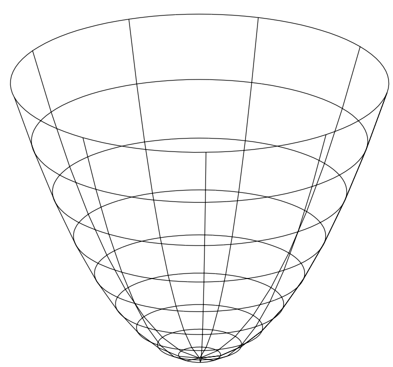
Н.Ю. Золотых, А.П. Ильичев, В.А. Таланов

БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

Н.Ю. Золотых
А.П. Ильичев
В.А. Таланов

БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Учебное пособие

*Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки
010500 «Прикладная математика и информатика»,
010502 «Прикладная информатика»,
010400 «Информационные технологии»*

Нижний Новгород
2005

ББК 22.151.5
З80
УДК 512.647.2

Золотых Н.Ю., Ильичев А.П., Таланов В.А. **Билинейные функции и их применение**: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2005. — 68 с.

Пособие содержит необходимый теоретический материал, примеры решения задач и упражнения по теме «Билинейные функции» курса «Геометрия и алгебра». Часть материала предназначена для самостоятельной работы студентов.

Для студентов, обучающихся по направлениям (специальностям) «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика», «Информационные технологии»

Рецензенты:

С.А. Белов, к.ф.-м.н., доц. каф. ЧиФА,
С.Н. Карпенко, к.т.-н., доц. каф. МО ЭВМ

УДК 512.647.2

Предисловие

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям (специальностям) «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика», «Информационные технологии» и содержит необходимый теоретический материал, примеры решения задач и упражнения по темам «Билинейные и полуторалинейные функции», «Евклидовы и унитарные пространства» курса «Геометрия и алгебра». Часть материала предназначена для самостоятельной работы студентов. Пособие представляет собой расширенное издание методической разработки [3].

Мы предполагаем, что читатель знаком с темами «Линейные векторные пространства», «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений».

В разделах $1, 2$ под термином «пространство» понимается конечномерное вещественное линейное пространство, в разделе 3 — конечномерное комплексное линейное пространство. В некоторых задачах мы иногда обращаемся к примерам бесконечномерных пространств.

Обозначения

$\mathbf{R}$	поле действительных чисел;
$\mathbf{C}$	поле комплексных чисел;
F^n	линейное арифметическое пространство столбцов высоты n над полем F;
$F^{n\times m}$	линейное пространство матриц размера $n \times m$ над полем F;
$\mathbf{R}(a,b)$	пространство вещественных непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$;
$\mathbf{V}_2$	линейное пространство радиус-векторов плоскости;
$\mathbf{V}_3$	линейное пространство радиус-векторов пространства;
$F[t]$	линейное пространство многочленов над полем F;
$F_n[t]$	линейное пространство многочленов над полем F степени не большей n;
A^{T}	матрица, транспонированная к A;
$\overline{A}$	матрица, полученная из A заменой всех элементов на сопряженные;
$\dim V$	размерность линейного пространства V;
$L(a_1,\ldots,a_k)$	линейная оболочка системы векторов $a_1,\ldots,a_k$;
$\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)$	диагональная матрица с элементами $d_1,\ldots,d_n$ на диагонали;
$\mathrm{diag}(D_1,\ldots,D_k)$	блочно-диагональная матрица с блоками $D_1,D_2,\ldots,D_k$ на диагонали;
E	единичная матрица (порядок ясен из контекста);
$\det A$	определитель матрицы A;
$\mathrm{tr}\, A$	след матрицы A (сумма диагональных элементов);
$[x]_{\mathbf{e}}$	столбец координат вектора x в базисе $\mathbf{e} = \{e_1,\ldots,e_n\}$: $$[x]_{\mathbf{e}} = (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}} \;\Leftrightarrow\; x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i;$$
$[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$	матрица перехода от базиса $\mathbf{e} = \{e_1,\ldots,e_n\}$ к базису $\mathbf{e}' = \{e'_1,\ldots,e'_n\}$: $$[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = (q_{ij}) \;\Leftrightarrow\; e'_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} e_i.$$

1. Вещественные билинейные функции

1.1. Определения

Рассмотрим линейное векторное пространство V над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$.

Определение 1. Отображение

$$f : V \times V \to \mathbf{R}, \tag{1}$$

ставящее каждой паре векторов x, y из V число $f(x, y)$ из $\mathbf{R}$, называется *билинейной функцией*, если для любых x, y, z из V и любых α, β из $\mathbf{R}$ выполнены соотношения

1) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$,
2) $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$,
3) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$,
4) $f(x, \beta y) = \beta f(x, y)$.

Обозначим множество всех билинейных функций, действующих в пространстве V, через $\mathcal{F}(V)$.

Пример 2. Легко проверить, что следующие функции являются билинейными:

1) $f(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ в $\mathbf{R}^n$;
2) скалярное произведение $f(x, y) = (x, y) = |x||y| \cos\varphi$ в пространствах $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$, где φ — угол между векторами x и y.

Упражнение 3.

1) Доказать, что $f(o, x) = 0$ для любой билинейной функции f и любого вектора $x \in V$.
2) Доказать, что для любых $x_1, \ldots x_m$, $y_1, \ldots y_l$ из V и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta, \ldots, \beta_l$ из $\mathbf{R}$ справедливо

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i,\ \sum_{j=1}^{l} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{l} \beta_j f(x_i, y_j).$$

3) Доказать, что для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ отображение $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, заданное формулой

$$f(x, y) = x^{\mathrm{T}} A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

является билинейной функций.

4) Доказать, что для любой функции $k(t) \in \mathbf{R}(a, b)$ отображение $f : \mathbf{R}(a, b) \times \mathbf{R}(a, b) \to \mathbf{R}$, заданное формулой

$$f(x, y) = \int\limits_a^b k(t) x(t) y(t) dt,$$

является билинейной функций.

5) Привести пример отображения $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, не являющегося билинейной функцией.

1.2. Матрица билинейной функции

1.2.1. Определение матрицы билинейной функции

Определение 4. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V. Матрицу

$$A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n},$$

в которой

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n),$$

назовем *матрицей билинейной функции* $f \in \mathcal{F}(V)$ *в базисе* $\mathbf{e}$ и обозначим $[f]_{\mathbf{e}} = A$.

Пример 5. Определим в $\mathbf{R}^3$ билинейную функцию f следующим образом: если $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, то $f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + z_3 y_3$. Найдем матрицу функции f в базисе $e_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$,

$e_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $e_3 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$. По определению имеем:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = f(e_1,e_1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 2,\\
&a_{22} = f(e_2,e_2) = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 2,\\
&a_{33} = f(e_3,e_3) = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2,\\
&a_{12} = f(e_1,e_2) = a_{21} = f(e_2,e_1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 1,\\
&a_{13} = f(e_1,e_3) = a_{31} = f(e_3,e_1) = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1,\\
&a_{23} = f(e_2,e_3) = a_{32} = f(e_3,e_2) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1,
\end{aligned}$$

откуда

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2.2. Матричное представление билинейной функции

Пусть

$$[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots x_n)^{\mathrm{T}}, \quad [y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \dots y_n)^{\mathrm{T}},$$

тогда

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_i, e_j),$$

или на матричном языке

$$f(x,y) = [x]_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} [f]_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}}. \tag{2}$$

Пример 6. Найдем в базисе $\mathbf{e} = \left\{1, t, t^2\right\}$ пространства $\mathbf{R}_2[t]$ матрицу билинейной функции

$$f(x,y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&a_{11} = \int\limits_0^1 1\cdot 1dt = 1, && a_{12} = a_{21} = \int\limits_0^1 1\cdot tdt = {}^1/_2,\\
&a_{22} = \int\limits_0^1 t\cdot tdt = {}^1/_3, && a_{13} = a_{31} = \int\limits_0^1 1\cdot t^2dt = {}^1/_3,\\
&a_{33} = \int\limits_0^1 t^2\cdot t^2dt = {}^1/_5, && a_{23} = a_{32} = \int\limits_0^1 t\cdot t^2dt = {}^1/_4,
\end{aligned}$$

откуда

$$[f]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & {}^1/_2 & {}^1/_3 \\ {}^1/_2 & {}^1/_3 & {}^1/_4 \\ {}^1/_3 & {}^1/_4 & {}^1/_5 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу $[f]_{\mathbf{e}}$, вычислим

$$\int\limits_0^1 x(t)y(t)dt,$$

где $x(t) = 1 + t + t^2$, $y(t) = 1 + t + t^2$. Так как $[x]_{\mathbf{e}} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $[y]_{\mathbf{e}} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, то

$$\int\limits_0^1 (1+t+t^2)(1+t+t^2)dt = (1,1,1) \begin{pmatrix} 1 & {}^1/_2 & {}^1/_3 \\ {}^1/_2 & {}^1/_3 & {}^1/_4 \\ {}^1/_3 & {}^1/_4 & {}^1/_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{37}{10}.$$

В данном примере обратим внимание на специальный вид матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$. Нетрудно видеть, что в случае произвольного n матрица рассматриваемой билинейной функции в базисе $\mathbf{e} = \{1, t, \ldots, t^n\}$ является *матрицей Гильберта*, т. е. матрицей вида

$$A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \quad \text{где} \quad a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Упражнение. В базисе $\mathbf{e} = \left\{1, t, t^2, t^3\right\}$ пространства $\mathbf{R}_3[t]$ найти матрицу билинейной функции

$$f(x,y) = \int\limits_{-1}^1 x(t)y(t)dt.$$

1.2.3. Представление билинейных функций билинейными формами

Утверждение 7. *Пусть* $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— произвольный базис пространства* V, $A = (a_{ij})$ *— произвольная матрица из* $\mathbf{R}^{n\times n}$. *Функция*

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j = [x]_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} A [y]_{\mathbf{e}} \tag{3}$$

является билинейной, причем $A = [f]_{\mathbf{e}}$.

Доказательство. Непосредственной проверкой свойств 1–4 убеждаемся, что функция f — билинейная. Кроме того, по формуле (3) получаем $f(e_i, e_j) = a_{ij}$, следовательно, $A = [f]_{\mathbf{e}}$. $\square$

Итак, формула (3) задает общий вид билинейной функции.

Заметим, что в стандартном базисе пространства $\mathbf{R}^n$ матрица билинейной функции, задаваемой формулой $f(x, y) = x^{\mathrm{T}} A y$ (см. упражнение 3 (3)), есть A. Таким образом, формула $f(x, y) = x^{\mathrm{T}} A y$ задает общий вид билинейной функции пространства $\mathbf{R}^n$.

Выражения вида

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

называются *билинейными формами.* Таким образом, в заданном базисе произвольная билинейная форма определяет билинейную функции и, наоборот, любая билинейная функция определяется некоторой билинейной формой.

Переформулировка результатов последних двух пунктов приводит нас к следующему.

Следствие 8. *Пусть* $\mathbf{e}$ — *базис пространства* V. *Отображение, ставящее в соответствие всякой билинейной функции* $f \in \mathcal{F}(V)$ *ее матрицу* $[f]_{\mathbf{e}}$, *является биекцией из* $\mathcal{F}(V)$ *в* $\mathbf{R}^{n \times n}$.

1.2.4. Связь матриц билинейной функции в разных базисах

Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\mathbf{e}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ — два базиса пространства V. Исследуем, как меняется матрица билинейной функции $f \in \mathcal{F}(V)$ при переходе от первого базиса ко второму. Для произвольных векторов x, y из V имеем

$$f(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} [f]_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}} = ([\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} [x]_{\mathbf{e}'})^{\mathrm{T}} [f]_{\mathbf{e}} [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}'} = [x]_{\mathbf{e}'}^{\mathrm{T}} ([\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} [f]_{\mathbf{e}} [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}) [y]_{\mathbf{e}'}.$$

Из утверждения 7

$$[f]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} [f]_{\mathbf{e}} [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}.$$

Так как $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ — матрица невырожденная, то $\operatorname{rank}[f]_{\mathbf{e}'} = \operatorname{rank}[f]_{\mathbf{e}}$. Таким образом, ранг матрицы билинейной функции не зависит от базиса и называется *рангом билинейной функции.* Обозначение: $\operatorname{rank} f$.

Определение 9. Матрицы A и B называются *конгруэнтными*, если существует такая невырожденная матрица Q, что $B = Q^{\mathrm{T}} A Q$.

Таким образом, матрицы конгруэнтны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одной и той же билинейной функции в разных базисах.

Упражнение 10. Докажите, что отношение конгруэнтности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

1.3. Синхронные элементарные преобразования строк и столбцов вещественной матрицы

Пусть E_{ij} — матрица, полученная из единичной перестановкой ее i-й и j-й строк; $E_i(\alpha)$ — матрица, полученная из единичной умножением i-й строки на число α; $E_{ij}(\alpha)$ — матрица, полученная из единичной прибавлением к i-й строке j-й, умноженной на α. Матрицы E_{ij}, $E_i(\alpha)$, $E_{ij}(\alpha)$ называются матрицами *элементарных преобразований*.

Напомним, что три типа элементарных преобразований со строками матрицы A можно осуществить домножая A *слева* на эти матрицы:

- умножение на E_{ij} осуществляет перестановку строк с номерами i и j,
- умножение на $E_i(\alpha)$ — умножение i-й строки на число α,
- умножение на $E_{ij}(\alpha)$ — прибавление к i-й строке j-й, умноженной на α.

Элементарные преобразования со столбцами матрицы A можно осуществить умножая A *справа* на те же матрицы:

- умножение на E_{ij} осуществляет перестановку столбцов с номерами i, j,
- умножение на $E_i(\alpha)$ — умножение i-го столбца на число α,
- умножение на $E_{ij}(\alpha)$ — прибавление к j-му столбцу i-го, умноженного на α.

Так как

$$E_{ij}^{\mathrm{T}} = E_{ij}, \quad E_i(\alpha)^{\mathrm{T}} = E_i(\alpha), \quad E_{ij}(\alpha)^{\mathrm{T}} = E_{ji}(\alpha),$$

то каждое из следующих пар *синхронных* элементарных преобразований переводит матрицу в конгруэнтную ей:

- перестановка строк с номерами i, j вместе с перестановкой столбцов с номерами i, j,
- умножение i-й строки на α, умножение i-го столбца на α,
- прибавление к i-й строке j-й, умноженной на α, прибавление к i-му столбцу j-го, умноженного на α.

1.4. Симметричные билинейные функции

Определение 11. Билинейную функцию $f \in \mathcal{F}(V)$ назовем *симметричной*, или *симметрической*, если для любых x, y из V

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Определение 12. Матрица $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ называется *симметричной*, или *симметрической*, если $A^{\mathrm{T}} = A$.

Упражнение 13. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

1. Билинейная функция f — симметричная.
2. В произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица $[f]_{\mathbf{e}}$ симметрична.
3. Существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица $[f]_{\mathbf{e}}$ симметрична.

Теорема 14 (Лагранж). *Любая симметричная матрица $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ конгруэнтна некоторой диагональной.*

Доказательство. Опишем алгоритм приведения матрицы $A = (a_{ij})$ к диагональному виду с помощью синхронных элементарных преобразований. Возможны два исчерпывающих случая.

I. $a_{11} \neq 0$. Выполним над матрицей A следующие синхронные элементарные преобразования: для каждого $i \in \{2, \ldots, n\}$ вычтем из i-й строки 1-ю строку, умноженную на ${}^{a_{i1}}/_{a_{11}}$, и вычтем из i-го столбца 1-й столбец, умноженный на ${}^{a_{1i}}/_{a_{11}}$. Очевидно, что после этих преобразований матрица A перейдет в конгруэнтную ей матрицу следующего вида

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & B^{(1)} \end{array}\right), \tag{4}$$

причем матрица $B^{(1)}$ симметрична.

II. $a_{11} = 0$. Возможны следующие варианты:

1. $\forall i \in \{2, 3 \ldots, n\}$ $a_{i1} = a_{1i} = 0$. Матрица A уже имеет вид (4). В данном случае никаких действий производить не нужно.
2. $\exists k \in \{2, 3 \ldots, n\}$ $a_{k1} = a_{1k} \neq 0$. Выберем такое k.
   1) Если $a_{kk} \neq 0$, то переставляем строки и столбцы с номерами 1 и k и тем самым приходим к случаю I.
   2) Если $a_{kk} = 0$, то прибавляем к 1-ой строке k-ю строку и 1-му столбцу k-й столбец, тем самым снова приходим к случаю I.

После выполнения описанных здесь действий матрица A перейдет в конгруэнтную ей матрицу вида (4). Далее достаточно те же действия провести с матрицей $B^{(1)}$ и т. д. □

Следствие 15. *Любая симметричная матрица $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ конгруэнтна некоторой диагональной матрице с диагональными элементами 0, ± 1.*

Доказательство. Можем считать, что матрица A уже имеет диагональный вид:

$$A = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n).$$

Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, если $d_i \neq 0$, поделим i-ю строчку и i-й столбец на $\sqrt{|d_i|}$. При этом исходная матрица переходит в конгруэнтную матрицу, обладающую требуемым свойствам. □

Определение 16. Базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется *каноническим* для симметричной билинейной функции f, если

$$f(e_i, e_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n;\ i \neq j),$$

иными словами, если матрица $[f]_{\mathbf{e}}$, называемая в данном случае *каноническим представлением* функции f, диагональна.

Заметим, что если базис $e_1, \dots, e_n$ — канонический для симметричной функции f и $[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $[y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$, то

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_j,$$

где $d_j = f(e_j, e_j)$ $(j = 1, \dots, n)$.

Следствие 17. *Для любой симметричной билинейной функции f существует канонический базис.*

Доказательство. Для матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ построим конгруэнтную ей диагональную матрицу B такую, что $B = Q^{\mathrm{T}}[f]_{\mathbf{e}}Q$ для некоторой невырожденной матрицы Q. Осталось рассмотреть Q как матрицу перехода к новому базису $\mathbf{e}'$, тогда $[f]_{\mathbf{e}'} = B$, следовательно, базис $\mathbf{e}'$ — канонический. □

Определение 18. Базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется *нормальным* для симметричной билинейной функции f, если

$$f(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \pm 1 \text{ или } 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

В данном случае матрица $[f]_{\mathbf{e}}$ называется *нормальным представлением* функции f.

Следствие 19. *Для любой симметричной билинейной функции f существует нормальный базис.*

Определение 20. Билинейная форма $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_j$ называется *канонической*. Если при этом коэффициенты d_j канонической билинейной формы равны ± 1 или 0, то она называется *нормальной*.

Итак, базис является каноническим (соответственно нормальным) для симметричной билинейной функции f тогда и только тогда, когда в этом базисе функция f представляется канонической (соответственно нормальной) билинейной формой.

Пример 21. Найдем нормальный базис $\mathbf{e}'$ для симметричной билинейной функции f, заданной в базисе $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ матрицей

$$[f]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 9 & 12 \\ 4 & 10 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

Припишем к $[f]_{\mathbf{e}}$ справа единичную матрицу. С полученной матрицей будем делать преобразования строк одновременно с преобразованиями столбцов.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 12 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Имеет место случай I: $a_{11} \neq 0$. Выполним соответствующие этому случаю преобразования.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Для подматрицы, расположенной в строках и столбцах с номерами $2, 3, 4$ имеет место случай II-2. Прибавим ко второй строке третью и такое же преобразование проделаем с соответствующими столбцами.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь для подматрицы, расположенной в строках со 2-й по 4-ю и в столбцах с теми же номерами, имеем случай I. Из третьей строки вычтем вторую, умноженную на ${}^1/_2$, из четвертой вычтем вторую и такие же преобразования проделаем с соответствующими столбцами.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{-1}/_{2} & -1 & {}^{-1}/_{2} & {}^{-1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{-1}/_{2} & -1 & {}^{-1}/_{2} & {}^{-1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Для подматрицы, расположенной в строках 3-й и 4-й и в столбцах с теми же номерами, имеем случай I. Из четвертой строки вычтем удвоенную третью и такое же преобразование проделаем с соответствующими столбцами.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{-1}/_{2} & -1 & {}^{-1}/_{2} & {}^{-1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{-1}/_{2} & 0 & {}^{-1}/_{2} & {}^{-1}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Приведение матрицы билинейной функции к каноническому виду закончено. Для приведения матрицы к нормальному виду поделим вторую строчку и второй столбец на $\sqrt{2}$, третью строчку и третий столбец умножим на $\sqrt{2}$, четвертую строчку и четвертый столбец поделим на 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & {}^{-5\sqrt{2}}/_{2} & {}^{\sqrt{2}}/_{2} & {}^{\sqrt{2}}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & {}^{-\sqrt{2}}/_{2} & {}^{-\sqrt{2}}/_{2} & {}^{\sqrt{2}}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & {}^{1}/_{2} \end{array}\right)$$

Матрицу перехода получаем, транспонируя матрицу, стоящую справа:

$$[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & {}^{-5\sqrt{2}}/_2 & {}^{-\sqrt{2}}/_2 & 1 \\ 0 & {}^{\sqrt{2}}/_2 & {}^{-\sqrt{2}}/_2 & 0 \\ 0 & {}^{\sqrt{2}}/_2 & {}^{\sqrt{2}}/_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & {}^{1}/_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получен нормальный базис

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1, \\ e'_2 &= -\,{}^{5\sqrt{2}}/_2\ e_1 + {}^{\sqrt{2}}/_2\ e_2 + {}^{\sqrt{2}}/_2\ e_3, \\ e'_3 &= -\,{}^{\sqrt{2}}/_2\ e_1 - {}^{\sqrt{2}}/_2\ e_2 + {}^{\sqrt{2}}/_2\ e_3, \\ e'_4 &= e_1 - e_3 + {}^{1}/_2\ e_4. \end{aligned}$$

По матрице билинейной функции в найденном нормальном базисе легко определяется соответствующая нормальная форма: $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$, где $[x]_{\mathbf{e}'} = (x'_1, \ldots, x'_4)^{\mathrm{T}}$. $[y]_{\mathbf{e}'} = (y'_1, \ldots, y'_4)^{\mathrm{T}}$. По матрице перехода к нормальному базису определяются формулы, связывающие координаты в старом и новом базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ соответственно:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 - {}^{5\sqrt{2}}/_2\ x'_2 - {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_3 + x'_4, \\ x_2 = {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_2 - {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_3 \\ x_3 = {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_2 + {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_3 \\ x_4 = -x'_3 + {}^{1}/_2\ x'_4. \end{cases}$$

Упражнение. Построить канонический вид и канонический базис для билинейной функции, действующей в пространстве $\mathbf{R}_2[t]$, из примера 6.

Упражнение. Построить канонический вид и канонический базис для билинейной функции, действующей в пространстве $\mathbf{R}_3[t]$, из примера б/н на стр. 8.

В разделе 1.6 будет описан другой алгоритм нахождения нормального базиса билинейной функции (метод выделения полного квадрата).

Определение 22. Минор Δ_k, расположенный в первых k строках и первых k столбцах матрицы A называется *угловым* минором порядка k.

Теорема 23 (Якоби). *Пусть матрица $A = [f]_{\mathbf{e}}$ симметричной билинейной функции ранга r имеет отличные от нуля угловые миноры $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ (при $r < n$ угловые миноры большего порядка, очевидно, равны 0). Тогда существует канонический базис $e'_1, \ldots, e'_n$, для которого*

$$f(e'_i, e'_i) = \begin{cases} \Delta_1, & \text{если } i = 1, \\ {}^{\Delta_i}/_{\Delta_{i-1}}, & \text{если } i = 2, \ldots, r, \\ 0, & \text{если } i = r+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем индукцией по количеству шагов, что в условиях теоремы алгоритм, приведенный в доказательстве теоремы Лагранжа, не изменяет угловых миноров матрицы A. Так как $a_{11} = \Delta_1 \neq 0$, то на первом шаге имеем случай I. Выполняемые при этом преобразования (строка вычитается из строк, расположенных ниже; столбец вычитается из столбцов, расположенных правее) не изменяют угловых миноров матрицы A. По окончании преобразований первого шага матрица A переходит в матрицу вида (4), в которой $\Delta_2 = a'_{11} b'_{11} \neq 0$, откуда $b'_{11} \neq 0$.

На k-м шаге ($k \leq r$) матрица приобретает вид $\operatorname{diag}(a'_{11}, \ldots, a'_{kk}, B_k)$. По предположению индукции угловые миноры этой матрицы совпадают с Δ_i. Так как $\Delta_{k+1} = a'_{11} \cdot \ldots \cdot a'_{kk} \cdot b'_{11} \neq 0$, то $b'_{11} \neq 0$ и снова имеем случай I. Выполняемые при этом преобразования не меняют угловых миноров.

После r шагов получаем матрицу $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$, в которой $\Delta_i = d_1 \cdot \ldots \cdot d_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), откуда получаем доказываемое.

□

Упражнение 24. Докажите, что для любой билинейной функции f ранга r найдется базис $\mathbf{e}$, такой, что все угловые миноры матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ порядка не большего r не равны 0.

Теорема 25 (Закон инерции). *Нормальное представление симметричной билинейной функции определено однозначно с точностью до перестановок диагональных элементов.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ — два нормальных базиса пространства V для функции f, такие, что

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{t} x_j y_j - \sum_{j=t+1}^{r} x_j y_j, \tag{5}$$

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{t'} x_j' y_j' - \sum_{j=t'+1}^{r'} x_j' y_j', \tag{6}$$

где

$$[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}, \quad [x]_{\mathbf{e}'} = (x_1', \ldots, x_n')^{\mathrm{T}},$$
$$[y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}, \quad [y]_{\mathbf{e}'} = (y_1', \ldots, y_n')^{\mathrm{T}}.$$

Имеем $\operatorname{rank} f = r = r'$. Предположим, что $t > t'$. Обозначим

$$L_1 = L(e_1, \ldots, e_t), \quad L_2 = L(e_{t'+1}, \ldots, e_n).$$

Имеем

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \underbrace{\dim L_1}_{=t} + \underbrace{\dim L_2}_{=n-t'} - \underbrace{\dim(L_1 + L_2)}_{\leq n} \geq t - t' > 0,$$

поэтому найдется $x \neq 0$ такой, что $x \in L_1 \cap L_2$. Так как $x \in L_1$, то $x_j = 0$ $(j = t+1, \ldots, n)$, поэтому из (5) получаем

$$f(x, x) = \sum_{j=1}^{t} x_j x_j = \sum_{j=1}^{t} x_j^2 > 0.$$

Однако, так как $x \in L_2$, то $x_j' = 0$ $(j = 1, \ldots, t')$, поэтому из (6) получаем

$$f(x, x) = -\sum_{j=t'+1}^{r} x_j' x_j' = -\sum_{j=t'+1}^{r} {x_j'}^2 \leq 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Определение 26. *Положительным индексом* $s_+(f)$ (соответственно *отрицательным индексом* $s_-(f)$) симметричной билинейной функции f называется число положительных (соответственно отрицательных) диагональных элементов в каноническом виде. *Сигнатурой* функции называется величина $\sigma(f) = s_+(f) - s_-(f)$.

Замечание 27. Из теоремы инерции следует, что положительный и отрицательный индексы инерции, и, следовательно, сигнатура, есть величины, не зависящие от базиса.

1.5. Знакоопределенные симметричные функции

Определение 28. Пусть f — симметричная билинейная функция.

Функция f называется *положительно определенной* (обозначение $f > 0$), если для любого $x \neq 0$ выполнено $f(x, x) > 0$.

Функция f называется *отрицательно определенной* (обозначение $f < 0$), если для любого $x \neq 0$ выполнено $f(x, x) < 0$.

Функция f называется *неотрицательно определенной* (обозначение $f \geq 0$), если для любого x выполнено $f(x, x) \geq 0$.

Функция f называется *неположительно определенной* (обозначение $f \leq 0$), если для любого x выполнено $f(x, x) \leq 0$.

В остальных случаях f называется *знакопеременной*.

Упражнение 29. Пусть $f \in \mathcal{F}(V)$, $\dim V = n$. Докажите следующие утверждения:

$$\begin{array}{ll} f > 0 \ \Leftrightarrow \ s_+(f) = n, & \quad f \geq 0 \ \Leftrightarrow \ s_-(f) = 0, \\ f < 0 \ \Leftrightarrow \ s_-(f) = n, & \quad f \leq 0 \ \Leftrightarrow \ s_+(f) = 0. \end{array}$$

Упражнение 30. Докажите, что для положительной определенности симметричной билинейной функции необходима, но не достаточна положительность всех диагональных элементов ее матрицы в любом базисе.

Теорема 31 (Критерий Сильвестра). *Следующие три условия эквивалентны:*

1) *билинейная функция f положительно определена;*

2) *для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ все угловые миноры матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ положительны;*

3) *существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором все угловые миноры матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ положительны.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $f > 0$, тогда в любом базисе диагональные элементы матрицы этой функции положительны. Следовательно, во время приведения алгоритмом, описанным при доказательстве теоремы Лагранжа, матрицы к каноническому виду никогда не возникает случая II, поэтому угловые миноры Δ_i не изменяются. Однако по предыдущему утверждению $\Delta_i = d_1 \cdot \ldots \cdot d_i > 0$.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) тривиальна, а импликация 3) $\Rightarrow$ 1) немедленно следует из теоремы Якоби. $\square$

Определение 32. Пусть A — симметричная матрица, а $\mathbf{e}$ — некоторый базис пространства. По матрице A определим билинейную функцию f, такую, что $A = [f]_{\mathbf{e}}$. Матрица A называется положительно определенной, если функция f положительно определена. Аналогично вводятся определения отрицательно, неположительно и неотрицательно определенной симметричной матрицы, а также ее положительного и отрицательного индексов и сигнатуры. Легко видеть, что эти определения не зависят от выбранного базиса $\mathbf{e}$.

Упражнение. Говорят, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ имеет *диагональное преобладание*, если $a_{ii} > |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}|$. Докажите, что симметричная матрица с диагональным преобладанием положительно определена. Указание: Воспользоваться неравенством $2|a_{ij}| \cdot |x_i| \cdot |x_j| \le |a_{ij}| \cdot x_i^2 + |a_{ij}| \cdot x_j^2$.

Упражнение 33. Докажите, что для того, чтобы $f < 0$, необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^i \Delta_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Упражнение 34. Докажите, что для того, чтобы $f \ge 0$, необходимо, но не достаточно, чтобы $\Delta_i \ge 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Аналогично, для $f \le 0$ необходимо, но не достаточно, чтобы $(-1)^i \Delta_i \ge 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Упражнение 35. Минор матрицы A называется *диагональным* (или *главным*), если в нем с каждой строкой участвует столбец матрицы A с таким же номером. Докажите, что для того, чтобы $f \ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ были неотрицательны. Докажите, что для того, чтобы $f \le 0$, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ были неотрицательны. а все главные миноры нечетного порядка — неположительны.

Упражнение. Доказать, что билинейные функции из упражнений 5, 6 являются положительно определенными.

Упражнение. Доказать, что в линейной пространстве $\mathbf{R}^{n\times n}$ отображение $f(X,Y)=\operatorname{tr}(X^{\mathrm T}Y)$ является симметричной положительно определенной билинейной функцией.

Упражнение. Доказать, что в линейной пространстве $\mathbf{R}^{n\times n}$ отображение $f(X,Y)=\operatorname{tr}X^2$ является симметричной билинейной функцией. Найти ее ранг и сигнатуру. Ответ: n^2 и n.

Упражнение 36 (Разложение Холецкого). Пусть $A=(a_{ij})$ — симметричная положительно определенная матрица. Доказать, что найдется единственная нижнетреугольная матрица L с положительными диагональными элементами, такая, что

$$A=LL^{\mathrm T}. \tag{7}$$

Разложение (7) называется *разложением Холецкого*, или *треугольным разложением* матрицы A.

Пусть все угловые миноры матрицы A не равны нулю. Доказать, что тогда найдется единственная нижнетреугольная матрица L с единичными диагональными элементами и диагональная матрица D, такие, что

$$A=LDL^{\mathrm T}. \tag{8}$$

Разложение (8) называется $LDL^{\mathrm T}$*-разложением* матрицы A.

Упражнение. Показать, что элементы матрицы $L=(\ell_{ij})$ в разложении (7) можно вычислить последовательно в порядке

$$\ell_{11},\ \ell_{21},\ \ldots,\ \ell_{n1},\ \ell_{22},\ \ell_{32},\ \ldots,\ \ell_{n2},\ \ell_{33},\ \ldots,\ \ell_{nn}$$

по формулам:

$$\ell_{jj}=\sqrt{a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}\ell_{jk}^2},\qquad \ell_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\ell_{ik}\ell_{jk}}{\ell_{jj}}\quad (i>j).$$

Далее показать, что

$$\max_{i,\ j}|\ell_{ij}|\le\max_i\sqrt{a_{ii}}.$$

Таким образом, при вычислении разложения Холецкого непроисходит (в указанном смысле) роста элеметов.

Упражнение (Метод квадратных корней). Пусть A — положительно определенная симметричная матрица из $\mathbf{R}^{n\times n}$, а b — столбец высоты n. Если разложение Холецкого $A = LL^{\mathrm{T}}$ известно, то для решения системы $Ax = b$ достаточно решить последовательно две треугольные системы $Ly = b$ и $L^{\mathrm{T}}x = y$. На этой основе предложить метод решения систем линейных уравнений с положительно определенной матрицей (*метод квадратных корней*). Сравнить суммарное число ариметических операций в этом методе с числом арифметических операций, используемых в методе Гаусса. Ответ: Метод Гаусса требует $(2/3)n^3 + O(n^2)$ арифметических операций, в то время как метод квадратных корней — $(1/3)n^3 + O(n^2)$ арифметических операций. Таким образом, метод квадратных корней примерно вдвое экономичнее метода Гаусса.

1.6. Квадратичные вещественные функции

Определение 37. Пусть $f \in \mathcal{F}(V)$, тогда функция $g : V \to \mathbf{R}$, определяемая равенством $g(x) = f(x, x)$, называется *квадратичной*.

Пример 38. Функция $g(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ в $\mathbf{R}^2$ является квадратичной. Действительно, функция $f(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ — билинейная и $g(x) = f(x, x)$. Заметим, что по квадратичной функции соответствующая ей билинейная восстанавливается неоднозначно. Например, функции g соответствует также билинейная функция $f_1(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 2x_2y_2$ и бесконечно много других.

Утверждение 39. *Пусть g — квадратичная функция, тогда билинейная симметричная функция f, для которой $g(x) = f(x, x)$, существует и единственна.*

Доказательство. Предположим, что билинейная функция f с указанными в утверждении свойствами существует. Докажем ее единственность. Имеем

$$g(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y),$$
$$g(x - y) = f(x - y, x - y) = f(x, x) - 2f(x, y) + f(y, y).$$

Вычитая из первого равенства второе, после очевидных преобразований получаем

$$f(x, y) = \frac{1}{4}\left(g(x + y) - g(x - y)\right). \tag{9}$$

Таким образом, f по g восстанавливается однозначно.

Существование. Легко проверить, что f, определяемая формулой (9), симметрична и $g(x) = f(x,x)$. $\square$

В силу доказанного утверждения на квадратичные функции переносятся основные определения и теоремы теории симметричных билинейных функций. Так, *матрицей квадратичной функции* называется матрица соответствующей билинейной симметрической функции. Вводятся понятия *канонического* и *нормального* базиса, *знакопостоянной* и *знакопеременной* квадратичной функции, переносятся теорема Якоби, закон инерции и критерий Сильвестра.

Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — произвольный базис пространства V. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $A^{\mathrm{T}} = A$, то, легко проверить, что

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = [x]_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} A [x]_{\mathbf{e}} \tag{10}$$

является квадратичной функцией, причем $A = [f]_{\mathbf{e}}$. Таким образом, формула (10) задает общий вид квадратичной функции. Выражения вида $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ называются *квадратичными формами*. Квадратичная форма $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j^2$ называется *канонической*. Если коэффициенты d_j канонической квадратичной формы равны ± 1 или 0, то она называется *нормальной*.

Для нахождения канонического базиса квадратичной функции мы можем воспользоваться алгоритмом, приведенным в доказательстве теоремы Лагранжа. Можно также воспользоваться другим методом, называемым *методом выделения полного квадрата*. Объясним его на двух примерах.

Пример 40. Рассмотрим квадратичную форму

$$g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

которую преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} g(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \\ &= {x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2. \end{aligned}$$

где
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Заметим, что матрица Q невырождена, поэтому можно положить $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = Q^{-1}$. Базис $\mathbf{e}'$ — нормальный.

Пример 41. Форма $g(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ не содержит ни одного квадрата x_j^2, поэтому сначала сделаем замену
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1' + x_2', \\ x_2 = x_1' - x_2', \\ x_3 = x_3'. \end{array} \right. \tag{11}$$
Тогда получим $g(x) = {x_1'}^2 - {x_2'}^2 + 2x_1'x_3'$ Теперь можно выделить полный квадрат: $g(x) = (x_1' + x_3')^2 - {x_2'}^2 - {x_3'}^2 = {x_1''}^2 - {x_2''}^2 - {x_3''}^2$, где
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'' = x_1' + x_3', \\ x_2'' = x_2', \\ x_3'' = x_3'. \end{array} \right. \tag{12}$$
Объединяя (11) и (12), получаем следующие формулы, связывающие старые x_j и новые x_j'' координаты:
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1'' + x_2'' - x_3'', \\ x_2 = x_1'' - x_2'' - x_3'', \\ x_3 = x_3'', \end{array} \right.$$
по которым легко определяется матрица перехода.

Очевидно, метод выделения полного квадрата можно применять также для нахождения канонического (или нормального) базиса *билинейных* функций.

2. Евклидовы пространства

2.1. Основные определения

Определение 42. Линейное вещественное пространство V называется *евклидовым*, если задано отображение $V \times V \to \mathbf{R}$, ставящее каждой паре векторов $x, y \in V$ число $(x, y) \in \mathbf{R}$, называемое *скалярным произведением*, обладающее следующими свойствами:

1. $(x, y) = (y, x)$,
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4. $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$

для любых x, y, z из V и α из $\mathbf{R}$. Свойства 1)–4) называются *аксиомами евклидова пространства.*

Утверждение 43. *Скалярное произведение в евклидовом пространстве есть положительно определенная симметричная билинейная функция. И наоборот, любую положительно определенную симметричную функцию можно выбрать в качестве скалярного произведения.*

Доказательство. Аксиомы 2, 3 означают линейность по первому аргументу. Далее,

$$
\begin{aligned}
&(x, y + z) \\
&\quad = (y + z, x) && \text{(по аксиоме 1)} \\
&\quad = (y, x) + (z, x) && \text{(по аксиоме 2)} \\
&\quad = (x, y) + (x, z) && \text{(по аксиоме 1)}
\end{aligned}
$$

для любых x, y, z из V. Аналогично можно показать, что

$$(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$$

для любых x, y, из V и α из $\mathbf{R}$. Итак скалярное произведение (x, y) является билинейной функцией. По аксиоме 1 эта функция симметричная и по аксиоме 4 — положительно определенная.

Вторая часть утверждения очевидна. □

Пример 44. Следующие билинейные функции являются симметричными положительно определенными и, следовательно, их можно выбрать в качестве скалярного произведения:

1. скалярное произведение $(x, y) = |x||y|\cos\varphi$ в пространствах $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$;

2. в пространстве $\mathbf{R}^n$:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad \text{где} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

3. в пространстве $\mathbf{R}(a, b)$ непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Приведенные функции будем называть *стандартными скалярными произведениями* в соответствующих пространствах.

2.2. Матрица Грама

Определение 45. *Матрицей Грама*, построенной по системе векторов $a_1, \ldots, a_k$ называется матрица

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) \end{pmatrix}.$$

Пример 46. Пусть $A \in \mathbf{R}^{n \times k}$. Рассмотрим столбцы $a_1, \ldots, a_k$ матрицы A как систему векторов арифметического пространства $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Легко видеть, что

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = A^{\mathrm{T}} A.$$

Если $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства, то $\Gamma_{\mathbf{e}} = \Gamma(e_1, \ldots, e_n)$ — матрица билинейной функции $f(x, y) = (x, y)$, записанная в этом базисе. Поэтому справедливо

Утверждение 47. (Выражение скалярного произведения через координаты векторов.)

$$(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} \Gamma_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}}.$$

Утверждение 48 (Свойство определителя Грама).

1) *Если система векторов* $a_1, \ldots, a_k$ *линейно независима, то*

$$\det \Gamma(a_1, \ldots, a_k) > 0.$$

2) *Если система векторов* $a_1, \ldots, a_k$ *линейно зависима, то*

$$\det \Gamma(a_1, \ldots, a_k) = 0.$$

Доказательство. 1) Дополним линейно независимую систему векторов $a_1, \ldots, a_k$ до базиса пространства V. По критерию Сильвестра k-й угловой минор $\Delta_k = \det \Gamma(a_1, \ldots, a_k)$ матрицы билинейной функции $f(x, y) = (x, y)$ в этом базисе положителен.

2) Предположим теперь, что система $a_1, \ldots, a_k$ линейно зависима, тогда найдутся вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j a_j = 0. \tag{13}$$

Домножая скалярно справа обе части равенства (13) на a_i $(i = 1, \ldots, k)$, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_1(a_2, a_1) + \ldots + \alpha_1(a_k, a_1) = 0, \\ \alpha_2(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) + \ldots + \alpha_2(a_k, a_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k(a_1, a_k) + \alpha_k(a_2, a_k) + \ldots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0. \end{array} \right. \tag{14}$$

Рассмотрим равенства (14) как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Система имеет ненулевое решение, следовательно, ее определитель $\det \Gamma(a_1, \ldots, a_k)$ равен нулю. $\square$

Определение 49. Величина $|x| = \sqrt{(x, x)}$ называется *длиной* или *нормой* вектора x.

Часто для норм векторов используют обозначение $\|x\|$. Из 4-ой аксиомы евклидова пространства следует, что $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Утверждение 50 (Неравенство Коши–Буняковского). *Для любых векторов a, b евклидова пространства V выполнено неравенство*

$$|(a,b)| \leq |a| \cdot |b|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

Доказательство. По свойству определителя Грама (утверждение 48) для системы векторов a, b

$$0 \leq \Gamma(a,b) = \begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix} = (a,a)(b,b) - (a,b)(b,a) = |a|^2|b|^2 - (a,b)^2,$$

откуда $(a,b)^2 \leq |a|^2|b|^2$. Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, приходим к неравенству $|(a,b)| \leq |a| \cdot |b|$, причем равенство получаем тогда и только тогда, когда a, b линейно зависимы. $\square$

Пример 51. Рассмотрим неравенство Коши–Буняковского в пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}(a,b)$, с введенными в них стандартными скалярными произведениями:

1. $|(a,b)| \leq |a||b|$ в пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ следует также из определения $(a,b) = |a||b|\cos\varphi$;

2. в пространстве $\mathbf{R}^n$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2;$$

3. в пространстве $\mathbf{R}(a,b)$:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b g^2(t)\,dt.$$

Неравенство Коши-Буняковского позволяет ввести следующее

Определение 52. Углом между векторами a, b называется вещественное число
$$\varphi = \arccos \frac{(a,b)}{|a||b|}.$$
Данное определение согласуется с понятием угла в геометрических пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$.

Утверждение 53 (Неравенство треугольника). *Для любых векторов a, b евклидова пространства V выполнено неравенство*
$$|a+b| \le |a| + |b|. \tag{15}$$

Доказательство. Требуемое неравенство следует из цепочки соотношений:
$$\begin{aligned}
&|a+b|^2 \\
&\quad = (a+b, a+b) \\
&\quad = (a,a) + 2(a,b) + (b,b) \\
&\quad \le |a|^2 + 2|(a,b)| + |b|^2 \qquad \text{так как } (a,b) \le |(a,b)| \\
&\quad \le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \qquad \text{так как } |(a,b)| \le |a||b| \\
&\quad = (|a| + |b|)^2.
\end{aligned}$$
□

Упражнение 54. Дайте геометрическую интерпретацию неравенству треугольника в пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$.

Упражнение 55. Докажите, что (15) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $a = \alpha b$ или $b = \alpha a$ для некоторого $\alpha \ge 0$ (в геометрических пространствах $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$ векторы a и b коллинеарны и сонаправлены).

Упражнение. Докажите следующие свойства нормы вектора. Пусть a, b — произвольные векторы евклидова пространства V, α — произвольное вещественное число, тогда

1) $|\alpha a| = |\alpha| \cdot |a|$;
2) $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$;
1) $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ (*равенство параллелограмма* — дайте геометрическую интрпретацию).

2.3. Ортогональность

Определение 56. Векторы a, b называются *ортогональными* (в пространствах $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$ — *перпендикулярными*), если $(a, b) = 0$. Обозначение: $a \perp b$.

Определение 57. Система векторов $a_1, \ldots, a_k$ называется *ортогональной*, если $a_i \perp a_j$ при $i \neq j$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k$.

Система векторов $a_1, \ldots, a_k$ называется *ортонормированной*, если

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \quad (\text{т. е. } a_i \perp a_j), \\ 1 & \text{при } i = j \quad (\text{т. е. } |a_i| = 1). \end{cases}$$

Утверждение 58 (Теорема Пифагора). *Если $a \perp b$, то*

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

Доказательство. Требуемое равенство следует из соотношений:

$$|a + b|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + \underbrace{(a, b)}_{0} + \underbrace{(b, a)}_{0} + (b, b) = |a|^2 + |b|^2.$$

□

Упражнение 59 (Теорема, обратная к теореме Пифагора). Докажите, что если $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2$, то $a \perp b$.

Упражнение 60 (Обобщение теоремы Пифагора). Докажите, что если система $a_1, \ldots, a_k$ ортогональна, то

$$|a_1 + \ldots + a_k|^2 = |a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2.$$

Утверждение 61. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Ортонормированная система линейно независима.*

Доказательство. Очевидно, матрица Грама ортогональной системы ненулевых векторов — диагональная с ненулевыми диагональными элементами. Матрица Грама ортонормированной системы единичная. По свойству определителя Грама (утверждение 48) в обоих случаях системы линейно независимы. □

2.4. Ортогональный и ортонормированный базисы

Определение 62. Базис $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ называется *ортогональным* (*ортонормированным*), если он представляет собой ортогональную (соответственно ортонормированную) систему.

Замечание 63. В ортогональном базисе матрица Грама диагональная:

$$\Gamma_{\mathbf{e}} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n),$$

поэтому, если $[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $[y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$, то

$$(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} \Gamma_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}} = d_1 x_1 y_1 + \ldots + d_n x_n y_n.$$

В ортонормированном базисе матрица Грама единичная, поэтому

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Из теоремы Лагранжа получаем, что в любом евклидовом пространстве существует ортогональный и, следовательно, ортонормированный базисы. Ниже мы опишем алгоритм нахождения ортонормированного базиса любого подпространства евклидова пространства.

Утверждение 64. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональный базис и $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, тогда*

$$\alpha_j = \frac{(a, e_j)}{(e_j, e_j)}. \tag{16}$$

Доказательство. Домножая скалярно справа равенство

$$a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

на e_j $(j = 1, \ldots, n)$, получаем $(a, e_j) = \alpha_1(e_1, e_j) + \ldots + \alpha_n(e_n, e_j)$. Так как базис ортогональный, то в правой части этого равенства останется только одно ненулевое слагаемое (e_j, e_j), откуда и следуют доказываемые формулы. $\square$

Аналогично доказывается

Утверждение 65. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис и $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, тогда $\alpha_j = (a, e_j)$.*

Пример 66. В пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ со стандартным скалярным произведением j-ая координата вектора в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ ($n = 2, 3$ соответственно) равна $(x, e_j) = |x| \cos \varphi$, где φ — угол между вектором x и e_j.

Пример 67. В трехмерном линейном вещественном пространстве V определим скалярное произведение так, чтобы система векторов $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, заданных своими координатными столбцами в базисе $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$[a_1]_\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [a_2]_\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [a_3]_\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

стала ортонормированной.

Так как система $\mathbf{a}$ линейно независима, то она образует базис трехмерного пространства V. Скалярное произведение однозначно определяется матрицей Грама в некотором базисе. Например, в базисе $\mathbf{a}$ матрица Грама $\Gamma_\mathbf{a}$ — это единичная матрица. Таким образом, решение задачи существует и единственно. Чтобы найти матрицу Грама в исходном базисе $\mathbf{e}$ воспользуемся соотношением $\Gamma_\mathbf{a} = A^\mathrm{T} \Gamma_\mathbf{e} A$, где

$$A = [\mathbf{a}]_\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\Gamma_\mathbf{e} = (A \cdot A^\mathrm{T})^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение. Докажите, что любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства можно дополнить до ортогонального базиса.

Пример. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^4$ введено стандартное скалярное произведение. Очевидно, что векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1)^\mathrm{T}$, $a_2 =$

$(1, -1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$ ортогональны. Дополним систему a_1, a_2 до ортогонального базиса пространства $\mathbf{R}^4$. Вектор $a_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ определим из условий $(a_1, a_3) = 0$, $(a_2, a_3) = 0$. Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве a_3 возьмем любое ненулевое частное решение этой системы, например, $a_3 = (1, 1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$. Вектор $a_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ определим из условий $(a_1, a_4) = 0$, $(a_2, a_4) = 0$, $(a_3, a_4) = 0$. Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве a_4 возьмем любое ненулевое частное решение этой системы, например, $a_4 = (1, -1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. Построенная система a_1, a_2, a_3, a_4 образует ортогональный базис пространства $\mathbf{R}^4$.

Упражнение. Систему векторов

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$$

дополнить до ортонормированного базиса пространства $\mathbf{R}^3$. Найти все способы, какими это можно сделать. Скалярное произведение стандартное.

2.5. Изоморфизм евклидовых пространств

Пусть V, V' — два линейных пространства над полем F. Напомним, что *изоморфизмом линейных пространств* называется взаимно однозначное отображение $\varphi : V \to V'$, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in V$ вектор $\varphi x \in V'$, такое, что для любых векторов x, y из V и любого скаляра α из F выполняются равенства

1. $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$,
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$.

Линейные пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : V \to V'$.

Упражнение 68. Доказать, что отношение изоморфности линейных пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Упражнение 69. Доказать, что линейные пространства V и V', заданные над произвольным полем F, изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim V'$.

Определение 70. Пусть V и V' — евклидовы пространства. Взаимно однозначное отображение $\varphi : V \to V'$ называется *изоморфизмом евклидовых пространств*, если для любых векторов x, y из V и любого вещественного числа α выполняются равенства

1. $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$,
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$,
3. $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$.

Евклидовы пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : V \to V'$.

Упражнение 71. Доказать, что отношение изоморфности евклидовых пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема 72. *Евклидовы пространства V и V' изоморфны тогда и только тогда, когда* $\dim V = \dim V'$.

Доказательство. Необходимость следует из свойств отношения изоморфности линейных пространств. Для доказательства достаточности покажем, что произвольное евклидово пространство V изоморфно арифметическому пространству $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, далее необходимо воспользоваться транзитивностью отношения изоморфности. Выберем в V произвольный ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ и определим изоморфизм φ по правилу: $\varphi x = [x]_{\mathbf{e}}$. Тогда

$$(\varphi x, \varphi y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = (x, y).$$

Таким образом, свойство 3) из определения изоморфизма евклидовых пространств также выполнено. $\square$

2.6. Ортогональные матрицы

Определение 73. Матрица $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ называется *ортогональной*, если $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$, т. е. $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = E$.

Упражнение 74. Докажите, что строки (столбцы) ортогональной матрицы $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, рассматриваемые как векторы арифметического пространства $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, образуют ортонормированную систему.

Упражнение. Докажите, что определитель ортогональной матрицы по модулю равен 1.

Утверждение 75. *Пусть* $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *— ортонормированный базис евклидова пространства* V*. Для того чтобы система векторов* $\mathbf{e}' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ *также образовывала ортонормированный базис необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода* $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ *была бы ортогональной.*

Доказательство. Так как базис $\mathbf{e}$ — ортонормированный, то $(e_i', e_j') = [e_i']_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}[e_j']_{\mathbf{e}}$. Поэтому базис $\mathbf{e}'$ — ортонормированный тогда и только тогда, когда

$$[e_i']_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}[e_j']_{\mathbf{e}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \tag{17}$$

Условие (17) эквивалентно ортогональности матрицы $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$. $\square$

2.7. Ортогональные суммы и ортогональные дополнения

Определение 76. Множества S и T векторов евклидова пространства V называются *ортогональными*, если $(a, b) = 0$ для любых $a \in S$, $b \in T$. Обозначение: $S \perp T$.

Условие $\{a\} \perp T$ будем записывать $a \perp T$.

Утверждение 77. *Для того, чтобы* $a \perp L(a_1, \ldots, a_k)$*, необходимо и достаточно выполнения условий* $a \perp a_i$ *для любого* $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть x — произвольный вектор из $L(a_1, \ldots, a_k)$. Рассмотрим его разложение по векторам $a_1, \ldots, a_k$:

$$x = x_1 a_1 + \ldots + x_k a_k,$$

откуда получаем

$$(x, a) = x_1 \underbrace{(a_1, a)}_{0} + \ldots + x_k \underbrace{(a_k, a)}_{0} = 0,$$

следовательно, $x \perp a$. □

Определение 78. Сумму попарно ортогональных подпространств W_i $(i = 1, \ldots, k)$ назовем *ортогональной* $(k \geq 2)$.

Напомним, что сумма подпространств $W_1 + W_2 + \ldots + W_k$ называется *прямой* суммой, если для любого вектора $a \in V$ векторы $a_1, \ldots, a_k$, такие, что

$$a = a_1 + \ldots + a_k, \tag{18}$$

$a_i \in W_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, определяются единственным образом.

Утверждение 79. *Ортогональная сумма подпространств является прямой суммой.*

Доказательство. Единственность разложения (18) достаточно доказать для нулевого вектора. Пусть

$$0 = a_1 + \ldots + a_k, \tag{19}$$

$a_i \in W_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, $W_i \perp W_j$ $(i \neq j)$. Последовательно скалярно домножая равенство (19) на векторы a_i $(i = 1, \ldots, k)$ получаем $0 = (a_i, a_i)$, откуда $a_i = 0$. Таким образом, векторы a_i $(i = 1, \ldots, k)$ в (19) определяются единственным образом, следовательно, рассматриваемая сумма — прямая. □

Определение 80. *Ортогональным дополнением* подпространства $W \subseteq V$ называется множество $W^{\perp}$ всех векторов из V, ортогональных с каждым вектором из W:

$$W^{\perp} = \{x \in V : \ x \perp W\}.$$

Теорема 81. *Для любого подпространства W евклидова пространства V ортогональное дополнение $W^{\perp}$ является подпространством и $V = W + W^{\perp}$.*

Доказательство. Если $W = \{o\}$, то утверждение очевидно. Предположим теперь, что подпространство W ненулевое. Выберем в V произвольный ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$, а в W произвольный базис $a_1, \dots, a_k$, тогда условия ортогональности произвольного вектора $x \in V$ подпространству W примут вид $(a_i, x) = 0$ $(i = 1, \dots, k)$. Записанные в координатной форме эти условия представляют собой систему линейных однородных уравнений. Матрица этой системы составлена из координат базисных векторов $a_1, \dots, a_k$ и поэтому имеет ранг k, отсюда $\dim W^{\perp} = n - k$, и, так как сумма $W + W^{\perp}$ — прямая, то $\dim(W + W^{\perp}) = \dim W + \dim W^{\perp} = k + (n - k) = n$, откуда $W + W^{\perp} = V$. □

Следствие 82. *Пусть W — подпространство евклидова пространства V, тогда* $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.

Следствие 83. *Пусть W — произвольное подпространство евклидова пространства V. Любой вектор a из V однозначно можно представить в виде*

$$a = b + c, \quad \text{где} \quad b \in W, \quad c \in W^{\perp}. \tag{20}$$

Определение 84. Вектор b в (20) называется *ортогональной проекцией* вектора a на подпространство W, вектор c называется *перпендикуляром*, или *ортогональной составляющей*, вектора a на подпространство W. Обозначения: $b = \mathrm{pr}_W a$, $c = \mathrm{ort}_W a$.

Замечание 85. Из определения следует, что

$$\mathrm{ort}_W a = \mathrm{pr}_{W^{\perp}} a, \quad \mathrm{pr}_W a = \mathrm{ort}_{W^{\perp}} a.$$

Упражнение 86. Пусть W, W_1, W_2 — подпространства евклидова пространства V. Доказать утверждения

1. $V^{\perp} = \{o\}$,

2. $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$,

3. $W_1 \subseteq W_2 \Leftrightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$,

4. $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$,

5. $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

2.8. Способы описания линейных подпространств

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный базис линейного пространства V. Из теории систем линейных уравнений известно, что произвольное подпространство W пространства V можно представить двумя способами: как множество векторов x, координаты которых получаются по формулам вида

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + \ldots + a_{k1}t_k, \\ x_2 = a_{12}t_1 + \ldots + a_{k2}t_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{1n}t_1 + \ldots + a_{kn}t_k, \end{cases} \tag{21}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — произвольные числа, или как множество векторов, координаты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = 0, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Выражения (21) можно записать в векторной форме:

$$x = a_1t_1 + \ldots + a_kt_k.$$

Этот способ описания соответствует равенству

$$W = L(a_1, \ldots, a_k),$$

где

$$[a_i]_{\mathbf{e}} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{23}$$

Пусть пространство V — евклидово, а базис $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный. Определим векторы $b_1, \ldots, b_m$:

$$[b_i]_{\mathbf{e}} = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im})^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{24}$$

Теперь уравнения (22) можно записать в векторном виде

$$(b_i, x) = 0, \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Этот способ описания соответствует равенству

$$W = L(b_1, \ldots, b_m)^{\perp}.$$

Если каждая из систем $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_m$ линейно независима, то $k + m = n$.

Подводя итог вышесказанному, получаем

Следствие 87. *Пусть подпространство W евклидова пространства V, в котором выбран ортонормированный базис, имеет описания (21) и (22). Векторы $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_m$ определены условиями (23) и (24). Тогда*

1. $L(a_1, a_2, \ldots, a_k) = L(b_1, b_2, \ldots, b_m)^{\perp}$;
2. $L(b_1, b_2, \ldots, b_m) = L(a_1, a_2, \ldots, a_k)^{\perp}$.

2.9. Способы описания линейных многообразий

Напомним, что *линейным многообразием* называется множество $a_0 + W$, где a_0 — вектор, а W — подпространство линейного пространства V. Из теории систем линейных уравнений известно, что линейное многообразие $a_0 + W$ можно представить двумя способами: как множество векторов x, координаты которых получаются по формулам вида

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{01} + a_{11}t_1 + \ldots + a_{k1}t_k, \\ x_2 = a_{02} + a_{12}t_1 + \ldots + a_{k2}t_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{0n} + a_{1n}t_1 + \ldots + a_{kn}t_k, \end{array} \right. \tag{25}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — произвольные числа, или как множество векторов, координаты которых удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{01}; \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_{02}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n = b_{0n}. \end{array} \right. \tag{26}$$

Выражения (25) можно записать в векторной форме:

$$x = a_0 + a_1 t_1 + \ldots + a_k t_k.$$

Этот способ описания соответствует равенству

$$a_0 + W = a_0 + L(a_1, \ldots, a_k),$$

где

$$[a_i]_{\mathbf{e}} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})^{\mathrm{T}} \quad (i = 0, \ldots, k). \tag{27}$$

Пусть пространство V — евклидово, а базис $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный. Определим векторы $b_1, \ldots, b_m$:

$$[b_i]_{\mathbf{e}} = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im})^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{28}$$

Теперь уравнения (26) можно записать в векторном виде

$$(b_i, x) = b_{0i} \quad \text{или} \quad (b_i, x - a_0) = 0, \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Этот способ описания соответствует равенству

$$a_0 + W = a_0 + L(b_1, \ldots, b_m)^{\perp}.$$

Напомним, что *размерностью* многообразия $a_0 + W$ называется $\dim W$. *Прямой* называется одномерное линейное многообразие (по аналогии с геометрическими пространствами $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$). *Гиперплоскостью* называется $(n-1)$-мерное линейное многообразие, где $n = \dim V$. Из вышесказанного следует, что прямую можно задать параметрически $x = a_0 + a_1 t$, где $a_1 \neq 0$, а гиперплоскость можно задать уравнением $(x, b_1) = \beta$, где $b_1 \neq 0$.

2.10. Метод нахождения проекции и перпендикуляра

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — произвольный базис подпространства W евклидова пространства V, a — произвольный вектор из V. Задача заключается к нахождению вещественных коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, для которых

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_W\, a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k; \\ &\mathrm{ort}_W\, a = a - \mathrm{pr}_W\, a; \\ &(\mathrm{ort}_W\, a, a_j) = 0; \quad (j = 1, \ldots, k). \end{aligned} \tag{29}$$

Откуда $(a - \mathrm{pr}_W\, a, a_j) = 0$ и $(\mathrm{pr}_W\, a, a_j) = (a, a_j)$ $(j = 1, \dots, k)$. Перепишем последние равенства в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) + \ldots + \alpha_k(a_k, a_1) = (a, a_1), \\ \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) + \ldots + \alpha_k(a_k, a_2) = (a, a_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1(a_1, a_k) + \alpha_2(a_2, a_k) + \ldots + \alpha_k(a_k, a_k) = (a, a_k). \end{array} \right. \tag{30}$$

Рассмотрим (30) как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Тогда матрица этой системы есть матрица Грама $\Gamma(a_1, \dots, a_k)$. Так как векторы $a_1, \dots, a_k$ линейно независимы, то $\det \Gamma(a_1, \dots, a_k) \neq 0$ и система (30) имеет единственное решение. После того, как решение найдено, $\mathrm{pr}_W\, a$ и $\mathrm{ort}_W\, a$ находятся по двум первым формулам (29).

Система (30) назывется *системой нормальных уравнений.*

Пример 88. Найдем проекцию вектора $a = (19, -12, -99, 27)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^4$ на подпространство $W = L(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$, где $a_1 = (5, -3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $a_2 = (4, 3, 0, -5)^{\mathrm{T}}$, $a_3 = (3, -1, 1, 3)^{\mathrm{T}}$. Скалярное произведение — стандартное.

Система (30) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 35\alpha_1 + 11\alpha_2 + 19\alpha_3 = 32, \\ 11\alpha_1 + 50\alpha_2 - 6\alpha_3 = -95, \\ 19\alpha_1 - 6\alpha_2 + 20\alpha_3 = 51. \end{array} \right.$$

Решая ее, находим $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 1$. Откуда, по формулам (29),

$$\mathrm{pr}_W\, a = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{ort}_W\, a = \begin{pmatrix} 19 \\ -2 \\ -101 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Замечание 89. Заметим, что описанный здесь способ применим и в случае, когда $a_1, \dots, a_k$ — линейно зависимые и $W = L(a_1, \dots, a_k)$. В силу существования проекции система (30) имеет решение, но не единственное. Однако по любому решению вектор $\mathrm{pr}_W\, a$ определяется однозначно.

Замечание 90. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — столбцы матрицы $A \in \mathbf{R}^{n \times k}$, рассматриваемые как векторы евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, $a \in \mathbf{R}^n$, тогда

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = A^{\mathrm{T}} A$$

и система уравнений (30) приобретает вид:

$$A^{\mathrm{T}} A y = A^{\mathrm{T}} a, \text{ где } y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^{\mathrm{T}}. \tag{31}$$

С помощью любого решения y этой системы можно найти искомую проекцию:

$$\mathrm{pr}_W\, a = Ay.$$

Замечание 91. Так как

$$\mathrm{ort}_W\, a = a - \alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_k a_k,$$

то

$$L(a_1, \ldots a_k, a) = L(a_1, \ldots, a_k, \mathrm{ort}_W\, a)$$

и, следовательно,

1. если $a \notin L(a_1, \ldots, a_k)$, то $\mathrm{ort}_W\, a \neq 0$,
2. если $a \in L(a_1, \ldots, a_k)$, то $\mathrm{ort}_W\, a = 0$.

Замечание 92. Если $k = 1$, то система (30) приобретает вид

$$\alpha_1(a_1, a_1) = (a, a_1),$$

откуда при $a_1 \neq 0$

$$\mathrm{pr}_W\, a = \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1.$$

Замечание 93. Если система векторов $a_1, \ldots, a_k$ — ортогональная, то система уравнений (30) приобретает простой вид

$$\alpha_i(a_i, a_i) = (a, a_i) \quad (i = 1, \ldots, k),$$

откуда при $a_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ (ср. с (16))

$$\alpha_i = \frac{(a, a_i)}{(a_i, a_i)} \quad (i = 1, \ldots, k),$$

поэтому

$$\operatorname{pr}_W a = \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1 + \frac{(a, a_2)}{(a_2, a_2)} a_2 + \ldots + \frac{(a, a_k)}{(a_k, a_k)} a_k, \tag{32}$$

$$\operatorname{ort}_W = a - \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1 - \frac{(a, a_2)}{(a_2, a_2)} a_2 - \ldots - \frac{(a, a_k)}{(a_k, a_k)} a_k. \tag{33}$$

По теореме Пифагора

$$|a|^2 = |\operatorname{pr}_W a|^2 + |\operatorname{ort}_W a|^2, \tag{34}$$

поэтому $|a|^2 \geq |\operatorname{pr}_W a|^2$. Теперь, применяя обобщенную теорему Пифагора к правой части последнего неравенства, с помощью (32) получаем *неравенство Бесселя*:

$$|a|^2 \geq \frac{(a, a_1)^2}{(a_1, a_1)} + \ldots + \frac{(a, a_k)^2}{(a_k, a_k)} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{(a, a_i)}{|a_i|} \right).$$

Из (34) следует, что равенство

$$|a|^2 = \frac{(a, a_1)^2}{(a_1, a_1)} + \ldots + \frac{(a, a_k)^2}{(a_k, a_k)}.$$

возможно тогда и только тогда, когда $\operatorname{ort}_W = 0$, т.е. $a \in W$ (*равенство Парсеваля*).

Утверждение 94 (Теорема о длине перпендикуляра). *Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — базис подпространства W, тогда для произвольного вектора a справедливо равенство*

$$|\operatorname{ort}_W a| = \sqrt{\frac{\det \Gamma(a_1, \ldots, a_k, a)}{\det \Gamma(a_1, \ldots, a_k)}}. \tag{35}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{pr}_W a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$. Вычтем из последнего столбца определителя Грама $\det \Gamma(a_1, \ldots, a_k, a)$ линейную комбинацию остальных столбцов с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Тогда

$$\det \Gamma(a_1, \ldots, a_k, a) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) & (a_1, a) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) & (a_2, a) \\ \ldots & & & & \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) & (a_k, a) \\ (a, a_1) & (a, a_2) & \ldots & (a, a_k) & (a, a) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) & (a_1, a - \alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_k a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) & (a_2, a - \alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_k a_k) \\ \ldots & & & & \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) & (a_k, a - \alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_k a_k) \\ (a, a_1) & (a, a_2) & \ldots & (a, a_k) & (a, a - \alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_k a_k) \end{vmatrix}.$$

Учитывая равенства

$$\begin{gathered} a - \alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_k a_k = \operatorname{ort}_W a, \\ (a_i, \operatorname{ort}_W a) = 0, \\ (a, \operatorname{ort}_W a) = (\operatorname{ort}_W a, \operatorname{ort}_W a), \end{gathered}$$

получаем

$$\det \Gamma(a_1, \ldots, a_k, a) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_k) & 0 \\ \ldots & & & \\ (a_k, a_1) & \ldots & (a_k, a_k) & 0 \\ (a, a_1) & \ldots & (a, a_k) & (\operatorname{ort}_W a, \operatorname{ort}_W a) \end{vmatrix}.$$

Теперь, с помощью теоремы Лапласа раскрывая определитель по последнему столбцу, получаем

$$\det \Gamma(a_1, \ldots, a_k, a) = (\operatorname{ort}_W a, \operatorname{ort}_W a) \det \Gamma(a_1, \ldots, a_k),$$

откуда и следует доказываемая формула. $\square$

2.11. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта

Опишем процедуру нахождения ортогонального базиса $b_1, \ldots, b_k$ подпространства W по заданному произвольно заданному базису $a_1, \ldots, a_k$. Положим

$$W_i = L(a_1, \ldots, a_i) \quad (i = 1, \ldots, k)$$

и построим векторы

$$
\begin{aligned}
&b_1 = a_1,\\
&b_i = \operatorname{ort}_{W_{i-1}} a_i, \quad (i = 2, \dots, k).
\end{aligned} \tag{36}
$$

Имеем $W_i = L(b_1, \dots, b_i)$ и поэтому, учитывая замечание 93, $b_i = \operatorname{ort}_{W_{i-1}} a_i$ можно вычислять по формуле

$$
b_i = a - \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1 - \frac{(a, a_2)}{(a_2, a_2)} a_2 - \dots - \frac{(a, a_{i-1})}{(a_{i-1}, a_{i-1})} a_{i-1}. \tag{37}
$$

Замечание 95. Из теоремы Пифагора следует, что $|b_i| \le |a_i|$ $(i = 1, \dots, k)$.

Замечание 96. Описанная процедура годится и для случая, когда $W = L(a_1, \dots a_k)$, но векторы $a_1, \dots a_k$ не обязательно являются линейно независимыми. По замечанию 91, b_i в (37) равен нулю тогда и только тогда, когда $a_i \in W_i$.

Пример. Найдем какой-либо ортонормированный базис линейной оболочки L системы векторов $(97, 60, 29, -29)^{\mathrm{T}}$, $(36, 36, -17, 17)^{\mathrm{T}}$, $(-48, -11, 20, -20)^{\mathrm{T}}$ пространства $\mathbf{R}^4$ со стандартным скалярным произведением.

Прежде чем применять процесс ортогонализации найдем эквивалентную систему векторов «попроще». Для удобства запишем компоненты векторов в матрицу (по строкам):

$$
\begin{pmatrix}
97 & 60 & 29 & -29\\
36 & 36 & -17 & 17\\
-48 & -11 & 20 & -20
\end{pmatrix},
$$

с которой будем осуществлять элементарные преобразования строк. Прибавим к 3-й строке 1-ю и разделим 3-ю на 49. Получим:

$$
\begin{pmatrix}
97 & 60 & 29 & -29\\
36 & 36 & -17 & 17\\
1 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix}.
$$

Ко 2-й строке прибавим 3-ю, умноженную на 17, и разделим 2-ю строку на 53:

$$
\begin{pmatrix}
97 & 60 & 29 & -29\\
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix}.
$$

Из 1-й строки вычтем 2-ю, умноженную на 31, и 3-ю, умноженную на 29. Разделим 1-ю строку на 37:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Полученная система векторов $a_1 = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $a_2 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $a_3 = (1, 1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$ эквивалентна исходной системе. Применяя к векторам a_1, a_2, a_3 процесс ортогонализации, по формулам (37) получим

$$b_1 = a_1 = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \cdot b_1 = (0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} \cdot b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} \cdot b_2 = (0, 0, 1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

Векторы b_1, b_2, b_3 составляют ортогональный базис подпространства L. Для нахождения ортонормированного базиса нормируем эти векторы:

$$(1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad (0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (0, 0, 1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

Пример 97 (Многочлены Лежандра). Пусть в пространстве многочленов скалярное произведение задано формулой:

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)dt \tag{38}$$

Можно показать, что следующие многочлены, известные под названием *многочленов Лежандра*:

$$L_0(t) = 1, \quad L_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k}(t^2 - 1)^k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

— образуют ортогональную систему в этом пространстве. Оказывается, что многочлены, полученные из системы $1, t, t^2, t^3 \ldots$ с помощью процесса ортогонализации только постоянными множителями отличаются от многочленов Лежандра.

Применим процесс ортогонализации к системе многочленов

$$a_1(t) = 1, \quad a_2(t) = t, \quad a_3(t) = t^2, \quad a_4(t) = t^3.$$

По формуле (37) имеем:

$$b_1(t) = 1;$$

$$b_2(t) = t - \frac{\int\limits_{-1}^{1} t \cdot 1\, dt}{\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt} \cdot 1 = t;$$

$$b_3(t) = t^2 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\, dt}{\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt} \cdot 1 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot t\, dt}{\int\limits_{-1}^{1} t \cdot t\, dt} \cdot t = t^2 - \frac{1}{3};$$

$$b_4(t) = t^3 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^3 \cdot 1\, dt}{\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt} \cdot 1 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^3 \cdot t\, dt}{\int\limits_{-1}^{1} t \cdot t\, dt} \cdot t - \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^3 \cdot (t^2 - {}^1/_3)\, dt}{\int\limits_{-1}^{1} (t^2 - {}^1/_3)^2 dt} \cdot (t^2 - {}^1/_3).$$

Итак, мы нашли следующие многочлены:

$$b_1(t) = 1, \quad b_2(t) = t, \quad b_3(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad b_4(t) = t^3 - \frac{3}{5}t \tag{39}$$

(Ср. с упражнением б/н на стр. 16).

Пример 98. Пусть в пространстве многочленов $\mathbf{R}[t]$ скалярное произведение задано формулой (38). Найдем проекцию многочлена $x(t) = t^5$ на подпространство W многочленов степени не выше 3. Воспользуемся тем, что нам известен ортогональный базис (39) данного подпространства. По формуле (32) получаем:

$$\mathrm{pr}_W\, x = \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^5 \cdot 1\, dt}{\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt} \cdot 1 + \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^5 \cdot t\, dt}{\int\limits_{-1}^{1} t \cdot t\, dt} \cdot t + \frac{\int\limits_{-1}^{1} t^5 \cdot (t^2 - {}^1/_3)\, dt}{\int\limits_{-1}^{1} (t^2 - {}^1/_3)^2 dt} \cdot (t^2 - {}^1/_3)$$

$$+\frac{\int\limits_{-1}^{1} t^5\cdot(t^3-{}^3/{}_5t)\,dt}{\int\limits_{-1}^{1}(t^3-{}^3/{}_5t)^2dt}\cdot(t^3-{}^3/{}_5t)=\frac{10}{9}t^3-\frac{5}{21}t.$$

Упражнение 99. Решить задачу из предыдущего примера другим способом, взяв за базис подпространства W многочлены 1, t, t^2, t^3 и воспользовавшись методом решения системы нормальных уравнений (30). Постройте график многочлена t^5 и найденной проекции. Объясните, почему для $t\in[-1,1]$ проекция хорошо приближает многочлен t^5.

Упражнение 100 (Многочлены Чебышёва). Пусть в пространстве многочленов скалярное произведение задано формулой:

$$(x,y)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(t)\cdot y(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Можно показать, что многочлены, известные под названием *многочленов Чебышёва*:

$$T_k(t)=\cos(k\arccos t)\quad(k=1,2,\ldots),$$

— образуют ортогональную систему в этом пространстве. Оказывается, что многочлены, полученные из системы $1,t,t^2,t^3\ldots$ с помощью процесса ортогонализации отличаются от многочленов Чебышёва только постоянными множителями. Постройте первые 4 многочлена.

Упражнение 101 (qR- и QR-разложения). Докажите, что для любой матрицы $A\in\mathbf{R}^{n\times k}$ существуют матрица $Q\in\mathbf{R}^{n\times k}$ с ортонормированными (относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbf{R}^n$) столбцами и верхнетреугольная матрица $R\in\mathbf{R}^{k\times k}$ с положительными диагональными элементами, для которых

$$A=QR.\tag{40}$$

Представление матрицы A в виде (40) называется ее *qR-разложением*. Указание: к столбцам матрицы A применить процесс ортогонализации.

Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{n\times k}$ существуют ортогональная матрица $\widetilde{Q} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ и верхнетреугольная матрица $\widetilde{R} \in \mathbf{R}^{n\times k}$, для которых
$$A = \widetilde{Q}\widetilde{R}. \tag{41}$$
Представление матрицы A в виде (41) называется ее *QR-разложением.*

Докажите, что если матрица A — квадратная и невырожденная, то ее qR- и QR-разложения единственны.

2.12. Объем гиперпараллелепипеда

Определение 102. Пусть $a_1, \dots, a_k$ — линейно независимая система векторов линейного пространства V. *Гиперпараллелепипедом*, построенным на векторах $a_1, \dots, a_k$, называется множество
$$\Pi(a_1, \dots, a_k) = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i,\ 0 \le \alpha_i \le 1 \right\}.$$

Упражнение 103. Дайте геометрическую интерпретацию множествам $\Pi(a_1)$, $\Pi(a_1, a_2)$, $\Pi(a_1, a_2, a_3)$ в пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$. Особо рассмотрите случай, когда векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы.

Определение 104. *Объемом гиперпараллелепипеда* $\Pi(a_1, \dots, a_k)$ называется величина
$$V(a_1, \dots, a_k) = \begin{cases} |a_1|, & \text{если } k = 1, \\ V(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot |\operatorname{ort}_{L(a_1,\dots,a_{k-1})} a_k|, & \text{если } k \ge 2. \end{cases} \tag{42}$$

Упражнение 105. Дайте геометрическую интерпретацию формулам (42) в пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$.

Теорема 106. *Пусть $b_1, \dots, b_k$ — векторы, полученные из системы $a_1, \dots, a_k$ с помощью процесса ортогонализации, тогда*
$$\begin{aligned} V(a_1, \dots a_k) &= V(b_1, \dots b_k) \\ &= \sqrt{\det \Gamma(a_1, \dots, a_k)} = \sqrt{\det \Gamma(b_1, \dots b_k)} \\ &= |b_1| \cdot \ldots \cdot |b_k| \le |a_1| \cdot \ldots \cdot |a_k|. \end{aligned}$$

Последнее неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда система векторов $a_1, \ldots, a_k$ — ортогональная или по крайней мере один из векторов a_i нулевой.

Доказательство. Применяя несколько раз формулы (35), (36), (42), получаем

$$
\begin{aligned}
&V(a_1, \ldots, a_k)\\
&\quad = |a_1| \cdot |\operatorname{pr}_{W_1} a_2| \cdot |\operatorname{pr}_{W_2} a_3| \cdot \ldots \cdot |\operatorname{pr}_{W_{k-1}} a_k|\\
&\quad = |b_1| \cdot \ldots \cdot |b_k|\\
&\quad = \sqrt{\det\Gamma(a_1) \cdot \frac{\det\Gamma(a_1, a_2)}{\det\Gamma(a_1)} \cdot \ldots \cdot \frac{\det\Gamma(a_1, \ldots a_k)}{\det\Gamma(a_1, \ldots, a_{k-1})}}\\
&\quad = \sqrt{\det\Gamma(a_1, \ldots, a_k)}.
\end{aligned}
$$

Так как $|b_i| = |\operatorname{ort}_{W_{i-1}} a_i| \leq |a_i|$, то

$$V(a_1, \ldots, a_k) \leq |a_1| \cdot \ldots \cdot |a_k|.$$

Теорема доказана. □

Замечание 107. Доказанная теорема обладает следующим геометрическим содержанием: определитель Грама системы векторов является квадратом объема гиперпараллелепипеда, построенного на этой системе; объем гиперпараллелепипеда не превосходит произведения длин его ребер.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ и $a_1, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы A. Если в $\mathbf{R}^n$ введено стандартное скалярное произведение, то $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = A^{\mathrm{T}}A$, откуда получаем

$$(\det A)^2 = \det(A^{\mathrm{T}}A) = \det\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = \Big(V(a_1, \ldots, a_n)\Big)^2,$$

следовательно, $|\det A| = V(a_1, \ldots, a_n)$. Таким образом, в случае стандартного скалярного произведения модуль определителя квадратной матрицы есть объем гиперпараллелепипеда, построенного на системе столбцов этой матрицы. Аналогичное утверждение справедливо и для строк матрицы.

2.13. Неравенство Адамара

Во многих задачах необходимо уметь оценивать сверху величину определителя, исходя из величин его элементов. Неравенство Адамара, которое мы выведем, является одной из таких оценок.

Теорема 108 (Неравенство Адамара). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *и* $|a_{ij}| \leq \alpha$, *тогда*

$$|\det A| \leq (\alpha\sqrt{n})^n. \tag{43}$$

Доказательство. Рассмотрим арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы A. Тогда $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = A^{\mathrm{T}}A$. Из теоремы 106 получаем, что

$$\sqrt{\det (A^{\mathrm{T}}A)} \leq |a_1| \cdot \ldots \cdot |a_n|.$$

Теперь воспользуемся равенством $\det\left(A^{\mathrm{T}}A\right) = (\det A)^2$ и очевидной оценкой $|a_j| \leq \alpha\sqrt{n}$ $(j = 1, \ldots, n)$. □

Упражнение. Доказать, что максимум модуля определителя с элементами, принадлежащими отрезку $[-1, 1]$, совпадает с максимумом модуля определителя с элементами ± 1. Указание: Проследить, как изменяется определитель при замене a_{ij} на 1 или -1 в зависимости от знака алгебраического дополнения к элементу a_{ij}.

Упражнение 109. Доказать, что максимальная величина определителя 3-го порядка с элементами ± 1 равна 4. Таким образом, на вещественных ненулевых матрицах 3-го порядка оценка (43) не достигается.

Упражнение 110. Доказать, что для *матриц Адамара* H_i, определяемых по формулам

$$H_0 = (1), \quad H_i = \left(\begin{array}{c|c} H_{i-1} & -H_{i-1} \\ \hline H_{i-1} & H_{i-1} \end{array}\right) \text{ при } i \geq 1,$$

неравенство (43) превращается в равенство. Указание: Доказать, что строки (столбцы) матрицы Адамара образуют в пространстве R^n со стандартным скалярным произведением ортогональный базис (т. е. матрица ${}^1/_{\sqrt{2^i}} \cdot H_i$ ортогональна).

Упражнение. Доказать, что если для некоторой ненулевой вещественной матрицы A в (43) имеет место знак равенства, то n равно 2 либо кратно 4. Задание можно переформулировать следующим образом. В пространстве $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением имеется ортогональный базис такой, что все компоненты каждого из векторов этого базиса равны ± 1. Доказать, что n равно 2 либо кратно 4. Решение: Пусть $n \geq 3$. Не нарушая общности, можно считать, что первая строка матрицы A состоит из единиц. Тогда в первых трех строках возможны столбики лишь одного из следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Число столбиков каждого из указанных видов обозначим x, y, z, t соответственно. Имеем

$$x + y + z + t = n.$$

Из условия ортогональности первых трех строк матрицы A получаем

$$\begin{aligned} x + y - z - t &= 0, \\ x - y + z - t &= 0, \\ x - y - z + t &= 0. \end{aligned}$$

Полученная система имеет единственное решение $x = y = z = t = n/4$. Таким образом, n должно быть кратно 4.

Упражнение. Доказать, что если $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ и $|a_{ij}| \leq \alpha$, то

$$|\det A| \leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \cdot \sqrt{(n+1)^{n+1}}.$$

Указание: Приписать к матрице слева нулевой столбец и сверху строку, составленную из чисел ${}^{\alpha}/_{2}$, а затем вычесть эту строку из всех остальных.

Упражнение 111. Доказать, что если матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ симметрична и положительно определена, то $\det A \leq a_{11}a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn}$. Указание: Рассмотреть A как матрицу Грама для некоторой системы векторов.

2.14. Метрические задачи в евклидовых пространствах

В этом разделе, имея ввиду геометрическую интерпретацию, векторы евклидова пространства иногда будем называть точками.

Определение 112. Вектор l называется *наклонной* из точки x к подпространству W, если $l = x - y$ для некоторого $y \in W$.

Утверждение 113 (Теорема о длине наклонной). *Величина*

$$\inf_{y \in W} |x - y|$$

достигается в единственной точке $y = \operatorname{pr}_W x$. *Иными словами,*

$$\inf_{y \in W} |x - y| = |x - \operatorname{pr}_W x| = |\operatorname{ort}_W x|,$$

$$z \neq \operatorname{pr}_W x \quad \Rightarrow \quad \inf_{y \in W} |x - y| < |x - z|.$$

Доказательство. Для произвольного $y \in W$, используя теорему Пифагора, получаем

$$|x-y| = |\operatorname{ort}_W x + \underbrace{\operatorname{pr}_W x - y}_{\in W}| = \sqrt{|\operatorname{ort}_W x|^2 + |\operatorname{pr}_W x - y|^2} \geq |\operatorname{ort}_W x|,$$

причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $|\operatorname{pr}_W x - y| = 0$, т. е. $y = \operatorname{pr}_W x$. □

Упражнение 114. Дайте геометрическую интерпретацию теореме о длине наклонной.

Определение 115. *Расстоянием между точками* x, y евклидова пространства называется величина

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Определение 116. *Расстоянием между множествами* S, T векторов евклидова пространства называется величина

$$\rho(S, T) = \inf_{\substack{x \in S \\ y \in T}} \rho(x, y).$$

Теорема 117. *Пусть U, W — подпространства, а x_0, y_0 — произвольные векторы евклидова пространства V, тогда*

$$\rho(x_0 + W, y_0 + U) = |\operatorname{ort}_{W+U}(x_0 - y_0)|.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\rho(x_0 + W, y_0 + U) &= \inf_{\substack{x \in x_0 + W \\ y \in y_0 + U}} |x - y| \\
&= \inf_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |(x_0 + x) - (y_0 + y)| \\
&= \inf_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |(x_0 - y_0) - \underbrace{(y - x)}_{z \in W+U}| \\
&= \inf_{z \in W+U} |(x_0 - y_0) - z| \\
&= \rho(x_0 - y_0, W + U).
\end{aligned}$$

По теореме о длине наклонной $\rho(x_0 - y_0, W + U) = |\operatorname{ort}_{W+U}(x_0 - y_0)|$.

$\square$

Следствие 118. *Пусть W — подпространство, а x, x_0 — произвольные векторы евклидова пространства V, тогда*

1. $\rho(x, W) = |\operatorname{ort}_W x|$,
2. $\rho(x, x_0 + W) = |\operatorname{ort}_W (x - x_0)|$.

Пример 119. Найдем расстояние ρ между линейными многообразиями $W = x_0 + L(a_1)$ и $U = y_0 + L(a_2)$, если координаты векторов заданы в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{e}$:

$$[x_0]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [a_1]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ [y_0]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ [a_2]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Первый способ. Имеем:

$$[a] = [x_0 - y_0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad W + U = L(a_1, a_2)$$

Для нахождения $\mathrm{pr}_{W+U}\, a$ составим систему нормальных уравнений по формуле (30):

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1, \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 = 3, \end{cases}$$

откуда $\alpha_1 = {}^{-1}/_3$, $\alpha_2 = {}^{2}/_3$ и поэтому, по формулам (29),

$$[\mathrm{pr}_{W+U}\, a]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathrm{ort}_{W+U}\, a]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

откуда находим искомое расстояние:

$$\rho = |\,\mathrm{ort}_{W+U}\, a| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Второй способ. Для нахождения $|\,\mathrm{ort}_{W+U}\, a|$ воспользуемся формулой (35):

$$\rho^2 = |\,\mathrm{ort}_{W+U}\, a|^2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3}, \quad \rho = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 120. Найдем общую формулу, выражающую расстояние между прямыми $W = x_1 + L(a_1)$ и $U = x_2 + L(a_2)$ в предположении, что векторы a_1, a_2 линейно независимы.

$$\rho^2(W, U) = |\,\mathrm{ort}_{L(a_1,a_2)}(x_1 - x_2)|^2 =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, x_1 - x_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & (a_2, x_1 - x_2) \\ (x_1 - x_2, a_1) & (x_1 - x_2, a_2) & (x_1 - x_2, x_1 - x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{vmatrix}}.$$

В частности, в $\mathbf{V}_3$ многообразия W, U — скрещивающиеся или пересекающиеся прямые. Если $[x_i]_{\mathbf{e}} = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$, $[a_i]_{\mathbf{e}} = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ $(i = 0, 1)$ и базис $\mathbf{e}$ — ортонормированный, то

$$\rho^2(W, U) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & x_{01} - x_{11} \\ a_{12} & a_{22} & x_{02} - x_{12} \\ a_{13} & a_{23} & x_{03} - x_{13} \end{vmatrix}^2}{\det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}\right]}$$

и по теореме Бинэ–Коши

$$\rho(W, U) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & x_{01} - x_{11} \\ a_{12} & a_{22} & x_{02} - x_{12} \\ a_{13} & a_{23} & x_{03} - x_{13} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}^2}}.$$

Пример 121. Найдем общую формулу, выражающую расстояние между точкой x_0 и прямой $W = x_1 + L(a_1)$ $(a_1 \neq 0)$.

$$\rho^2(x_0, W) = |\operatorname{ort}_{L(a_1)}(x_0 - x_1)|^2 = \frac{\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, x_0 - x_1) \\ (x_0 - x_1, a_1) & (x_0 - x_1, x_0 - x_1) \end{vmatrix}}{|a_1|^2}.$$

В частности, в $\mathbf{V}_3$, если $[x_i]_{\mathbf{e}} = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ $(i = 0, 1)$, $[a_1]_{\mathbf{e}} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ и базис $\mathbf{e}$ — ортонормированный, то

$$\rho^2 = \frac{\det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_{01} - x_{11} & x_{02} - x_{12} & x_{03} - x_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & x_{01} - x_{11} \\ a_{12} & x_{02} - x_{12} \\ a_{13} & x_{03} - x_{13} \end{pmatrix}\right]}{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2}$$

и по теореме Бинэ–Коши

$$\rho = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_{12} & x_{02} - x_{12} \\ a_{13} & x_{03} - x_{13} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & x_{01} - x_{11} \\ a_{13} & x_{03} - x_{13} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & x_{01} - x_{11} \\ a_{12} & x_{02} - x_{12} \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2}}.$$

Пример 122. Найдем общую формулу, выражающую расстояние между точкой x_0 и гиперплоскостью $W = \{x : (x, a_1) = \alpha\}$ $(a_1 \neq 0)$. Пусть $x_1 \in W$, тогда $(x_1, a_1) = \alpha$.

$$\rho(x_1, W) = |\operatorname{pr}_{W^\perp}(x_0 - x_1)| = \left|\frac{(x_0 - x_1, a_1)\, a_1}{(a_1, a_1)}\right| = \frac{|(x_1, a_1) - \alpha|}{|a_1|}.$$

Для нахождения проекции мы воспользовались замечанием 92.

В частности, в пространстве $\mathbf{V}_3$ многообразие W — плоскость. Если $[x_i]_{\mathbf{e}} = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ $(i = 0, 1)$, $[a_1]_{\mathbf{e}} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ и базис $\mathbf{e}$ — ортонормированный, то

$$\rho(x_1, W) = \frac{|a_{11}x_{01} + a_{12}x_{02} + a_{13}x_{03} - \alpha|}{|a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2|}.$$

Упражнение 123. Найти формулу для нахождения расстояния между *параллельными* прямыми $x_1 + L(a)$ и $x_2 + L(a)$. Привести вариант этой формулы, удобный в пространстве $\mathbf{V}_3$

Упражнение 124. Найти формулу для нахождения расстояния между *параллельными* гиперплоскостями $(x, b) = \beta_1$, $(x, b) = \beta_2$. Привести вариант этой формулы, удобный в пространстве $\mathbf{V}_3$.

Упражнение 125. Найти формулу для нахождения расстояния между прямой $x_0 + L(a)$ и гиперплоскостью $(x, b) = \beta$. Рассмотреть два случая: 1) $(a, b) = 0$, 2) $(a, b) \neq 0$ Привести вариант формул, удобный в пространстве $\mathbf{V}_3$.

2.15. Нормальное решение системы линейных уравнений

Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$. Пусть в $\mathbf{R}^n$ введено некоторым образом скалярное произведение.

Определение 126. Решение $\widehat{x} \in \mathbf{R}^n$ системы линейных уравнений $Ax = b$ минимальной нормы называется ее *нормальным* решением.

Напомним, что множество всех решений совместной системы $Ax = b$ есть линейное многообразие $x_0 + W$, где x_0 — частное решение системы $Ax = b$, а W — множество всех решений системы $Ax = 0$.

Из определения нормального решения получаем

$$|\widehat{x}| = \inf_{x \in x_0 + W} |x| = \inf_{y \in W} |x_0 + y|.$$

По теореме о длине наклонной нормальное решение определяется единственным образом и равно

$$\widehat{x} = \mathrm{ort}_W\, x_0 = \mathrm{pr}_{W^\perp}\, x_0.$$

Теперь предположим, что скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$ стандартное. Тогда $W^\perp = L(a'_1, \dots, a'_m)$ (см. теорему 81) и, кроме того, $\Gamma(a'_1, \dots, a'_m) = AA^{\mathrm{T}}$. Теперь система нормальных уравнений (30) для нахождения $\mathrm{pr}_{W^\perp}\, x_0$ примет вид $AA^{\mathrm{T}}y = Ax_0$, или

$$AA^{\mathrm{T}}y = b, \tag{44}$$

где $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^{\mathrm{T}}$. По решению y системы (44) можно найти нормальное решение:

$$\widehat{x} = A^{\mathrm{T}}y. \tag{45}$$

Пример 127. Найдем нормальное решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - \ \ x_2 \qquad\ + x_4 = 1. \end{cases}$$

Система (44) принимает вид:

$$\begin{cases} \ \ \, 7y_1 - 2y_2 = 3, \\ -2y_1 + 3y_2 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$y = \begin{pmatrix} {}^{11}/_{17} \\ {}^{13}/_{17} \end{pmatrix}.$$

По формуле (45) находим нормальное решение:

$$\widehat{x} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.16. Псевдорешения несовместной системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$, где $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$.

Определение 128. *Невязкой вектора* $x \in \mathbf{R}^n$ относительно системы $Ax = b$ называется столбец $Ax - b \in \mathbf{R}^m$.

Предположим, что в $\mathbf{R}^m$ введено скалярное произведение.

Определение 129. *Псевдорешением* системы $Ax = b$ называется вектор $\widetilde{x}$, на котором норма невязки $|Ax - b|$ минимальна:

$$|A\widetilde{x} - b| = \inf_{x\in\mathbf{R}^n} |Ax - b|.$$

Заметим, что если система совместна, то любое ее решение является псевдорешением и других псевдорешений нет.

Теорема 130. *Множество всех псевдорешений системы $Ax = b$ есть множество решений системы $Ax = \operatorname{pr}_W b$, где $W = L(a_1, \ldots, a_n)$ и $a_1, \ldots, a_n$ —* столбцы *матрицы A.*

Доказательство. Обозначая $y = Ax \in \mathbf{R}^m$, по теореме о длине наклонной получаем

$$\inf_{x\in\mathbf{R}^n} |Ax - b| = \inf_{y\in W} |y - \operatorname{pr}_W b|.$$

Теорема доказана. □

Теперь предположим, что скалярное произведение в $\mathbf{R}^m$ стандартное. Тогда $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = A^{\mathrm{T}}A$. Теперь система (30) для нахождения $\operatorname{pr}_W b$ примет вид $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$, откуда $\operatorname{pr}_W b = Ax$. Последнее равенство показывает, что множество решений системы

$$A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b \qquad (46)$$

совпадает со множеством всех псевдорешений системы $Ax = b$.

Пример 131. Найдем все псевдорешения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 5, \end{cases}$$

если скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$ — стандартное.

Первый способ. В нашем примере $a_1 = a_2 = a_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $a_4 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, $b = (2, 2, 5)^{\mathrm{T}}$ и $W = L(a_1, a_2, a_3, a_4) = L(a_1, a_4)$. Найдем $\mathrm{pr}_W\, b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_4$. Система для определения α_1, α_2 имеет вид:

$$\begin{cases} (a_1, a_1)\alpha_1 + (a_1, a_4)\alpha_2 = (b, a_1), \\ (a_4, a_1)\alpha_1 + (a_4, a_4)\alpha_2 = (b, a_2), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 0\alpha_2 = 9, \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $\alpha_1 = 3$ и $\alpha_2 = 0$, следовательно, $\mathrm{pr}_W\, b = (3, 3, 3)^{\mathrm{T}}$. Решая систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 3, \end{cases}$$

находим, что множество псевдорешений исходной системы есть линейное многообразие

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2, \\ x_2 = 1 - t_1, \\ x_3 = 1 \phantom{{}-t_1} - t_2, \\ x_3 = 0, \end{cases} \tag{47}$$

где $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$. Для каждого вектора этого многообразия норма невязки равна $|(2, 2, 5)^{\mathrm{T}} - (3, 3, 3)^{\mathrm{T}}| = \sqrt{6}$.

Второй способ. В нашем примере система (46) имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 9, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Множество ее решений можно представить, например, в виде (47).

Упражнение. Найти множество всех псевдорешений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 97x_1 + 36x_2 - 48x_3 = 74, \\ 60x_1 + 36x_2 - 11x_3 = 37, \\ 29x_1 - 17x_2 + 20x_3 = 114, \\ -29x_1 + 17x_2 - 20x_3 = -110, \end{cases}$$

Указание: см. пример б/н на стр. 45.

Далее до конца раздела предполагается, что скалярное произведение — стандартное.

Упражнение 132. Доказать, что каждое псевдорешение $\widetilde{t} = (\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2)^{\mathrm{T}}$ системы уравнений

$$\begin{cases} a_{01} + t_1 a_{11} = b_{01} + t_2 b_{11}, \\ a_{02} + t_1 a_{12} = b_{02} + t_2 b_{12}, \\ a_{03} + t_1 a_{13} = b_{03} + t_2 b_{13} \end{cases}$$

определяет пару точек на прямых

$$\begin{cases} x_1 = a_{01} + t_1 a_{11}, \\ x_2 = a_{02} + t_1 a_{12}, \\ x_3 = a_{03} + t_1 a_{13} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = b_{01} + t_2 b_{11}, \\ x_2 = b_{02} + t_2 b_{12}, \\ x_3 = b_{03} + t_2 b_{13}, \end{cases}$$

таких, что расстояние между этими точками равно расстоянию между прямыми.

Упражнение. Пусть Q — ортогональная матрица. Доказать, что множества псевдорешений систем $Ax = b$ и $QAx = Qb$ совпадают.

Упражнение 133. Пусть $A = QR$ — qR-разложение матрицы $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Докажите, что множество всех псевдорешений системы $Ax = b$ совпадает с множеством решений треугольной системы $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$.

Замечание 134. Задача нахождения псевдорешения возникает, например, при *аппроксимации* данных. Предположим, что имеются пары значений

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_m, y_m). \tag{48}$$

Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ — заданные функции. Требуется найти функцию вида

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x), \tag{49}$$

для которой $f(x_i) \approx y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, т. е. функцию, приближающую данные (48). Более точно: требуется найти значения параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, на которых достигается минимум

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \sum_{i=1}^{m} \bigl(y_i - \alpha_1 f_1(x_i) - \ldots - \alpha_n f_n(x_i)\bigr)^2 .$$

Задача отыскания таких α_j называется *линейной задачей наименьших квадратов*.

Легко видеть, что набор этих параметров является псевдорешением системы

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_1) + \ldots + \alpha_n f_n(x_1) = y_1, \\ \alpha_1 f_1(x_2) + \alpha_2 f_2(x_2) + \ldots + \alpha_n f_n(x_2) = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 f_1(x_m) + \alpha_2 f_2(x_m) + \ldots + \alpha_n f_n(x_m) = y_m. \end{cases} \tag{50}$$

И наоборот, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — псевдорешение указанной системы, то функция $f(x)$, определяемая по формуле (49), является решением задачи наименьших квадратов.

Часто в качестве $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ рассматриваются многочлены $1, x, \ldots, x^{n-1}$. Таким образом, речь идет об аппроксимации данных полиномами.

Например, при аппроксимации данных (48) линейной функцией $y = \alpha_1 + \alpha_2 x$ система уравнений (50) примет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_1 = y_1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_2 = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_m = y_m. \end{cases}$$

Согласно (46), система линейных уравнений для определения неизвестных α_1, α_2 имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right) \alpha_2 = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right) \alpha_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\right) \alpha_2 = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i. \end{cases}$$

Определение 135. Псевдорешение $\check{x}$ системы $Ax = b$, имеющее среди всех псевдорешений минимальную норму, называется *нормальным псевдорешением*.

Обозначим через $e_j \in \mathbf{R}^m$ столбец, в котором j-я компонента равна 1, а все остальные равны 0 ($j = 1, 2, \ldots, m$).

Определение 136. Пусть $\check{x}_j$ — нормальное псевдорешение системы $Ax = e_j$, где $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ($j = 1, 2, \ldots, m$). Матрица размеров $n \times m$, составленная из столбцов $\check{x}_1, \check{x}_2, \ldots, \check{x}_m$, называется *псевдообратной* к матрице A и обозначается A^+.

Упражнение 137. Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и столбца $b \in \mathbf{R}^m$ нормальное псевдорешение $\check{x}$ системы $Ax = b$ можно найти по формуле $\check{x} = A^+ b$.

Упражнение 138. Докажите, что если строки матрицы $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ линейно независимы, то $A^+ = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}$. Если столбцы матрицы A линейно независимы, то $A^+ = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$.

3. Полуторалинейные функции и унитарные пространства

В данном разделе понятия и результаты предыдущих разделов распространяются на случай комплексного линейного пространства.

3.1. Полуторалинейные функции

Рассмотрим комплексное линейное пространство V.

Определение 139. Отображение

$$f : V \times V \to \mathbf{C},$$

ставящее каждой паре векторов x, y из V число $f(x, y)$ из $\mathbf{C}$, называется *полуторалинейной функцией*, если для любых x, y, z из V и любых α, β из $\mathbf{C}$ выполнены соотношения

1. $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$,

2. $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$,

3. $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$,

4. $f(x, \beta y) = \overline{\beta} f(x, y)$.

Упражнение 140. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Доказать, что следующая функция в $\mathbf{C}^n$ является полуторалинейной:

$$f(x, y) = x^{\mathrm{T}} A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j.$$

Основные результаты о билинейных функциях переносятся на случай полуторалинейных функций. Утверждения с несколькими изменениями сохраняются, а доказательства легко переносятся на комплексный случай, поэтому дадим только краткий обзор основных результатов.

Из свойств 1)–4) вытекает их обобщение:

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i,\ \sum_{j=1}^{l} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{l} \overline{\beta}_j f(x_i, y_j).$$

Как и в случае билинейных функций, вводится понятие *матрицы* $[f]_{\mathbf{e}}$ *полуторалинейной функции*. Легко видеть, что формула, выражающая значение функции через координаты векторов, примет вид

$$f(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} [f]_{\mathbf{e}} \overline{[y]}_{\mathbf{e}},$$

причем формула

$$f(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} A \overline{[y]}_{\mathbf{e}},$$

где $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, задает общий вид билинейной функции. Формула, связывающая матрицы одной и той же билинейной функции в базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$, примет вид

$$[f]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} [f]_{\mathbf{e}} \overline{[\mathbf{e}']}_{\mathbf{e}}.$$

Матрицы A и B называются *соединенными*, если существует такая невырожденная матрица Q, что $B = Q^{\mathrm{T}} A \overline{Q}$. Таким образом, соединенные матрицы являются матрицами одной и той же полуторалинейной функции в разных базисах. Каждая из следующих пар элементарных преобразований матрицы переводит ее в соединенную:

- перестановка строк с номерами i, j вместе с перестановкой столбцов с номерами i, j,
- умножение i-й строки на α, умножение i-го столбца на $\overline{\alpha}$,
- прибавление к i-й строке j-й, умноженной на α, прибавление к i-му столбцу j-го, умноженного на $\overline{\alpha}$.

Полуторалинейная функция называется *эрмитовой*, если для любых x, y из V справедливо равенство $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$. Матрица $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ называется *эрмитовой*, или *самосопряженной*, если $A^{\mathrm{T}} = \overline{A}$. Можно доказать

Утверждение 141. *Пусть f — полуторалинейная функция, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *f — эрмитова;*
2. *для произвольного базиса $\mathbf{e}$ матрица $[f]_{\mathbf{e}}$ эрмитова;*
3. *существует базис $\mathbf{e}$, в котором матрица $[f]_{\mathbf{e}}$ эрмитова;*
4. *для любого $x \in V$ справедливо $f(x, x) \in \mathbf{R}$.*

Теорема Лагранжа также справедлива для полуторалинейных функций, однако алгоритм нахождения канонического базиса несколько усложнится.

I. $a_{11} \neq 0$. Выполним над матрицей A следующие синхронные элементарные преобразования: для каждого $i \in \{2, \ldots, n\}$ вычтем из i-й строки 1-ю строку, умноженную на ${}^{a_{i1}}/_{a_{11}}$; для каждого $j \in \{2, \ldots, n\}$ вычтем из j-го столбца 1-й столбец, умноженный на ${}^{a_{1j}}/_{a_{11}}$. Заметим, что $a_{11} \in \mathbf{R}$ и $a_{1j} = \overline{a}_{j1}$. Очевидно, что после этих преобразований матрица A перейдет в соединенную матрицу следующего вида

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & B^{(1)} \end{array}\right). \tag{51}$$

II. $a_{11} = 0$. Возможны следующие варианты:

1. $\forall i \in \{2, 3 \ldots, n\}$ $a_{i1} = a_{1i} = 0$. Матрица A уже имеет вид (4). В данном случае никаких действий производить не нужно.
2. $\exists k \in \{2, 3 \ldots, n\}$ $a_{k1} = \overline{a}_{1k} \neq 0$.
   1) Если $a_{kk} \neq 0$, то переставляем строки и столбцы с номерами 1 и k и тем самым приходим к случаю I.
   2) Если $a_{kk} = 0$, то
      а) если $\operatorname{Re} a_{1k} \neq 0$, то прибавляем к 1-й строке k-ю строку и 1-му столбцу k-й столбец, тем самым снова приходим к случаю I;
      б) если $\operatorname{Re} a_{1k} = 0$, то прибавляем к 1-й строке k-ю строку, умноженную на i; вычитаем из 1-го столбца k-й столбец, умноженный на i; мы снова приходим к случаю I.

После выполнения описанных здесь действий матрица A перейдет в соединенную матрицу вида (51). Далее достаточно те же действия провести с матрицей $B^{(1)}$ и т. д.

На полуторалинейные функции переносятся понятия *канонического* и *нормального* базисов, (не)положительно и (не)отрицательно определенных функций, сохраняются теорема Якоби, закон инерции, критерий Сильвестра.

Пример 142. Найдем нормальный базис $\mathbf{e}'$ для эрмитовой полуторалинейной функции f, заданной в базисе $\mathbf{e} = \{e_1, e_2\}$ формой $f(x, y) = ix_1\overline{y}_2 - ix_2\overline{y}_1$.

Построим матрицу $[f]_{\mathbf{e}}$ и припишем к ней справа единичную:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 0 & i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Имеем случай II-2.2б. Прибавляем к первой строке вторую, умноженную на i; вычитаем из первого столбца второй, умноженный на i. Получаем:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & i & 1 & i \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Приходим к случаю I. Прибавляем ко второй строке первую, умноженную на ${}^{i}/_{2}$; вычитаем из второго столбца первый, умноженный на ${}^{i}/_{2}$. Получаем:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & i \\ 0 & -{}^{1}/_{2} & {}^{i}/_{2} & {}^{1}/_{2} \end{array}\right).$$

Приведение матрицы полуторалинейной функции к каноническому виду закончено. Для приведения матрицы к нормальному виду поделим первую строку и первый столбец на $\sqrt{2}$ и умножим вторую строку и втрой столбец на $\sqrt{2}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & {}^{\sqrt{2}}/_{2} & {}^{i\sqrt{2}}/_{2} \\ 0 & -1 & {}^{i\sqrt{2}}/_{2} & {}^{\sqrt{2}}/_{2} \end{array}\right).$$

Матрицу перехода получаем, транспонируя матрицу, стоящую справа:

$$[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} {}^{\sqrt{2}}/_{2} & {}^{i\sqrt{2}}/_{2} \\ {}^{i\sqrt{2}}/_{2} & {}^{\sqrt{2}}/_{2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получен нормальный базис

$$\begin{aligned} e_1' &= {}^{\sqrt{2}}/_{2}\ e_1 + {}^{i\sqrt{2}}/_{2}\ e_2, \\ e_2' &= {}^{i\sqrt{2}}/_{2}\ e_1 + {}^{\sqrt{2}}/_{2}\ e_2. \end{aligned}$$

По матрице полуторалинейной функции в найденном базисе легко определяется соответствующая нормальная форма: $f(x,y) = x_1\overline{y}_1 - x_2\overline{y}_2$, где $[x]_{\mathbf{e}'} = (x_1', x_2')^{\mathrm{T}}$. $[y]_{\mathbf{e}'} = (y_1', y_2')^{\mathrm{T}}$. По матрице перехода к нормальному базису определяются формулы, связывающие координаты в старом и новом базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ соответственно:

$$\begin{cases} x_1 = {}^{\sqrt{2}}/_{2}\ x_1' + {}^{i\sqrt{2}}/_{2}\ x_2', \\ x_2 = {}^{i\sqrt{2}}/_{2}\ x_1' + {}^{\sqrt{2}}/_{2}\ x_2'. \end{cases}$$

3.2. Квадратичные комплексные функции

Функция $g : V \to \mathbf{C}$ называется *квадратичной*, если $g(x) = f(x,x)$ для некоторой полуторалинейной функции f.

Пример 143. Функция $g(x) = |x_1|^2 - 2x_1\overline{x}_2 + 2|x_2|^2$ в $\mathbf{C}^2$ является квадратичной. Действительно, функция $f(x,y) = x_1\overline{y}_1 - x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$ — полуторалинейная и $g(x) = f(x,x)$.

Напомним, что в вещественном пространстве по квадратичной функции соответствующую ей билинейную можно восстановить бесконечным числом способов. В отличие от этого в комплексном пространстве по квадратичным функциям соответствующая полуторалинейная восстанавливается единственным образом.

Утверждение 144. *Пусть $g : V \to \mathbf{C}$ — квадратичная функция, тогда полуторалинейная функция f, для которой $g(x) = f(x, x)$, существует и единственна.*

Доказательство. Так как g — квадратичная функция, то соответствующая ей полуторалинейная функция f существует по определению. Докажем ее единственность. Имеем

$$\begin{aligned}
g(x+y) &= f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y),\\
g(x-y) &= f(x-y, x-y) = f(x,x) - f(x,y) - f(y,x) + f(y,y),\\
g(x+iy) &= f(x+iy, x+iy) = f(x,x) - if(x,y) + if(y,x) + f(y,y),\\
g(x-iy) &= f(x-iy, x-iy) = f(x,x) + if(x,y) - if(y,x) + f(y,y),
\end{aligned}$$

откуда, умножая полученные равенства на 1, -1, i и $-i$ соответственно, после очевидных преобразований получаем

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(g(x+y) - g(x-y) + ig(x+iy) - ig(x-iy)\right). \qquad (52)$$

Таким образом, f по g восстанавливается однозначно. □

Матрицей квадратичной функции называется матрица соответствующей полуторалинейной функции.

Квадратичная функция $g : V \to \mathbf{C}$ называется *эрмитовой*, если соответствующая ей полуторалинейная функция f эрмитова.

В силу доказанного утверждения на эрмитовы квадратичные функции переносятся основные определения и теоремы теории эрмитовых полуторалинейных функций: вводятся понятия *канонического* и *нормального* базиса, *знакопостоянной* и *знакопеременной* эрмитовой квадратичной функции, переносятся теорема Якоби, закон инерции и критерий Сильвестра.

3.3. Унитарные пространства

Определение 145. Линейное комплексное пространство V называется *унитарным*, если задано отображение $V \times V \to \mathbf{C}$, ставящее каждой паре векторов $x, y \in V$ число $(x, y) \in \mathbf{C}$, называемое *скалярным произведением*, обладающее следующими свойствами:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4. $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$

для любых x, y, z из V и α из $\mathbf{R}$. Свойства 1)–4) называются *аксиомами унитарного пространства.*

Замечание 146. Если 1-ю аксиому унитарного пространства заменить на $(x, y) = (y, x)$, то выполнение 4-й аксиомы не будет возможно. Действительно, в этом случае, если $(x, x) > 0$, то $(ix, ix) = i^2(x, x) = -(x, x) < 0$.

Аналогично евклидову пространству можно показать, что скалярное произведение в унитарном пространстве есть положительно определенная эрмитова полуторалинейная функция, и наоборот, любую положительно определенную эрмитову полуторалинейную функцию можно выбрать в качестве скалярного произведения.

Пример 147. Симметричная эрмитова функция

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j, \quad \text{где} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

в пространстве $\mathbf{C}^n$ является положительно определенной и, следовательно, может быть выбрана в качестве скалярного произведения в пространстве $\mathbf{C}^n$ (*стандартное* скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$).

На случай унитарных пространств переносится понятие *матрицы Грама*. Определитель матрицы Грама неотрицателен и равен нулю тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы. Формула выражения скалярного произведения через координаты векторов примет вид:

$$(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} \Gamma_{\mathbf{e}} \overline{[y]}_{\mathbf{e}}.$$

На случай унитарных пространств переносится понятие нормы вектора, угла между векторами, ортогональности векторов и систем векторов, сохраняется неравенство Коши–Буняковского, неравенство треугольника, теорема Пифагора. Доказательства в целом повторяют доказательства соответствующих утверждений для евклидовых пространств, однако требуют аккуратного обращения с операцией комплексного сопряжения.

Упражнение. Привести пример, показывающий, что утверждение, обратное к теореме Пифагора, в унитарном пространстве неверно.

В унитарных пространствах вводится понятие ортогонального и ортонормированного базисов, причем свойства координат векторов в этих базисах (см. утверждения 64, 65) сохраняются. В ортонормированном базисе скалярное произведение выражается через координаты векторов по формуле:

$$(x, y) = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_n\overline{y}_n.$$

Пусть V и V' — унитарные пространства. Взаимно однозначное отображение $\varphi : V \to V'$ называется *изоморфизмом унитарных пространств*, если для любых векторов x, y из V и любого вещественного числа α выполняются равенства

1. $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$,
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$,
3. $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$.

Унитарные пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : V \to V'$.

Как и в случае евклидовых пространств, можно показать, что унитарные пространства V и V' изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim V'$.

Матрица $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ называется *унитарной*, если $\overline{A}^{\mathrm{T}} = A^{-1}$, т. е. $\overline{A}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}\overline{A} = E$. Очевидно, что определитель унитарной матрицы по модулю равен 1. Легко показать, что строки (столбцы) унитарной матрицы $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, рассматриваемые как векторы арифметического пространства $\mathbf{C}^n$ со стандартным скалярным произведением, образуют ортонормируемую систему. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — ортонормированый базис унитарного пространства. Для того, чтобы система векторов $\mathbf{e}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ также образовывала ортонормированный базис необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ была бы унитарной.

В унитарных пространствах вводится понятие *ортогонального дополнения*, справедлива теорема 81 о разложении пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Вводятся понятия *ортогональной проекции* и *перпендикуляра*.

Сохраняется алгоритм из раздела 2.10 нахождения проекции с помощью решения системы нормальных уравнений (30). Если $a_1, \ldots, a_k$ — столбцы матрицы $A \in \mathbf{C}^{n\times k}$, рассматриваемые как векторы унитарного пространства $\mathbf{C}^n$ со стандартным скалярным произведением, $a \in \mathbf{C}^n$, то

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = A^{\mathrm{T}}\overline{A}$$

и система уравнений (30) приобретает вид:

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}Ay = \overline{A}^{\mathrm{T}}a, \text{ где } y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^{\mathrm{T}}.$$

В унитарном пространстве справедлива теорема о длине перпендикуляра. Ее доказательство требует аккуратного обращения со знаками комплексного сопряжения. Сохраняется процесс ортогонализации Грама–Шмидта и теорема 106.

Неравенство Адамара переносится и на случай комплексных матриц. Действительно, из теоремы 106 получаем, что

$$|\det A|^2 = \det(A^{\mathrm{T}}\overline{A}) \le |a_1|^2 \cdot \ldots \cdot |a_k|^2,$$

откуда $|\det A| \le (\alpha\sqrt{n})^n$.

Упражнение 148. Докажите, что для матриц вида

$$A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n\times n}, \quad \text{где} \quad a_{ij} = \varepsilon^{(i-1)(j-1)}, \quad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

неравенство Адамара превращается в равенство. Указание: Найти $\det(A^{\mathrm{T}}\overline{A})$.

Как и в евклидовом пространстве, в унитарном пространстве вводятся понятия наклонной и расстояния, сохраняется теорема о длине наклонной и теорема о выражении расстояния между линейными многообразиями через длину перпендикуляра.

Для систем линейных уравнений с комплексными коэффициентами определяется понятие *нормального* решения. Нормальное решение можно найти по формуле $\widetilde{x} = \operatorname{ort}_W x_0 = \operatorname{pr}_{W^\perp} x_0$, где x_0 — частное решение исходной системы, а W — пространство решений соответствующей однородной системы. Если скалярное произведение стандартное, то нормальное решение $\widetilde{x}$ системы $Ax = b$ определяется из равенства $\widetilde{x} = \overline{A}^{\mathrm{T}} y$, где y — частное решение системы $A\overline{A}^{\mathrm{T}} y = b$.

Для несовместных систем определяется понятие *псевдорешения*. Как и в вещественном случае, все псевдорешения системы $Ax = b$ можно найти из решений системы $Ax = \operatorname{pr}_W b$, где W — линейная оболочка столбцов матрицы A. В случае стандартного скалярного произведения все псевдорешения можно найти из решений системы $\overline{A}^{\mathrm{T}} Ax = \overline{A}^{\mathrm{T}} b$.

Список литературы

[1] *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1983.

[2] *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987.

[3] *Билинейные функции и их применение:* Методическая разработка / Составители: Ильичев А. П., Таланов В. А. — 1-е издание: Горький: Горьковский государственный университет, 1980. 2-е издание: Н. Новгород: Нижегородский государственный университет, 1990.

[4] *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1974.

[5] *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975.

[6] *Задачи в евклидовых пространствах:* Методическая разработка / Составители: Веселов С. И., Ильичев А. П., Чирков А. Ю. — Н. Новгород: Нижегородский государственный университет, 1998.

Содержание

Николай Юрьевич Золотых
Александр Павлович Ильичев
Владимир Александрович Таланов

БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Учебное пособие

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 4,25. Уч.-изд. л. 4,75. Заказ Тираж 250 экз.

Отпечатано в типографии
Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18 – 0099 от 14.05.01