Глава 16

Кривые и поверхности второго порядка

Во всех разделах, кроме 16.9, система координат прямоугольная.

16.1. Составление уравнений кривых второго порядка и других кривых

1. (р) Доказать, что множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух заданных точек $\mathcal{F}_1(c,\,0)$, $\mathcal{F}_2(-c,\,0)$, равна $2a$, образует *эллипс*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a \geq b > 0$, $c > 0$, $a^2 = b^2 + c^2$, точки $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ — *фокусы* этого эллипса.

2. Доказать, что множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух заданных точек $\mathcal{F}_1(c,\,0)$, $\mathcal{F}_2(-c,\,0)$, равен $2a$, образует *гиперболу*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a, b, c > 0$, $c^2 = a^2 + b^2$, точки $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ — *фокусы* гиперболы.

3. Доказать, что множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до заданной точки $\mathcal{F}(p/2,\,0)$ равно расстоянию до заданной прямой $x = -p/2$, где $p > 0$, образует *параболу*, которая задается уравнением $y^2 = 2px$. Точка $\mathcal{F}$ — ее *фокус*, а прямая $x = -p/2$ — *директриса*.

4. Даны точки $\mathcal{A}(c, 0)$, $\mathcal{B}(-c, 0)$. Найти множество точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до точек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равно $2a^2$, где $a > c > 0$.

5. Даны точки $\mathcal{A}(c, 0)$, $\mathcal{B}(-c, 0)$. Найти множество точек, для каждой из которых модуль разности квадратов расстояний до точек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равно $4a^2$, где $a, c > 0$.

6. (р) На плоскости даны точки $\mathcal{A}(a, 0)$, $\mathcal{B}(b, 0)$, $a \neq b$, $a, b > 0$. Найти множество точек, для каждой из которых отношение расстояний до точек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ есть величина постоянная равная $k > 0$.

7. Доказать, что множество точек плоскости, для каждой из которых отношение ε расстояния до заданной точки к расстоянию до заданной прямой есть величина постоянная, меньшая единицы, есть эллипс, при этом ε — эксцентриситет этого эллипса, заданная точка — его фокус, а прямая — ближайшая директриса.

8. Доказать, что множество точек плоскости, для каждой из которых отношение ε расстояния до заданной точки к расстоянию до заданной прямой есть величина постоянная, большая единицы, есть гипербола, при этом ε — ее эксцентриситет, а заданная точка и заданная прямая — ее фокус и ближайшая директриса соответственно.

9. Доказать, что эллипс можно задать следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t < 2\pi).$$

10. Доказать, что одну ветвь гиперболы можно задать следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t = a\cdot\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t = b\cdot\dfrac{e^t-e^{-t}}{2} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

11. Отрезок $\mathcal{AB}$ скользит своими концами по осям $\mathcal{O}x$ и $\mathcal{O}y$ соответственно. Какую траекторию очерчивает при этом точка $\mathcal{M}$, лежащая на отрезке $\mathcal{AB}$, если $\mathcal{AM} = a$, $\mathcal{BM} = b$?

12. На плоскости заданы две точки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Найти кривую, которая представляет собой множество точек $\mathcal{M}$, таких, что угол $\mathcal{A}$ в треугольнике $\mathcal{ABM}$ в 2 раза больше угла $\mathcal{B}$.

13. Вывести уравнение и изобразить *лемнискату Бернулли*, являющуюся геометрическим местом точек, для каждой из которых произведение расстояний до точек $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ равно a^2.

14. Вывести уравнение и изобразить *четырехлепестковую розу* — геометрическое место точек, являющихся проекцией начала координат на отрезок постоянной длины a, концы которого скользят по осям координат.

16.2. Окружность

15. Найти координаты центра, радиус и каноническое уравнение окружности, заданной уравнением:

1) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$;
2) $5x^2 + 5y^2 + 4x - 2y - 19 = 0$;
3) $3x^2 + 3y^2 + 10x + 8y + 11 = 0$;

4) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 13 = 0$.

16. При каком необходимом и достаточном условии уравнение $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ задает окружность? Выразить координаты центра и радиус окружности через коэффициенты уравнения.

17. Найти координаты центра, радиус и уравнение окружности, проходящей через точки

1) $(1, 1)$, $(-6, 2)$, $(-7, 1)$;

2) $(5, 3)$, $(-3, 1)$, $(7, 1)$.

18. Почему уравнение

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

задает окружность, проходящую через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)?

19. При какой необходимом и достаточном условии прямая $Ax + By + C = 0$

1) пересекает окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ в двух точках;

2) касается этой окружности;

3) не имеет с ней общих точек.

20. Записать уравнение касательной к окружности $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ в точке $(-1, 1)$.

21. Составить уравнения касательных к окружности $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$,

1) проходящих через точку $(6, -1)$;

2) параллельных прямой $4x + 3y = 0$.

22. Составить уравнения общих касательных к окружностям $(x+2)^2+(y+1)^2 = 9$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

23. (р) Составить уравнение окружности, проходящей через точки $(1, -2)$, $(4, -3)$, если ее центр лежит на прямой $x + 2y - 1 = 0$

24. Составить уравнение окружности, касающейся прямых $x - 2y - 1 = 0$, $x + 2y - 2 = 0$ и проходящей через начало координат.

25. Составить уравнение окружности, касающейся трех прямых $x + y - 1 = 0$, $x - y + 5 = 0$, $7x + y = 0$.

26. Записать уравнение касательной к окружности $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ в точке $(-1, 1)$.

27. Составить уравнения касательных к окружности $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$,

1) проходящих через точку $(6, -1)$;

2) параллельных прямой $4x + 3y = 0$.

16.3. Эллипс

28. Окружность можно рассматривать как частный случай эллипса. Где находятся у нее фокусы, чему равен эксцентриситет? Есть ли у окружности дирек-

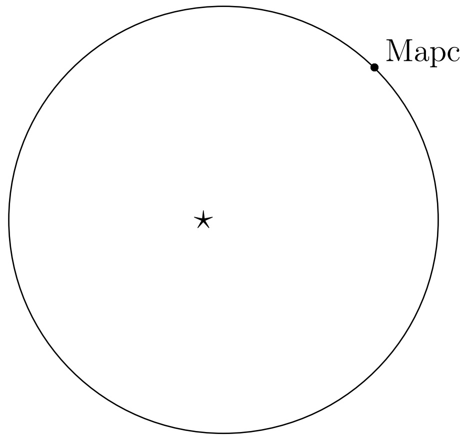

Рис. 16.1: Орбита Марса, вращающегося вокруг Солнца

трисы?

29. Докажите, что для произвольного эллипса по любым двум из величин a, b, c, ε, p можно найти остальные.

30. Постройте эллипс $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Найдите его эксцентриситет, фокальный параметр, координаты фокусов, уравнения директрис.

31. Докажите, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс. Найдите его центр $\mathcal{C}$, полуоси, эксцентриситет, фокусы и уравнения директрис.

1) $x^2+2y^2+4x-12y+14=0$;
2) $3x^2+y^2-18x+2y+1=0$.

32. Ближайшая к Солнцу точка орбиты планеты или другого небесного тела, вращающегося вокруг Солнца, называется ее *перигелием.* Наиболее удаленная точка орбиты — *афелием* или *апогелием.* Выразить

1) радиус перигелия q и радиус афелия Q через большую ось a и эксцентриситет ε орбиты.
2) большую a и малую b оси через q и Q.

33. Расстояние от Земли до Солнца в перигелии составляет 147,098 млн. км., а в афелии — 152,098 млн. км. Найти большую и малую полуоси и эксцентриситет орбиты Земли.

34. На рис. 16.1 представлена орбита Марса, вращающегося вокруг Солнца. Объясните, почему кажется, что Марс вращается по круговой орбите, но Солнце не находится в его центре (так поначалу и считал И. Кеплер). Для справки: большая полуось и эксцентриситет орбиты Марса равны $a = 227{,}943$ млн. км., $\varepsilon = 0{,}0934$.

35. На эллипсе $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1$ найти точку, расстояние от которой до фокуса $\mathcal{F}_1$ в 5 раз больше расстояния до фокуса $\mathcal{F}_2$.

36. В некоторой прямоугольной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Найти это уравнение, если

1) расстояние между фокусами 2, а между вершинами на большой оси 6;
2) эллипс проходит через точки $(-3\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ и $(3,\ -3)$;
3) большая полуось равна 6, точка $(2,\ 4)$ лежит на эллипсе;
4) расстояние между фокусами равно 6, точка $(4,\ -1)$ лежит на эллипсе;
5) уравнения директрис $x = \pm 8$, точка $(-2,\ 3)$ лежит на эллипсе;
6) эксцентриситет равен $\sqrt{5}/5$, точка $(-5,\ -4)$ лежит на эллипсе;
7) расстояние от точки $(6,\ 2)$, лежащей на эллипсе, до ближнего фокуса равно $\sqrt{5}$;
8) расстояние от фокуса до ближайшей точки на эллипсе в 9 раз больше расстояния до дальней точки на эллипсе, фокальный параметр $9/5$.

37. Найти сторону квадрата, вписанного в эллипс, полуоси которого равны a, b.

38. Составить уравнение семейства эллипсов:

1) с общими фокусами $(\pm c, 0)$.
2) с общими директрисами $x = \pm d$ и центром в начале координат.

39. На эллипсе $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ найти точки, из которых отрезок, соединяющий фокусы, виден под углом 1) 90°; 2) 120°; 3) 150°.

40. Составить уравнение эллипса, если

1) его фокусы расположены в точках $(4,\ -1)$ и $(0,\ 1)$, а большая полуось равна $\sqrt{6}$;
2) его фокусы расположены в точках $(-1,\ -3)$ и $(3,\ 3)$, а малая полуось равна 1;
3) его фокусы расположены в точках $(0,\ 0)$ и $(2,\ 2)$, эксцентриситет равен $\sqrt{2/5}$;
4) его фокусы расположены в точках $(2,\ 1)$ и $(0,\ 5)$, на эллипсе точка $(-1,\ 5)$;
5) один из фокусов $(0,\ 1)$, ближайшая к нему директриса $2x + y + 1 = 0$, эксцентриситет $1/2$;
6) фокус $(2, 2)$, на эллипсе точка (2,0), уравнение директрисы $x + y = 6$;
7) вершины на большой оси $(1,\ -5)$, $(5,\ -1)$, эксцентриситет $\sqrt{2}/2$;
8) большая ось $2x+y = 0$, вершина на малой оси $(1, 3)$, эксцентриситет $\sqrt{3}/2$.

41. (р) Доказать, что уравнение касательной к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $(x_0,\ y_0)$, лежащей на эллипсе, можно записать в виде $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

42. Записать уравнение касательной к эллипсу $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ в точке $\left(\sqrt{15},\ \dfrac{3}{4}\right)$.

43. Составить уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

1) проходящих через точку $(6, -1)$;
2) параллельных прямой $x + y = 0$.

44. Составить уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$, проходящих через точку $(6,\,-1)$.

45. Составить уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{24}=1$, перпендикулярных прямой $x+2y=0$.

46. Составить уравнения сторон квадрата описанного около эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

47. Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямая $Ax+By=C$ касается эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

48. Эллипс, главные оси которого совпадают с осями координат, касается двух прямых $x+6y=20$ и $3x-2y=20$. Найти его уравнение.

49. Эллипс, главные оси которого совпадают с осями координат, проходит через точку $(-3,-2)$ и касается прямой $2x+3y=15$. Найти его уравнение.

50. Найти уравнения общих касательных к эллипсам $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ и $x^2+\dfrac{y^2}{10}=1$.

51. Найти уравнения общих касательных к эллипсам $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ $(a\neq b)$.

52. Написать уравнения касательных к кривой $x^2-xy+y^2+2x-y-2=0$,
1) параллельных прямой $x=y$
2) проходящих через точку $(-3,\,-4)$;
3) проходящих через точку $(0,\,1)$.

53. Написать уравнения касательных к кривой $5x^2-6xy+5y^2+4x+4y-28=0$,
1) проходящих через точку $(-5,\,-5)$;
2) проходящих через точку $(8/5,\,2)$;
3) проходящих через точку $(1,\,1)$;
4) параллельных прямой $13x=15y$;
5) перпендикулярных прямой $5x=9y$.

54. Найти геометрическое место точек, из которых эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ виден под прямым углом.

55. По эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ двигается точка $\mathcal{M}$. Найти уравнение кривой, которую описывает центра тяжести треугольника $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{M}$, где $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ совпадает с большой полуосью эллипса.

56. Найти геометрическое место середин хорд эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, проведенных из точки $(0,\,b)$.

57. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся внутренним образом заданной окружности и проходящих через заданную точку $\mathcal{A}$.

16.4. Гипербола

58. Докажите, что для произвольной гиперболы по любым двум из величин a, b, c, ε, p можно найти остальные.

59. Постройте гиперболу $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Найдите ее эксцентриситет, фокальный параметр, координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот.

60. Чему равен эксцентриситет равнобочной гиперболы?

61. Найдите полуоси, эксцентриситет, фокусы, уравнения директрис и асимптот следующих гипербол: 1) $xy = 1$; 2) $xy = -2$.

62. Докажите, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу. Найдите его центр $\mathcal{C}$, полуоси, эксцентриситет, фокусы, уравнения директрис и асимптот.

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x + 18y - 89 = 0$;
2) $x^2 - y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

63. В некоторой прямоугольной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если

1) расстояние между ее вершинами 6, а между фокусами 8;
2) гипербола проходит через точки $(5, -3)$ и $(-\sqrt{15}, \sqrt{3})$;
3) гипербола проходит через точку $(5, 6)$, а ее действительная ось равна $\sqrt{7}$;
4) гипербола проходит через точку $(5, 2)$ и расстояние между фокусами равно 6;
5) гипербола проходит через точку $(3, 1)$ и ее асимптоты задаются уравнениями $x = \pm 3y$;
6) гипербола проходит через точку $(6, 3)$ и расстояние между директрисами равно $3\sqrt{3}$;
7) гипербола проходит через точку $(3, 5)$ и ее эксцентриситет равен $\sqrt{6}$;
8) расстояние от точки $(5, 4)$, принадлежащей гиперболе, до дальнего фокуса равно $4\sqrt{5}$;
9) вершина гиперболы делит отрезок, соединяющий фокусы, в отношении $5 : 1$, а фокальный параметр равен 5.

64. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точки $(1, 4)$ и $(\sqrt{3}, -4\sqrt{2})$, если ее главные оси совпадают с осями координат.

65. На гиперболе $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ найти точку, расстояние от которой до фокуса $\mathcal{F}_2$ в 2 раза больше расстояния до фокуса $\mathcal{F}_1$.

66. Найти сторону квадрата, вписанного в гиперболу, полуоси которой равны a, b.

67. Составить уравнение семейства гипербол:

1) с общими фокусами $(\pm c, 0)$;
2) с общими директрисами $x = \pm d$ и центром в начале координат;
3) с общими асимптотами $y = \pm kx$.

68. На гиперболе $x^2 - y^2 = 4$ найти точки, из которых отрезок, соединяющий фокусы, виден под углом 1) $90°$; 2) $60°$.

69. Составить уравнение гиперболы, если

1) его фокусы расположены в точках $(1,\ 1)$ и $(-1,\ -1)$, расстояние между вершинами равно 2;
2) его фокусы расположены в точках $(-5,\ -1)$ и $(-1,\ 3)$, эксцентриситет равен 2;
3) один из фокусов $(1,\ 2)$, ближайшая к нему директриса $x + 2y = 3$, эксцентриситет 5;
4) фокусы $(4, -4)$, $(0, -2)$, гипербола проходит через точку $(1, -1)$;
5) дан фокус $(0, 1)$, уравнение соответствующей директрисы $x - y = 2$, точка на кривой $(1, -6)$;
6) вершины $(-4,\ -1)$, $(-2,\ 1)$, эксцентриситет $\sqrt{6}$;
7) уравнение мнимой оси $x - y = 4$, вершина $(0,\ -2)$, эксцентриситет $\sqrt{5}$;
8) фокусы $(3, -4)$, $(-1, 4)$, асимптоты перпендикулярны.

70. Доказать, что уравнение касательной к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $(x_0,\ y_0)$, лежащей на гиперболе, можно записать в виде $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

71. Записать уравнение касательной к гиперболе $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ в точке $(8,\ 3)$.

72. Составить уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{14} - \dfrac{y^2}{7} = 1$,

1) проходящих через точку $(7/2,\ 0)$;
2) проходящих через точку $(\sqrt{14},\ \sqrt{7})$;
3) параллельных прямой $8x = 11y$.

73. Составить уравнения касательных к гиперболе $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$, проходящих через точку $(1,\ -4)$.

74. Составить уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{3} = 1$, перпендикулярных прямой $2x = y$.

75. Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямая $Ax + By = C$ касается гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

76. Гипербола, главные оси которой совпадают с осями координат, касается двух прямых $x - y = 2$ и $3x + 5y = -2$. Найти ее уравнение.

77. Гипербола, главные оси которой совпадают с осями координат, проходит через точку $(5, -1)$ и касается прямой $x - 2y = 2$. Найти ее уравнение.

78. Составить уравнение гиперболы, если известны уравнения ее асимптот $3x = \pm y$ и известна одна из касательных $7x - 4y = 1$.

79. Найти уравнения общих касательных к гиперболам $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ и $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$.

80. Найти уравнения общих касательных к эллипсу $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ и гиперболе $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{9} = 1$.

81. Написать уравнения касательных к кривой $x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x + 20y - 35 = 0$,
1) параллельных прямой $x + 4y = 0$;
2) проходящих через точку $(-1, 2)$;
3) проходящих через точку $(-7, 1)$;
4) проходящих через точку $(-3, 2)$.

82. Написать уравнения касательных к кривой $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 20x + 20y + 30 = 0$,
1) проходящих через точку $(-3, -1/2)$;
2) проходящих через точку $(-3, 2)$;
3) проходящих через точку $(-1, 2)$;
4) проходящих через точку $(-2, -2)$;
5) параллельных прямой $x + 2y = 0$;
6) перпендикулярных прямой $5x = 2y$.

83. Найти геометрическое место точек, из которых гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ видна под прямым углом.

84. Найти геометрическое место середин хорд гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, проведенных из точки $(a, 0)$.

85. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся внешним образом заданной окружности и проходящих через заданную точку.

16.5. Парабола

86. Постройте параболу $y^2 = 4x$. Найдите ее фокальный параметр, фокус и уравнение директрисы.

87. Доказать, что все параболы подобны друг другу.

88. Докажите, что каждое из следующих уравнений определяет параболу. Изобразить ее. Найти вершину, фокальный параметр, фокус и уравнение директрисы.
1) $2x - y^2 - 4y - 6 = 0$;
2) $x^2 - 4x + 8y - 4 = 0$.

89. На параболе $y^2 = 2px$ найти точку, расстояние от которой до фокуса равно расстоянию до вершины параболы.

90. В каких пределах меняется отношение расстояний от точки на параболе $y^2 = 2px$ до ее вершины к расстоянию до ее фокуса.

91. Составить уравнение семейства парабол, симметричных относительно оси Ox:

1) с общим фокусом $(0, 0)$;
2) с общей директрисой $x = 0$.

92. Составить уравнение параболы, если
1) ее фокус находится в точке $(-1,\ 0)$, а директриса имеет уравнение $3x + 4y = 1$;
2) ее фокус находится в точке $(1,\ 2)$, а уравнение оси $2x + y = 4$;
3) ее вершина находится в точке $(0,\ 3)$, а уравнение директрисы $2x - y + 2 = 0$;
4) ее вершина находится в точке $(-2,\ 2)$, уравнение оси $x - y + 4 = 0$, фокальный параметр $\sqrt{2}$;
5) ее вершина находится в точке $(2,\ -2)$, уравнение оси $x + 2y = -2$, парабола проходит через точку $(-4,\ 4)$;
6) вершина $(-3,\ -3)$, фокус $(-7/2,\ -5/2)$;

93. Доказать, что уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $(x_0,\ y_0)$, лежащей на параболе, можно записать в виде $y_0 y = p(x + x_0)$.

94. Составить уравнения касательных к параболе $y^2 = 2x$,
1) проходящих через точку $(8,\ -4)$;
2) проходящих через точку $(-3,\ 1/2)$;
3) проходящих через точку $(4,\ 2)$;
4) параллельных прямой $x = 2y$;
5) параллельных прямой $y = 3$;
6) перпендикулярных прямой $x = y$.

95. Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямая $Ax + By + C = 0$ касается параболы $y^2 = 2px$.

96. Парабола $y^2 = 2px$ касается двух прямых $x - 4y + 6 = 0$ и $3x + 4y + 2 = 0$. Найти ее уравнение.

97. Парабола $y^2 = 2px$ проходит через точку $(12, -4)$ и касается прямой $x - 3y + 3 = 0$. Найти ее уравнение.

98. Найти уравнения общих касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ и параболе $y^2 = {}^5\!/_3\, x$.

99. Найти уравнения общих касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ и параболе $y^2 = 2x$.

100. Написать уравнения касательных к кривой $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 12y - 12 = 0$,
1) проходящих через точку $(1,\ -1)$;
2) проходящих через точку $(-3,\ -3)$;
3) проходящих через точку $(-4,\ 2)$;
4) проходящих через точку $(2,\ 0)$;
5) параллельных прямой $3x = y$;
6) перпендикулярных прямой $x + y = 0$;
7) перпендикулярных прямой $x = 0$.

101. Написать уравнения касательных к кривой $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0$,
1) проходящих через точку $(2,\ 0)$;

2) проходящих через точку $(1, -3)$;
3) проходящих через точку $(9/4, -11/4)$;
4) проходящих через точку $(-2, 1)$;
5) параллельных прямой $7x + 5y = 0$;
6) параллельных прямой $x + y = 0$;
7) перпендикулярных прямой $3x = 5y$.

102. Найти геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.

103. Найти геометрическое место середин хорд параболы $y^2 = 2px$, проведенных из точки $(0, 0)$.

104. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через заданную точку и касающихся данной прямой.

105. Найти наибольший радиус окружности, лежащей внутри параболы $y^2 = 2px$ и касающейся этой параболы в точке $(0, 0)$.

106. Две параболы со взаимно перпендикулярными осями пересекаются в 4 точках. Доказать, что эти 4 точки лежат на одной окружности.

16.6. Поверхности второго порядка

107. Найти уравнение и определить тип поверхности, являющейся геометрическим местом точек, для каждой из которых сумма расстояний до точек $(-c, 0, 0)$ и $(c, 0, 0)$ равна $2a$, если $a > c$.

108. Найти уравнение и определить тип поверхности, являющейся геометрическим местом точек, для каждой из которых модуль разности расстояний до точек $(-c, 0, 0)$ и $(c, 0, 0)$ равна $2a$.

109. Найти уравнение и определить тип поверхности, являющейся геометрическим местом точек, для каждой из которых расстояние до точки $(p/2, 0, 0)$ равно расстоянию до плоскости $x = -p/2$.

110. Доказать, что через каждую точку двуполостного гиперболоида и каждую точку гиперболического параболоида проходит ровно две пересекающихся прямые, целиком ей принадлежащие (*прямолинейные образующие*). Какие прямолинейные образующие содержит конус?

16.7. Приведение уравнений квадрик к каноническому виду

Пример 1. Кривая второго порядка задана в некоторой прямоугольной системе координат уравнением

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 26x + 28y + 21 = 0.$$

Найти прямоугольную каноническую систему координат и записать каноническое уравнение кривой.

Записываем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Записываем характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-15\lambda+50=(\lambda-5)(\lambda-10).$$

Его корни — собственные числа матрицы A — суть

$$\lambda_1=5,\qquad \lambda_2=10.$$

Находим собственные векторы и записываем их координаты по столбцам в матрицу перехода:

$$Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Формулы перехода:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Подставляя их в исходной уравнение, получаем:

$$5{x'}^2+10{y'}^2-26\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+28\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)+21=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем:

$$5{x'}^2+10{y'}^2+\frac{30}{\sqrt{5}}x'+\frac{80}{\sqrt{5}}y'+21=0.$$

Выделяем полный квадрат (два раза):

$$5\cdot\left({x'}^2+2x'\frac{3}{\sqrt{5}}+\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2\right)-5\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+10\cdot\left({y'}^2+2x'\frac{4}{\sqrt{5}}+\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2\right)-10\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2+21=0.$$

$$5\left(x'+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+10\left(y'+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2-20=0.$$

Переходим к новым координатам:

$$\begin{cases} x'=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}+x'' \\ y'=-\dfrac{4}{\sqrt{5}}+y'' \end{cases}$$

Почти каноническое уравнение кривой имеет вид

$$5{x''}^2+10{y''}^2-20=0.$$

Преобразуем его к каноническому уравнению:

$$\frac{{x''}^2}{4}+\frac{{y''}^2}{2}=1.$$

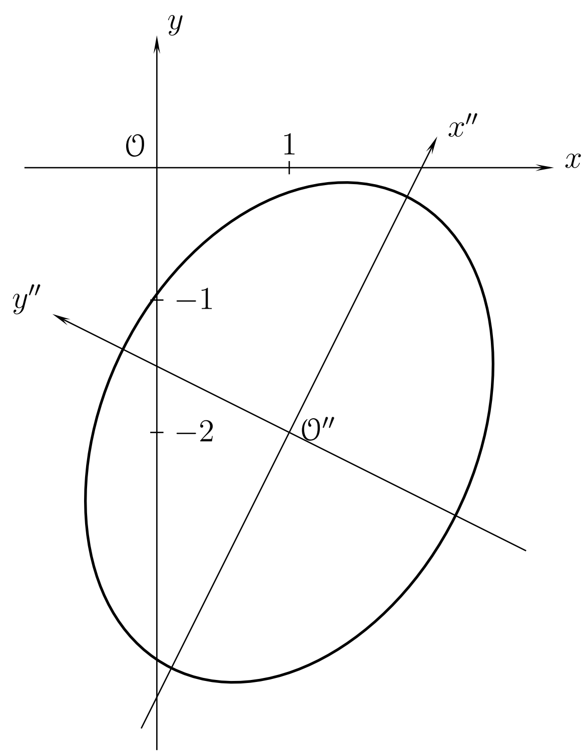

Рис. 16.2: Эллипс $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 26x + 28y + 21 = 0$.

Это уравнение *эллипса*. С параметрами $a = 2$, $b = \sqrt{2}$. Подставляя, находим

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}x'' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'', \\ y = -2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y''. \end{cases}$$

Эллипс изображен на рис. 16.3.

Другой способ.

$$s_r = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 50, \qquad \overline{s}_{r+1} = \begin{vmatrix} 21 & -13 & 14 \\ -13 & 9 & -2 \\ 14 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -1000,$$

откуда

$$\gamma = \frac{\overline{s}_{r+1}}{s_r} = -20.$$

Почти каноническое уравнение $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \gamma = 0$:

$$5x''^2 + 10y''^2 - 20 = 0.$$

Пример 2.

$$3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{6}y = 0.$$

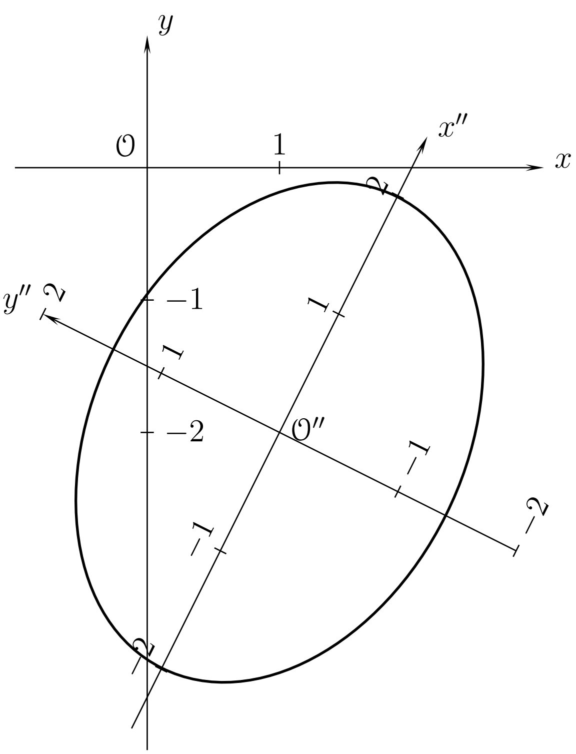

Рис. 16.3: Эллипс $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 26x + 28y + 21 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4).$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 0.$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y', \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'. \end{cases}$$

Подставляем их в исходное уравнение:

$$4{x'}^2 - 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) - 2\sqrt{6}\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем

$$4{x'}^2 - 2\sqrt{6}x' - 6\sqrt{2}y' = 0.$$

Выделяем полный квадрат:

$$4\left(x'^2 - 2x'\frac{\sqrt{6}}{4} + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2\right) - 4\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 6\sqrt{2}y' = 0.$$

$$4\left(x' - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 6\sqrt{2}\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{8}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ y' = y'' - \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

Получили почти каноническое уравнение

$$4x''^2 - 6\sqrt{2}y'' = 0$$

После очевидных преобразований получаем каноническое уравнение

$$x''^2 = 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}y''.$$

Это уравнение *параболы*. Ее параметр есть

$$p = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y', \\ y = -\frac{3\sqrt{6}}{16} - \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'. \end{cases}$$

См. рис. 16.4.

Другой способ:

$$s_r = 3 + 1 = 4, \qquad \overline{s}_{r+2} = \begin{vmatrix} 0 & -3\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 3 & -\sqrt{3} \\ -6\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = -72,$$

откуда $\mu^2 = -\dfrac{\overline{s}_{r+2}}{s_r} = 18$. Почти каноническое уравнение кривой $\lambda_1 x''^2 - 2\mu y'' = 0$:

$$4x''^2 - 6\sqrt{2}y'' = 0.$$

Пример 3.

$$7x^2 - 6xy - y^2 - 58x + 2y + 63 = 0$$

Записываем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записываем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda - 8)(\lambda + 2).$$

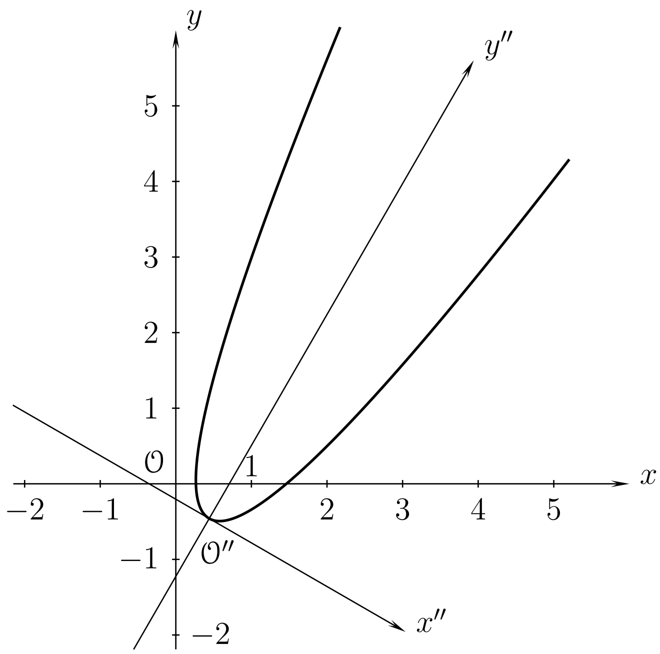

Рис. 16.4: Парабола $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{6}y = 0$.

Его корни — собственные числа матрицы A — суть

$$\lambda_1 = 8, \qquad \lambda_2 = -2.$$

Находим собственные векторы и после их нормировки записываем их координаты по столбцам в матрицу перехода:

$$Q = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y', \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y'. \end{cases}$$

Подставляя их в исходное уравнение, получаем:

$$8{x'}^2 - 2{y'}^2 - 58\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right) + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right) + 63 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем:

$$8{x'}^2 - 2{y'}^2 - \frac{176}{\sqrt{10}}x' - \frac{52}{\sqrt{10}}y' + 63 = 0.$$

Выделяем полный квадрат (два раза):

$$8\cdot\left({x'}^2 - 2x'\frac{11}{\sqrt{10}} + \left(\frac{11}{\sqrt{10}}\right)^2\right) - 8\cdot\left(\frac{11}{\sqrt{10}}\right)^2 - 2\cdot\left({y'}^2 + 2x'\frac{13}{\sqrt{10}} + \left(\frac{13}{\sqrt{10}}\right)^2\right) + 2\cdot\left(\frac{13}{\sqrt{10}}\right)^2 + 63 = 0.$$

$$8\left(x' - \frac{11}{\sqrt{10}}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{13}{\sqrt{10}}\right)^2 + 30 = 0.$$

Переходим к новым координатам:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{11}{\sqrt{10}} + x'', \\ y' = -\dfrac{13}{\sqrt{10}} + y''. \end{cases}$$

Уравнение кривой имеет вид

$$8x''^2 - 2y''^2 = 0.$$

Преобразуем его к каноническому уравнению:

$$x''^2 - \frac{y''^2}{2^2} = 0.$$

Это уравнение *пересекающихся прямых*. Подставляя, находим

$$\begin{cases} x = 2 + \dfrac{3}{\sqrt{10}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y'', \\ y = -5 - \dfrac{1}{\sqrt{10}}x'' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y''. \end{cases}$$

Другой способ.

$$\overline{s}_{r+1} = \begin{vmatrix} 63 & -29 & 1 \\ -29 & 7 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\gamma = \frac{\overline{s}_{r+1}}{s_r} = 0.$$

$$8x''^2 - 2y''^2 = 0.$$

Пример 4.

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xy + 4xz + 4yz + 30y + 45 = 0.$$

Записываем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda - 25 = -(\lambda-5)(\lambda-5)(\lambda+1).$$

Его корни — собственные числа матрицы A — суть

$$\lambda_{1,2} = 5, \qquad \lambda_3 = -1.$$

Находим ортонормированный базис собственного подпространства, относящегося к собственному числу $\lambda_{1,2} = 5$. Его образуют, например, векторы

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нормированный вектор, образующий базис собственного пространства, относящегося к собственному числу $\lambda_3 = -1$, образует вектор

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Записываем координаты собственных векторов в матрицу перехода:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z', \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z', \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' \qquad\qquad - \frac{2}{\sqrt{6}}z'. \end{cases}$$

Подставляя их в исходное уравнение, получаем:

$$5x'^2 + 5y'^2 - z'^2 + 30\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right) + 45 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем:

$$5x'^2 + \frac{30}{\sqrt{3}}x' + 5y'^2 - \frac{30}{\sqrt{2}}y' - z'^2 + \frac{30}{\sqrt{6}}z' + 45 = 0.$$

Выделяем полный квадрат (три раза):

$$5\left(x'^2 + 2x'\frac{3}{\sqrt{3}} + \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2\right) - 5\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 5\left(y'^2 - 2y'\frac{3}{\sqrt{2}} + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right) - 5\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 -$$

$$- \left(z'^2 - 2z'\frac{15}{\sqrt{6}} + \left(\frac{15}{\sqrt{6}}\right)^2\right) + \left(\frac{15}{\sqrt{6}}\right)^2 + 45 = 0.$$

$$5\left(x' + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 5\left(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(z' - \frac{15}{\sqrt{6}}\right)^2 + 45 = 0.$$

Переходим к новым координатам:

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{\sqrt{3}} + x'', \\ y' = \frac{3}{\sqrt{2}} + y''. \\ z' = \frac{15}{\sqrt{6}} + z''. \end{cases}$$

Почти каноническое уравнение поверхности имеет вид

$$5x''^2 + 5y''^2 - z''^2 + 45 = 0.$$

Чтобы получить каноническое уравнение, перейдем к координатам

$$x''' = z'', \qquad y''' = x'', \qquad z''' = y''$$

и выполним очевидные преобразования:

$$\frac{x'''^2}{(\sqrt{45})^2} - \frac{y'''^2}{3^2} - \frac{z'''^2}{3^2} = 1.$$

Это уравнение *двуполостного гиперболоида*. Подставляя, находим

$$\begin{cases} x = \ \ 3 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x''' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y''' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}z''', \\ y = \qquad \dfrac{1}{\sqrt{6}}x''' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y''' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}z''', \\ z = -6 - \dfrac{2}{\sqrt{6}}x''' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y'''. \end{cases}$$

Другой способ.

$$s_r = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -25, \qquad \overline{s}_{r+1} = \begin{vmatrix} 45 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 15 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1125,$$

откуда

$$\gamma = \frac{\overline{s}_{r+1}}{s_r} = 45.$$

$$5x''^2 + 5y''^2 - z''^2 + 45 = 0.$$

Пример 5.

$$x^2 + y^2 - 8z^2 - 4xy - 4xz - 4yz - 16x - 4y - 4z + 24 = 0$$

Записываем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 6\lambda^2 + 27\lambda = -(\lambda - 3)(\lambda + 9)\lambda.$$

Его корни — собственные числа матрицы A — суть

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = -9, \qquad \lambda_3 = 0.$$

Находим ортонормированный базис из собственных векторов. Их координаты записываем по столбцам в матрицу перехода

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{18}}y' + \frac{2}{3}z', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{18}}y' + \frac{2}{3}z', \\ z = \frac{4}{\sqrt{18}}y' - \frac{1}{3}z'. \end{cases}$$

Подставляя их в исходное уравнение, получаем:

$$3{x'}^2 - 9{y'}^2 - 16\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{18}}y' + \frac{2}{3}z'\right) - 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{18}}y' + \frac{2}{3}z'\right) - 4\left(\frac{4}{\sqrt{18}}y' - \frac{1}{3}z'\right) + 24 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем:

$$3{x'}^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}x' - 9{y'}^2 - \frac{36}{\sqrt{18}}y' - 12z' + 24 = 0.$$

Выделяем полный квадрат (два раза):

$$3\left({x'}^2 - 2x'\frac{2}{\sqrt{2}} + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2\right) - 3\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 9\left({y'}^2 + 2y'\frac{2}{\sqrt{18}} + \left(\frac{2}{\sqrt{18}}\right)^2\right) + 9\left(\frac{2}{\sqrt{18}}\right)^2 - 12z' + 24 = 0.$$

$$3\left(x' - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 9\left(y' + \frac{2}{\sqrt{18}}\right)^2 - 12\left(z' - \frac{10}{6}\right) = 0.$$

Переходим к новым координатам:

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{2}} + x'', \\ y' = -\frac{2}{\sqrt{18}} + y''. \\ z' = \frac{10}{6} + z''. \end{cases}$$

Почти каноническое уравнение поверхности имеет вид

$$3{x''}^2 - 9{y''}^2 - 12z'' = 0.$$

Чтобы получить каноническое уравнение, выполним очевидные преобразования:

$$\frac{{x''}^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{{y''}^2}{(\sqrt{2/3})^2} = 2z''.$$

Это уравнение *гиперболического параболоида*. Подставляя, находим

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{18}}y' + \frac{2}{3}z', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{18}}y' + \frac{2}{3}z', \\ z = -1 + \frac{4}{\sqrt{18}}y' - \frac{1}{3}z'. \end{cases}$$

Другой способ.

$$s_r = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -27, \qquad \overline{s}_{r+2} = \begin{vmatrix} 24 & -8 & -2 & -2 \\ -8 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 972,$$

откуда

$$\mu^2 = -\frac{\overline{s}_{r+2}}{s_r} = 36, \qquad \mu = -6.$$

$$3x''^2 - 9y''^2 - 12z'' = 0.$$

Пример 6. Изометрическим преобразованием приведем уравнение поверхности второго порядка

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + xz - 4yz + 2x + 6y - 2z + 4 = 0.$$

к каноническому виду.

Составим основную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее характеристический многочлен:

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 = \lambda^2(6 - \lambda).$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Матрица перехода к новому базису:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$6x'^2 - 2\sqrt{6}x' + 2\sqrt{3}z' + 2\sqrt{2}y' = 0.$$

$$6\left(x' - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}z' + \sqrt{2}y') + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} x'' &= x' - \tfrac{\sqrt{6}}{6}; \\ y'' &= -\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}z' + \sqrt{2}y') - \tfrac{2}{\sqrt{5}}; \\ z'' &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}z' - \sqrt{3}y'). \end{aligned}$$

$$6x''^2 - 2\sqrt{5}y'' = 0.$$

$$x''^2 = 2\frac{\sqrt{5}}{6}y''.$$

Итак, рассматриваемая поверхность есть параболический цилиндр с параметром

$$p = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

Другой способ. $r=1$, $s_r = 1+4+1 = 6$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{s}_{r+2} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -30,$$

откуда

$$\mu^2 = -\frac{\overline{s}_{r+2}}{s_r} = 5, \qquad \mu = -\sqrt{5}.$$

$$6x''^2 - 2\sqrt{5}y'' = 0.$$

Пример 7. Найти каноническое уравнение и расположение параболы, получаемой в сечении цилиндра $y^2 = 2x$ плоскостью $x+y+z=1$. Система координат прямоугольная.

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}u + \tfrac{\sqrt{6}}{6}v, \\ y &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}u + \tfrac{\sqrt{6}}{6}v, \\ z &= 1 \qquad\quad - \tfrac{\sqrt{6}}{3}v. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}u^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}uv + \frac{1}{6}v^2 - \sqrt{2}u - \frac{\sqrt{6}}{3}v = 0.$$

Домножим на 6:

$$3u^2 - 2\sqrt{3}uv + v^2 - 6\sqrt{2}u - 2\sqrt{6}v = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4).$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 0.$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

$$4u'^2 - 2\sqrt{6}u' - 6\sqrt{2}v' = 0.$$

$$4\left(u' - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 6\sqrt{2}v' + \frac{3}{2}.$$

$$\begin{cases} u' = \frac{\sqrt{6}}{4} + u'' \\ v' = -\frac{\sqrt{2}}{8} + v'', \end{cases}$$

Итак,

$$4u''^2 = 6\sqrt{2}v''.$$

Параметр параболы есть

$$p = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{5\sqrt{2}}{16} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}u'' + \tfrac{1}{2}v'', \\ v &= -\tfrac{3\sqrt{6}}{16} - \tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}v''. \end{aligned}$$

Вершина

$$\begin{aligned} x_0 &= \tfrac{5}{16} - \tfrac{3}{16} = \tfrac{1}{8}, \\ y_0 &= -\tfrac{5}{16} - \tfrac{3}{16} = -\tfrac{1}{2}, \\ z_0 &= 1 + \tfrac{3}{8} = \tfrac{11}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{\sqrt{6}}u'' - \tfrac{1}{\sqrt{2}}v'', \\ y &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\sqrt{6}}u'', \\ z &= \tfrac{11}{8} - \tfrac{1}{\sqrt{6}}u'' + \tfrac{1}{\sqrt{2}}v''. \end{aligned}$$

Направляющий вектор оси параболы $(-1, 0, 1)$
Уравнение оси:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8} - t, \\ y = -\frac{1}{2}, \\ z = \frac{11}{8} + t; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2y + 1 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

111. Определить тип кривой второго порядка. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение.

1) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 12 = 0$;
2) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 48 = 0$;
3) $4xy + 5 = 0$;
4) $6x^2 - 12xy + y^2 - 60 = 0$;
5) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x - 2y = 0$;
6) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0$;
7) $x^2 + 4xy + y^2 = 0$;
8) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 15 = 0$;
9) $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 0$.

112. Определить тип кривой второго порядка. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение.

1) $14x^2 + 12xy + 5y^2 + 4x - 8y - 7 = 0$;
2) $13x^2 - 14xy + 13y^2 - 6x - 6y - 3 = 0$;
3) $7x^2 + 6xy + 15y^2 + 8x - 24y + 4 = 0$;
4) $x^2 - 6xy + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$;
5) $5x^2 + 24xy + 12y^2 - 4x + 24y + 5 = 0$;
6) $3x^2 + 6xy - 5y^2 - 12x + 4y + 10 = 0$;
7) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2 = 0$;

8) $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$;
9) $9x^2 + 4y^2 + 12xy - 4x + 6y + 6 = 0$;
10) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 10y + 15 = 0$;
11) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;
12) $x^2 - 4xy - 6y + y^2 - 3 = 0$;
13) $2x^2 + 24xy - 5y^2 + 20x - 34y - 27 = 0$;
14) $x^2 - 2xy - 6y + 6x + y^2 + 3 = 0$;
15) $4x^2 - 4xy + y^2 - 24x + 12y + 32 = 0$;
16) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 19 = 0$;
17) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

113. Доказать, что кривая $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 18x - 36y + 9 = 0$ является эллипсом. Найти ее каноническое уравнение и каноническую систему координат. Найти полуоси эллипса, его фокальный параметр и эксцентриситет. В исходной системе записать координаты центра, фокусов, уравнения директрис. Изобразить кривую в исходной системе координат.

114. Доказать, что кривая $7x^2 + 48xy - 7y^2 - 34x + 62y - 23 = 0$ является гиперболой. Найти ее каноническое уравнение и каноническую систему координат. Найти полуоси гиперболы, ее фокальный параметр и эксцентриситет. В исходной системе записать координаты центра, фокусов, уравнения директрис. Изобразить кривую в исходной системе координат.

115. Доказать, что кривая $x^2+2xy+y^2-12x-4y+8 = 0$ является параболой. Найти ее каноническое уравнение, каноническую систему координат и фокальный параметр. В исходной системе записать координаты вершины, фокуса, уравнение директрисы. Изобразить кривую в исходной системе координат.

116. Определить тип поверхности второго порядка. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение.

1) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 2x + 8y + 16z - 31 = 0$;
2) $5x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 4x - 28y + 16z - 18 = 0$;
3) $3x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 2xy + 6xz + 18x + 4y + 24z + 38 = 0$;
4) $6x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 8x + 6y + 7 = 0$;
5) $5x^2 - y^2 - z^2 + 8xy - 8xz - 4yz + 26x - 2y - 22z + 11 = 0$;
6) $5x^2 + 5y^2 - 2z^2 - 4xy - 10xz - 10yz - 36x - 22y + 22z + 41 = 0$;
7) $x^2 + y^2 + z^2 - 8xy - 8xz - 8yz + 2x + 32y + 22z + 56 = 0$;
8) $4x^2 - 4y^2 - 5z^2 - 2xy + 12xz + 4yz - 18x + 6y - 6z - 12 = 0$;
9) $5x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 6xy + 6xz + 2yz - 20x - 12y - 12z + 20 = 0$;
10) $x^2 + 3y^2 - 5z^2 + 2xy + 10xz - 2yz - 26x + 14y + 38z - 63 = 0$;
11) $x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + yz + 4x + 2y + 4z - 6 = 0$;
12) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 8x - 8y - 16z + 36 = 0$;
13) $x^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 10x + 14z + 8 = 0$;
14) $x^2 - y^2 + 4xz - 4yz + 2x + 12y + 10z + 1 = 0$;
15) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6x + 6y = 0$;
16) $5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 4yz - 24x + 12y + 12z + 30 = 0$;
17) $x^2 + 6y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz - 8yz + 18x - 44y + 36z + 99 = 0$;

18) $5x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 10xz + 6yz + 40x - 12y - 28z + 77 = 0$;
19) $x^2 - 3y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 8yz - 2x + 24y + 4z - 13 = 0$;
20) $x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y - 2z + 6 = 0$;
21) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz - 8yz - 16x - 4y - 14z + 10 = 0$;
22) $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 4x + 4z - 10 = 0$;
23) $2x^2 - 2y^2 + z^2 - 4xy + 4xz + 12x - 8y + 10z + 17 = 0$;
24) $3x^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 40x - 20y + 50z + 125 = 0$;
25) $x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy - 4xz - 8yz + 10x + 20y - 28z + 33 = 0$;
26) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 10x + 10y - 10z + 13 = 0$.
27) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4xz + 8yz + 16x - 32y - 32z + 82 = 0$.

117. Определить тип квадрики. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение.
1) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 10x_1 - 10x_2 - 10x_3 - 10x_4 + 15 = 0$
2) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 - 4 = 0$
3) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$;
4) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 + 14 = 0$
5) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$

118. Определить тип кривой второго порядка, получающейся при пересечении конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ с указанной плоскостью. Найти координаты центра кривой (если он есть), фокуса (фокусов) и уравнение директрисы (директрис). Система координат прямоугольная.
1) $x + 2z = 1$; 2) $x + y + z = 1$; 3) $x + z = 1$.

119. Определить тип кривой второго порядка, заданной как пересечение поверхности второго порядка и плоскости. Найти координаты центра кривой (если он есть), фокуса (фокусов) и уравнение директрисы (директрис). Система координат прямоугольная.
1) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0; \\ 2x - y - 2z + 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2 = 0; \\ 2x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

16.8. Поверхности вращения, цилиндры, конусы

120. Доказать, что уравнение $f(x, y) = 0$ задает цилиндрическую поверхность с направляющей $f(x, y) = 0$, $z = 0$ и образующей, параллельной оси $\mathcal{O}z$.

121. Доказать, что уравнение $f(x^2 + y^2, z) = 0$ задает поверхность, образованную вращением кривой $f(y^2, z) = 0$, $x = 0$ вокруг оси $\mathcal{O}z$.

122. Найти уравнение и тип поверхности, получаемой вращением эллипса $2x^2 + y^2 = 1$ вокруг 1) оси $\mathcal{O}x$; 2) оси $\mathcal{O}y$.

123. Найти уравнение и тип поверхности, получаемой вращением гиперболы $x^2 - 2y^2 = 1$ вокруг 1) оси $\mathcal{O}x$; 2) оси $\mathcal{O}y$.

124. Найти уравнение поверхности, получаемой вращением параболы $y^2 = 2x$ вокруг 1) оси $\mathcal{O}x$; 2) оси $\mathcal{O}y$.

125. Найти уравнение и тип поверхности, получаемой вращением кривой $y^2 + z^2 - 6y + 8 = 0$ вокруг 1) оси $\mathcal{O}y$; 2) оси $\mathcal{O}z$.

126. Найти уравнения поверхностей, получающихся вращением гиперболы $xy = 1$ вокруг асимптот (*труба Торричелли*).

127. Найти параметрическое уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси $\mathcal{O}z$

1) кривой $z = f(x)$ $(x \geq 0)$;
2) кривой $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$.

128. Записать уравнение поверхности, образованной вращением прямой $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, $z = z_0 + \gamma t$ вокруг оси $\mathcal{O}z$

129. Доказать, что цилиндрическая поверхность с направляющей, заданной параметрическими уравнениями $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ и образующей, параллельной вектору (a, b, c), определяется уравнениями $x = f(t_1) + at_2$, $y = g(t_1) + bt_2$, $z = h(t_1) + ct_2$.

130. Доказать, что конус с направляющей, заданной параметрическими уравнениями $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ и с вершиной (x_0, y_0, z_0), определяется уравнениями $x = x_0 + t_1 \cdot f(t_2)$, $y = y_0 + t_1 \cdot g(t_2)$, $z = z_0 + t_1 \cdot h(t_2)$.

131. Записать векторное уравнение прямого кругового цилиндра, имеющего ось $r = r_0 + at$ и радиус R.

132. Записать векторное уравнение прямого кругового конуса с вершиной в начале координат, если его ось задана направляющим вектором a, а угол между осью и образующей равен α.

133. Записать векторное уравнение прямого кругового конуса, если его вершина имеет радиус-вектор r_0, ось — направляющий вектор a, а угол между осью и образующей равен α.

134. Найти уравнение прямого кругового цилиндра радиуса $\sqrt{2}$ с осью $x = t$, $y = -t$, $z = 1 + t$.

135. Найти уравнение прямого кругового цилиндра, проходящего через точку $(1, 1, 0)$ и имеющего ось $x = 2 + t$, $y = 3 + t$, $z = t$.

136. Найти уравнение круглого конуса с вершиной в начале координат и осью $x = 2t$, $y = 2t$, $z = -t$, зная, что угол между образующей конуса и осью равен $\arccos(1/\sqrt{3})$.

137. Найти уравнение и определить тип поверхности, образованной вращением

1) прямой $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $z = 3 + t$ вокруг оси $\mathcal{O}z$.
2) прямой $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 2 + t$ вокруг оси $\mathcal{O}z$.
3) прямой $x = 1 + t$, $y = 3 + t$, $z = t$ вокруг оси $\mathcal{O}z$.
4) прямой $x = y = 2z$ вокруг прямой $x = -y = z$.
5) вращением прямой $x = 1 + t$, $y = -1 + t$, $z = t$ вокруг прямой $x = 2 + t$, $y = 1 + t$, $z = -1 - t$;
6) (р) вращением прямой $x = 1 + t$, $y = -1 - t$, $z = 1$ вокруг прямой $x = t$, $y = 2t$, $z = 2 - t$.

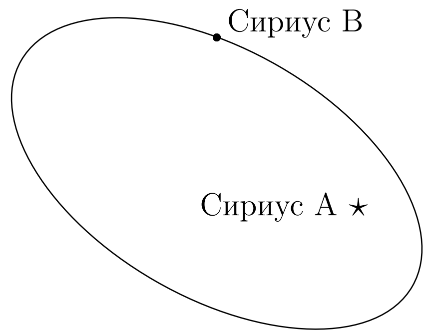

Рис. 16.5: Орбита Сириуса B, наблюдаемая с Земли

138. Определить поверхности, получаемые при вращении куба вокруг его диагонали. Выбрать систему координат и записать уравнения этих поверхностей.

16.9. Аффинные преобразования квадрик

В данном разделе система координат аффинная.

139. Определить тип (аффинный класс) кривой в зависимости от значения параметра k:
1) $x^2 + y^2 = k$;
2) $x^2 - y^2 = k$;
3) $kx^2 + y^2 = 1$;
4) $kx^2 + y^2 = k$.

140. Определить тип (аффинный класс) кривой:
1) $7x^2 + 7y^2 - 14x - 28y + 31 = 0$;
2) $2x^2 + 4x + 3y^2 - 18y + 20 = 0$;
3) $x^2 + 4x - 3y^2 + 6y = 0$;
4) $2x^2 + 8x - 3y^2 + 6y + 14 = 0$;
5) $4x^2 + 8x - 9y^2 - 36y - 32 = 0$;
6) $3x^2 + 12x + 2y + 10 = 0$.

141. В 1844 г. Ф. Бессель обнаружил, что Сириус двигается не прямо, а по некоторой кривой, похожей на синусоиду. Он предположил, что на самом деле Сириус представляет собой двойную звезду. Компаньона Сириуса увидел в телескоп в 1862 г. А. Кларк. Обнаруженная звезда получила название Сириуса B, а сам Сириус стал называться Сириус A. На рис. 16.5 представлено изображение этих звезд примерно так, как их увидел Кларк. Изображена орбита Сириуса B. Почему Сириус A не находится в ее фокусе?

142. Найти аффинное преобразование, при котором

1) эллипс $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{12}=1$ переходит в себя, при этом точка $(3,3)$ на нем переходит в $(-3,3)$;
2) гипербола $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$ переходит в себя, при этом точка $(6,2)$ на ней переходит в $(9/2,1/4)$;
3) парабола $y^2=4x$ переходит в себя, при этом точка $(1,2)$ переходит в $(0,0)$;

143. Описать все аффинные преобразования, при которых
1) окружность $x^2+y^2=r^2$ переходит в себя;
2) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ переходит в себя;
3) гипербола $xy=1$ переходит в себя;
4) гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ переходит в себя;
5) парабола $y^2=2px$ переходит в себя, при этом точка (x_0,y_0) на ней переходит в (X_0,Y_0);
6) парабола $y^2=2px$, $p>0$, переходит в $Y^2=2qX$, $q>0$, при этом точка (x_0,y_0) переходит в $(0,0)$;

144. Написать уравнение и определить тип кривой 2-го порядка, если она проходит через точки
1) $(0,0)$, $(0,-3)$, $(1,-2)$, $(-2,1)$, $(-3,0)$;
2) $(3,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(0,-5)$, $(2,-3)$;
3) $(-1,0)$, $(0,2)$, $(0,-1)$, $(-2,0)$, $(-5,2)$;
4) $(0,-2)$, $(1,0)$, $(2,-1)$, $(0,2)$, $(1,2)$;
5) $(0,1)$, $(0,-8)$, $(-4,0)$, $(8,1)$, $(8,0)$;
6) $(-4,0)$, $(-2,1)$, $(0,2)$, $(2,3)$, $(0,0)$.

145. Определить тип (аффинный класс) поверхности в зависимости от значения параметра k:
1) $x^2+y^2+z^2=k$;
2) $x^2+y^2-z^2=k$;
3) $kx^2+y^2+z^2=1$;
4) $kx^2+y^2=z$;
5) $x^2+y^2=k$;
6) $x^2-y^2=k$.

146. Определить тип (аффинный класс) поверхности:
1) $2x^2+y^2+3z^2-4x+4y+5=0$;
2) $3x^2+y^2-z^2-6x+4y-2z-3=0$;
3) $x^2-4y^2-4z^2+4x-8y+8z-8=0$;
4) $x^2-2y^2-2z^2+2x-8y+12z-25=0$;
5) $3x^2-3y^2+12x+6y-6z+15=0$;
6) $2x^2-2y^2+4x-8y-5z+9=0$;
7) $3x^2+2z^2+6x+8z-1=0$.

147. Определить тип (аффинный класс) поверхности:

1) $xy = 1$;
2) $xy = 0$;
3) $xy = -1$;
4) $xy = z$.

148. Определить тип (аффинный класс) поверхности:
1) $(x + y + z)(x - y - z) = 1$;
2) $(x + y + z)(x + y - z) = x - y - z$;
3) $(x + y + z)(x + y - z) = x + y$;
4) $(x + y + z + 1)^2 + (x + y - z - 1)^2 = 100$;
5) $(x + 2y + z + 1)^2 + (x + 2y - z - 1)^2 + (x - y - z - 1)^2 = 1$;
6) $(x + 2y + z + 1)^2 + (x + 2y - z - 1)^2 + (x - 2y)^2 = 1$;
7) $(x + y + 2z + 1)^2 + (x + y - 2z - 1)^2 - (x - y - 2z - 2)^2 = 1$;
8) $(x + y + 2z + 1)^2 + (x + y - 2z - 1)^2 - (x - y - 3)^2 = 1$;
9) $(x + 2y + 3z + 2)^2 - (x + 2y - 3z - 3)^2 - (x - y - z - 1)^2 = 1$;
10) $(x + y + z + 1)^2 + (x + y - z - 1)^2 = x - y - z$;
11) $(x + y + z + 1)^2 - (x + y - z - 1)^2 = x - y - z$;
12) $(x + y + z + 1)^2 + (x + y + z + 2)^2 = 1$.

149. В аффинной системе координат однополостный гиперболоид задан уравнением $(2x - y + 3z - 1)^2 + (x + y - 2z - 2)^2 - (3x + y + 2z + 1)^2 = 100$. Найти уравнение его асимптотического конуса.

150. В аффинной системе координат поверхность второго порядка задана уравнением, зависящим от параметра k. Определить тип (аффинный класс) поверхности в зависимости от параметра.
1) $6x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy + 6xz + 2yz - 8x - 14y - 2z = k$;
2) $2x^2 + 5y^2 - 3z^2 + 6xy + 2xz + 2yz + 2x + 6y + 2z = k$;
3) $-3x^2 - 3z^2 + 4xy + 2xz - 4yz - 10x + 12y + 2z = k$;
4) $18x^2 + 2y^2 + z^2 + 12xy + 6xz + 2yz + 5x + y - 4z = k$;
5) $z^2 + 4xz + 2yz - 17x - 8y - 6z = k$;
6) $kx^2 + 8y^2 + 10z^2 + 8yz - 8y - 4z = 0$;
7) $kx^2 - 5y^2 + 2yz + 8z - 22y + 2 = 0$;
8) $kx^2 - 8y^2 - 3z^2 + 10yz + 10y - 8z + 3 = 0$;
9) $8x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 8xy + 4xz + 2yz + 4x + ky + 10z = 0$;
10) $-3z^2 - 6xz - 6yz + kx - 6y + 13 = 0$.

16.10. Задания для контрольных работ

151. Определить тип поверхности (аффинный класс) поверхности в зависимости от значения параметра k. Если поверхность центральная, то найти ее центр. Если поверхность распадается на плоскости, то записать уравнения этих плоскостей.
1) $kx^2 - 8z^2 - 16yz + 12y + 2z + 5 = 0$;
2) $x^2 + 17y^2 + 4z^2 + 10xy + 4xz + 8yz + 6x + 14y = k$;

3) $9x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 8xy + 12xz + 6yz + 2x + 2y + 6z = k$;
4) $kx^2 + 5y^2 - 3z^2 + 14yz - 2y + 10z - 3 = 0$;
5) $8x^2 + 5y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 4yz - x + 4y - 6z = k$;
6) $-3x^2 + 3y^2 - 5z^2 + 8xy + 8xz - 14yz + kx - 2y - 6z - 4 = 0$;
7) $-x^2 - y^2 - 4z^2 - 2xy - 4xz - 4yz + 4x + 4y - 10z = k$;
8) $3x^2 + 5z^2 + 6xy - 16xz - 2yz + kx + 4z - 4 = 0$;
9) $kx^2 - 8y^2 - 3z^2 + 14yz + 8y - 2z = 0$;
10) $3x^2 - 3z^2 - 2xy + 2yz - 13x + 7y - 9z = k$;
11) $7x^2 - 9y^2 - 7z^2 - 2xy - 6xz - 10yz + 14x + 2y - 16z = k$;
12) $x^2 + 7y^2 + 5z^2 + 6xy + 6xz + 12yz + 8x + 14y + 10z = k$;
13) $3y^2 + 5z^2 + 6xy + 2xz + 16yz + kx - 10y - 8z = 0$;
14) $kx^2 - 3y^2 - 14yz - 8z^2 + 6y + 14z - 3 = 0$;
15) $kx^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2yz - 8y - 10z + 11 = 0$;
16) $-8x^2 + 8y^2 - 5z^2 + 22xz - 18yz + 6x - 2y - 6z + kx - 4 = 0$;
17) $+5x^2 + 2y^2 + 13z^2 + 2xy + 16xz + 2yz - 6x + ky - 8z + 1 = 0$;
18) $8x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xz - 6yz + 4x + ky + 10z = 0$;
19) $kx^2 - 3y^2 - 8z^2 - 14yz + 6y + 14z - 3 = 0$;
20) $3x^2 - 3y^2 + 4xz + 4yz - 9x + 9y - 11z = k$;
21) $3x^2 + 2y^2 + 13z^2 - 4xy + 10xz - 10yz - 8x + 6y - 16z = k$;
22) $kx^2 + 10y^2 + 8z^2 + 8yz - 14y - 4z = 0$;
23) $7x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 12xz + 6yz + 4x + 4y + 2z = k$;
24) $kx^2 - 3y^2 - 8z^2 - 14yz + 6y + 14z - 3 = 0$;
25) $kx^2 + 5y^2 + 8z^2 + 4yz - 14y - 8z + 9 = 0$;
26) $3x^2 - 8z^2 - 2xy - 2xz + 4yz - 11x + 5y - 8z = k$;
27) $4x^2 - 9y^2 - 4z^2 - 4xy - 4yz + 18x + 2y - 14z = k$;
28) $kx^2 - 3y^2 - 8z^2 - 14yz + 6y + 14z - 3 = 0$;
29) $8x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy + 4xz - 2yz - x - 6z = k$;
30) $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 10xy + 6xz - 6yz - 7x + 5y = k$.

152. Кривая задана в прямоугольной декартовой системе координат своим уравнением. Определить ее тип. Найти каноническую прямоугольную систему координат и каноническое уравнение. В исходной системе координат найти координаты центра кривой (если он есть), фокуса (фокусов) и уравнение директрисы (директрис). Если кривая представляет собой прямую или пару прямых, то найти в исходной системе координат линейные уравнения этих множеств. Изобразить кривую в исходной системе координат.

1) $4x^2 + 24xy + 11y^2 - 40x - 70y + 55 = 0$;
2) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 26x + 22y + 27 = 0$;
3) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 28x - 26y + 32 = 0$;
4) $2x^2 + 6xy + 10y^2 - 14x - 32y + 19 = 0$;
5) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 20x - 40y + 35 = 0$;
6) $4xy + 3y^2 - 4x - 14y - 25 = 0$;
7) $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 32x - 4y + 24 = 0$;
8) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x - 20y + 49 = 0$;

9) $5x^2 - 16xy + 5y^2 - 4x + 22y - 46 = 0$;
10) $18x^2 + 24xy + 11y^2 - 96x - 70y + 104 = 0$;
11) $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 44x + 14y + 37 = 0$;
12) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 100x - 50y + 150 = 0$;
13) $5x^2 - 12xy - 8x + 24y + 5 = 0$;
14) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 8x + 26y - 41 = 0$;
15) $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x + 6y = 0$;
16) $9x^2 + 6xy + y^2 + 26x + 2y + 14 = 0$;
17) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 22x - 26y + 27 = 0$;
18) $2x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x - 8y - 5 = 0$;
19) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 48x - 24y + 132 = 0$;
20) $-4xy + 3y^2 - 4x + 2y - 41 = 0$;
21) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 40x - 20y + 40 = 0$;
22) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2x + 14y - 13 = 0$;
23) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 40x + 10y - 104 = 0$;
24) $5x^2 + 16xy + 5y^2 - 36x - 42y + 18 = 0$;
25) $11x^2 - 24xy + 18y^2 + 26x - 48y + 32 = 0$;
26) $7x^2 - 16xy - 23y^2 - 12x + 78y - 52 = 0$;
27) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 20x - 40y + 4 = 0$;
28) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
29) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 18x - 36y + 9 = 0$;
30) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

153. Поверхность задана в декартовой прямоугольной системе координат уравнением, зависящим от параметра α. Определить тип поверхности в зависимости от α. При указанном значении α найти каноническую прямоугольную систему координат и каноническое уравнение. Если поверхность имеет центр найти центр в исходной системе координат. Если поверхность представляет собой прямую, плоскость или пару плоскостей, то найти линейные уравнения этих множеств в исходной системе координат.

1) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - 4x - 14y + 10z + \alpha = 0$; $\alpha = -1$;
2) $5x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x - 16y + 6z + \alpha = 0$; $\alpha = -54$;
3) $6x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 8x - 30y - 40z + \alpha = 0$; $\alpha = 75$;
4) $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 6x - 2y - 8z + \alpha = 0$; $\alpha = 11$;
5) $6x^2 + 6y^2 + 5z^2 + 8xy + 10xz + 10yz + 15x + 7y + 8z + \alpha$; $\alpha = 13$;
6) $x^2 + y^2 - 5z^2 - 2xy - 6xz + 6yz + 10x - 6y - 24z + \alpha$; $\alpha = 12$;
7) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz + 2x + 26y - 28z + \alpha = 0$; $\alpha = 13$;
8) $2x^2 + y^2 - 2z^2 - 4xy + 4xz - 8x + 6y - 4z + \alpha = 0$; $\alpha = 15$;
9) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - x + y + 2z + \alpha = 0$; $\alpha = -2$;
10) $3x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 18x + 14y + 24z + \alpha = 0$; $\alpha = 29$;
11) $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy - 4xz - 2yz + 18x - 18y + 18z + \alpha = 0$; $\alpha = -93$;
12) $2x^2 - y^2 - z^2 - 8xy + 8xz + 2yz - 24x - 20y + 28z + \alpha$; $\alpha = -64$;
13) $4x^2 - y^2 - 4z^2 + 12xy + 6xz + 4yz - 26x - 24y + 18z + \alpha = 0$; $\alpha = 31$;
14) $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 20x - 4y + 4z + \alpha = 0$; $\alpha = 54$;

15) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+4x+4y+4z+\alpha=0$; $\alpha=-2$;
16) $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz+2x-4y-2z+\alpha=0$; $\alpha=1$;
17) $3x^2-5y^2+3z^2+6xy-2xz+6yz-14x+10y+2z+\alpha=0$; $\alpha=31$;
18) $x^2-5y^2-z^2+4xy-6yz-2x+2y+2z+\alpha=0$; $\alpha=14$;
19) $5x^2+2y^2+2z^2+6xy-2xz+14x+10y+2z+\alpha=0$; $\alpha=-1$;
20) $5x^2+5y^2+5z^2+6xy-6xz-6yz+22x+18y-26z+\alpha=0$; $\alpha=15$;
21) $3x^2+y^2+3z^2+2xy+2xz-2yz-3x-4y-13z+\alpha=0$; $\alpha=3$;
22) $5x^2+5y^2+8xy-12xz+12yz-38x+20y+60z+\alpha=0$; $\alpha=123$;
23) $5x^2+5y^2+4z^2-10xy+12xz-12yz-10x+2y-20z-\alpha=0$; $\alpha=-15$
24) $9x^2+16z^2-24xz-4x+5y-3z+\alpha=0$; $\alpha=22$;
25) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz-7x+19y-13z+\alpha=0$; $\alpha=16$;
26) $6x^2+3y^2+6z^2+4xy-8xz-4yz-4x+2y+8z+\alpha=0$; $\alpha=-17$;
27) $x^2+y^2+6z^2-8xy+12xz-12yz-50x+62y-84z+\alpha=0$; $\alpha=225$;
28) $x^2-5y^2-5z^2-8xy-8xz+4yz-6x+38y+10z+\alpha=0$; $\alpha=30$;
29) $x^2+z^2+4xy-2xz-4yz-4x-8y+4z+\alpha=0$; $\alpha=8$;
30) $x^2+4y^2+4z^2+4xy-4xz-8yz+4x+8y-8z+\alpha=0$; $\alpha=13$.

154. Определить тип кривой второго порядка. Найти координаты ее центра (если он есть), фокуса (фокусов) и уравнение директрисы (директрис). Система координат прямоугольная.

1) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ y-z=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ x+y+z=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ y-2z=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ y+z=2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ 2y-z=2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ y-3z=-2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ y+z=2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ 2y+z=3; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ y+2z=1; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+y^2=2z, \\ x+2y=1; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x^2+y^2=2z, \\ z-2y=1; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x^2+y^2=2z, \\ x-2y=2; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2+y^2=2z, \\ z-y=2; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x^2+y^2=2z, \\ x-y=1; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x^2+y^2=2z, \\ y+z=1; \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2-y^2=2z, \\ x+2y=1; \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x^2-y^2=2z, \\ y+z=3; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x^2-y^2=2z, \\ x-y=2; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x^2-y^2=2z, \\ x+z=2; \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x^2-y^2=2z, \\ x-2y=-2; \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x^2-y^2=2z, \\ x+z=4; \end{cases}$

22) $\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ y=z; \end{cases}$ 23) $\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ x-y=3; \end{cases}$ 24) $\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ y+2z=1; \end{cases}$

25) $\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ x+y=2; \end{cases}$ 26) $\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ y-2z=2; \end{cases}$ 27) $\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ x+y+z=0; \end{cases}$

28) $\begin{cases} x^2 = 2y, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$ 29) $\begin{cases} x^2 = 2y, \\ x + y - z = 1; \end{cases}$ 30) $\begin{cases} x^2 = 2y, \\ x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$

Ответы, указания, решения

1. Сформулированное необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять точка $\mathcal{M}(x, y)$ на кривой, запишем в виде $|\mathcal{AM}| + |\mathcal{BM}| = 2a$, или в координатах

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{1}$$

Переносим второе слагаемое из левой части в правую:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \tag{2}$$

и возводим обе части уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2. \tag{3}$$

Обе части уравнения (2) неотрицательны, поэтому (2) эквивалентно (3). Раскроем скобки:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

После очевидных преобразований получаем

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{4}$$

Снова возводим в квадрат обе части:

$$(a^2 - xc)^2 = a^2\Big((x-c)^2 + y^2\Big). \tag{5}$$

Обе части уравнения (4) неотрицательны (в частности $a^2 - xc \geq 0$, так как из (1) следует, что $x \leq a \leq a^2/c$), поэтому (4) эквивалентно (5). После простых преобразования из (5) получаем

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

откуда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{6}$$

Заменяя $b^2 = a^2 - c^2$, получаем каноническое уравнение эллипса.

4. Окружность $x^2 + y^2 = a^2 - c^2$.

5. Пара параллельных прямых $x = \pm\dfrac{a}{c}$.

6. Прямая — срединный перпендикуляр к отрезку $\mathcal{AB}$ при $k = 1$; окружность с центром в точке $\left(\dfrac{a - k^2b}{1 - k^2}, 0\right)$, радиуса $\dfrac{k \cdot |b - a|}{|1 - k^2|}$ при $k \neq 1$.

Решение: Имеем $\mathcal{AM} = k \cdot \mathcal{BM}$, где $\mathcal{M}(x, y)$ — произвольная точка, удовлетворяющая условию. Итак,

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = k \cdot \sqrt{(x-b)^2 + y^2}. \tag{7}$$

Обе части уравнения (7) неотрицательны при любых значениях входящих в него переменных, поэтому возведение его обеих частей в квадрат приводит к эквивалентному уравнению:

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2\left((x-b)^2 + y^2\right).$$

После преобразований получаем

$$x^2(1-k^2)+y^2(1-k^2)-2(a-k^2b)x=k^2b^2-a^2. \tag{8}$$

Если $k=1$, то это равенство переходит в $2(a-b)x=a^2-b^2$, откуда $x=\dfrac{a+b}{2}$. Это уравнение срединного перпендикуляра к отрезку $\mathcal{AB}$. Если $k\neq 1$, то делим обе части уравнения (8) на $(1-k^2)$:

$$x^2+y^2-2\frac{a-k^2b}{1-k^2}x=\frac{k^2b^2-a^2}{1-k^2},$$

откуда после выделения полного квадрата получаем

$$\left(x-\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right)^2+y^2=\frac{k^2b^2-a^2}{1-k^2}+\left(\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right)^2,$$

или

$$\left(x-\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right)^2+y^2=\frac{k^2(b-a)^2}{(1-k^2)^2}.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $\left(\dfrac{a-k^2b}{1-k^2},\,0\right)$, радиуса $\dfrac{k\cdot|b-a|}{|1-k^2|}$.

11. Обозначая φ угол $\mathcal{ABO}$, получаем уравнения $x=a\cos\varphi$, $x=b\sin\varphi$, откуда выводим уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

12. В полярной системе координат с полюсом $\mathcal{A}$ и полярной осью, направленной в противоположную сторону от $\mathcal{AB}$, кривая имеет уравнение $r=\dfrac{|\mathcal{AB}|}{1-2\cos\varphi}$, $\arccos\dfrac{1}{2}<\varphi<2\pi-\arccos\dfrac{1}{2}$. В полярной системе координат с полюсом $\mathcal{A}$ и осью $\mathcal{AB}$ кривая имеет уравнение $r=\dfrac{|\mathcal{AB}|}{1+2\cos\varphi}$, $-\pi+\arccos\dfrac{1}{2}<\varphi<\pi-\arccos\dfrac{1}{2}$. Это левая (если точка $\mathcal{A}$ лежит левее $\mathcal{B}$) ветвь гиперболы с фокусом $\mathcal{A}$, эксцентриситетом 2, фокальным параметром $|\mathcal{AB}|$, действительной полуосью $|\mathcal{AB}|/3$ и мнимой полуосью $|\mathcal{AB}|/\sqrt{3}$.

13. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

14. $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$; полярное уравнение $r=a|\sin 2\varphi|$.

15. 1) $(x-3)^2+(y+1)^2=4$; 2) $(x+\frac{2}{5})^2+(y-\frac{1}{5})^2=4$; 3) $(x+\frac{5}{3})^2+(y+\frac{4}{3})^2=\frac{8}{9}$;
4) «мнимая окружность» $(x-2)^2+(y+2)^2=-5$ (пустое множество).

16. $A=B\neq 0$, $C^2+D^2>AE$, радиус $\sqrt{C^2+D^2-AE}/|A|$, центр $(-C/A,\,-D/A)$.

17. 1) центр $(-3,-2)$, радиус 5; 2) центр $(2,-2)$, радиус $\sqrt{34}$.

19. 1) $|Ax_0+By_0+C|<r\sqrt{A^2+B^2}$;
2) $|Ax_0+By_0+C|=r\sqrt{A^2+B^2}$;
3) $|Ax_0+By_0+C|>r\sqrt{A^2+B^2}$.

20. $3x-4y+7=0$.

21. 1) $3x+4y-14=0$, $7x-24y-66=0$; 2) $4x+3y-8=0$, $4x+3y+42=0$.

22. $x=1$, $y=2$, $3x+4y-5=0$, $4x-3y-10=0$.

23. Будем искать уравнение окружности в виде $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$, тогда центр окружности — в точке $(-A,-B)$. Имеем $-A-2B-1=0$, $5+2A-4B+C=0$, $25+8A-6B+C=0$, откуда находим $A=-3$, $B=1$, $C=5$. *Ответ:* $x^2+y^2-6x+2y+5=0$.

24. $4x^2+4y^2+(3\pm 2\sqrt{10})x-2y=0$.

25. $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{121}{8}$, $\left(x+\frac{13}{12}\right)^2+(y-3)^2=\frac{121}{288}$, $(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{121}{32}$, $(x+2)^2+\left(y-\frac{29}{6}\right)^2=\frac{121}{72}$.

26. $3x-4y+7=0$.

27. 1) $3x+4y-14=0$, $7x-24y-66=0$; 2) $4x+3y-8=0$, $4x+3y+42=0$.

28. Фокусы совпадают с центром, эксцентриситет равен 0, директрис нет («ушли в бесконечность»).

29. Формулы для выражения одних параметров эллипса через другие:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{b^2+c^2} = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{b^2}{p} = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{p+\sqrt{p^2+4c^2}}{2} = \frac{p}{1-\varepsilon^2};\\
b &= \sqrt{a^2-c^2} = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{ap} = \frac{c\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{p^2+p\sqrt{p^2+4c^2}}{2}} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}};\\
c &= \sqrt{a^2-b^2} = a\varepsilon = a\sqrt{1-\frac{p}{a}} = \frac{b\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{b\sqrt{b^2-p^2}}{p} = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2};\\
\varepsilon &= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{b^2-p^2}}{b} = \sqrt{1-\frac{p}{a}} = \frac{-p+\sqrt{4c^2+p^2}}{2c};\\
p &= \frac{b^2}{a} = \frac{a^2-c^2}{a} = a(1-\varepsilon^2) = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}} = b\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{c(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

30. $\varepsilon=4/5$, $p=9/5$, $\mathcal{F}_{1,2}(\pm4,\,0)$, директрисы $x=\pm25/4$.

31. 1) Приводим уравнение к виду $\frac{(x+2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$, откуда $\mathcal{C}(-2,\,3)$, $a=2\sqrt{2}$, $b=2$, $\mathcal{F}_1(0,\,3)$, $\mathcal{F}_2(-4,\,3)$, $\varepsilon=\sqrt{2}/2$, директрисы $x=2$, $x=-6$;

2) Приводим уравнение к виду $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{27}=1$, откуда $\mathcal{C}(3,\,-1)$, большая полуось $a=3\sqrt{3}$, малая полуось $b=3$, $\varepsilon=\sqrt{6}/3$, $\mathcal{F}_1(3,\,-1+3\sqrt{2})$, $\mathcal{F}_2(3,\,-1+3\sqrt{2})$, директрисы $y=-1+9\sqrt{2}/2$, $y=-1-9\sqrt{2}/2$.

32. 1) $q=a(1-\varepsilon)$, $Q=a(1+\varepsilon)$; 2) $a=\frac{q+Q}{2}$, $b=\sqrt{qQ}$.

33. $a=149{,}598$ млн. км., $b=149{,}577$ млн. км., $\varepsilon=0{,}0167$.

34. Имеем $c=a\varepsilon$, $b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}\approx a\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)$. Так как для Марса $\varepsilon\approx0{,}1$, то смещение c фокуса от центра составляет около 10% от большой полуоси a и это различимо глазом. Малая же ось b отличается от большой полуоси a примерно на долю $\frac{1}{2}\varepsilon^2=0.005$, т. е. на 0,5%, что глазу не заметно. Точные значения: $c=21{,}289$ млн. км., $b=226{,}948$ млн. км.

35. $(-3,\,\pm1)$.

36. 1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$; 2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$; 3) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$; 4) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$;

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 6) $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$; 7) $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$; 8) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

37. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

38. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$, $a>|c|$; 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{d^2y^2}{a^2(d^2-a^2)}=1$, $0<a<|d|$.

39. 1) четыре точки $(\pm2\sqrt{6}/3,\,\pm\sqrt{3}/3)$; 2) две точки $(0,\,\pm1)$; 3) нет таких точек.

40. 1) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x - 8y + 2 = 0$;
2) $10x^2 - 12xy + 5y^2 - 20x + 12y - 4 = 0$;
3) $4x^2 - 2xy + 4y^2 - 6x - 6y - 9 = 0$;
4) $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 28x - 34y + 29 = 0$;
5) $16x^2 - 4xy + 19y^2 - 4x - 42y + 19 = 0$;
6) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$;
7) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 24x + 24y + 56 = 0$;
8) $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 10x - 20y - 75 = 0$.

41. *Решение: 1-й способ.* Из курса математического анализа известно, что касательная к кривой $F(x, y) = 0$ в точке $(x_0,\, y_0)$ имеет уравнение $F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$. Для эллипса $F(x, y) \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$, откуда $F'_x(x_0, y_0) = \dfrac{2x_0}{a^2}$, $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{2y_0}{b^2}$, поэтому касательная имеет уравнение $\dfrac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$. Раскрывая скобки и учитывая, что $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, после несложных преобразований получаем $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

2-й способ. Пусть $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$ — параметрические уравнения касательной. Подставляя их в уравнение эллипса, получаем квадратное уравнение $\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2}\right) t^2 + 2\left(\dfrac{x_0\alpha}{a^2} + \dfrac{y_0\beta}{b^2}\right) t + \left(\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0$. Так как точка $(x_0,\, y_0)$ лежит на эллипсе, то свободный член этого уравнения равен 0. Для того, чтобы эта точка являлась точкой касания, необходимо и достаточно, чтобы уравнение имело единственный корень $t = 0$, что эквивалентно условию $\dfrac{x_0\alpha}{a^2} + \dfrac{y_0\beta}{b^2} = 0$. Таким образом, направляющий вектор $(\alpha,\, \beta)$ касательной перпендикулярен вектору $\left(\dfrac{x_0}{a^2},\ \dfrac{y_0}{b^2}\right)$, откуда получаем уравнение касательной $\dfrac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$. Раскрывая скобки и учитывая, что точка $(x_0,\, y_0)$ лежит на эллипсе, получаем требуемое уравнение.

42. $\dfrac{x\sqrt{15}}{16} + \dfrac{y}{12} = 1$.

43. 1) $y = -1$ и $3x + 8y = 10$; 2) $x + y = \sqrt{5}$ и $x + y = -\sqrt{5}$.

44. $x + y = 5$ и $x - 4y = 10$.

45. $2x - y = \pm 12$.

46. $\pm x \pm y = \sqrt{a^2 + b^2}$.

47. $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

48. $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{10} = 1$.

49. Два решения: $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{5} = 1$, $\dfrac{4x^2}{45} + \dfrac{y^2}{20} = 1$.

50. $3x + 2y = \pm 7$, $3x - 2y = \pm 7$.

51. Четыре касательных $\pm x \pm y = \sqrt{a^2 + b^2}$.

52. 1) касательная $x = y + 1$ в точке $(0,\, -1)$, касательная $x = y - 3$ в точке $(-2,\, 1)$;
2) касательная $y = -3$ в точке $(-3,\, -1)$, касательная $x = y + 1$ в точке $(0,\, -1)$;
3) таких касательных нет, так как точка находится внутри эллипса.

53. 1) касательная $3x - y + 10 = 0$ в точке $(-4,\, -2)$, касательная $x - 3y - 10 = 0$ в точке $(-2,\, -4)$;
2) $5x + 9y = 26$ (точка лежит на эллипсе);
3) таких касательных нет, так как точка находится внутри эллипса;
4) касательная $13x - 15y = 42$ в точке $(0,\, -14/5)$, $13x - 15y = -38$ в точке $(-2,\, 4/5)$;
5) касательная $9x + 5y = 26$ в точке $(2,\, 8/5)$, $9x + 5y = -54$ в точке $(-4,\, -18/5)$.

54. Окружность $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

55. Окружность $\dfrac{x^2}{(a/3)^2} + \dfrac{y^2}{(b/3)^2} = 1$.

56. $\dfrac{x^2}{(a/2)^2} + \dfrac{(y-b/2)^2}{(b/2)^2} = 1$.

57. Эллипс, фокусами которого являются центр окружности и точка $\mathcal{A}$.

58. Формулы для выражения одних параметров гиперболы через другие:

$$a = \sqrt{c^2-b^2} = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} = \frac{b^2}{p} = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{p+\sqrt{p^2+4c^2}}{2} = \frac{p}{\varepsilon^2-1};$$

$$b = \sqrt{c^2-a^2} = a\sqrt{\varepsilon^2-1} = \sqrt{ap} = \frac{c\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{p^2+p\sqrt{p^2+4c^2}}{2}} = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}};$$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = a\varepsilon = a\sqrt{1+\frac{p}{a}} = \frac{b\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} = \frac{b\sqrt{b^2+p^2}}{p} = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2-1};$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{c^2-b^2}} = \frac{\sqrt{b^2+p^2}}{b} = \sqrt{1+\frac{p}{a}} = \frac{-p+\sqrt{4c^2+p^2}}{2c};$$

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2-a^2}{a} = a(\varepsilon^2-1) = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}} = b\sqrt{\varepsilon^2-1} = \frac{c(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon}.$$

59. $\varepsilon = 5/3$, $p = 16/5$, $\mathcal{F}_{1,2}(\pm 5,\, 0)$, директрисы $x = \pm 9/5$, асимптоты $4x = \pm 3y$.

60. $\sqrt{2}$

61. 1) $a = b = \sqrt{2}$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, $\mathcal{F}_1(\sqrt{2},\, \sqrt{2})$, $\mathcal{F}_2(-\sqrt{2},\, -\sqrt{2})$, директрисы $x + y = \pm\sqrt{2}$, асимптоты $x = 0$, $y = 0$;
2) $a = b = 2$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, $\mathcal{F}_1(2,\, -2)$, $\mathcal{F}_2(-2,\, 2)$, директрисы $x - y = \pm 2$, асимптоты $x = 0$, $y = 0$;

62. 1) Приводим уравнение к виду $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$, откуда $\mathcal{C}(2,\, 1)$, действительная полуось $a = 3$, мнимая полуось $b = 4$, $\varepsilon = 5/3$, $\mathcal{F}_1(7,\, 1)$, $\mathcal{F}_2(-3,\, 1)$, директрисы $x = 19/5$, $x = 1/5$, асимптоты $4x - 3y = 5$, $4x + 3y = 11$.
2) Приводим уравнение к виду $(x-3)^2 - (y-1)^2 = -1$, откуда $\mathcal{C}(3,\, 1)$, полуоси $a = b = 1$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, $\mathcal{F}_1(3,\, 1+\sqrt{2})$, $\mathcal{F}_2(3,\, 1-\sqrt{2})$, директрисы $y = 1 + 1/\sqrt{2}$, $y = 1 - 1/\sqrt{2}$, асимптоты $x + y = 4$, $x - y = 2$.

63. 1) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$; 2) $\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{6} = 1$; 3) $\dfrac{x^2}{7} - \dfrac{y^2}{14} = 1$; 4) $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; 5) $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{2} = 1$;
6) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ и $\dfrac{x^2}{135/4} - \dfrac{y^2}{135} = 1$; 7) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{20} = 1$; 8) $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; 9) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$.

64. $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = -1$.

65. $(4,\, \pm\sqrt{15})$.

66. $\dfrac{2ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$ $(b > a)$.

67. 1) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1$, $0 < a < |c|$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{d^2y^2}{a^2(a^2-d^2)} = 1$, $a > |d|$; 3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{k^2a^2} = 1$.

68. 1) четыре точки $(\pm\sqrt{6},\, \pm\sqrt{2})$; 2) четыре точки $(\pm\sqrt{10},\, \pm\sqrt{6})$.

69. 1) $xy = 1/2$;
2) $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 10y - 8 = 0$;
3) $4x^2 + 20xy + 19y^2 - 28x - 56y + 40 = 0$;
4) $2x^2 - 4xy - y^2 - 20x + 2y + 17 = 0$;
5) $x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 10y + 7 = 0$;

6) $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 12x + 18y + 8 = 0$;
7) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 36x + 28y + 44 = 0$;
8) $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 6x - 8y + 53 = 0$.

71. $x - 2y - 2 = 0$.

72. 1) касательная $2x - y = 7$ в точке $(4, 1)$ и $2x - 5y = 7$ в точке $(8, 5)$;
2) касательная $x = \sqrt{14}$ в точке $(\sqrt{14}, 0)$ (решение единственное, так как заданная точка лежит на асимптоте);
3) касательная $8x - 11y = 7$ в точке $(16, 11)$ и $8x - 11y = -7$ в точке $(-16, -11)$.

73. Касательная $x = 1$ в точке $(1, 0)$ и $3x + y = -1$ в точке $(-3, 8)$.

74. Две касательные $x + 2y = \pm 2$ в точках $(8, -3)$, $(-8, 3)$.

75. $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

76. $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{2} = 1$, точки касания $(3, 1)$, $(-9, 5)$.

77. Два решения: $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, $\dfrac{x^2}{5} - 4y^2 = 1$.

78. $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$.

79. Четыре касательных $\pm x \pm y = 1$.

80. Четыре касательных $\pm x \pm 3y = 12$.

81. 1) касательная $x + 4y = 7$ в точке $(7,\ 0)$, касательная $x + 4y = 3$ в точке $(-13,\ 4)$;
2) касательная $x = -1$ в точке $(-1,\ 4)$, касательная $x + 4y = 7$ в точке $(7,\ 0)$;
3) таких касательных нет, так как точка находится «внутри» одной из ветвей гиперболы;
4) таких касательных нет, так как точка находится в центре гиперболы.

82. 1) касательная $x + 2y = -4$ в точке $(2,\ -3)$, касательная $5x + 2y = -16$ в точке $(2,\ -13)$;
2) $2x + y = -4$ (точка лежит на гиперболе);
3) таких касательных нет, так как точка находится «внутри» одной из ветвей гиперболы;
4) таких касательных нет, так как точка находится в центре гиперболы;
5) касательная $x + 2y = -4$ в точке $(2,\ -3)$, $x + 2y = -8$ в точке $(-6,\ -1)$;
6) касательная $2x + 5y = -12$ в точке $(9,\ -6)$, $2x + 5y = -16$ в точке $(-13,\ 2)$.

83. Окружность $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ при $a > b$, точка $(0, 0)$ при $a = b$, пустое множество при $a < b$.

84. $\dfrac{(x - a/2)^2}{(a/2)^2} - \dfrac{y^2}{(b/2)^2} = 1$.

85. Гипербола, фокусами которого являются центр окружности и заданная точка.

86. $p = 2$, $\mathcal{F}(1,\ 0)$, директриса $x = -1$.

88. 1) После выделения полного квадрата и некоторых простых преобразований получаем уравнение $(y + 2)^2 = 2(x - 1)$, откуда получаем, что вершина параболы находится в точке $(1,\ -2)$, фокальный параметр $p = 1$, фокус $\mathcal{F}(1/2,\ 0)$, директриса $x = -1/2$.
2) После выделения полного квадрата и некоторых простых преобразований получаем уравнение $(x - 2)^2 = -8(y - 1)$, откуда получаем, что вершина параболы находится в точке $(2,\ 1)$, фокальный параметр $p = 4$, фокус $\mathcal{F}(0,\ -2)$, директриса $y = 2$.

89. $(p/4,\ p/\sqrt{2})$.

90. Отношение расстояний равно $\delta = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2px}}{x + p/2}$. Имеем $0 \le \delta \le 2/\sqrt{3}$, причем минимальное значение достигается при $x = 0$, а максимальное при $x = p$. При $x \to \infty$ имеем $\delta \to 1$.

91. 1) $y^2 = 2p(x + p/2)$, $p \neq 0$; 2) $y^2 = 2p(x - p/2)$, $p \neq 0$.

92. 1) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 56x + 8y + 24 = 0$;
2) $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 24y + 24 = 0$ и $4x^2 + 4xy + y^2 - 24x + 8y - 24 = 0$;
3) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 28y + 48 = 0$;
4) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y - 16 = 0$ и $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y + 16 = 0$;
5) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 6y - 8 = 0$;
6) $x^2 + 2xy + y^2 + 16x + 8y + 36 = 0$;

94. 1) Касательная $x + 4y + 8 = 0$ в точке $(8,\ -4)$;
2) касательная $2x - 6y + 9 = 0$ в точке $(9/2,\ 3)$ и $x + 2y + 2 = 0$ в точке $(2,\ -2)$;
3) нет касательных, так как точка находится «внутри» ветвей параболы;
4) касательная $x - 2y + 2 = 0$ в точке $(2, 2)$;
5) таких касательных нет, так как прямая параллельна оси параболы;
6) касательная $2x + 2y + 1 = 0$ в точке $(1/2, -1)$.

95. $pB^2 = 2AC$.

96. $2y^2 = 3x$, точки касания $(6,\ 3)$, $(2/3,\ 1)$.

97. $3y^2 = 4x$.

98. Две касательных $x \pm 6y + 15 = 0$.

99. Две касательных $x \pm 2y + 2 = 0$.

100. 1) Касательная $y = -1$ в точке $(1,\ -1)$;
2) касательная $x = -3$ в точке $(-3,\ 3)$, касательная $x - 3y = 6$ в точке $(6,\ 0)$;
3) касательная $x + y = -2$ в точке $(-2,\ 0)$, касательная $3x - y = -14$ в точке $(-2,\ 8)$;
4) таких касательных нет, так как точка находится «внутри» ветвей параболы;
5) касательная $3x - y = -14$ в точке $(-2,\ 8)$;
6) таких касательных нет, так как заданная прямая перпендикулярна оси параболы;
7) касательная $y = -1$ в точке $(1,\ -1)$.

101. 1) Касательная $3x + y - 6 = 0$ в точке $(2,\ 0)$;
2) касательная $3x + 5y + 12 = 0$ в точке $(-4,\ 0)$, касательная $x - y - 4 = 0$ в точке $(2,\ -2)$;
3) касательная $x + 3y + 6 = 0$ в точке $(0,\ -2)$, касательная $4x - 9 = 0$ в точке $(9/4,\ -5/4)$;
4) таких касательных нет, так как точка находится «внутри» ветвей параболы;
5) касательная $7x + 5y = 22$ в точке $(-4,\ 10)$;
6) таких касательных нет, так как прямая параллельна оси параболы;
7) касательная $5x + 3y = 12$ в точке $(0,\ 4)$.

102. Директриса параболы.

103. $y^2 = px$.

104. Парабола, фокусом которой является заданная точка, а директрисой — заданная прямая.

105. p.

106. Введем систему координат, так, что уравнения парабол суть $y^2 = 2p(x - x_0)$ и $x^2 = 2q(y - y_0)$. Складывая эти уравнения, после выделения полных квадратов получаем уравнение окружности $(x - p)^2 + (y - q)^2 = p^2 + q^2 - 2(px_0 + qy_0)$.

107. Эллипсоид вращения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - c^2} = 1$.

108. Двуполостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - a^2} = 1$.

109. Параболоид вращения $y^2 + z^2 = 2px$.

111. Для каждой задачи указано «почти каноническое» уравнение и матрица перехода к «почти канонической» системе координат (определяется не однозначно). Везде начало новой системы координат совпадает со старым.

1) Эллипс $X^2 + 6Y^2 = 12$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) эллипс $2X^2 + 8Y^2 = 48$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) гипербола $2X^2 - 2Y^2 = -5$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) гипербола $10X^2 - 3Y^2 = 60$, $\dfrac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

5) парабола $5X^2 = 2\sqrt{5}Y$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

6) парабола $2X^2 = 2\sqrt{2}Y$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

7) пара пересекающихся прямых $X^2 = 3Y^2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

8) пара параллельных прямых $5X^2 = 15$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

9) пара совпавших прямых $25X^2 = 0$, $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

112. Для каждой задачи указано «почти каноническое» уравнение, начало новой системы координат и матрица перехода Q к этой системе координат (определяется не однозначно).

1) Эллипс $2X^2 + 17Y^2 = 17$, $\mathcal{O}'(-1, 2)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) эллипс $6X^2 + 20Y^2 = 6$, $\mathcal{O}'(1/2\,, 1/2\,)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) эллипс $6X^2 + 16Y^2 = 12$, $\mathcal{O}'(-1, 1)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

4) гипербола $4X^2 - 2Y^2 = -80$, $\mathcal{O}'(-2, -1)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) гипербола $21X^2 - 4Y^2 = -21$, $\mathcal{O}'(-2, 1)$, $Q = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

6) гипербола $4X^2 - 6Y^2 = -6$ $\mathcal{O}'(1, 1)$ $Q = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

7) парабола $2X^2 = \sqrt{2}Y$, $\mathcal{O}'(-9/8\,, -5/8\,)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

8) парабола $5X^2 = 2\sqrt{5}Y$, $\mathcal{O}'(-2/5\,, 4/5\,)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

9) парабола $13X^2 = 2\sqrt{13}Y$, $\mathcal{O}'(6/13\; - 9/13\,)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$;

10) мнимый эллипс $X^2 + 6Y^2 = -10$, $\mathcal{O}'(0, -1)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

11) пара мнимых пересекающихся прямых $X^2 + 6Y^2 = 0$, $\mathcal{O}'(1, -2)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

12) пара пересекающихся прямых $X^2 = 3Y^2$, $\mathcal{O}'(-2, -1)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

13) пара пересекающихся прямых $11X^2 = 14Y^2$, $\mathcal{O}'(1, -1)$, $Q = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

14) пара параллельных прямых $2X^2 = 6$, $\mathcal{O}'(-3,0)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

15) пара параллельных прямых $5X^2 = 4$, $\mathcal{O}'(2,-2)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

16) пара мнимых параллельных прямых $5X^2 = -10$, $\mathcal{O}'(-3,0)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

17) пара совпавших прямых $2X^2 = 0$, $\mathcal{O}'(-3,2)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

113. «Почти каноническое» уравнение $4X^2+9Y^2 = 36$, из которого получаем каноническое уравнение $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4} = 1$, начало новой системы координат (центр эллипса) $\mathcal{O}'(1,2)$, матрица перехода $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому связь старых и новых координат задается формулами:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}X - \frac{2}{\sqrt{5}}Y, \\ y = 2 + \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y, \\ Y = \qquad - \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y, \end{cases}$$

$a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, $\varepsilon = \sqrt{5}/3$, $p = 4/3$, $d = 9/\sqrt{5}$. Фокусы: $\mathcal{F}_1(\sqrt{5},0)$, $\mathcal{F}_2(-\sqrt{5},0)$ (координаты в старой системе координат), $\mathcal{F}_1(3,1)$, $\mathcal{F}_2(-1,3)$ (координаты в новой системе координат). Уравнение директрис в старой системе координат: $x = \pm 9/\sqrt{5}$, в новой системе координат: $1 + \frac{1}{\sqrt{5}}X - \frac{2}{\sqrt{5}}Y = \pm 9/\sqrt{5}$.

114. $25x^2 - 25y^2 + 25 = 0$, $q = (-1,1)$, $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, $p = 1$, $d = \sqrt{2}/2$

115. $2x^2 + 4\sqrt{2}y = 0$, $q = (1,3)$, $p = \sqrt{2}$, $d = \sqrt{2}/2$

116.

1) Эллипсоид вращения $x^2 + y^2 + 7z^2 - 49 = 0$ $q = (2,-1,-2)$
2) Эллипсоид $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 80 = 0$
3) Мнимый эллипсоид $x^2 + 6y^2 + 8z^2 + 8 = 0$
4) Мнимый конус $2x^2 + 2y^2 + 11z^2 = 0$
5) Однополостный гиперболоид вращения $-3x^2 - 3y^2 + 9z^2 + 12 = 0$
6) Однополостный гиперболоид $-7x^2 + 7y^2 + 8z^2 - 28 = 0$
7) Двуполостный гиперболоид вращения $-7x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 70 = 0$
8) Двуполостный гиперболоид $-9x^2 - 3y^2 + 7z^2 - 21 = 0$
9) Конус вращения $-4x^2 - 4y^2 + 7z^2 = 0$
10) Конус $-8x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$
11) Эллиптический параболоид вращения $(1/2)(3x^2 + 3y^2 + 4\sqrt{3}z) = 0$ $q = (1,-3,1)$
12) Эллиптический параболоид $3 * x^2 + 2 * y^2 + 4 * 6(1/2) * z = 0$, $q = (-3,0,3)$
13) Гиперболический параболоид $4x^2 - 2y^2 + 2\sqrt{2}z = 0$, $2-3-2$
14) Гиперболический параболоид $3x^2 - 3y^2 + 6z = 0$, -302
15) Круглый цилиндр $3y^2 + 3z^2 - 6 = 0$
16) Эллиптический цилиндр $6x^2 + 3y^2 - 6 = 0$ $2 - 20 + t(0,-1,1)$
17) Мнимый эллиптический цилиндр $y^2 + 10z^2 + 10 = 0$ $-32 - 1 + t()$
18) Гиперболический цилиндр $-5x^2 + 9z^2 + 9 = 0$
19) Гиперболический цилиндр $-5x^2 + 7z^2 + 14 = 0$
20) Параболический цилиндр $2x^2 + 2\sqrt{3}y = 0$ $3/2 - 3/20 + t(-1,1,2)$
21) Параболический цилиндр $9x^2 + 18y = 0$ $1 - 1/20 + t(-2,1,2)$

22) Параболический цилиндр $9x^2 + 4\sqrt{2}y = 0$ $5/2 - 50 + t(-1, 4, 1)$
23) Пара пересекающихся плоскостей $-3x^2 + 4z^2 = 0$
24) Пара пересекающихся плоскостей $9 * x^2 - y^2 = 0$
25) Пара мнимых пересекающихся плоскостей $y^2 + 10z^2 = 0$
26) Пара параллельных плоскостей $3z^2 - 12 = 0$
27) Пара мнимых параллельных плоскостей $9z^2 + 18 = 0$

117.

1) $5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 5 = 0$ $q = (1, 1, 1, 1)$ $Q = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

2) $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4 = 0$ $Q = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

3) $\dfrac{1}{2}(3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) = 0$, $q = (0, 0, 0, 0)$, $Q = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

4) $4x_1^2 - 2 = 0$, $q = (4, 0, 0, 0)$, $Q = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

5) $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4 = 0$ $q = (0, 0, 0, 0)$ $Q = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

118.

1) Эллипс $x^2 + 3y^2/5 - 1/3$
2) Гипербола $x^2 - y^2/3 + 1 = 0$;
3) Парабола $x^2 + \sqrt{2}y$

119.

1) Гипербола $x^2 - 11y^2/9 + 71/11$
2) Эллипс $-3y^2 - 25x^2/17 + 2 = 0$

122. 1) эллипсоид $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
2) эллипсоид $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$.

123. 1) двуполостный гиперболоид $x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 1$;
2) однополостный гиперболоид $x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$.

124. 1) параболоид вращения $y^2 + z^2 = 2x$;
2) $y^4 = 4(x^2 + z^2)$.

125. 1) Сфера $x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 1$;
2) тор $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 = 36(x^2 + y^2)$.

126. $(x^2 + z^2)y^2 = 1$, $x^2(y^2 + z^2) = 1$.

127. 1) $\begin{cases} x = t\cos\varphi, \\ y = t\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,\ t \ge 0; \\ z = f(t), \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \cos\varphi\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}, \\ y = \sin\varphi\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \\ z = h(t), \end{cases}$

128. Если $\gamma \ne 0$, то получаем поверхность $x^2 + y^2 = \left(x_0 + \alpha \cdot \dfrac{z - z_0}{\gamma}\right)^2 + \left(y_0 + \beta \cdot \dfrac{z - z_0}{\gamma}\right)^2$. Если $\gamma = 0$, то получаем плоскость $z = 0$ (если прямая пересекается с осью $\mathcal{O}z$) или часть этой плоскости с выброшенным кругом (если прямая и ось $\mathcal{O}z$ скрещиваются).

131. $|[r - r_0, a]| = R|a|$.

132. $|(r, a)| = |r||a|\cos\alpha$.

133. $|(r - r_0, a)| = |r - r_0||a|\cos\alpha$.

134. $x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + yz + x - y - 2z - 2 = 0$.

135. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - x - 4y + 5z + 4 = 0$.

136. $x^2 + y^2 - 2z^2 + 8xy - 4xz - 4yz = 0$.

137. 1) Конус $x^2 + y^2 - 2z^2 + 8z - 8 = 0$;

2) однополостный гиперболоид $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$;

3) однополостный гиперболоид $x^2 + y^2 - 2z^2 - 8z - 10 = 0$;

4) конус $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 9xy + 9xz - 9yz = 0$;

5) однополостный гиперболоид $x^2 + y^2 + z^2 + 3xy - 3xz - 3yz - y + z = 0$;

6) однополостный гиперболоид $x^2 + 7y^2 + z^2 + 8xy - 4xz - 8yz + 4x + 8y - 1 = 0$.

Решение: Прямые ℓ_0: $x = t$, $y = 2t$, $z = 2 - t$, ℓ_1: $x = 1 + t$, $y = -1 - t$, $z = 1$ скрещиваются, поэтому при вращении ℓ_1 вокруг ℓ_0 получается однополостный гиперболоид. Можно перейти к новой системе координат, так, чтобы ℓ_0 перешло в ось $\mathcal{O}z$, а дальше воспользоваться №128. Рассмотрим другой способ решения. Пусть $\mathcal{N}(1 + t_1,\ -1 - t_1,\ 1)$ — произвольная точка на ℓ_1, где $t_1 \in \mathbb{R}$. Составим уравнение плоскости π, проходящей через точку $\mathcal{N}$ перпендикулярно прямой ℓ_0: $(x - 1 - t_1) + 2(y + 1 + t_1) - (z - 1) = 0$, т. е. $x + 2y - z + 2 + t_1 = 0$. Чтобы найти точку $\mathcal{K}$ пересечения ℓ_0 и π, подставим уравнение прямой в уравнение плоскости: $t + 4t - 2 + t + 2 + t_1 = 0$, откуда находим $t = -t_1/6$, т. е. $\mathcal{K}(-t_1/6,\ -t_1/3,\ 2 + t_1/6)$. Пусть $\mathcal{M}(x, y, z)$ — произвольная точка на плоскости π, находящаяся на том же расстоянии от $\mathcal{K}$, что и $\mathcal{N}$, т. е. $|\mathcal{MK}|^2 = |\mathcal{NK}|^2$. Записывая это условие в координатах, получаем

$$\left(x + \frac{t_1}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{t_1}{3}\right)^2 + \left(z - 2 - \frac{t_1}{6}\right)^2 = \left(1 + t_1 + \frac{t_1}{6}\right)^2 + \left(-1 - t_1 + \frac{t_1}{3}\right)^2 + \left(1 - 2 - \frac{t_1}{6}\right)^2.$$

После раскрытия скобок и подстановки выражения для $t_1 = -x - 2y + z - 2$, полученного из уравнения плоскости π, приходим к искомому уравнению гиперболоида.

138. Два конуса и однополостный гиперболоид. При вращении куба, построенного на ортах, уравнения поверхностей: $xy+xz+yz = 0$, $xy+xz+yz-2x-2y-2z+3 = 0$, $xy+xz+yz-x-y-z+1 = 0$.

140. 1) $7(x - 1)^2 + 7(y - 2)^2 = 4$;

2) $2(x + 1)^2 + 3(y - 3)^2 = 9$;

3) $(x + 2)^2 - 3(y - 1)^2 = 1$;

4) $2(x + 2)^2 - 3(y - 1)^2 + 9 = 0$;

5) $4(x + 1)^2 - 9(y + 2)^2 = 0$;

6) $3(x + 2)^2 + 2(y - 1) = 0$.

142. Указаны прямое и обратное преобразования:

1) $\begin{cases} X = -x, \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -X, \\ y = Y \end{cases}$ или $\begin{cases} X = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y, \\ Y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}X + \frac{3}{2}Y, \\ y = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y. \end{cases}$

2) $\begin{cases} X = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}y, \\ Y = -\frac{3}{8}x + \frac{5}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4}X + \frac{3}{2}Y, \\ y = -\frac{3}{8}X + \frac{5}{4}Y \end{cases}$ или $\begin{cases} X = \frac{29}{20}x - \frac{21}{10}y, \\ Y = \frac{21}{40}x - \frac{29}{20}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{29}{20}X - \frac{21}{10}Y, \\ y = \frac{21}{40}X - \frac{29}{20}Y. \end{cases}$

3) $\begin{cases} X = 1 + x - y, \\ Y = -2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + X + Y, \\ y = 2 + Y. \end{cases}$

143. 1) поворот плоскости вокруг начала координат, отражение относительно прямой, проходящей через начало координат;

2) Искомое преобразование можно представить как произведение трех преобразований: 1) преобразование, переводящее эллипс в окружность, 2) поворот плоскости относительно начала координат или отражение относительно прямой, проходящей через начало координат, 3) преобразование, переводящее окружность снова в эллипс.

$$\begin{cases} X = x\cos\gamma - y\frac{a}{b}\sin\gamma, \\ Y = x\frac{b}{a}\sin\gamma + y\cos\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X\cos\gamma + Y\frac{a}{b}\sin\gamma, \\ y = -X\frac{b}{a}\sin\gamma + Y\cos\gamma \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} X = x\cos\gamma + y\frac{a}{b}\sin\gamma, \\ Y = x\frac{b}{a}\sin\gamma - y\cos\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X\cos\gamma - Y\frac{a}{b}\sin\gamma, \\ y = -X\frac{b}{a}\sin\gamma - Y\cos\gamma. \end{cases}$$

3) $X = \alpha x$, $Y = \frac{1}{\alpha}y$ или $X = \alpha y$, $Y = \frac{1}{\alpha}x$ $(\alpha \neq 0)$;

4) Искомое преобразование можно представить как произведение трех преобразований:

1) преобразование ψ: $x_1 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, $y_1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, переводящее гиперболу в гиперболу $x_1y_1 = 1$,

2) преобразование θ: $x_2 = \alpha x_1$, $y_2 = \frac{1}{\alpha}y_1$ или $x_2 = \alpha y_1$, $y_2 = \frac{1}{\alpha}x_1$, переводящее гиперболу $x_1y_1 = 1$ в себя, 3) преобразование ψ^{-1}: $X = \frac{a}{2}(x_2 + y_2)$, $Y = -\frac{b}{2}(x_2 - y_2)$, переводящее гиперболу $x_2y_2 = 1$ в исходную гиперболу.

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + \frac{1}{2}\frac{a}{b}\left(-\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)y, \\ Y = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(-\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x - \frac{1}{2}\frac{a}{b}\left(-\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)y, \\ Y = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(-\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x - \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)y \end{cases}$$

При $\alpha > 0$ можно положить $\alpha = e^{-\gamma}$, тогда найденные преобразования можно записать в виде

$$\begin{cases} X = x\operatorname{ch}\gamma + y\frac{a}{b}\operatorname{sh}\gamma, \\ X = x\frac{b}{a}\operatorname{sh}\gamma + y\operatorname{ch}\gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x\operatorname{ch}\gamma - y\frac{a}{b}\operatorname{sh}\gamma, \\ X = x\frac{b}{a}\operatorname{sh}\gamma - y\operatorname{ch}\gamma. \end{cases}$$

При $\alpha > 0$ можно положить $\alpha = -e^{-\gamma}$.

5) $\begin{cases} X = X_0 + x_0 - \frac{Y_0y_0}{p} + x + \frac{Y_0 - y_0}{p}y, \\ Y = Y_0 - y_0 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X_0 + x_0 - \frac{Y_0y_0}{p} + X + \frac{y_0 - Y_0}{p}Y, \\ y = y_0 - Y_0 + Y. \end{cases}$

6) $\begin{cases} X = \dfrac{px_0}{q} + \dfrac{p}{q}x - \dfrac{y_0}{q}y, \\ Y = -y_0 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{q}{p}X + \dfrac{y_0}{p}Y, \\ y = y_0 + Y. \end{cases}$

144. 1) эллипс $x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y = 0$;
2) эллипс $15x^2 - 10xy + 9y^2 - 15x + 27y - 90 = 0$;
3) гипербола $x^2 + xy + 3x - y^2 + y + 2 = 0$;
4) гипербола $9x^2 + 4xy - 2y^2 - 17x + 8 = 0$;
5) парабола $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 28y - 32 = 0$;
6) все заданные точки, кроме $(0, 0)$ лежат на прямой $x - 2y + 4 = 0$; условию удовлетворяет любая кривая второго порядка вида $(\alpha x + \beta y)(x - 2y + 4) = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (пара пересекающихся или параллельных прямых).

146. 1) $2(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 3z^2 = 1$;
2) $3(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - (z + 1)^2 = 9$;
3) $(x + 2)^2 - 4(y + 1)^2 - 4(z - 1)^2 = 4$;
4) $(x + 1)^2 - 2(y + 2)^2 - 2(z - 3)^2 = 0$;
5) $3(x + 2)^2 - 3(y - 1)^2 - 6(z - 1) = 0$;
6) $2(x + 1)^2 - 2(y + 2)^2 - 5(z - 3) = 0$;
7) $3(x + 1)^2 + 2(z + 2)^2 = 12$.

147.

148.

149. $(2x - y + 3z - 1)^2 + (x + y - 2z - 2)^2 - (3x + y + 2z + 1)^2 = 0$.

150. 1) Эллипсоид при $k > -10$, мнимый конус при $k = -10$, мнимый эллипсоид при $k < -10$;
2) однополостный гиперболоид при $k > -4$, конус при $k = -4$, двуполостный гиперболоид при $k < -4$;
3) двуполостный гиперболоид при $k > 4$, конус при $k = 4$, однополостный гиперболоид при $k < 4$;
4) эллиптический параболоид при всех k;
5) гиперболический параболоид при всех k;
6) эллипсоид при $k > 0$, эллиптический цилиндр при $k = 0$, однополостный гиперболоид при $k < 0$;
7) двуполостный гиперболоид при $k > 0$, гиперболический цилиндр при $k = 0$, однополостный гиперболоид при $k < 0$;
8) пересекающиеся плоскости при $k = 0$, конус при $k \neq 0$;
9) эллиптический цилиндр при $k = -2$, эллиптический параболоид при $k \neq -2$;
10) гиперболический цилиндр при $k = 6$, гиперболический параболоид при $k \neq 6$.