 2^{150}\big(\cos(50\pi) + i\sin(50\pi)\big)\\ &= 2^{150}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{150}.\end{aligned}$$

Пример 13. Докажем, что если $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta$, то
$$z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta. \tag{8}$$

Уравнение $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta$ эквивалентно квадратному уравнению $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$. Его корни[3]:
$$z_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta.$$
Поэтому $z_{1,2}^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta$, $z_{1,2}^{-n} = \cos n\theta \mp i\sin n\theta$, откуда сразу следует доказываемое равенство.

Упражнение 14. Вычислить:

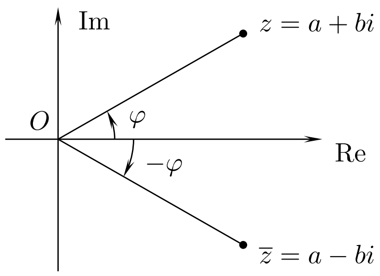
1) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$;

2) $(1+\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

[3]Обычные формулы для корней квадратного уравнения справедливы и для уравнений с комплексными коэффициентами. См. раздел 6.

3. Комплексно сопряженные числа

Напомним, что число $a - bi$ называется *(комплексно) сопряженным* к числу $a + bi$.



Для числа сопряженного к z используется обозначение $\bar{z}$. Нетрудно видеть, что $\bar{\bar{z}} = z$. Если z задано в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$. Таким образом, аргументы взаимно сопряженных чисел отличаются знаком, а модули совпадают: $|\bar{z}| = |z|$, $\arg\bar{z} = -\arg z$.

Выполняются следующие *свойства операции сопряжения:*

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2, \quad \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2,$$
$$z\bar{z} = |z|^2, \quad z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z. \tag{9}$$

Эти свойства непосредственно вытекают из определения операции комплексного сопряжения. Докажем, например, 1-е свойство. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, тогда $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$, с другой стороны, $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i$. Левая и правая части доказываемого равенства совпадают.

Упражнение 15. Доказать оставшиеся свойства (9).

Пример 16. Решим уравнение $\bar{z} = z^3$.
1 способ. Представим z в алгебраической форме: $z = x + iy$. Уравнение перепишется следующим образом:

$$x - iy = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем *совокупность* систем:

$$\begin{cases} x = x^3 - 3xy^2, \\ -y = 3x^2y - y^3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0, \\ y(y^2 - 3x^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 0, \\ y^2 - 3x^2 = 1 \end{cases}$$
$$\text{или} \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 1, \\ y^2 - 3x^2 = 1, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 0, \\ y^2 = 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2 = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 1, \\ y^2 - 3x^2 = 1. \end{cases}$$

Последняя система несовместна в $\mathbb{R}$. Действительно, умножая первое уравнение на 3 и складывая его со вторым, мы получаем $8y^2 = -4$, что невозможно для действительных y. Из первых трех систем получаем решения: 0, $\pm i$, ± 1 соответственно.
2 способ. Запишем z в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Уравнение примет вид:

$$r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi),$$

откуда

$$\begin{cases} r = r^3, \\ -\varphi = 3\varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} r = 0 \quad \text{или} \quad r = 1, \\ \varphi = \dfrac{\pi k}{2}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Последняя система дает решения: 0, $\pm i$, ± 1.

Упражнение 17. Решить уравнения:

1) $|z| + z = 8 + 4i$;
2) $\bar{z} = z^2$;
3) $|z| - iz = 1 - 2i$;
4) $z^2 = \bar{z}^3$;
5) $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$.

4. Неравенство треугольника

Утверждение 18 (Неравенство треугольника). *Для произвольных комплексных чисел z_1, z_2 выполняются неравенства*

$$|z_1| - |z_2| \le \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Доказательство. Если одно из чисел, участвующих в неравенствах, равно нулю, то неравенства становятся очевидными. Поэтому будем считать, что $z_1 \ne 0$, $z_2 \ne 0$.

Вначале докажем, что $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Представим числа z_1, z_2, $z_1 + z_2$ в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} z_1 &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ z_2 &= \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \\ z_1 + z_2 &= R(\cos\Phi + i\sin\Phi). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \rho(\cos\psi + i\sin\psi) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi).$$

Приравнивая действительные и мнимые части в последнем равенстве, получаем:

$$\begin{aligned} r\cos\varphi + \rho\cos\psi &= R\cos\Phi, \\ r\sin\varphi + \rho\sin\psi &= R\sin\Phi. \end{aligned}$$

Теперь, умножая первое равенство на $\cos\Phi$, а второе — на $\sin\Phi$ и складывая, приходим к

$$r(\cos\varphi\cos\Phi + \sin\varphi\sin\Phi) + \rho(\cos\psi\cos\Phi + \sin\psi\sin\Phi) = R(\cos^2\Phi + \sin^2\Phi).$$

Вспоминая формулы тригонометрии, получаем:

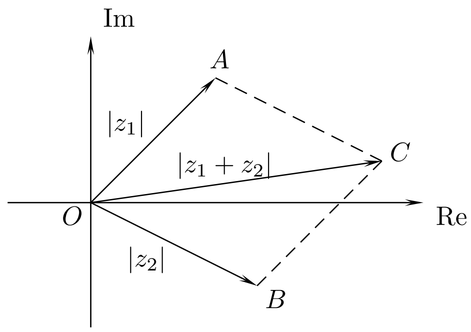
$$r\cos(\varphi - \Phi) + \rho\cos(\psi - \Phi) = R.$$

Так как $|\cos(\varphi - \Phi)| \le 1$, $|\cos(\psi - \Phi)| \le 1$, то $r + \rho \ge R$, т. е. $|z_1| + |z_2| \ge |z_1 + z_2|$.

Воспользуемся только что доказанным неравенством для чисел $z_1 + z_2$ и $-z_2$. Получаем: $|(z_1 + z_2) - z_2| \le |z_1 + z_2| + |-z_2|$, т. е. $|z_1| \le |z_1 + z_2| + |z_2|$, откуда $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$. Аналогично можно получить $|z_2| - |z_1| \le |z_1 + z_2|$, а, следовательно, $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2|$.

Неравенство $|z_1| - |z_2| \le ||z_1| - |z_2||$ очевидно. □

Замечание 19. *Дадим геометрическую интерпретацию неравенству* $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$*, только что доказанному чисто алгебраически. На рисунке ниже стороны треугольника* OAC *равны* $OA = |z_1|$, $AC = OB = |z_2|$, $OC = |z_1 + z_2|$. *Неравенство* $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ *выражает тот факт, что сторона треугольника не превосходит суммы двух других сторон.*



Пример 20. Докажем, что если $|z| < \dfrac{1}{2}$, то

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

Из неравенства треугольника получаем: $|(1+i)z^3+iz| \le |(1+i)z^3|+|iz|$. Величина в правой части последнего неравенства по правилу вычисления модуля произведения равна $|1+i||z|^3 + |i||z| = \sqrt{2}|z|^3 + |z|$. Так как $|z| < \dfrac{1}{2}$, то

$$\sqrt{2}|z|^3 + |z| < \sqrt{2}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

Проследив всю цепочку рассмотренных неравенств, получаем доказываемое.

Упражнение 21. Доказать, что если $|z| \le 2$, то $1 \le |z^2 - 5| \le 9$.

5. Корни из комплексных чисел

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Число z называется значением *корня n-й степени* из числа ζ, если $z^n = \zeta$. Легко видеть, что $\zeta = 0$ обладает единственным (нулевым) значением корня произвольной натуральной степени.

Пусть $\zeta \neq 0$, тогда, очевидно, $z \neq 0$.

Представим ζ в тригонометрической форме: $\zeta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Мы ищем такое $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, что $z^n = \zeta$. Воспользовавшись формулами Муавра, последнее равенство перепишем в виде

$$r^n \big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Так как для ненулевого комплексного числа модуль определен однозначно, а аргумент с точностью до $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то $r^n = \rho$, а $n\varphi = \psi + 2\pi k$. Получаем:

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \varphi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}$$

(для вычисления r используется арифметическое значение корня $\sqrt[n]{\rho}$). Итак, для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ каждое из чисел

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right) \tag{10}$$

является значением корня n-й степени из числа $\zeta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Выясним, есть ли среди чисел (10) совпадающие. Разделим произвольное $k \in \mathbb{Z}$ на n с остатком, т. е. представим k в виде $k = np + q$ (напомним, что в данном случае p называется *частным*, q — *остатком*, $0 \le q < n$). Подставляя это выражение для k в (10), получаем:

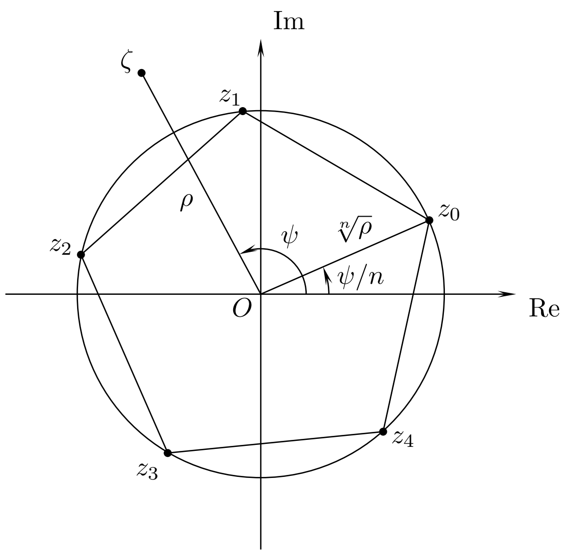
$$\begin{aligned} z &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi(np+q)}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi(np+q)}{n}\right) \\ &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi q}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi q}{n}\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, при значениях $k = 0, 1, \ldots, n-1$ все числа в (10), различны: их аргументы различны и отличаются не более, чем на 2π.

Подводя итог, получаем, что *произвольное ненулевое комплексное число $\zeta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ обладает n различными значениями корня n-й* *степени; все эти значения можно получить по формуле:*

$$\sqrt[n]{\zeta} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\psi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\psi + 2\pi k}{n} \right) \ (k = 0, 1, \ldots, n-1) \right\}. \tag{11}$$

Заметим, что значки радикалов, встречающиеся в (11), имеют разный смысл: в правой части $\sqrt[n]{\cdot}$ означает арифметическое значение корня из положительного (действительного) числа, в левой — множество *всевозможных* значений корня из комплексного числа.



Из (11) легко видеть, что на комплексной плоскости все значения корня находятся на одинаковом расстоянии ($\sqrt[n]{\rho}$) от точки 0, кроме того, угол с вершиной в 0 между направлениями на соседние значения корня постоянен и равен $2\pi/n$. Таким образом, *точки комплексной плоскости, соответствующие всем значениям корня степени $n \geq 3$ из одного и того же числа, находятся в вершинах правильного n-угольника*.

Пример 22. Найдем все значения $\sqrt[3]{-8}$. Заметим, что одно (вещественное) значение корня $\sqrt[3]{-8}$ нам известно. Это -2. Представим -8 в тригонометрической форме: $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. По формуле (11) имеем:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2).$$

Итак, $\sqrt[3]{-8}$ имеет следующие значения:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}, \\ z_1 &= 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2, \\ z_2 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Упражнение 23. Вычислить

1) $\sqrt[4]{-\dfrac{18}{1+i\sqrt{3}}}$;
2) $\sqrt[3]{\dfrac{1-5i}{1+i} - 5\dfrac{1+2i}{2-i} + 2}$.

Упражнение 24.

1) Найти ошибку в следующем «доказательстве»: известно, что $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$; следовательно, $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)}$; откуда $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{1}$, т. е. $-1 = 1$.
2) Найдите все значения корня $\sqrt{-1}$.

Утверждение 25. *Множество всех значений корня $\sqrt[n]{\zeta\xi}$ можно получить домножая произвольное частное значение корня $\sqrt[n]{\zeta}$ на все значения $\sqrt[n]{\xi}$ ($\zeta \neq 0$, $\xi \neq 0$).*

Доказательство. Пусть z — частное значение корня $\sqrt[n]{\zeta}$, т. е. $z^n = \zeta$, поэтому $(zx)^n = z^n x^n = \zeta\xi$ для любого значения x корня $\sqrt[n]{\xi}$, следовательно, zx — частное значение $\sqrt[n]{\zeta}$. Когда x пробегает все n значений $\sqrt[n]{\xi}$, произведение zx принимает n *разных* значений $\sqrt[n]{\zeta\xi}$, т. е. все значения $\sqrt[n]{\zeta\xi}$. □

5.1. Корни из единицы

Согласно (11) множество значений корня n-й степени из $1 = \cos 0 + i \sin 0$ можно получить по формуле

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{12}$$

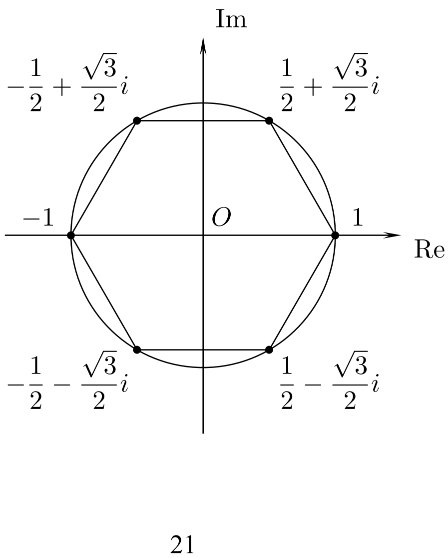
Легко видеть, что

$$\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Пример 26.

1) $\sqrt[1]{1} = 1$ (одно значение).
2) $\sqrt[2]{1} = \{1, -1\}$ (два значения).
3) $\sqrt[3]{1}$. $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4) $\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$.
5) $\sqrt[6]{1} = \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Все значения корня 6-й степени из 1 изображены на рисунке.



Упражнение 27. Найти все значения $\sqrt[12]{1}$.

Пример 28. Вычислим $\sqrt[3]{-8}$.

Данный пример уже рассматривался (пример 22). Приведем другой способ его решения, основанный на утверждении 25. Одним из частных значений $\sqrt[3]{-8}$, очевидно, является -2. С другой стороны, $\sqrt[3]{1}$ имеет значения: $1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому все значений $\sqrt[3]{-8}$ исчерпываются тремя числами: -2, $1 \pm i\sqrt{3}$.

Пример 29. Найдем сумму всех значений корня n-й степени из 1. При $n = 1$ данная сумма, очевидно, равна 1. При $n > 1$, так как $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$, то упомянутая сумма есть сумма начального отрезка геометрической прогрессии

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_1^{n-1} = \frac{1 - \varepsilon_1^n}{1 - \varepsilon_1}.$$

Так как $(\varepsilon_1)^n = 1$, то сумма равна 0.

Упражнение 30.

1) Найти произведение всех корней n-й степени из 1.
2) Найти произведение s-х степеней всех корней n-й степени из 1, если $s \in \mathbb{N}$.
3) Найти сумму s-х степеней всех корней n-й степени из 1, если $s \in \mathbb{N}$.

Упражнение 31. Вычислить $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1}$, если ε — корень n-й степени из 1.

Упражнение 32. Решить уравнения:

1) $(x + 1)^n - (x - 1)^n = 0$;
2) $(x + i)^n + (x - i)^n = 0$.

Утверждение 33. *Произведение и частное любых двух значений корня n-й степени из 1 является корнем n-й степени из 1.*

Доказательство. Пусть ε, ε' — некоторые значения корня n-й степени из 1, тогда $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon'^n = 1$, следовательно, $(\varepsilon\varepsilon')^n = \varepsilon^n\varepsilon'^n = 1$ и $(\varepsilon/\varepsilon')^n = \varepsilon^n/\varepsilon'^n = 1$, таким образом, $\varepsilon\varepsilon'$, ε/ε' являются значениями корня n-й степени из 1. $\square$

Упражнение 34. Доказать, что произведение корня n-й степени из 1 на корень m-й степени из 1 есть корень степени mn из 1.

Упражнение 35. Доказать, что если m и n взаимно просты, то все корни степени mn из 1 получаются умножением корней степени m из 1 на корни степени n из 1.

5.2. Первообразные корни

Корень ε n-й степени из 1 называется *первообразным*, или *примитивным*, если $\varepsilon^m \neq 1$ для любого натурального $m < n$ (т. е. ε не является корнем из единицы никакой меньшей степени). В данном случае говорят также, что ε *принадлежит показателю* n. Из определения сразу вытекает, что произвольное число ε может принадлежать лишь одному показателю. Легко видеть, что

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

является первообразным корнем n-й степени из 1.

Утверждение 36. *Для того, чтобы корень ε n-й степени из 1 являлся первообразным, необходимо и достаточно, чтобы величины*

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1 \tag{13}$$

исчерпывали все значения $\sqrt[n]{1}$.

Замечание 37. *Утверждение о том, что величины (13) исчерпывают все значения корня n-й степени из 1 эквивалентно тому, что они попарно различны.*

Доказательство утверждения 36.
Необходимость. Предположим противное: среди величин (13) нашлось две равных, например, $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ для некоторых натуральных k, l, причем $1 \le k < l \le n$. Тогда $\varepsilon^{l-k} = 1$, $l - k > 0$, следовательно, ε не является первообразным.
Достаточность. Так как величины (13) исчерпывают все значения корня n-й степени из 1, то, в частности, $\varepsilon^m \neq \varepsilon^n = 1$ для всякого натурального $m < n$, следовательно, ε — первообразный. □

Утверждение 38. *Пусть ε — первообразный корень n-й степени из 1, тогда для того, чтобы $\varepsilon^m = 1$, необходимо и достаточно, чтобы m было кратно n.*

Доказательство. Необходимость. Разделим m с остатком на n: имеем $m = np + r$ для некоторых натуральных p и r $(0 \leq r < n)$, поэтому

$$1 = \varepsilon^m = \varepsilon^{np}\varepsilon^r = \varepsilon^r.$$

Итак, $\varepsilon^r = 1$. Так как ε — первообразный и $0 \leq r < n$, то $r = 0$.
Достаточность. Имеем $m = np$, следовательно, $\varepsilon^m = (\varepsilon^n)^p = 1$. $\square$

Следствие 39. *Если корень ε m-й степени из 1 принадлежит показателю n, то m кратно n.*

Утверждение 40. *Пусть ε — первообразный корень n-й степени из 1, тогда для того, чтобы ε^k был также первообразным n-й степени, необходимо и достаточно, чтобы* НОД$(n, k) = 1$.

Доказательство. Необходимость. Предположим противное: ε и ε^k — первообразные, однако НОД$(n, k) = d > 1$. Имеем $n = n'd$, $k = k'd$ для некоторых натуральных n', k', причем, так как $d > 1$, то $n' < n$. Однако

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{k'dn'} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1.$$

Так как $n' < n$, то ε^k не является первообразным корнем.
Достаточность. Предположим теперь, что ε — первообразный корень, НОД$(n, k) = 1$, однако $(\varepsilon^k)^m = 1$ для некоторого натурального $m < n$ (т. е. ε^k не является первообразным). Из утверждения 2 следует, что km кратно n, однако НОД$(n, k) = 1$, поэтому m кратно n, что невозможно, так как $m < n$. $\square$

Следствие 41. *Величина*

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

является первообразным корнем n-й степени из 1 тогда и только тогда, когда НОД$(n, k) = 1$.

Доказательство. Применим к первообразному корню $\varepsilon = \varepsilon_1$ утверждение 3. $\square$

Пример 42. Найдем все первообразные корни из 1 степени:

1) 1, ответ: 1;

2) 2, один первообразный корень: $\varepsilon_1 = -1$;

3) 3, два первообразных корня: $\varepsilon_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

4) 4, два первообразных корня: $\varepsilon_{1,3} = \pm i$;

5) 6, два первообразных корня: $\varepsilon_{1,5} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

6) 8, выпишем все натуральные числа, не превосходящие $n = 8$ и взаимно простые с ним: 1, 3, 5, 7; первообразными корнями являются:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\varepsilon_3 &= \cos\frac{3\cdot 2\pi}{8} + i\sin\frac{3\cdot 2\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\varepsilon_5 &= \cos\frac{5\cdot 2\pi}{8} + i\sin\frac{5\cdot 2\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\varepsilon_7 &= \cos\frac{7\cdot 2\pi}{8} + i\sin\frac{7\cdot 2\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Упражнение 43. Найти все первообразные корни из 1 степени 12.

Упражнение 44. Для каждого корня 1) 16-й; 2) 20-й; 3) 24-й степени из единицы указать показатель, к которому он принадлежит.

Упражнение 45. Вычислить сумму $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$, если ε — первообразный корень степени $2n$ из 1.

Согласно следствию 41 число первообразных корней n-й степени из 1 совпадает с количеством $\varphi(n)$ натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*. Она играет существенную роль в теории чисел.

Упражнение 46. Пусть ε — первообразный корень n-й степени из 1. Доказать, что $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\ldots(1-\varepsilon^{n-1}) = n$.

Упражнение 47. Доказать, что произведение длин всех сторон и диагоналей, проведенных из одной вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, равно n.

Упражнение 48. Доказать, что если m и n взаимно просты, то произведение первообразного корня из 1 степени m на первообразный корень из 1 степени n есть первообразный корень из 1 степени mn и обратно.

Упражнение 49. Доказать, что если m и n взаимно просты, то $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, пользуясь тем, что $\varphi(n)$ есть число первообразных корней степени n.

5.3. Круговые многочлены

Круговым многочленом, или *многочленом деления круга*, показателя n называется выражение

$$\Phi_n(x) = (x - \eta_1)(x - \eta_2)\dots(x - \eta_s),$$

где $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ — первообразные корни n-й степени из 1.

Пример 50.

1) $\Phi_1(x) = x - 1$;
2) $\Phi_2(x) = x + 1$;
3) $\Phi_3(x) = \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x^2 + x + 1$;
4) $\Phi_4(x) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1$;
5) $\Phi_6(x) = \left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x^2 - x + 1$.

Утверждение 51. *Справедливо равенство*

$$x^n - 1 = \prod_{m|n} \Phi_m(x),$$

где произведение берется по всем натуральным делителям m числа n.

Доказательство. Чтобы перечислить все корни n-й степени из 1, воспользуемся следующей процедурой. Для каждого делителя m числа n выпишем все корни, принадлежащие показателю m. Из утверждения 2 следует, что таким образом мы перечислим все корни n-й степени из 1 и каждый по одному разу. Доказываемое теперь следует из разложения

$$x^n - 1 = (x - 1)(x - \varepsilon_1)\dots(x - \varepsilon_{n-1}).$$

$\square$

Пример 52. Выпишем $\Phi_5(x)$, $\Phi_{10}(x)$.

1) Делителями $n = 5$ являются $1, 5$, поэтому $x^5 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_5(x)$, отсюда

$$\Phi_5(x) = \frac{x^5 - 1}{\Phi_1(x)} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

2) Делителями $n = 10$ являются числа $1, 2, 5, 10$, поэтому $x^{10} - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_5(x)\Phi_{10}(x)$, отсюда

$$\begin{aligned}\Phi_{10}(x) &= \frac{x^{10} - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_5(x)} = \frac{(x^{10} - 1)\Phi_1(x)}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)(x^5 - 1)} \\ &= \frac{x^5 + 1}{\Phi_2(x)} = \frac{x^5 + 1}{x - 1} = \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.\end{aligned}$$

Упражнение 53. Найти

1) $\Phi_{12}(x)$; 2) $\Phi_{15}(x)$; 3) $\Phi_{105}(x)$.

Упражнение 54. Пусть p — простое, а k — натуральное число. Найти

1) $\Phi_p(x)$; 2) $\Phi_{p^k}(x)$.

Упражнение 55. Пусть p, q — неравные простые числа. Доказать, что

$$\Phi_{pq} = \frac{(x^{pq} - 1)(x - 1)}{(x^p - 1)(x^q - 1)}.$$

Упражнение 56. Доказать, что при нечетном n, большем 1, справедливо $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

Упражнение 57. Пусть n кратно d. Доказать, что первообразными корнями степени nd из 1 являются все корни d-й степени из всех первообразных корней n-й степени из 1 и только они.

Упражнение 58. Пусть $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, $n = p_1 p_2 \dots p_s$, где $p_1, \dots, p_s$ — попарно различные простые числа, Доказать, что

$$\Phi_m(x) = \Phi_n(x^{\frac{m}{n}}).$$

Упражнение 59. Найти $\Phi_{10000}(x)$.

Упражнение 60. Пусть p — простое число, не делящее n. Доказать, что

$$\Phi_{pn} = \frac{\Phi_n(x^p)}{\Phi_n(x)}.$$

Упражнение 61. Найти $\Phi_n(1)$.

Упражнение 62. Найти $\Phi_n(-1)$.

5.4. Квадратные корни из комплексных чисел

Квадратным корнем из комплексного числа $z = a + bi$ является такое число $x + iy$, что $(x + iy)^2 = a + bi$. Пусть $z \neq 0$, тогда $a + bi = x^2 + 2xyi - y^2$, или

$$\begin{cases} a = x^2 - y^2, \\ b = 2xy. \end{cases} \tag{14}$$

Решим полученнную систему. Возведем оба уравнения системы в квадрат и прибавим к первому второе: $a^2+b^2 = x^4+2x^2y^2+y^2$, отсюда $a^2+b^2 = (x^2+y^2)^2$. Так как $x^2 + y^2 > 0$, то $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Рассмотрим это уравнение вместе с первым уравнением системы (14):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ x^2 - y^2 = a. \end{cases}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2}(\quad a + \sqrt{a^2 + b^2}), \\ y^2 &= \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \end{aligned} \tag{15}$$

Каждое из этих двух соотношений дает два разных значения для x и y. Комбинируя их, мы можем получить четыре различных комплексных числа, однако не все они удовлетворяют системе (14): как видно из второго уравнения, *знаки x и y должны совпадать, если $b > 0$, и различаться, если $b < 0$*. Если $b = 0$, т. е. число z — вещественное, то либо x, либо y равно нулю. В разделе 5 мы видели, что корень n-й степени из произвольного ненулевого комплексного числа имеет ровно n значений. Таким образом, для $n = 2$ эти значения получаются по формулам (15), скомбинированным с приведенным правилом выбора знака.

Пример 63. Найдем все значения $\sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}$. Сначала найдем все значения корня квадратного из $2 - i\sqrt{12}$. Из (15) имеем $x^2 = 3$, $y^2 = 1$. Так как мнимая часть подкоренного числа отрицательна, то $\sqrt{2 - i\sqrt{12}} = \pm(\sqrt{3} - i)$. Вычислим теперь $\sqrt{\sqrt{3} - i}$. Получаем $x^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 2)$,

$y^2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+2)$. Отсюда

$$\sqrt{\sqrt{3}-i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{-\sqrt{3}+2}{2}}\right) = \pm\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Теперь необходимо найти $\sqrt{-\sqrt{3}+i}$. По утверждению 25 оба значения этого корня отличаются от соответствующих значений $\sqrt{\sqrt{3}-i}$ множителем i. Итак, значениями корня являются

$$\pm\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right), \qquad \pm\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Упражнение 64. Найти
1) $\sqrt{-8i}$, 2) $\sqrt{3-4i}$.

Упражнение 65. Из (15) вывести формулы синуса и косинуса половинного аргумента.

6. Уравнения второй, третьей и четвертой степени

6.1. Квадратные уравнения

Уравнением *второй степени*, или *квадратным уравнением*, называется уравнение $ax^2+bx+c=0$, где $a \neq 0$. Делением его на a получаем уравнение, равносильное исходному:

$$x^2+px+q=0. \tag{16}$$

Для его решения воспользуемся способом выделения полного квадрата. В правой части имеем:

$$x^2 + 2x\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Уравнение примет вид

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q, \quad \text{откуда} \quad x+\frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Квадратный корень в последней формуле имеет два значения, отличающиеся знаком. Примем для них обозначение $\pm\sqrt{\ }$. Итак, уравнение (16) имеет в общем случае два решения

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Дискриминантом уравнения (16) называется

$$D = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Легко видеть, что если $D = 0$, то уравнение (16) имеет один комплексный корень. Если $D \neq 0$, то уравнение (16) имеет два различных комплексных корня.

Пример 66. $x^2 - (2+i)x + (-1+7i) = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{2+i}{2} \pm \sqrt{\frac{3+4i}{4} + 1 - 7i} = \frac{2+i}{2} \pm \frac{\sqrt{7-24i}}{2}.$$

Для нахождения всех значений квадратного корня воспользуемся методами из предыдущего раздела:

$$x^2 = \frac{1}{2}(\ \ 7 + \sqrt{7^2 + 24^2}) = 16,$$
$$y^2 = \frac{1}{2}(-7 + \sqrt{7^2 + 24^2}) = 9.$$

Отсюда $\sqrt{7-24i} = \pm(4-3i)$, следовательно,

$$x_{1,2} = \frac{2+i}{2} \pm \frac{4-3i}{2}.$$

Итак, $x_1 = 3 - i$, $x_2 = -1 + 2i$.

Упражнение 67. Решить уравнения:

1) $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$;

2) $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$.

Упражнение 68. Решить уравнения:

1) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.

Упражнение 69. Составить формулу для решения биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ с вещественными коэффициентами, удобную в случае $p^2/4 - q < 0$.

6.2. Кубические уравнения

После замены $y = x - \dfrac{a}{3}$ в уравнении третьей степени $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ исчезает член с квадратом неизвестной y. Уравнение примет вид

$$x^3 + px + q = 0. \tag{17}$$

Его решения будем искать в виде

$$x = \alpha + \beta, \tag{18}$$

где α, β — некоторые комплексные числа, связанные помимо (18) другим отношением, которое мы определим ниже. После подстановки (18) в (17) получаем:

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + p\alpha + p\beta + q = 0,$$

откуда

$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha(3\alpha\beta + p) + \beta(3\alpha\beta + p) + q = 0,$$

следовательно,

$$\alpha^3 + \beta^3 + (\alpha+\beta)(3\alpha\beta + p) + q = 0. \tag{19}$$

Пусть

$$3\alpha\beta + p = 0, \tag{20}$$

тогда (19) примет вид

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q. \tag{21}$$

Переписывая (21) и возводя (20) в куб, получим систему

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ \alpha^3\beta^3 = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Используя теорему Виета, получаем, что α^3, β^3 являются решениями следующего квадратного уравнения

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

поэтому

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{22}$$

Среди всевозможных комбинаций α, β необходимо выбрать лишь те, которые удовлетворяют условию (20). Легко видеть, что таким образом будет получено 3 решения (для каждого α из (20) можно определить единственное β). Формулы (18), (22) называются *формулами Кардано*.

На практике из (22) выбирают какую-нибудь пару α_1, β_1, удовлетворяющую (20); решениями уравнения (17) являются числа

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1, \\ x_2 &= \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}\sqrt{3}, \\ x_3 &= \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}\sqrt{3}, \\ &\quad \text{где } \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned} \tag{23}$$

Упражнение 70. Проверить, что x_2, x_3 удовлетворяют условию (20).

Пример 71. $y^3 + 3y^2 - 6y + 4 = 0$. После подстановки $y = x - 1$ исходное уравнение примет вид: $x^3 - 9x + 12 = 0$. Имеем:

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{12}{2} + \sqrt{\frac{144}{4} - \frac{9^3}{27}}} = \sqrt[3]{-6 + \sqrt{9}} = \sqrt[3]{-6 - 3} = -\sqrt[3]{3},$$

$$\beta = \sqrt[3]{-6 + 3} = -\sqrt[3]{9}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x_1 &= -\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right), \\ x_{2,3} &= \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}{2} \pm i\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$y_1 = -\left(1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right),$$

$$y_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} - 2}{2} \pm i\,\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}}{2}\sqrt{3}.$$

6.3. Кубические уравнения с действительными коэффициентами

Пусть в уравнении (17) параметры p, q — действительные числа. В зависимости от знака выражения $q^2/4 + p^3/27$ в формулах Кардано (22) приходится вычислять корень квадратный либо из положительного, либо из нулевого, либо из отрицательного (действительного) числа. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $q^2/4+p^3/27 > 0$. Под знаком кубичного радикала в (22) стоят действительные числа. Вещественные значения этих корней дадут действительный корень $\alpha_1 + \beta_1$. Два других корня, вычисленных по формулам (23), являются сопряженными комплексными (см. пример 71).

2) $q^2/4 + p^3/27 = 0$. В этом случае $\alpha_1 = \beta_1$, поэтому $x_1 = 2\alpha_1$, $x_2 = x_3 = -\alpha_1$. Все корни действительные.

3) $q^2/4+p^3/27 < 0$ (так называемый *«неприводимый случай»*). Пусть

$$z = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(в данном случае радикал означает арифметическое значение корня). Для числа z определим модуль r:

$$r = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

и аргумент φ:

$$r\cos\varphi = -\frac{q}{2}, \text{ следовательно, } \cos\varphi = -\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}.$$

Из формул Кардано (22) следует, что

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \quad \beta_1 = \sqrt[3]{\bar{z}} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$

Легко проверить, что $\alpha_1\beta_1 = -p/3$, поэтому по формулам (23) получаем:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\\
x_{2,3} &= \alpha\varepsilon^{1,2} + \beta\varepsilon^{2,1}\\
&= \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
&\qquad + \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(-\frac{\varphi}{3} \mp \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\varphi}{3} \mp \frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
&= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} \mp \frac{\pi}{3}\right)\\
&= -2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} \mp \frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Итак, в «неприводимом» случае все три корня уравнения вещественные и различные и могут быть найдены по формулам:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\\
x_{2,3} &= -2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} \mp \frac{\pi}{3}\right),
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$\text{где} \qquad \cos\varphi = -\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}$$

(так называемое *«тригонометрическое» решение*).

Заметим, что в данном случае несмотря на то, что все три корня действительные, нам не удалось их выразить через радикалы от *действительных* же чисел: в формулах (22) приходится извлекать кубичный корень из комплексного (не действительного) числа, а в (24) встречаются трансцендентные функции. Можно показать, что *в общем* случае (т. е. для уравнения с *буквенными* коэффициентами) это невозможно, хотя в *частных* примерах иногда удается представить вещественные корни кубичного уравнения через радикалы от действительных чисел (см. примеры ниже).

Пример 72. $x^3 - 6x + 4 = 0$. По формулам (22) получаем

$$\alpha = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{-2+2i},$$
$$\beta = \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{-2-2i}.$$

Здесь кубичный корень удается извлечь «точно». Например, $\alpha_1 = 1+i$, $\beta_1 = 1-i$. Прямой подстановкой в (20) убеждаемся, что условие (20) выполнено. Решения:

$$x_1 = (1+i) + (1-i) = 2,$$
$$x_2 = (1+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (1-i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3},$$
$$x_3 = (1+i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (1-i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}.$$

Пример 73. $x^3 - 19x + 30 = 0$. По формулам (24) получаем (приближенные вычисления с точностью до 4 значащих цифр):

$$p = -19, \quad q = 30,$$
$$\cos\varphi = -\frac{30}{2}\sqrt{\frac{27}{19^3}} \approx -0,9412, \quad \text{откуда} \quad \varphi \approx 160^\circ 16', \ \frac{\varphi}{3} \approx 53^\circ 25',$$

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{19}{3}}\cos 53^\circ 25' \approx 3,002,$$
$$x_2 = -2\sqrt{\frac{19}{3}}\cos 113^\circ 25' \approx 1,999,$$
$$x_3 = -2\sqrt{\frac{19}{3}}\cos 6^\circ 35' \approx -5,002.$$

Легко проверить, что точными значениями решений уравнения являются целые числа 3, 2, -5.

6.4. Уравнения четвертой степени

Опишем *способ Феррари* (L. Ferrari, 1545) для решения уравнения четвертой степени

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0. \tag{25}$$

Легко проверить, что для произвольного значения параметра λ уравнение (25) можно представить в виде:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}+\lambda-b\right)x^2+\left(\frac{a\lambda}{2}-c\right)x+\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)\right]=0. \tag{26}$$

Подберем λ так, чтобы выражение в квадратных скобках было квадратом двучлена, зависящего от x. Для этого необходимо приравнять к нулю дискриминант этого выражения:

$$\left(\frac{a\lambda}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}+\lambda-b\right)\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)=0. \tag{27}$$

Таким образом, взяв любой корень λ уравнения (27), мы сможем разложить левую часть (26) на линейные множители и тем самым отыскать корни исходного уравнения. Вспомогательное кубическое уранение (27) называется *резольвентой*.

Пример 74. $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$. Резольвента имеет вид:

$$\left(-\frac{2\lambda}{2}-4\right)^2-4\left(\frac{(-2)^2}{4}+\lambda-2\right)\left(\frac{\lambda^2}{4}+8\right)=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем:

$$\begin{aligned}&\lambda^3-2\lambda^2+24\lambda-48=0,\\&\lambda^2(\lambda-2)+24(\lambda-2)=0,\\&(\lambda-2)(\lambda^2+24)=0.\end{aligned}$$

Одним из корней является $\lambda=2$. Воспользовавшись (26), левую часть исходного уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned}&(x^2-x+1)^2-(x^2-6x+9)\\&\quad=(x^2-x+1)^2-(x-3)^2\\&\quad=(x^2-x+1-x+3)(x^2-x+1+x-3)\\&\quad=(x^2-2x+4)(x^2-2).\end{aligned}$$

Раскладывая на линейные множители, получаем следующие корни: $1\pm i\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{2}$.

6.5. Уравнения высших степеней

Мы с вами увидели, что корни алгебраического уравнения степени не выше 4 с буквенными коэффициентами можно выразить через коэффициенты этого уравнения при помощи конечного числа действий сложения, вычитания, умножения, деления и знаков корня (говорят, что общее уравнение степени не выше 4 *разрешимо в радикалах*). Н. Абель (N. Abel) в 1826 г. показал, что для алгебраических уравнений степени выше 4 этого сделать нельзя, иными словами, общее уравнение степени 5 и выше неразрешимо в радикалах. Результат Абеля не исключал возможности, что корни каждого *конкретного* уравнения (с числовыми коэффициентами) степени выше 4 выражаются с помощью некоторой комбинации арифметических операций и операций извлечения корня над коэффициентами исходного уравнения. Уравнения любой степени частных видов решаются в радикалах (например, *двучленное уравнение* $x^n - a = 0$). Полное решение вопроса о том, при каких условиях алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах было получено Э. Галуа (E. Galois) в 1830 г. Из результатов Галуа, например, следует, что для любой степени выше 4 найдутся уравнения с рациональными (и даже целыми) коэффициентами, неразрешимые в радикалах. Простым примером такого уравнения может служить $x^5 - 4x - 2 = 0$.

6.6. Разные задачи

Пример 75. Выразим в радикалах $\cos\dfrac{2\pi}{5}, \sin\dfrac{2\pi}{5}$. Число $\cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ является первообразным корнем 5-й степени из 1 и поэтому одним из решений уравнения $x^5 - 1 = 0$ или $\Phi_5(x) = 0$. Таким образом, задача сводится к разысканию решений уравнения $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Это уравнение *возвратное*. Так как $x = 0$ не является его корнем, то мы можем записать:

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \tag{28}$$

или

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Пусть
$$u = x + \frac{1}{x}, \tag{29}$$
тогда $u^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2}$ и (28) примет вид $u^2+u-1 = 0$. Корни последнего уравнения: $u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Теперь из (29) имеем:
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} \pm i\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}, \\ x_{3,4} &= -\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} \pm i\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}. \end{aligned}$$
Очевидно, $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = x_1$. Таким образом,
$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}, \qquad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}.$$

Упражнение 76. Разработать метод построения при помощи циркуля и линейки правильного пятиугольника, вписанного в окружность заданного радиуса.

Пример 77. Составим алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является длина стороны правильного 14-угольника, вписанного в круг радиуса 1. Обозначим сторону упомянутого 14-угольника через d. Легко видеть, что $d = 2\sin\frac{\pi}{14} = 2\cos\frac{3\pi}{7}$. Пусть
$$\varepsilon = \cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7} = \cos\frac{3\cdot 2\pi}{14} + i\sin\frac{3\cdot 2\pi}{14},$$
тогда $d = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$. Заметим, что ε является первообразным корнем 14-й степени из 1 и поэтому корнем кругового многочлена
$$\begin{aligned} \Phi_{14}(x) &= \frac{x^{14}-1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_7(x)} = \frac{(x^{14}-1)\Phi_1(x)}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)(x^7-1)} = \frac{x^7+1}{x+1} = \\ &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

Поделив уравнение $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ на x^3, получим

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

и после преобразований:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0,$$

т. е. $d^3 - d^2 - 2d + 1 = 0$. Это и есть искомое уравнение.

Упражнение 78. Решить уравнения:

1) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;
2) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$.

Упражнение 79. Решить уравнения:

1) $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$;
2) $z^4 + 2z^2 - 24z + 72 = 0$.

7. Вычисление сумм и произведений с помощью комплексных чисел

Перед разбором примеров данного раздела напомним формулу *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \tag{30}$$

где n — любое натуральное, а a и b — любые комплексные числа. Коэффициенты разложения

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

называются *биномиальными коэффициентами*. Как обычно, $n!$ — *факториал* числа n, т. е. произведение натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Полагают также $0! = 1$. По формуле (30), в частности, получаем:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Биномиальные коэффициенты обладают следующими свойствами:

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{31}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{32}$$

Первые три очевидны. Четвертое можно вывести, сравнивая коэффициенты в левой и правой частях равенства $(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b)$, а можно проверить непосредственно. Сделаем это:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}.$$

Чтобы привести дроби к общему знаменателю $k!(n-k)!$, домножим числитель и знаменатель первого слагаемого на $n-k$, а второго — на k. Тогда получим:

$$\frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Равенства (31), (32) позволяют выписать биномиальные коэффициенты, в следующую таблицу, называемую *треугольником Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\multicolumn{13}{c}{\dotfill}
\end{array}$$

Здесь каждое число равно сумме двух соседних чисел, стоящих строкой выше. Тогда в n-й строке на k-м месте получаем биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$. В частности, рассматривая, например, 6-ю строку треугольника Паскаля, выводим формулу:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Формула бинома Ньютона может теперь быть доказана по индукции. *Основание индукции* при $n = 1$ очевидно: в левой и правой частях равенства (30) стоят тождественно равные выражения $a + b$. *Индуктивный переход* осуществляем из предположения, что формула бинома Ньютона верна для показателя степени равного $n - 1$:

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k, \tag{33}$$

Докажем, что тогда справедливо (30). Действительно, имеем

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k =$$

$$= a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k =$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k + b^n =$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] a^{n-k} b^k + b^n =$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

что требовалось доказать.

Пример 80. Выразим $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$). Пусть $z = \cos x + i \sin x$. Найдем z^5 двумя способами. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^5 &= \\ &= \cos^5 x + 5i\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - \\ &\quad -10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x.\end{aligned}$$

С другой стороны, по формуле Муавра:

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x.$$

Приравнивая правые части полученных равенств и выделяя действительную часть, получаем:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x.$$

Упражнение 81. Выразить через $\cos x$ и $\sin x$:
1) $\cos 8x$; 2) $\sin 7x$.

Упражнение 82. Выразить $\operatorname{tg} 6x$ через $\operatorname{tg} x$.

Упражнение 83. Доказать[4]:

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x\sin^4 x - \ldots$$

$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1} x\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3} x\sin^3 x + \ldots$$

Многочлены вида

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

называются *многочленами Чебышёва*. Из предыдущего упражнения следует, что

$$T_n(x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \binom{n}{6}x^{n-6}(1-x^2)^3 + \ldots$$

[4] Суммы в нижеследующих равенствах конечные.

Пример 84. Вычислим $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$ $(x \in \mathbb{R})$. Пусть $z = \cos x + i \sin x$, тогда рассматриваемая сумма есть мнимая часть выражения $z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n$, которое, используя формулы для суммы геометрической прогрессии, формулу Муавра и простейшие тригонометрические формулы, преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n &= z \cdot \frac{z^n - 1}{z - 1} \\
&= (\cos x + i \sin x) \cdot \frac{\cos nx + i \sin nx - 1}{\cos x + i \sin x - 1} \\
&= (\cos x + i \sin x) \cdot \frac{2 \sin^2 \dfrac{nx}{2} - 2i \sin \dfrac{nx}{2} \cos \dfrac{nx}{2}}{2 \sin^2 \dfrac{x}{2} - 2i \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}} \\
&= (\cos x + i \sin x) \cdot \frac{-\, i \sin \dfrac{nx}{2} \cdot \left(i \sin \dfrac{nx}{2} + \cos \dfrac{nx}{2} \right)}{-\, i \sin \dfrac{x}{2} \cdot \left(i \sin \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{2} \right)} \\
&= \frac{\cos \dfrac{(n+1)x}{2} + i \sin \dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}.
\end{aligned}$$

Выделяя мнимую часть, получаем

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \dfrac{(n+1)x}{2} \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

Выделяя действительную часть, можно получить

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\cos \dfrac{(n+1)x}{2} \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

Упражнение 85. Вычислить сумму

$$1 + a \cos \varphi + a^2 \cos 2\varphi + \ldots + a^n \cos n\varphi.$$

Пример 86. Вычислим

$$\sin x + \binom{n}{1} \sin 2x + \ldots + \binom{n}{n} \sin(n+1)x.$$

Пусть $z = \cos x + i \sin x$. Преобразуем выражение, мнимая часть которого есть рассматриваемая сумма:

$$\begin{aligned}
&z + \binom{n}{1} z^2 + \ldots + \binom{n}{n} z^{n+1} \\
&\quad = z\left(1 + \binom{n}{1} z + \ldots + \binom{n}{n} z^n\right) \\
&\quad = z(1+z)^n = (\cos x + i \sin x)(1 + \cos x + i \sin x)^n \\
&\quad = (\cos x + i \sin x)\left(2\cos^2 \frac{x}{2} + i2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^n \\
&\quad = 2^n (\cos x + i \sin x) \cos^n \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}\right)^n \\
&\quad = 2^n (\cos x + i \sin x) \cos^n \frac{x}{2} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2}\right) \\
&\quad = 2^n \cos^n \frac{n}{2} \left(\cos \frac{(n+2)x}{2} + i \sin \frac{(n+2)x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Мы последовательно применили формулу бинома Ньютона, тригонометрические формулы двойного угла и, наконец, использовали формулу Муавра. Теперь, выделяя мнимую часть в последнем выражении, получаем

$$\sin x + \binom{n}{1} \sin 2x + \ldots + \binom{n}{n} \sin(n+1)x = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2}.$$

Пример 87. Вычислим

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2 (2n-1)x.$$

Так как $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$, то

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2 (2n-1)x = \\
&\quad = \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} \big(\cos 2x + \cos 6x + \ldots + \cos 2(2n-1)x \big).
\end{aligned}$$

Для вычисления суммы в круглых скобках положим $z = \cos x + i\sin x$ и рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} z^2 + z^6 + \ldots + z^{2(2n-1)} &= z^2 \cdot \frac{z^{4n}-1}{z^4-1} = \\ &= z^{2n} \cdot \frac{z^{2n}-z^{-2n}}{z^2-z^{-2}} = \\ &= (\cos 2nx + i\sin 2nx)\frac{\sin 2nx}{\sin 2x}. \end{aligned}$$

Выделяя действительную часть, получаем

$$\cos 2x + \cos 6x + \ldots + \cos 2(2n-1)x = \frac{\cos 2nx \sin 2nx}{\sin 2x} = \frac{\sin 4nx}{2\sin 2x}.$$

Поэтому

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2 (2n-1)x = \frac{n}{2} - \frac{\sin 4nx}{4\sin 2x}.$$

Упражнение 88. Показать, что

1) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x}$;

2) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)x \sin nx}{2\sin x}$.

Пример 89. Вычислим:

1) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$,

2) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx$.

Пусть $z = \cos x + i\sin x$. Сумма 1) совпадает с действительной частью выражения

$$z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n,$$

сумма 2) — с его мнимой частью. Для нахождения $z+2z^2+3z^3+\ldots+nz^n$ рассмотрим произведение

$$(1-z)(z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n),$$

в котором, раскрывая скобки, получим

$$\begin{aligned} &z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n - z^2 - 2z^3 - \ldots - (n-1)z^n - nz^{n+1} \\ &\quad = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n - nz^{n+1} \\ &\quad = z\frac{1-z^n}{1-z} - nz^{n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n &= \frac{z}{1-z}\left(\frac{1-z^n}{1-z} - nz^n\right) \\ &= \frac{z(1 - z^n(1+n) + nz^{n+1})}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

Для отделения мнимой и действительной части в последнем выражении удобно ввести величину $\zeta = \cos\dfrac{x}{2} + i\sin\dfrac{x}{2}$, заметив, что $\zeta^2 = z$. Итак,

$$\begin{aligned} &z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n = \\ &\quad = \frac{1 - z^n(1+n) + nz^{n+1}}{(\zeta^{-1} - \zeta)^2} = \frac{1 - z^n(1+n) + nz^{n+1}}{\left(-2i\sin\dfrac{x}{2}\right)^2} \\ &\quad = \frac{1 - \big(\cos nx + i\sin nx\big)(1+n) + n\left(\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x\right)}{-4\sin^2\dfrac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Выделяя действительную и мнимую части, соответственно получаем

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}},$$

$$\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}.$$

Упражнение 90. Доказать, что

1) $\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{3\pi}{n} + \ldots + \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{n} = 0;$

2) $\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{n}=0;$

3) $\cos^n\dfrac{\pi}{n}-\cos^n\dfrac{2\pi}{n}+\ldots+(-1)^{n-1}\cos^n\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}.$

Пример 91. Выразим $\sin^3 x$ через $\sin$ кратных углов. Пусть $z=\cos x+i\sin x$, тогда нетрудно проверить, что $\sin x=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$ и, следовательно, по формуле бинома Ньютона,

$$\sin^3 x=\frac{z^3-3z^2z^{-1}+3zz^{-2}-z^{-3}}{-8i}=\frac{z^3-3z+3z^{-1}-z^{-3}}{-8i}.$$

Подставляя вместо z его выражение через x и приводя подобные, получаем

$$\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}.$$

Пример 92. Выразим $\cos^4 x\cdot\sin^3 x$ через синусы кратных углов. Пусть $z=\cos x+i\sin x$, тогда $\cos x=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\sin x=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\cos^4 x\cdot\sin^3 x&=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^4\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^3=\\&=-\frac{1}{128i}\left(z^2-z^{-2}\right)^3\left(z+z^{-1}\right)=\\&=-\frac{1}{128i}\left(z^6-3z^2+3z^{-2}-z^{-6}\right)\left(z+z^{-1}\right)=\\&=-\frac{1}{128i}\left(z^7+z^5-3z^3-3z+3z^{-1}+3z^{-3}-z^{-5}-z^{-7}\right)=\\&=-\frac{1}{128i}\left(z^7-z^{-7}+z^5-z^{-5}-3(z^3-z^{-3})-3(z-z^{-1})\right)=\\&=-\frac{1}{64}(\sin 7x+\sin 5x-3\sin 3x-3\sin x).\end{aligned}$$

Упражнение 93. Выразить через тригонометрические функции кратных углов:

1) $\sin^4 x$; 2) $\sin^3 x\cos^5 x$.

Пример 94. Вычислим

1) $1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots;$

2) $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\ldots.$

Разлагая $(1+i)^n$ по формуле бинома Ньютона:

$$(1+i)^n = 1+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\ldots+\binom{n}{n}i^n,$$

видим, что выражение 1) есть действительная часть числа $(1+i)^n$, тогда как 2) — его мнимая часть. Так как

$$(1+i)^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

то

1) $1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4};$

2) $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\ldots = 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}.$

Упражнение 95.

1) Разложив $(1+1)^n$ по формуле бинома Ньютона, докажите, что

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

2) Разложив $(1-1)^n$ по формуле бинома Ньютона, докажите, что

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}.$$

Пример 96. Вычислим

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\frac{1}{9}\binom{n}{5}-\frac{1}{27}\binom{n}{7}+\ldots$$

Разложим $(1+i/\sqrt{3})^n$ по формуле бинома:

$$\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{i}{\sqrt{3}}+\binom{n}{2}\frac{-1}{3}+\binom{n}{3}\frac{-i}{3\sqrt{3}}+\binom{n}{4}\frac{1}{9}+\binom{n}{5}\frac{i}{9\sqrt{3}}+\ldots$$

С другой стороны, по формуле Муавра:

$$\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n/2}}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right).$$

Приравнивая мнимые части в обоих выражениях, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\frac{1}{9}\binom{n}{5}-\frac{1}{27}\binom{n}{7}+\ldots\right)=\frac{2^n}{3^{n/2}}\sin\frac{n\pi}{6}.$$

Отсюда

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\frac{1}{9}\binom{n}{5}-\frac{1}{27}\binom{n}{7}+\ldots=\frac{2^n}{3^{(n-1)/2}}\sin\frac{n\pi}{6}.$$

Пример 97. Вычислим

$$1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots$$

Рассмотрим выражение

$$(1+1)^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n, \tag{34}$$

где $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. Заметим, что $\varepsilon^3=1$. Раскладывая все три бинома и вынося за скобки общие биномиальные коэффициенты, получаем:

$$\begin{aligned}\binom{n}{0}(1+1+1)+\binom{n}{1}(1+\varepsilon\ +\varepsilon^2)+\binom{n}{2}(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)\\ +\binom{n}{3}(1+1+1)+\binom{n}{4}(1+\varepsilon^4+\varepsilon^8)+\binom{n}{5}(1+\varepsilon^5+\varepsilon^{10})+\ldots\\ =3\left(1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots\right).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}&(1+1)^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n=\\ &\quad=2^n+\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^n=\\ &\quad=2^n+\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{-n\pi}{3}+i\sin\frac{-n\pi}{3}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

Упражнение 98. Вычислить суммы:

1) $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\ldots$

2) $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\binom{n}{13}+\ldots$

3) $\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{5}+\frac{1}{9}\binom{n}{9}+\ldots$

8. Формула Эйлера

Показательная функция от комплексного аргумента определяется по *формуле Эйлера*:

$$e^{a+bi}=e^a(\cos b+i\sin b).$$

Из нее, в частности, следует:

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\qquad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Тригонометрическая форма записи числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ превращается теперь в

$$z=re^{i\varphi}=e^{\ln r+i\varphi}.$$

Это делает естественным определение натурального логарифма, который определен с точностью до слагаемого $2k\pi i$:

$$\operatorname{Ln} z=\ln r+i\varphi+2k\pi i,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Упражнение 99. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a+bi}{n}\right)^n=e^a(\cos b+i\sin b)$.

Упражнение 100. Во что превращается в свете формулы Эйлера правило сложения аргументов при умножении комплексных чисел? Тот же вопрос для формулы Муавра.

Упражнение 101. Вычислить
1) $e^{\pi i}$; 2) $e^{\frac{\pi}{2}i}$; 3) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

Упражнение 102. Найти все значения
1) $\operatorname{Ln} 1$; 2) $\operatorname{Ln}(-1)$; 3) $\operatorname{Ln}(1+i)$.

Упражнение 103. Пусть $-1 \le x \le 1$. Найти
1) $\operatorname{Ln}(x + i\sqrt{1-x^2})$, 2) $\operatorname{Ln}(\sqrt{1-x^2} + ix)$.

Упражнение 104. Выразить $\operatorname{Arctg} z$ через логарифмическую функцию.

9. Числовые кольца и поля

Множество $A \subseteq \mathbb{C}$ *замкнуто* относительно сложения, если для двух произвольных a и b из A их сумма $a+b$ также принадлежит A. Аналогично определяется замкнутость по остальным арифметическим операциям.

Например, множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ замкнуты относительно сложения и умножения. Множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ замкнуты относительно вычитания. Множество U_n всех значений корня n-й степени из единицы замкнуто относительно умножения и деления.

Непустое числовое множество $K \subseteq \mathbb{C}$ называется (*числовым*) *кольцом*, если оно замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения. Множество $\mathbb{N}$ замкнуто относительно сложения и умножения, однако не замкнуто относительно вычитания, и, следовательно, не является кольцом. Множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, как не трудно видеть, — кольца. Множество $\{0\}$ также является кольцом, называемым *тривиальным*.

Утверждение 105. *Для любого кольца K верно, что $0 \in K$.*

Доказательство. Пусть $a \in K$. Так как K замкнуто относительно вычитания, то $0 = a - a \in K$. $\square$

Упражнение 106. Привести пример нетривиального кольца без 1.

Числовое кольцо F называется (*числовым*) *полем*, если множество его ненулевых элементов не пусто и замкнуто относительно деления. Множество $\mathbb{Z}$ уже не является полем, однако $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — поля, в них деление на ненулевой элемент возможно и не выводит за пределы множества.

Утверждение 107. (*Теорема о минимальности поля рациональных чисел.*) *Для любого числового поля F верно, что $\mathbb{Q} \subseteq F$.*

Доказательство. Из определения поля следует, что $0 \in F$ и $a \in F$ для некоторого ненулевого a. Вследствие замкнутости $F \setminus \{0\}$ по операции деления имеем $1 = a/a \in F$. Далее, используя замкнутость по сложению, получаем, что числа $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$ и т. д. принадлежат F, следовательно $\mathbb{N} \subseteq F$. Справедливо также, что $-1 = 0 - 1 \in F$, $-2 = 0 - 2 \in F$ и т. д. Таким образом, $\mathbb{Z} \subseteq F$. И, наконец, $\dfrac{p}{q}$ тоже принадлежит F для любых $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, поэтому $\mathbb{Q} \subseteq F$. □

Пример 108. Рассмотрим множество чисел вида $\alpha + \beta\sqrt{3}$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{Z}$. Оно является кольцом, но не является полем. Если же положить $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{Q}$, то получим поле: замкнутость относительно деления следует из равенств

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{3}}{\gamma + \delta\sqrt{3}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{3})(\gamma - \delta\sqrt{3})}{(\gamma + \delta\sqrt{3})(\gamma - \delta\sqrt{3})} = \frac{\alpha\gamma - 3\beta\delta}{\gamma^2 - 3\delta^2} + \frac{-\alpha\delta + \beta\gamma}{\gamma^2 - 3\delta^2}\sqrt{3}. \tag{35}$$

Следует отметить, что равенство $\gamma + \delta\sqrt{3} = 0$ возможно лишь в случае, когда $\gamma = 0$ и $\delta = 0$. Действительно, если $\gamma + \delta\sqrt{3} = 0$ и $\gamma = 0$, то $\delta = 0$; если же $\gamma + \delta\sqrt{3} = 0$ и $\delta \neq 0$, то $\sqrt{3} = -\dfrac{\gamma}{\delta}$, что невозможно, так как $\sqrt{3}$ — иррациональное число. Итак, $\gamma + \delta\sqrt{3} \neq 0$, аналогично, $\gamma - \delta\sqrt{3} \neq 0$, и поэтому домножение числителя и знаменателя дроби на $\gamma - \delta\sqrt{3}$ в (35) допустимо.

Выкладки в (35) есть ни что иное как *освобождение от иррациональности в знаменателе*, в идейном плане ничем не отличающееся от процедуры деления комплексных чисел с помощью домножения на сопряженное к знаменателю.

Ответы и решения

3. 1) $14 - 5i$; 2) $\dfrac{13}{3} - \dfrac{1}{2}i$.

5. 1) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; 2) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;
3) $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$.

14. 1) -64; 2) $2^n \cos^n \frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{n\varphi}{2} + i\sin\frac{n\varphi}{2}\right)$.

17. 1) $3+4i$; 2) $0,\ 1,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $2-\frac{3}{2}i$; 4) $0,\ \cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}$ $(k=0,1,\ldots,4)$; 5) $c\pm\sqrt{3}ci$ $(c\in\mathbb{R},\ c\leq 0)$.

23. 1) $\pm\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{3}{2}\right)$; 2) $2i,\ \pm\sqrt{3}-i$.

27. ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm i\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

30. 1) 1 при нечетном n и -1 при четном n; 2) если s нечетно, а n четно, то -1; иначе 1; 3) 0, если s не делится на n, и n, если s делится на n.

31. $-\frac{n}{1-\varepsilon}$, если $\varepsilon\neq 1$; $\frac{n(n+1)}{2}$, если $\varepsilon=1$.

32. 1) $i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}(k=1,2,\ldots,m-1)$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}(k=1,2,\ldots,m-1)$.

35. Указание: Воспользоваться тем, что так как m и n взаимно просты, то существуют u, v, такие, что $um+vn=1$.

43. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm i\frac{1}{2}$;

45. $\frac{2}{1-\varepsilon}$;

46. Указание: Разложить многочлен $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$ на линейные множители.

48. Пусть α и β — первообразные корни степеней m и n соответственно. Пусть $(\alpha\beta)^k=1$. Тогда $\alpha^{nk}=1$ и $\beta^{mk}=1$, следовательно, nk делится на m и mk делится на n, откуда k делится на m, n и на mn, поэтому $\alpha\beta$ есть первообразный корень степени mn. Если α принадлежит показателю $m_1<m$, а β — показателю $n_1\leq n$, то $\alpha\beta$ принадлежит показателю m_1n_1 и не может быть первообразным.

53. 1) $\Phi_{12}(x)=x^4-x^2+1$; 2) $\Phi_{15}(x)=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$; 3) $\Phi_{105}(x)=x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1$.

54. 1) $\Phi_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$; 2) $\Phi_{p^k}(x)=\frac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1}=x^{(p-1)p^{m-1}}+x^{(p-2)p^{m-1}}+\ldots+x^{p^{m-1}}+1$. Указание: Доказать, что все корни $x^{(p-1)}-1$ и только они не являются первообразными корнями p^m-й степени из 1.

56. Указание: Показать, что если n — нечетное, то для получения всех первообразных корней степени $2n$ достаточно все первообразные корни степени n умножить на -1.

57. Пусть $\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{nd}+i\sin\frac{2\pi k}{nd}$ — первообразный корень степени nd из 1, тогда НОД$(k,n)=1$. Разделим k на n, получим $k=qn+r$, где $0<r<n$. Отсюда $\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi q+\frac{2\pi r}{n}}{d}+i\sin\frac{2\pi q+\frac{2\pi r}{n}}{d}$, таким образом, ε_k — одно из значений корня d-й степени из $\eta_r=\cos\frac{2\pi r}{n}+i\sin\frac{2\pi r}{n}$. Но η_k — первообразный корень из 1, так как

из НОД$(k,n)=1$ следует НОД$(r,n)=1$.

Пусть теперь $\eta_r=\cos\dfrac{2\pi r}{n}+i\sin\dfrac{2\pi r}{n}$ — первообразный корень степени n из 1, тогда НОД$(r,n)=1$. Рассмотрим корень d-й степени из η_r: $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2\pi k+\dfrac{2\pi r}{n}}{d}+i\sin\dfrac{2\pi k+\dfrac{2\pi r}{n}}{d}=\cos\dfrac{2\pi(r+kn)}{nd}+i\sin\dfrac{2\pi(r+kn)}{nd}$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$. Очевидно, η_r является корнем степени nd из 1. Так как НОД$(r,n)=1$ и d — делитель n, то, легко доказать, что НОД$(r+kn,nd)=1$, поэтому этот корень — первообразный.

58. Указание: Воспользоваться задачей 57.

59. Так как $10000=2^4\cdot5^4$, $10=2\cdot5$, то $\Phi_{10000}(x)=\Phi_{10}(x^{1000})=x^{4000}-x^{3000}+x^{2000}-x^{1000}+1$.

60. Корнями $\Phi_n(x^p)$ являются все первообразные корни степени np и первообразные корни степени n.

61. Если $n=p^k$, где k — простое, то $\Phi_n(1)=p$; в остальных случаях $\Phi_n(1)=1$.

62. $\Phi_n(-1)=\begin{cases}-2, & \text{если } n=1;\\ 1, & \text{если } n>1 \text{ и нечетно;}\\ 0, & \text{если } n=2;\\ 2, & \text{если } n=2^k,\ k>1;\\ 0, & \text{если } n=2m,\ m \text{ нечетно, } m=p^k, \text{ где } p \text{ — простое;}\\ 1, & \text{если } n=2m,\ m \text{ нечетно, } m\neq p^k, \text{ где } p \text{ — простое;}\\ 1, & \text{если } n=2^k m,\ k>1.\end{cases}$

64. 1) $\pm(2-2i)$; 2) $\pm(2-i)$.

65. $\sin^2\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{1-\cos\varphi}{2}$; $\cos^2\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{1+\cos\varphi}{2}$.

67. 1) $x_1=2+i$, $x_2=1-3i$; 2) $x_1=1-i$, $x_2=\dfrac{4-2i}{5}$.

68. 1) $\pm\dfrac{\sqrt7}{2}\pm\frac{i}{2}$; 2) $\pm4\pm i$.

69. $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt q}{2}-\dfrac{p}{4}}\pm i\sqrt{\dfrac{\sqrt q}{2}+\dfrac{p}{4}}$.

76. Указание: Используя выражение для $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, разработать способ построения отрезка длины $\sqrt5$.

78. 1) $\pm\dfrac12\pm i\dfrac{\sqrt3}{2}$; 2) 1, 3, $2i$, $-2i$.

79. 1) $1\pm2i$, $-4\pm2i$; 2) $2\pm i\sqrt2$, $-2\pm i2\sqrt2$. Указание: Воспользоваться тем, что левые части представляются в виде суммы квадратов.

81. 1) $\cos^8x-28\cos^6x\sin^2x+70\cos^4x\sin^4x-28\cos^2x\sin^6x+\sin^8x$;

2) $7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x$.

82. $\dfrac{2(3\operatorname{tg} x - 10\operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg}^5 x)}{1 - 15\operatorname{tg}^2 x + 15\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^6 x}$.

85. $\dfrac{a^{k+2}\cos k\varphi - a^{k+1}\cos(k+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}$.

93. 1) $\dfrac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$; 2) $\dfrac{\sin 8x + 2\sin 6x - 2\sin 4x - 6\sin 2x}{128}$.

98. Указание: Подберите выражения, подобные (34), включающие 4 бинома.

99. Обозначим $z_n = 1 + \dfrac{a+bi}{n}$, $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$. Найдем отдельно пределы последовательностей $|z_n^n| = r_n^n$ и $\arg(z_n^n) = n\varphi_n$. Имеем $r_n = \sqrt{\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^2 + \dfrac{b}{n}^2}$, откуда, сводя ко второму замечательному пределу, получаем $r_n^n \to e^a$. Далее имеем $\sin\varphi_n = \dfrac{b}{nr_n} \to 0$, поэтому можно считать, что $\varphi_n \to 0$, откуда, используя первый замечательный предел, получаем $n\varphi_n = \dfrac{b\varphi_n}{r_n\sin\varphi_n} \to b$.

100. Правило сложения аргументов при умножении комплексных чисел превращается в правило сложения показателей при умножении степеней с одинаковыми основаниями. Формула Муавра превращается в правило возведения степени в степень.

101. 1) -1; 2) i; 3) $-i$.

102. 1) $2k\pi i$; 2) $\pi i + 2k\pi i$; 3) $\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi i}{4} + 2k\pi i$.

103. 1) $i\arccos x + 2k\pi i$; 2) $i\arcsin x + 2k\pi i$.

104. Имеем $z = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}$, откуда находим $e^{2i\varphi} = \dfrac{1+iz}{1-iz}$, поэтому $\varphi = \operatorname{Arctg} z = \dfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

Литература

1. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
2. *Фаддев Д. К.*, *Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.

Греческий алфавит

$A\ \alpha$	альфа	$N\ \nu$	ню
$B\ \beta$	бета	$\Xi\ \xi$	кси
$\Gamma\ \gamma$	гамма	$O\ o$	омикрон
$\Delta\ \delta$	дельта	$\Pi\ \pi$	пи
$E\ \varepsilon\ (\epsilon)$	эпсилон	$P\ \rho$	ро
$Z\ \zeta$	дзета	$\Sigma\ \sigma$	сигма
$H\ \eta$	эта	$T\ \tau$	тау
$\Theta\ \vartheta\ (\theta)$	тета	$Y\ \upsilon$	ипсилон
$I\ \iota$	йота	$\Phi\ \varphi\ (\phi)$	фи
$K\ \varkappa\ (\kappa)$	каппа	$X\ \chi$	хи
$\Lambda\ \lambda$	лямбда	$\Psi\ \psi$	пси
$M\ \mu$	мю	$\Omega\ \omega$	омега

Содержание

Николай Юрьевич Золотых

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебное пособие

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать Формат $60 \times 84\,1/16$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,25. Заказ Тираж 250 экз.

Отпечатано в типографии
Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18 – 0099 от 14.05.01