Глава 15

Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств

Рекомендованные задачи: №№ 1–6, 13, 14, 40, 46, 47, 49, 64, 65, 77–79, 85, 93, 108–110, 117, 118, 129, 141, 144, 149

Для задач, отмеченных знаком (р), приведены полные решения.

15.1 Сопряженное преобразование

Пусть φ — преобразование евклидова или унитарного пространства. Преобразование φ^* называется *сопряженным* к преобразованию φ, если $(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y)$ для любых векторов x, y.

1. Пусть для преобразования φ евклидова или унитарного пространства нашлось преобразование ψ такое, что $(\varphi x, y) = (x, \psi y)$ для всех x и y. Доказать, что оба преобразования линейные и ψ определяется единственным образом.

2. Доказать следующие свойства операции перехода к сопряженному преобразованию:

1) $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
3) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;
4) $(\alpha\varphi)^* = \overline{\alpha}\varphi^*$ для любого числа α;
5) если преобразование φ невырождено, то φ^* также невырождено и $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$;
6) $(\varphi^m)^* = (\varphi^*)^m$ для любого целого неотрицательного m;
7) если φ невырождено, то $(\varphi^m)^* = (\varphi^*)^m$ для любого целого m;
8) если $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$ — многочлен, то $\Big(f(\varphi)\Big)^* = \overline{f}(\varphi^*)$, где $\overline{f}(x) = \overline{a}_0x^m + \overline{a}_1x^{m-1} + \ldots + \overline{a}_{m-1}x + \overline{a}_m$.

3. Матрица $A^* = \overline{A}^\top$, полученная из A транспонированием и заменой всех элементов комплексно сопряженными, называется *сопряженной* к A. Доказать, что свойства, перечисленные в №2, выполняются и для сопряженных матриц.

4. В чем заключается преобразование φ^*, если φ — преобразование одномерного евклидова или унитарного пространства?

5. Пусть φ — поворот евклидовой плоскости на угол α. Найти сопряженное преобразование.

6. Пусть φ — преобразование трехмерного геометрического пространства, сопоставляющего каждому вектору x вектор $[a, x]$, где a — фиксированный вектор. Найти сопряженное преобразование.

7. Доказать, что для любой билинейной функции f евклидова пространства найдется единственное линейное преобразование φ этого пространства, такое, что $f(x, y) = (\varphi x, y)$ для всех векторов x и y. Обратно, для любого линейного преобразования φ евклидова пространства найдется единственная билинейная функция f этого пространства, такая, что $f(x, y) = (\varphi x, y)$ для всех векторов x и y. Доказать, что если Γ — матрица Грама, составленная для векторов некоторого базиса, A — матрица преобразования φ в этом базисе, F — матрица билинейной функции f в этом базисе, то $F = A^\top\Gamma$.

8. Доказать, что для любой билинейной функции f евклидова пространства найдется единственное линейное преобразование ψ этого пространства, такое, что $f(x, y) = (x, \psi y)$ для всех векторов x и y. Обратно, для любого линейного преобразования ψ евклидова пространства найдется единственная билинейная функция f этого пространства, такая, что $f(x, y) = (x, \psi y)$ для всех векторов x и y. Доказать, что если Γ — матрица Грама, составленная для векторов некоторого базиса, B — матрица преобразования ψ в этом базисе, F — матрица билинейной функции f в этом базисе, то $F = \Gamma B$.

9. Доказать, что для любой полуторалинейной функции f унитарного пространства найдется единственное линейное преобразование φ этого пространства, такое, что $f(x, y) = (\varphi x, y)$ для всех векторов x и y. Обратно, для любого линейного преобразования φ унитарного пространства найдется единственная полуторалинейная функция f этого пространства, такая, что $f(x, y) = (\varphi x, y)$ для всех векторов x и y. Доказать, что если Γ — матрица Грама, составленная для векторов некоторого базиса, A — матрица преобразования φ в этом базисе, F — матрица полуторалинейной функции f в этом базисе, то $F = A^\top\Gamma$.

10. Доказать, что для любой полуторалинейной функции f унитарного пространства найдется единственное линейное преобразование ψ этого пространства, такое, что $f(x, y) = (x, \psi y)$ для всех векторов x и y. Обратно, для любого линейного преобразования ψ унитарного пространства найдется единственная полуторалинейная функция f этого пространства, такая, что $f(x, y) = (x, \psi y)$ для всех векторов x и y. Доказать, что если Γ — матрица Грама, составленная для векторов некоторого базиса, B — матрица преобразования ψ в этом базисе, F — матрица полуторалинейной функции f в этом базисе, то $F = \Gamma\overline{B}$.

11. Пусть Γ — матрица Грама некоторого базиса евклидова пространства; A —

матрица преобразования φ, записанная в этом базисе. Доказать, что матрица $\Gamma^{-1}A^{\top}\Gamma$ является матрицей преобразования φ^* в том же базисе. В частности, если базис ортонормированный, то матрицей преобразования φ^* является $A^{\top}$.

12. Пусть Γ — матрица Грама некоторого базиса унитарного пространства; A — матрица преобразования φ, записанная в этом базисе. Доказать, что матрица $\overline{\Gamma^{-1}A^{\top}\Gamma}$ является матрицей преобразования φ^* в том же базисе. В частности, если базис ортонормированный, то матрицей преобразования φ^* является A^*.

13. Доказать, что преобразованием, сопряженным преобразованию ортогонального проектирования, является само это преобразование.

14. Доказать, что преобразованием, сопряженным преобразованию ортогонального отражения, является само это преобразование.

15. Найти преобразование евклидова трехмерного геометрического пространства, сопряженное преобразованию проектирования на прямую $x = 2y = -z$ параллельно плоскости $x - 2y + z = 0$, если их уравнения заданы в некотором ортонормированном базисе.

16. Найти преобразование евклидова трехмерного геометрического пространства, сопряженное преобразованию отражения в плоскости $x - 2y + z = 0$ параллельно прямой $x = 2y = -z$, если их уравнения заданы в некотором ортонормироанном базисе.

17. В пространстве многочленов степени не выше 2 задано скалярное произведение $(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, где $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, $f(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$. Написать матрицу преобразования дифференцирования и сопряженного к нему преобразования в базисе:

1) $1,\ x,\ x^2$;

2) $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x,\ x^2 - 1,\ \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$;

3) $1,\ x,\ \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$.

18. В пространстве многочленов степени не выше 2 задано скалярное произведение $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$. Написать матрицу преобразования, сопряженного преобразованию дифференцирования, в каждом из базисов задачи № 17.

19. В пространстве многочленов степени не выше 2 задано скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Написать матрицу преобразования, сопряженного преобразованию дифференцирования, в каждом из базисов задачи № 17.

20. Пусть в пространстве квадратных вещественных матриц заданного порядка скалярное произведение определено формулой $(X, Y) = \operatorname{tr} X^{\top}Y$. Найти преобразование φ^*, сопряженное к преобразованию φ, которое матрице X ставит в соответствие матрицу AX, где A — фиксированная матрица. Аналогичное задание для пространства комплексных матриц.

21. Пусть в пространстве квадратных вещественных матриц заданного порядка скалярное произведение определено формулой $(X,Y)=\operatorname{tr}X^\top Y$. Найти сопряженное преобразование φ^* к преобразованию φ, которое матрице X ставит в соответствие матрицу $A^{-1}XA$, где A — некоторая фиксированная невырожденная матрица. Аналогичное задание для пространства комплексных матриц.

22. Доказать, что у сопряженных преобразований евклидова пространства совпадают 1) ранги; 2) характеристические многочлены; 3) собственные числа; 4) размерности собственных подпространств.

23. Доказать, что у сопряженных преобразований унитарного пространства 1) совпадают ранги; 2) коэффициенты характеристических многочленов сопряжены; 3) собственные значения сопряжены; 4) совпадают размерности собственных подпространств.

24. Пусть x — собственный вектор преобразования φ, относящийся к собственному значению λ; y — собственный вектор преобразования φ^*, относящийся к собственному значению μ; $\lambda\neq\overline{\mu}$. Доказать, что векторы x и y ортогональны.

25. Пусть x — общий собственный вектор преобразований φ и φ^*. Доказать, что соответствующие вектору x собственные числа этих преобразований комплексно сопряжены.

26. Доказать, что множество значений линейного преобразования совпадает с ортогональным дополнением ядра сопряженного преобразования. Вывести отсюда *теорему Фредгольма*: для того, чтобы система $Ax=b$ была совместна необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбец b был ортогонален ко всем решениям сопряженной однородной системы $A^*y=0$. Вывести *альтернативу Фредгольма*: или система $Ax=b$ совместна при любой правой части b, или сопряженная неоднородная система $A^*y=0$ имеет ненулевые решения.

27. Системы векторов $f_1,\ldots,f_m$ и $g_1,\ldots,g_m$ называются *биортонормированными*, если $(f_i,g_j)=0$ при $i\neq j$, $(f_i,g_i)=1$ $(i,j=1,\ldots,m)$. Доказать, что для любого базиса существует, причем единственный, биортонормированный базис.

28. Пусть системы векторов $f_1,\ldots,f_m$ и $g_1,\ldots,g_m$ *биортогональны*, т. е. $(f_i,g_j)=0$ при $i\neq j$, $(f_i,g_i)\neq 0$ $(i,j=1,\ldots,m)$. Пусть подпространство L_1 является линейной оболочкой системы векторов $f_1,\ldots,f_m$, а подпространство L_2 задано системой уравнений $(g_1,x)=0,\ldots,(g_m,x)=0$. Доказать, что все пространство есть прямая сумма подпространств L_1 и L_2.

29. В условиях задачи №28 выразить через скалярные произведения векторов x, $f_1,\ldots,f_m$, $g_1,\ldots,g_m$ образ произвольного вектора x для преобразования

1) проектирования на L_1 параллельно L_2;
2) отражения в L_1 параллельно L_2.

30. Линейное преобразование задано формулой $\varphi x=(x,g_1)f_1+\ldots+(x,g_m)f_m$, где $f_1,\ldots,f_m,g_1,\ldots,g_m$ — некоторые векторы. Доказать, что

1) ядро преобразования φ представляет собой ортогональное дополнение к линейной оболочке системы векторов $(g_j,g_1)f_1+\ldots+(g_j,g_m)f_m$ $(j=1,\ldots,m)$.

2) множество значений преобразования φ есть линейная оболочка системы векторов $(f_j, f_1)g_1 + \ldots + (f_j, f_m)g_m$ $(j = 1, \ldots, m)$.

31. В условиях задачи № 30 доказать, что $\varphi^* x = (x, f_1)g_1 + \ldots + (x, f_m)g_m$.

32. Пусть в некотором базисе преобразование имеет матрицу A. Доказать, что в биортонормированном базисе сопряженное преобразование имеет матрицу A^*.

33. Пусть евклидово или унитарное пространство V есть прямая сумма подпространств L_1 и L_2. Доказать, что преобразование проектирования на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2 сопряжено преобразованию проектирования на $L_2^\perp$ параллельно $L_1^\perp$. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для преобразования отражения. Прокомментировать задачи №№ 15, 16.

34. Пусть подпространство L инвариантно относительно преобразования φ. Доказать, что $L^\perp$ инвариантно относительно φ^*.

35. В пространстве многочленов степени не выше n скалярное произведение задано формулой
$$(f, g) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i,$$
где $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, $g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$. Описать все инвариантные подпространства преобразования, сопряженного преобразованию дифференцирования.

36. В пространстве многочленов степени не выше n скалярное произведение задано формулой
$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n} f(k) g(k).$$
Найти n-мерное инвариантное подпространство преобразования, сопряженного преобразованию дифференцирования.

37. В пространстве многочленов степени не выше n скалярное произведение задано формулой
$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$
Найти n-мерное инвариантное подпространство преобразования, сопряженного преобразованию дифференцирования.

38. Доказать, что для любого преобразования φ комплексного пространства размерности n существует 1) инвариантное подпространство размерности $n - 1$; 2) инвариантное подпространство размерности k, $0 < k < n$.

39. Доказать *теорему Шура*: для всякого преобразования унитарного пространства существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования — треугольная. Такой базис называется *базисом Шура*.

40. Преобразование унитарного пространства задано в некотором ортонормированном базисе матрицей. Найти матрицу перехода к базису Шура и матрицу преобразования в этом базисе.

1) (р) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & -10 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 13 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 11 & -5 \\ -1 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

41. Найти базис Шура для преобразования дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше 2, если скалярное произведение задано, как в задаче 1) №17; 2) №18; 3) №19.

42. Преобразования φ и ψ называются *перестановочными*, если выполнено равенство $\varphi\psi = \psi\varphi$. Аналогично вводится определение перестановочных матриц. Доказать, что перестановочные преобразования комплексного пространства имеют общий собственный вектор.

43. Доказать, что перестановочные преобразования φ и ψ n-мерного комплексного пространства имеют общее $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство.

44. Доказать, что перестановочные преобразования φ и ψ имеют общий базис Шура.

45. Доказать, что жорданова форма сопряженного преобразования комплекно сопряжена с жордановой формой исходного преобразования.

15.2 Нормальные преобразования

Преобразование φ унитарного или евклидова пространства называется *нормальным*, если $\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^*$. Справедливо следующее важное утверждение: преобразование φ унитарного пространства является нормальным тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис пространства, составленный из собственных векторов этого преобразования.

46. Преобразование φ линейного пространства, заданное формулой $\varphi x = \lambda x$, где λ — число, называется скалярным. Доказать, что каждое скалярное преобразование евклидова (унитарного) пространства является нормальным. В частности нормальным является нулевое и тождественное преобразования.

47. Доказать, что если преобразование φ — нормальное, то нормальным будет также

1) $\alpha\varphi$ для любого числа α;
2) φ^k для любого натурального k;

3) $f(\varphi)$ для любого многочлена $f(x)$;

4) φ^{-1}, если φ невырождено;

5) φ^*.

48. Привести примеры, показывающие, что сумма $\varphi + \psi$ и произведение $\varphi\psi$ нормальных преобразований φ, ψ в общем случае не является нормальным преобразованием.

49. Матрица A называется *нормальной*, если $A^*A = AA^*$. Доказать, что в ортонормированном базисе матрица нормального преобразования сама является нормальной. И наоборот, любая нормальная матрица задает в ортонормированном базисе нормальное преобразование.

50. Привести примеры, показывающие, что в неортонормированном базисе матрица нормального преобразования

1) может быть нормальной;

2) может не быть нормальной.

51. Показать, что всякое преобразование одномерного евклидова (унитарного) пространства является нормальным.

52. Доказать, что преобразование поворота евклидовой плоскости является нормальным.

53. Показать, что преобразование трехмерного геометрического пространства $\varphi x = [x, a]$, где a — фиксированный вектор, является нормальным.

54. Пусть в пространстве многочленов степени не выше n скалярное произведение задано так же, как в задаче № 17. Доказать, что следующие преобразования являются нормальными:

1) $f(x) \to f(-x)$;

2) $f(x) \to x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

55. Доказать, что если строки и столбцы нормальной матрицы рассматривать как векторы арифметического пространства со стандартным скалярным произведением, то

1) норма i-й строки равна норме i-го столбца;

2) скалярное произведение i-й и j-й строк равно скалярному произведению j-го и i-го столбцов.

56. Доказать, что если преобразование φ — нормальное, то для всякого x справедливо равенство $|\varphi x| = |\varphi^* x|$ (см. также задачу № 138).

57. Доказать, что ядро нормального преобразования является ортогональным дополнением к его образу.

58. Доказать, что преобразование проектирования тогда и только тогда является нормальным, когда образ и ядро этого преобразования ортогональны, т. е. преобразование является ортогональным проектированием.

59. Доказать, что преобразование отражения в L_1 параллельно L_2 тогда и только тогда является нормальным, когда подпространства L_1 и L_2 ортогональны, т. е. преобразование является ортогональным отражением.

60. Доказать, что всякий собственный вектор нормального преобразования φ является собственным вектором и для сопряженного преобразования φ^*.

61. Доказать утверждение, обратное утверждению из задачи №60: если каждый собственный вектор преобразования φ унитарного пространства является собственным и для преобразования φ^*, то φ — нормальное.

62. Показать, что собственные подпространства нормального преобразования попарно ортогональны.

63. Может ли нормальное преобразование иметь неортогональный базис из собственных векторов?

64. Преобразование унитарного пространства задано матрицей в некотором ортонормированном базисе. Проверить, что преобразование нормальное и построить матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов, а также матрицу самого преобразования в этом базисе.

1) $\begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; 3) (р) $\begin{pmatrix} 2+i & 2 & 1 \\ 2 & -1+i & -2 \\ 1 & -2 & 2+i \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

65. Преобразование евклидова пространства задано матрицей в некотором ортонормированном базисе. Проверить, что преобразование нормальное и построить матрицу перехода к ортонормированному базису, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональное строение вид с блоками первого порядка и блоками второго порядка вида $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; 2) (р) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

66. Можно ли в пространстве многочленов степени не выше n ввести скалярное произведение так, чтобы преобразование дифференцирования стало нормальным?

67. В пространстве многочленов степени не выше n рассматривается линейное преобразование, сопоставляющее многочлену $f(x)$ многочлен $f(ax+b)$. При каких a и b можно определить скалярное произведение так, чтобы преобразование стало нормальным?

68. Пусть φ — диагонализируемое линейное преобразование пространства V. Доказать, что в V можно ввести скалярное произведение таким образом, чтобы

φ стало нормальным.

69. Ввести скалярное произведение так, чтобы преобразование, заданное в некотором базисе матрицей, стало нормальным.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 3) (р) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

70. Доказать, что φ тогда и только тогда будет нормальным, когда φ^* представляется многочленом от φ.

71. Пусть преобразование φ — нормальное и перестановочно с некоторым преобразованием ψ. Доказать, что

1) φ^* перестановочно с ψ;
2) φ перестановочно с ψ^*;
3) $\varphi\psi$ — нормальное.

72. Доказать, что перестановочные нормальные преобразования имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов.

73. Проверить, что преобразования унитарного пространства, заданные в некотором ортонормированном базисе матрицами A и B, являются нормальными и перестановочными. Построить для них общий ортонормированный базис из собственных векторов:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+5i & -2+2i & 1-i \\ -2+2i & 4+2i & -2+2i \\ 1-i & -2+2i & 1+5i \end{pmatrix}$.

74. Спектральным радиусом преобразования φ называется максимальный из модулей его собственных чисел:

$$\rho(\varphi) = \max_i |\lambda_i|.$$

Аналогично вводится спектральный радиус матрицы. Доказать, что если φ — нормальное, то

$$\rho(\varphi) = \max_{x \neq 0} \frac{|(\varphi x, x)|}{(x, x)} = \max_{|x|=1} |(\varphi x, x)|.$$

Доказать, что максимум достигается на собственных векторах, относящихся к собственным значениям с максимальным модулем, и только на них.

75. Докажите, что справедлива следующая оенка для спектрального радиуса нормальной матрицы $A = (a_{ij})$:

$$\rho(A) \geq \frac{1}{n} \left| \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \right|.$$

76. Доказать, что если φ — нормальное, то

$$\rho(\varphi) = \max_{x \neq 0} \frac{|\varphi x|}{|x|} = \max_{|x|=1} |\varphi x|.$$

Всякий ли вектор x, реализующий указанный максимум, будет собственным вектором преобразования φ?

15.3 Ортогональные и унитарные преобразования

Преобразование φ унитарного (евклидова) пространства называется *унитарным* (соответственно *ортогональным*), если $\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^* = \varepsilon$. Очевидно, унитарное (ортогональное) преобразование является нормальным; оно невырождено и $\varphi^{-1} = \varphi^*$. Справедливо следующее важное утверждение: нормальное преобразование унитарного пространства тогда и только тогда является унитарным, когда все его собственные значения равны по модулю 1 (см. №№ 83, 84). Другое важное свойство как унитарного, так и ортогонального преобразований — сохранение скалярного произведения (см. №№ 80, 107).

77. Пусть φ, ψ — унитарное (ортогональное) преобразование. Доказать, что унитарным (ортогональным) также будет
1) тождественное преобразование ε;
2) $\varphi\psi$;
3) φ^{-1};
4) φ^k для любого целого k;
5) φ^*.

78. Привести примеры, показывающие, что сумма унитарных (ортогональных) преобразований в общем случае не будет унитарной (ортогональной).

79. Доказать, что произведение унитарного (ортогонального) преобразования на число α тогда и только тогда является унитарным, когда $|\alpha| = 1$.

80. Доказать, что для того, чтобы линейное преобразование φ было унитарным (ортогональным) необходимо и достаточно, чтобы $(x, y) = (\varphi x, \varphi y)$ для любых векторов x, y.

81. Вещественная матрица A называется *ортогональной*, если $A^{-1} = A^\top$. Доказать, что преобразование φ евклидова пространства тогда и только тогда является ортогональным, когда его матрица в каком-либо (любом) ортонормированном базисе ортогональна.

82. Комплексная матрица A называется *унитарной*, если $A^{-1} = A^*$. Доказать, что преобразование φ унитарного пространства тогда и только тогда является унитарным, когда его матрица в каком-либо (любом) ортонормированном базисе унитарна.

83. Показать, что все собственные значения унитарного (ортогонального) преобразования равны по модулю 1.

84. Доказать, что если преобразование унитарного пространства нормально и все его собственные числа по модулю равны 1, то преобразование унитарно.

85. Описать все унитарные (ортогональные) преобразования одномерного унитарного (евклидова) пространства.

86. Показать, что преобразование поворота евклидовой плоскости является ортогональным.

87. Является ли ортогональным преобразование $\varphi x = [x, a]$?

88. Показать, что преобразования задачи № 54 являются ортогональными.

89. Будут ли преобразования задачи № 54 ортогональными, если скалярное произведение задано как в задаче № 19?

90. Может ли преобразование проектирования быть унитарным (ортогональным)?

91. Показать, что преобразование отражения тогда и только тогда является унитарным (ортогональным), когда это преобразование ортогонального отражения.

92. Доказать, что условие унитарности (ортогональности) матрицы A равносильно требованию, что ее столбцы, рассматриваемые как векторы арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образуют ортонормированный базис пространства. Аналогичное утверждение про строки матрицы.

93. Матрица, в которой в каждой строке и каждом столбце ровно один элемент отличен от нуля и равен 1, называется *матрицей перестановки*. Доказать, что матрица перестановки является унитарной.

94. Доказать, что матрица перехода для пары ортонормированных базисов унитарного (евклидова) пространства является унитарной (ортогональной).

95. Комплексные (вещественные) квадратные матрицы A, B называются *унитарно* (*ортогонально*) *подобными*, если существует унитарная (ортогональная) матрица Q, такая, что $B = Q^{-1}AQ$. Доказать, что отношение унитарного (ортогонального) подобия на множестве квадратных комплексных (вещественных) матриц заданного порядка рефлексивно, симметрично и транзитивно.

96. Доказать, что всякая комплексная матрица унитарно подобна треугольной.

97. Доказать, что если A и B унитарно подобны и A — нормальная матрица, то B — также нормальная.

98. Доказать, что комплексная нормальная матрица унитарно подобна диагональной матрице.

99. Показать, что преобразования задачи № 54 являются ортогональными отражениями. Найти собственные подпространства каждого их них.

100. В базисе 1, x, x^2 пространства многочленов степени не выше 2 преобразование φ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Показать, что φ — преобразование отражения. Ввести скалярное произведение так, чтобы φ стало ортогональным.

101. Доказать, что если φ — нормальное преобразование и $\varphi^k = \varepsilon$ для некоторого целого $k \neq 0$, то φ — унитарное (ортогональное).

102. Доказать, что определитель унитарного (ортогонального) преобразования по модулю равен 1.

103. Ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением отображает векторы $(1, 0, -1)^\top$, $(1, 1, 1)^\top$ в векторы $(1, 0, 1)^\top$, $(1, 1, -1)$ соответственно и имеет определитель, равный 1. Найти матрицу этого преобразования в стандартном базисе.

104. Доказать, что для того, чтобы преобразование φ было унитарным (ортогональным) необходимо и достаточно, чтобы для любых векторов x, y преобразование φ сохраняло их скалярное произведение, т. е. $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$.

105. Доказать, что для того, чтобы линейное преобразование φ было унитарным (ортогональным) достаточно, чтобы оно сохраняло скалярные произведения векторов некоторого базиса. В частности линейное преобразование φ унитарно (ортогонально), если оно некоторый ортонормированный базис переводит в ортонормированный.

106. Линейное преобразование φ пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением переводит векторы $(2, 2, 2, 2)^\top$, $(2, 0, 2, 2)^\top$, $(2, 2, 0, 2)^\top$, $(2, 2, 2, 0)^\top$, в $(4, 0, 0, 0)^\top$, $(3, 1, 1, -1)^\top$, $(3, -1, -1, -1)^\top$, $(3, 1, -1, 1)^\top$ соответственно. Будет ли преобразование ортогональным?

107. Доказать, что для того, чтобы линейное преобразование φ было унитарным (ортогональным) необходимо и достаточно, чтобы оно было *изометричным*, т. е. сохраняло длину каждого вектора x: $|\varphi x| = |x|$.

108. Преобразование унитарного пространства задано матрицей в некотором ортонормированном базисе. Проверить, что преобразование является унитарным и построить матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов, а также матрицу самого преобразования в этом базисе.

1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$;

3) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2-6i & 6+2i \\ -2-6i & 4-3i & -4i \\ -6-2i & 4i & 4+3i \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 7) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

109. Преобразование евклидова пространства задано матрицей в некотором ортонормированном базисе. Проверить, что преобразование является ортогональным и построить матрицу перехода к ортонормированному базису, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональное строение с блоками первого порядка вида (± 1) и блоками второго порядка вида $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq \pi k$.

1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$; 2) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

110. Доказать, что в трехмерном евклидовом пространстве

1) всякое ортогональное преобразование с определителем, равным 1, представляет собой поворот на некоторый угол вокруг некоторой прямой;
2) всякое ортогональное преобразование с определителем, равным -1, представляет собой произведение двух ортогональных преобразований: поворота на некоторый угол вокруг некоторой прямой и ортогонального отражения в плоскости, перпендикулярной этой прямой.

111. Найти необходимое и достаточное условие на вектор v, при выполнении которого преобразование φ, определяемое равенством $\varphi x = x - 2(x, v)v$, является унитарным (ортогональным).

112. Пусть для вектора v из задачи № 111 известны его координаты в некотором ортонормированном базисе. Найти матрицу преобразования φ в этом базисе.

113. Пусть $|v| = 1$. Доказать, что преобразование из задачи № 111 является ортогональным отражением в гиперплоскости $(x, v) = 0$ (*отражение Хаусхолдера*).

114. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования отражения Хаусхолдера

115. Показать, что всякая унитарная (ортогональная) матрица P, все собственные значения которой равны ± 1, причем -1 имеет кратность 1, может быть представлена в виде $E - 2ww^*$, где $w = (w_1, \ldots, w_n)^\top$, $|w_1|^2 + \ldots + |w_n|^2 = 1$. Такая матрица называется *матрицей отражения Хаусхолдера*.

116. Показать, что
$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
есть матрица отражения Хаусхолдера. Найти соответствующий вектор w.

15.4 Эрмитовы и симметрические преобразования

Преобразование φ унитарного (евклидова) пространства называется *эрмитовым* (соответственно *симметрическим*), если $\varphi^* = \varphi$. Легко видеть, что эрмитово (симметрическое) преобразование является нормальным. Справедливо следующее важное свойство: нормальное преобразование унитарного пространства является эрмитовым тогда и только тогда, когда все его собственные значения вещественны (задачи №№ 121, 122). Преобразование евклидова пространства тогда и только тогда является симметрическим, когда существует базис пространства, составленный из собственных векторов преобразования.

Преобразование φ унитарного (евклидова) пространства называется косоэрмитовым (соответственно кососимметрическим), если $\varphi^* = -\varphi$. Легко видеть, что косоэрмитово (кососимметрическое) преобразование является нормальным. Нормальное преобразование унитарного пространства является косоэрмитовым тогда и только тогда, когда все его собственные значения чисто мнимы.

117. Пусть φ, ψ — симметрические преобразования евклидова пространства V, α — вещественное число. Показать, что преобразования $\varphi + \psi$ и $\alpha\varphi$ являются симметрическими и, следовательно, множество всех симметрических преобразований пространства V образует линейное пространство. Какова его размерность, если размерность пространства V равна n?

118. Пусть φ, ψ — эрмитовы преобразования унитарного пространства. Показать, что преобразования $\varphi + \psi$ и $-\varphi$ являются симметрическими и, следовательно, множество эрмитовых преобразований заданного пространства образуют группу по сложению. Образует ли это множество линейное пространство?

119. Доказать, что произведение ненулевого эрмитова преобразования на число α тогда и только тогда будет эрмитовым, когда α — вещественное число.

120. Квадратная матрица A называется *эрмитовой* (или *самосопряженной*), если $A^* = A$. Матрица A называется симметрической, если $A^\top = A$. Доказать, что в ортонормированном базисе матрица эрмитова преобразования сама является эрмитовой. И наоборот, любая эрмитова матрица задает в ортонормированном базисе эрмитово преобразование. Аналогичные утверждения для симметрических, косоэрмитовых и кососимметрических преобразований.

121. Доказать, что все собственные числа эрмитова преобразования вещественны.

122. Доказать, что если преобразование унитарного пространства нормально и все его собственные числа вещественны, то преобразование эрмитово.

123. Доказать, что преобразование φ унитарного пространства тогда и только тогда является косоэрмитовым, когда $i\varphi$ эрмитово.

124. Доказать, что произведение эрмитовых (симметрических) преобразований φ и ψ тогда и только тогда являтся эрмитовым (симметрическим), когда φ и ψ перестановочны.

125. Доказать, что преобразование, обратное к невырожденному эрмитовому (симметрическому), является эрмитовым (симметрическим).

126. Описать все эрмитовы (симметрические) преобразования, действующие в одномерном пространстве.

127. Доказать, что преобразование трехмерного геометрического пространства $\varphi x = [x, a]$ является кососимметрическим.

128. Доказать, что всякое кососимметрическое преобразование трехмерного геометрического пространства можно представить в виде $\varphi x = [x, a]$ при надлежащем выборе вектора a.

129. Пусть φ — линейное преобразование унитарного (евклидова) пространства. Проверить, что следующие преобразования являются эрмитовыми (симметрическими):

1) $\varphi + \varphi^*$;
2) $i(\varphi - \varphi^*)$ (в унитарном пространстве);
3) $\varphi^*\varphi$;
4) $\varphi\varphi^*$.

130. Преобразование пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением переводит векторы

$$(1, 0, 1, -1)^\top, \quad (3, -2, 1, 0)^\top, \quad (-4, 2, 3, 1)^\top, \quad (5, -1, -3, -2)^\top$$

соответственно в

$$(-2, 8, -14, 10)^\top, \quad (-4, -15, -14, 18)^\top,$$
$$(-4, 7, -12, -8)^\top, \quad (-1, 1, 6, 1)^\top.$$

Будет ли преобразование симметрическим?

131. Проверить, что преобразования задачи №54 являются симметрическими.

132. Показать, что всякое преобразование ортогонального отражения является эрмитовым (симметрическим).

133. Показать, что преобразование, одновременно являющееся унитарным (ортогональным) и эрмитовым (симметрическим), является преобразованием ортогонального отражения или равно $\pm\varepsilon$.

134. Доказать, что если φ — эрмитово преобразование, то для любого вектора x число $(\varphi x, x)$ — вещественное.

135. Доказать, что если φ — кососимметрическое преобразование евклидова пространства, то $(\varphi x, x) = 0$ для любого вектора x.

136. Доказать, что если φ — эрмитово (симметрическое) преобразование и $(\varphi x, x) = 0$ для любого вектора x, то φ есть нулевое преобразование. См. также задачу №162.

137. Показать, что если для эрмитовых (симметрических) преобразований φ и ψ для любого вектора x выполняется равенство $(\varphi x, x) = (\psi x, x)$, то $\varphi = \psi$.

138. Доказать утверждение, обратное утверждению из задачи №56: если для линейного преобразования при любом x выполнено равенство $|\varphi x| = |\varphi^* x|$, то φ — нормальное.

139. Доказать, что все собственные числа эрмитова преобразования вещественны.

140. Доказать, что все собственные числа косоэрмитова преобразования чисто мнимы.

141. Преобразование унитарного пространства задано матрицей в некотором ортонормированном базисе. Проверить, что преобразование является эрмитовым и построить матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов, а также матрицу самого преобразования в этом базисе.

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 0 & 2+2i & -4-2i \\ 2-2i & 2 & 3-i \\ -4+2i & 3+i & -1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 4 & 1-2i & -2-i \\ 1+2i & 0 & -i \\ -2+i & i & 0 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

142. Пусть φ — линейное преобразование унитарного (евклидова) пространства. Проверить, что преобразования $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$ эрмитовы (симметрические) и неотрицательно определенные. Доказать, что собственные значения (вместе с их кратностями) этих преобразований совпадают.

143. Доказать, что для всякого положительно (неотрицательно) определенного эрмитова или симметрического преобразования φ найдется единственное положительно (неотрицательно) определенное преобразование ψ, такое, что $\psi^2 = \varphi$. Преобразование ψ называется *квадратным корнем* из φ. Аналогичное определение вводится для положительно (неотрицательно) определенных матриц.

144. Найти квадратные корни для следующих матриц:

1) (р) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 34 & 7 & 7 \\ 7 & 34 & 7 \\ 7 & 7 & 34 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 10 & -7 & 1 \\ -7 & 18 & -7 \\ 1 & -7 & 10 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15.5 Приложения к билинейным и полуторалинейным функциям

См. также задачи №№ 7–10 и др.

145. Пусть φ — преобразование евклидова пространства. Доказать, что билинейная функция $(\varphi x, y)$ является симметрической тогда и только тогда, когда преобразование φ — симметрическое.

146. Пусть φ — преобразование унитарного пространства. Доказать, что полуторалинейная функция $(\varphi x, y)$ является эрмитовой тогда и только тогда, когда преобразование φ — эрмитово.

147. Пусть φ — эрмитово (симметрическое) преобразование унитарного (евклидова) пространства. Доказать следующие свойства полуторалинейной (билинейной) функции $f(x, y) = (\varphi x, y)$:

1) f положительно определена тогда и только тогда, когда все собственные числа преобразования φ положительны;
2) f неотрицательно определена тогда и только тогда, когда все собственные числа преобразования φ неотрицательны;
3) f отрицательно определена тогда и только тогда, когда все собственные числа преобразования φ отрицательны;
4) f неположительно определена тогда и только тогда, когда все собственные числа преобразования φ неположительны.

148. Доказать, что для любой эрмитовой полуторалинейной (симметрической билинейной) функции существует ортонормированный базис, в котором матрица этой функции диагональна.

149. Квадратичная функция задана в некотором ортонормированном базисе. Найти ортонормированный базис, в котором ее матрица диагональна. Указать сам диагональный вид функции.

1) $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$;
2) $3x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;
3) $2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;
4) $4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$;

5) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 - x_3x_4$.

150. Эрмитова квадратичная функция задана в некотором ортонормированном базисе. Найти ортонормированный базис, в котором ее матрица диагональна. Указать сам диагональный вид функции.

1) $2|x_1|^2 + (3-i)x_1\overline{x}_2 + (3+i)x_2\overline{x}_1 + 5|x_2|^2$;
2) $2|x_2|^2 - |x_3|^2 + (2+2i)x_1\overline{x}_2 - (4+2i)x_1\overline{x}_3 + (2-2i)x_2\overline{x}_1 + (3-i)x_2\overline{x}_3 - (4-2i)x_3\overline{x}_1 + (3+i)x_3\overline{x}_2$;
3) $4|x_1|^2 + (1-2i)x_1\overline{x}_2 - (2+i)x_1\overline{x}_3 + (1+2i)x_2\overline{x}_1 - ix_2\overline{x}_3 - (2-i)x_3\overline{x}_1 + ix_3\overline{x}_2$.

151. Пусть A, B — симметрические матрицы и B положительно определена. Пусть Q — такая невырожденная матрица, что $Q^\top BQ$ — единичная. Обозначим $C = Q^\top AQ$. Пусть P — такая ортогональная матрица, что $P^{-1}CP$ диагональная. Проверить, что матрица $(QP)^\top B(QP)$ — единичная. Таким образом, QP — матрица перехода к базису, в котором обе функции, заданные матрицами A, B соответственно, имеют диагональный вид.

152. Распространить результат задачи № 151 на тот случай, когда матрица B отрицательно определена.

153. Пусть в некотором базисе n-мерного евклидова пространства с матрицей Грама Γ некоторая квадратичная функция имеет матрицу A. Доказать, что ортонормированный базис, в котором матрица этой функции диагональна, является решением обобщенной задачи на собственные числа и собственные векторы $Ax = \lambda\Gamma x$.

154. Проверить, что одна из двух квадратичных функций, заданных в некотором базисе, является знакоопределенной. С помощью методов задач № 151 или 153 определить базис, в котором обе функции имеют диагональный вид. Указать полученные диагональные виды:

1) (р) $f = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_2^2$; $g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$;
2) (р) $f = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$; $g = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;
3) $f = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$;
   $g = 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
4) $f = 4x_1^2 - x_2^2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$;
   $g = -7x_1^2 - 4x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$;
5) $f = 8x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;
   $g = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
6) $f = -2x_1^2 - 7x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;
   $g = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

155. Проверить, что матрицы, определяющие в некотором ортонормированном базисе две заданные квадратичные функции, перестановочны. Найти общий ортонормированный базис, в котором матрица каждой из этих функций диагональна. Указать сам диагональный вид функций (см. задачу № 72).

1) $f = x_1^2 - x_2^2 - 7x_3^2 + 8x_2x_3$, $g = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3$;
2) $f = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,
   $g = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3$.

156. Пусть φ — эрмитово (симметрическое) преобразование. Доказать, что

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{(\varphi x, x)}{(x, x)} = \max_{|x|=1} (\varphi x, x), \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{(\varphi x, x)}{(x, x)} = \min_{|x|=1} (\varphi x, x),$$

где λ_1 — максимальное, а λ_n — минимальное собственные значения преобразования φ. Показать, что векторы, на которых достигаются указанные экстремумы, являются собственными векторами этого преобразования.

157. Найти максимум и минимум функции трех вещественных аргументов $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ при условии $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

158. Найти максимум и минимум функции трех вещественных аргументов $x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ при условии $8x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 = 1$.

159. Показать, что для максимального и минимального собственных значений эрмитовой (симметрической) матрицы $A = (a_{ij})$ справедливы оценки:

$$\lambda_1 \geq \max_i a_{ii}, \quad \lambda_n \leq \min_i a_{ii}.$$

15.6 Эрмитово, полярное и сингулярное разложения

160. Пусть φ — линейное преобразование унитарного пространства. Доказать, что для любого линейного преобразования унитарного пространства найдутся такие эрмитовы преобразования ψ_1, ψ_2, что $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$ (*эрмитово разложение*). Доказать также, что для любого преобразования эрмитово разложение единственно.

161. Во что переходит эрмитово разложение линейного преобразования одномерного унитарного пространства?

162. Доказать, что если φ — линейное преобразование унитарного пространства и $(\varphi x, x) = 0$ для любого вектора x, то φ есть нулевое преобразование. Справедливо ли аналогичное утверждение для преобразований евклидова пространства?

Для произвольного преобразования φ унитарного (евклидова) пространства существуют унитарное (ортогональное) преобразование η и неотрицательно определенное эрмитово (симметрическое) преобразование ψ, такие, что $\varphi = \eta\psi$ (*полярное разложение*). Аналогично определяется полярное разложение матрицы.

163. Во что переходит полярное разложение линейного преобразования одномерного унитарного пространства?

164. Является ли равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

полярным разложением?

165. Доказать, что для произвольного преобразования φ унитарного (евклидова) пространства существует унитарное (ортогональное) преобразование η и неотрицательно определенное эрмитово (симметрическое) преобразование ψ, такие, что $\varphi = \eta\psi$ (*вторая форма полярного разложения*).

166. Показать, что полярное разложение может быть найдено следующим образом. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа преобразования $\varphi^*\varphi$ с учетом их кратностей, причем

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0;$$

$f_1, \ldots, f_n$ — ортонормированная система из собственных векторов, соответствующих этим числам. Числа $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *сингулярными числами* преобразования φ. Аналогично определяются сингулярные числа квадратной матрицы. Пусть

$$g_j = \frac{1}{\sigma_j}\varphi f_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Доказать, что система $g_1, \ldots, g_r$ — ортонормирована. Пусть векторы $g_{r+1}, \ldots, g_n$ дополняют эту систему до ортонормированного базиса всего пространства. Доказать, что преобразование η в полярном разложении преобразования φ может быть найдено из условия $\eta f_j = g_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, а преобразование ψ в этом разложении может быть найдено как $\psi = \eta^{-1}\varphi$.

167. Доказать, что если $\varphi = \eta\psi$ — полярное разложение преобразования φ, то ψ равно корню квадратному из $\varphi^*\varphi$ и, следовательно, ψ определяется единственным образом.

168. Доказать, что если преобразование φ невырождено, то множители ψ, η в его полярном разложении определяются единственным образом.

169. (р) Для преобразования φ евклидова пространства, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix},$$

найти матрицу ортогонального преобразования η и матрицу симметрического неотрицательного преобразования ψ, для которых $\varphi = \eta\psi$.

170. Для заданной матрицы A найти полярное разложение $A = UH$, где U — унитарная (ортогональная), H — эрмитова (симметрическая):

1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 4i \\ 4i & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

171. В пространстве многочленов степени не выше 2 найти сингулярные числа преобразования дифференцирования, если скалярное произведение задано, как в задаче
1) №17; 2) №18; 3) (р) №19.

172. Доказать, что линейное преобразование является нормальным тогда и только тогда, когда перестановочны множители в его полярном разложении.

173. Доказать, что число ненулевых сингулярных чисел равно рангу преобразования.

174. Доказать, что сингулярные числа нормального преобразования равны абсолютным значениям его собственных чисел.

175. Доказать, что преобразование унитарного (евклидова) пространства тогда и только тогда является унитарным (ортогональным), когда все сингулярные числа преобразования равны 1.

176. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — сингулярные числа невырожденного преобразоания φ. Найти сингулярные числа преобразования φ^{-1}.

177. Чему равны сингулярные числа преобразования $\alpha\varphi$, если известны сингулярные числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ преобразования φ?

178. Доказать, что сингулярные числа комплексных (вещественных) матриц A, B совпадают тогда и только тогда, когда эти матрицы *унитарно эквивалентны*, т. е. когда найдутся унитарные (ортогональные) матрицы P, Q, такие, что $B = PAQ$.

179. Доказать, что матрицы A, B унитарно (ортогонально) эквивалентны тогда и только тогда, когда матрицы A^*A и B^*B подобны.

180. Доказать, что

$$\sigma_1 = \max_{x\neq 0} \frac{|\varphi x|}{|x|} = \max_{|x|=1} |\varphi x|, \qquad \sigma_n = \min_{x\neq 0} \frac{|\varphi x|}{|x|} = \min_{|x|=1} |\varphi x|,$$

где σ_1, σ_n — соответственно максимальное и минимальное сингулярные числа преобразования φ.

181. Доказать, что модули всех собственных чисел преобразования φ заключены между σ_n и σ_1, где σ_1, σ_n — соответственно максимальное и минимальное сингулярные числа преобразования φ.

182. Доказать, что произведение сингулярных чисел квадратной матрицы A равно $|\det A|$.

Пусть V, W — два пространства, оба евклидовых или унитарных. Рассмотрим линейное отображение φ, действующее из V в W. Отображение φ^*, действующее из W в V, называется *сопряженным* к отображению φ, если $(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y)$ для любых векторов $x \in V$ и $y \in W$. Для всякого отображения φ сопряженное отображение φ^* существует и единственно. Если в каждом из пространств V и W

выбрано по ортонормированному базису, то матрицей сопряженного преобразования является сопряженная матрица.

183. Пусть φ — линейное отображение унитарного пространства в унитарное или евклидова пространства в евклидово. Проверить, что преобразования $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$ имеют одинаковый ранг и являются эрмитовыми (симметрическими) и неотрицательно определенными. Доказать, что ненулевые собственные значения этих преобразований (с учетом кратностей) совпадают (ср. с задачей № 142).

Пусть размерности пространств V и W равны n и m соответственно. Положим $k = \min\{m, n\}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — общие собственные числа преобразований $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$. Числа $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$ называются *сингулярными числами* отображения φ. Аналогично определяются сингулярные числа прямоугольной матрицы.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства V, составленный из собственных векторов преобразования $\varphi^*\varphi$, а $f_1, \ldots, f_m$ — ортонормированный базис пространства W, составленный из собственных векторов преобразования $\varphi\varphi^*$. Если $e_1, \ldots, e_r$ и $f_1, \ldots, f_r$ отвечают ненулевым собственным числам $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ и $\varphi e_i = \sigma e_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, тогда системы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ называются *парой сингулярных базисов*. Для любого отображения пара сингулярных базисов существует.

Это утверждение эквивалентно следующему. Для произвольной комплексной (вещественной) матрицы A размера $m \times n$ существуют унитарные (ортогональные) матрицы P, Q размера $m \times m$ и $n \times n$ соответственно и диагональная матрица D с неотрицательными диагональными элементами, такие, что $A = PDQ^*$ (*сингулярное разложение матрицы* A). Диагональные элементы матрицы D являются *сингулярными числами* матрицы A. Столбцы матрицы P называются *левыми сингулярными векторами*, столбцы матрицы Q — *правыми сингулярными векторами*.

184. Пусть $A = PDQ^*$ — сингулярное разложение комплексной (вещественной) матрицы размера $m \times n$. Пусть все ненулевые сингулярные числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ занимают первые r мест на диагонали матрицы D, а столбцы $p_1, \ldots, p_r$ и $q_1, \ldots, q_r$ стоят на первых r позициях матриц P и Q соответстветственно. Проверить, что $A = \sigma_1 p_1 q_1^* + \ldots + \sigma_r p_r q_r^*$.

185. Показать, что сингулярное разложение комплексной (вещественной) матрицы A размера $m \times n$ может быть найдено следующим образом. Обозначим $k = \min\{m, n\}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A^*A с учетом их кратностей, причем

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0;$$

$f_1, \ldots, f_n$ — ортонормированная система из собственных векторов, соответствующих этим числам. Определим сингулярные числа матрицы A: $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$

$(j = 1, 2, \dots, k)$. Пусть D — диагональная матрица размера $m \times n$ с числами $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ на диагонали. Из координатных столбцов $f_1, \dots, f_m$ составим матрицу Q. Пусть

$$g_j = \frac{1}{\sigma_j} A f_j \qquad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Доказать, что система $g_1, \dots, g_r$ — ортонормирована. Пусть векторы $g_{r+1}, \dots, g_m$ дополняют эту систему до ортонормированного базиса всего пространства. Из координатных столбцов $g_1, \dots, g_n$ составим матрицу P. Доказать, что $A = PDQ^*$.

186. Показать, как определить сингулярное разложение квадратной матрицы, если известно ее полярное разложение.

187. Показать, как определить полярное разложение квадратной матрицы, если известно ее сингулярное разложение.

188. Найти сингулярное разложение матрицы A^*, если известно сингулярное разложение матрицы $A = PDQ^*$.

189. Пусть известно сингулярное разложение $A = PDQ^*$ квадратной невырожденной матрицы A. Найти сингулярное разложение матрицы A^{-1}.

190. Методом задачи №185 или задачи №186 найти сингулярные разложения матриц:

1) $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 4i \\ 4i & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

6) (р) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15.7 Псевдорешения и псевдообратное отображение

Пусть φ — линейное отображение, действующее из V в W; b — фиксированный вектор из W. Рассмотрим равенство $\varphi x = b$ как уравнение относительно неизвестного вектора x из V. Вектор $\widetilde{x}$ называется *псевдорешением* этого уравнения, если $|\varphi\widetilde{x} - b| = \min_x |\varphi x - b|$. Псевдорешение уравнения $\varphi x = b$ называется *нормальным*, если среди всех псевдорешений оно имеет минимальную норму. Нормальное псевдорешение всегда существует и единственно. Аналогичные определения вводятся для систем линейных уравнений $Ax = b$ с комплексной (вещественной) матрицей

A размера $m \times n$: эта матрица рассматривается как матрица некоторого линейного отображения, заданного в паре ортонормированных базисов.

Отображение φ^+, ставящее всякому вектору b из W нормальное псевдорешение уравнения $\varphi x = b$, называется *псевдообратным* отображением. Псевдообратное отображение является линейным. Матрица A^+ называется *псевдообратной* (по Муру–Пенроузу) к матрице A, если формула $x = A^+b$ всякому вектору b ставит в соответствие нормальное псевдорешение системы $Ax = b$.

В задачах №№ 197, 199 будет описан один из основных методов, используемых на практике при решении больших задач на нахождение псевдорешений. Этот метод использует сингулярное разложение. Заметим, что описание практических алгоритмов вычисления самого сингулярного разложения выходит за рамки данного пособия (методы, описанные в задачах №№ 185, 186, были даны здесь для закрепления теоретического метариала; в том виде они не могут использоваться для решения больших практических задач).

191. Пусть b' — ортогональная проекция вектора b на образ (множество значений) отображения φ. Доказать, что множество всех псевдорешений уравнения $\varphi x = b$ совпадает со множеством всех решений уравнения $\varphi x = b'$. Аналогичное утверждение про множество псевдорешений системы линейных уравнений $Ax = b$.

192. Доказать, что множество всех псевдорешений уравнения $\varphi x = b$ есть линейное многообразие $x_0 + K$, направляющее подпространство K которого, — ядро отображения φ. Это многообразие является подпространством тогда и только тогда, когда b принадлежит ядру отображения φ^*.

193. Доказать, что множество всех псевдорешений уравнения $\varphi x = b$ совпадает со множеством всех решений совместного уравнений $\varphi^*\varphi x = \varphi^* b$.

194. Показать, что нормальное псевдорешение уравнения $\varphi x = b$ можно определить как псевдорешение этого уравнения, ортогональное к ядру отображения φ, или, что эквивалентно, как псевдорешение, принадлежащее образу отображения φ^*. Нормальное псевдорешение можно найти как ортогональную проекцию любого псевдорешения на образ отображения φ^*.

195. Сформулировать и доказать утверждения, относящиеся к системам линейных уравнений $Ax = b$, аналогичные утверждениям из задач №№ 191–194.

196. Описать множество всех псевдорешений и найти нормальное псевдорешение системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ x_1 - x_2 = -2; \\ x_1 + 2x_2 = 3; \end{cases}$ 2) (р) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1; \\ x_1-x_2=0; \\ x_1+x_2+2x_3=0; \\ x_1-x_2=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=5; \\ x_1-x_2+x_3+x_4=-4; \\ x_1-x_4=-4; \\ x_1+x_2-2x_4=-1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 37x_1+11x_2=1; \\ -19x_1+29x_2=1; \\ -18x_1-40x_2=1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 31x_1+23x_2=11; \\ 21x_1+14x_2=16; \\ 10x_1+9x_2=-11. \end{cases}$

197. Пусть φ — отображение ранга r, действующее из n-мерного пространства V в m-мерное пространства W. Известен ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов преобразования $\varphi^*\varphi$ и соответствующие собственные значения $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$, где $\sigma_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$. Доказать, что

1) каждое псевдорешение уравнения $\varphi x = b$ имеет вид

$$x = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n, \quad \text{где} \quad \beta_i = \frac{(\varphi^* b, e_i)}{\sigma_i^2} \quad (i = 1, \ldots, r),$$

а $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ — произвольные числа;

2) нормальное псевдорешение равно $\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_r e_r$.

198. Для отображения φ из задачи № 197 известен ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_m$ из собственных векторов преобразования $\varphi\varphi^*$. Доказать, что нормальное псевдорешение уравнения $\varphi x = b$ можно найти по формуле

$$x = \gamma_1 \varphi^* f_1 + \ldots + \gamma_r \varphi^* f_r, \quad \text{где} \quad \gamma_i = \frac{(b, f_i)}{\sigma_i^2} \quad (i = 1, \ldots, r).$$

199. Пусть $A = PDQ^*$ — сингулярное разложение комплексной (вещественной) матрицы размера $m \times n$. Разобьем матрицы P, D, Q на блоки:

$$P = (P_1 \ P_2), \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = (Q_1 \ Q_2),$$

где D_1 — диагональная матрица с ненулевыми сингулярными числами на диагонали ранга r, а P_1 и Q_1 имеют по r столбцов каждая. Доказать, что множество всех псевдорешений системы уравнений $Ax = b$ можно получить по формуле $x = Q_1 D_1^{-1} P_1^* b + Q_2 z$, где z — произвольный вектор. Доказать, что нормальное псевдорешение этой системы равно $Q_1 D_1^{-1} P_1^* b$.

200. В условиях предыдущей задачи доказать, что псевдообратную матрицу можно получить по формулам:

$$A^+ = Q_1 D_1^{-1} P_1^* = Q D^+ P^*, \quad \text{где} \quad D^+ = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ср. с задачей № 189).

201. Доказать, что

1) если матрица A – квадратная и невырожденная, то $A^+ = A^{-1}$;
2) если строки A линейно независимы, то $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$;
3) если столбцы A линейно независимы, то $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$.

202. Показать, что

1) $(A^+)^+ = A$;
2) $(A^*)^+ = (A^+)^*$.

203. Известно, что векторы $(7, -5)^\top$, $(5, -4)^\top$ являются нормальными псевдорешениями систем

$$\begin{cases} 42x_1 + 49x_2 = 36, \\ 39x_1 + 26x_2 = 163, \\ 26x_1 - 13x_2 = 238 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} 42x_1 + 49x_2 = -12, \\ 39x_1 + 26x_2 = 131, \\ 26x_1 - 13x_2 = 164 \end{cases}$$

соответственно. Найти нормальное псевдорешение системы

$$\begin{cases} 42x_1 + 49x_2 = 8; \\ 39x_1 + 26x_2 = 98; \\ 26x_1 - 13x_2 = 134. \end{cases}$$

204. Найти матрицы, псевдообратные к данным:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

205. Доказать, что образ и ядро псевдообратного отображения φ^+ совпадает соответственно с образом и ядром сопряженного отображения φ^*.

206. Рассмотрим φ как отображение из образа T_{φ^*} отображения φ^* в образ T_φ отображения φ, а φ^+ как отображение из T_φ в T_{φ^*}. Показать, что на этой паре подпространств φ и φ^+ взаимно обратны, т. е. для любого вектора x из T_{φ^*} и любого вектора y из T_φ справедливо

$$\varphi^+\varphi x = x, \qquad \varphi\varphi^+ y = y.$$

207. Указать, что свойства, указанные в задачах №№ 205, 206, при дополнительном предположении о линейности равносильны определению псевдообратного отображения.

208. Показать, что сингулярные базисы для отображения φ являются сингулярными и для φ^+. При этом ненулевые сингулярные числа этих отображений взаимно обратны.

209. Доказать, что $\varphi\varphi^+\varphi = \varphi$.

210. Доказать, что геометрический смысл уравнения $\varphi\chi\varphi = \varphi$ заключается в том, что отображения φ и χ должны быть взаимно обратными на паре подпространств $T_{\chi\varphi}$, T_{φ}.

211. Доказать, что псевдообратное отображение φ^{+} можно определить как линейное отображение, удовлетворяющее уравнению $\varphi\chi\varphi = \varphi$, и имеющее тот же образ и то же ядро, что и сопряженное отображение φ^{*}.

212. Отображение φ действует из подпространства V в подпространство W. Доказать, что преобразование $\varphi^{+}\varphi$ является эрмитовым (симметрическим) и заключается в ортогональном проектировании пространства V на $T_{\varphi^{*}}$.

213. Описать геометрический смысл требований, накладываемых на отображение χ системой уравнений $\varphi\chi\varphi = \varphi$, $(\chi\varphi)^{*} = \chi\varphi$.

214. Доказать, что $\varphi^{+}\varphi\varphi^{+} = \varphi^{+}$.

215. Отображение χ удовлетворяет системе $\varphi\chi\varphi = \varphi$, $(\chi\varphi)^{*} = \chi\varphi$. Какое новое требование на это отображение накладывает уравнение $\chi\varphi\chi = \chi$?

216. Отображение φ действует из подпространства V в подпространство W. Доказать, что преобразование $\varphi\varphi^{+}$ является эрмитовым (симметрическим) и заключается в ортогональном проектировании пространства W на T_{φ}.

217. Доказать, что условия

$$\varphi\chi\varphi = \varphi, \qquad \chi\varphi\chi = \chi, \qquad (\chi\varphi)^{*} = \chi\varphi, \qquad (\varphi\chi)^{*} = \varphi\chi$$

(*уравнения Пенроуза*) однозначно определяют псевдообратное отображение.

15.8 Контрольные задания

218. Преобразование унитарного пространства задано матрицей A в базисе e_1', e_2', найти матрицу сопряженного преобразования A^{*} в этом базисе, если базис e_1, e_2 — ортонормированный.

1) $A = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = ie_1 - 2e_2$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = 2ie_1 + e_2$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = (1+i)e_1 + e_2$.

4) $A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$, $e_1' = ie_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + (1+i)e_2$.

5) $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = ie_1 - 2e_2$.

6) $A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = 2ie_1 + e_2$.

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = (1+i)e_1 + e_2$.

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & 1+i \end{pmatrix}$, $e_1' = ie_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + (1+i)e_2$.

9) $A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2i & -2+i \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = ie_1 - 2e_2$.

10) $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = 2ie_1 + e_2$.

11) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = (1+i)e_1 + e_2$.

12) $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & 2 \end{pmatrix}$, $e_1' = ie_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + (1+i)e_2$.

13) $A = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 2i & -1+i \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = ie_1 - 2e_2$.

14) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1+i \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = 2ie_1 + e_2$.

15) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ i & -1+i \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = (1+i)e_1 + e_2$.

16) $A = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$, $e_1' = ie_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + (1+i)e_2$.

17) $A = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = -ie_1 + 2e_2$.

18) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$, $e_1' = ie_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + (1+i)e_2$.

19) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = ie_1 - 2e_2$.

20) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $e_1' = ie_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + (1+i)e_2$.

21) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = ie_1 - 2e_2$.

22) $A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 2i & -2+i \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = 2ie_1 + e_2$.

23) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = (1+i)e_1 + e_2$.

24) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2 \end{pmatrix}$, $e_1' = ie_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + (1+i)e_2$.

25) $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & -2 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = ie_1 - 2e_2$.

26) $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = 2ie_1 + e_2$.

27) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = (1+i)e_1 + e_2$.

28) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$, $e_1' = ie_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + (1+i)e_2$.

29) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1+i \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 + ie_2$, $e_2' = ie_1 - 2e_2$.

30) $A = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 2i & -1+i \end{pmatrix}$, $e_1' = e_1 - ie_2$, $e_2' = 2ie_1 + e_2$.

219. Для матрицы линейного преобразования, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства, определить ортонормированный базис Шура, в котором матрица преобразования верхняя треугольная.

1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. 8) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

9) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. 10) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. 12) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

13) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 14) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

15) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 16) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

17) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 18) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

19) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 20) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

21) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 22) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

23) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 24) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

25) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 26) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

27) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. 28) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

29) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. 30) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

220. Преобразование евклидова пространства задано в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определить ортонормированный базис, в котором матрица преобразования а) верхняя треугольная, б) нижняя треугольная, если матрица Грама для исходного базиса имеет следующий вид.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 8 \\ -3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 10 & 14 \\ -4 & 14 & 21 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 21 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 10 & -6 \\ -2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -8 \\ -5 & -8 & 35 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7/2 \\ 1 & 2 & -13/2 \\ -7/2 & -7/2 & 89/4 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3/2 \\ -1 & -3/2 & 9/4 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/2 \\ 1 & 2 & -5/2 \\ -3/2 & -5/2 & 17/4 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5/2 \\ 1 & 2 & -9/2 \\ -5/2 & -9/2 & 45/4 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 & 1/12 \\ -1/8 & 1/8 & 1/24 \\ 1/12 & 1/24 & 1/4 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 1/9 & 1/15 & -1/10 \\ 1/15 & 2/25 & -3/25 \\ -1/10 & -3/25 & 43/100 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 7/6 \\ 1/2 & 1/2 & 2/3 \\ 7/6 & 2/3 & 3/2 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 1/9 & 1/12 & 1/18 \\ 1/12 & 1/8 & 1/6 \\ 1/18 & 1/6 & 19/36 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 1/16 & 0 & -1/24 \\ 0 & 1/4 & 1/6 \\ -1/24 & 1/6 & 1/4 \end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 81/16 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 1/16 & -1/4 & -1/3 \\ -1/4 & 2 & 8/3 \\ -1/3 & 8/3 & 11/3 \end{pmatrix}$;

23) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5/4 \\ -1 & 2 & 9/4 \\ -5/4 & 9/4 & 21/8 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 3/2 & 5/2 & -3/2 \\ -1 & -3/2 & 2 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 1/4 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 5/36 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/3 \\ -2 & 5 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/9 \end{pmatrix}$;

27) $\begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1 \\ -3/4 & 5/8 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 10 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$;

29) $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5/2 \\ 1/3 & 2/9 & 5/6 \\ 5/2 & 5/6 & 13/2 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 1/4 & -1/6 & 1/2 \\ -1/6 & 2/9 & -1/3 \\ 1/2 & -1/3 & 5/4 \end{pmatrix}$.

221. Симметрическое преобразование задано матрицей в некотором ортонормированном базисе. Найти ортонормированный базис, в котором матрица преобразования диагональна. Указать сам диагональный вид.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 6 & -7 & 6 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. 8) $\begin{pmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

9) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. 10) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & -6 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. 12) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

13) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. 14) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

15) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 16) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

17) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 18) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

19) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. 20) $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 2 & 13 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

21) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. 22) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

23) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. 24) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

25) $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. 26) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

27) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 28) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ 6 & -9 & -2 \\ -6 & -2 & -9 \end{pmatrix}$.

29) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$. 30) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

222. Преобразование унитарного (евклидового) пространства задано в некотором ортонормированном базисе матрицей. а) Проверить, что преобразование является унитарным и построить матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов, а также матрицу самого преобразования в этом базисе. б) Проверить, что преобразование является ортогональным и построить матрицу перехода к ортонормированному базису, в котором матрица преобразования имеет блочно-диагональное строение с блоками первого порядка вида (± 1) и блоками второго порядка вида $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \neq \pi k$.

1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 2) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 4) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & 5 & -2 \\ -5 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 8) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 10) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

11) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 12) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 14) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. 16) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

17) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & -4 & -4 & 4 \\ -4 & -2 & 5 & 2 \\ -4 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 18) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. 20) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

21) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 22) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

23) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. 24) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

25) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & -4 & 2 \\ -4 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 26) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

27) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. 28) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

29) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & -5 \\ 1 & -4 & -4 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 30) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

223. Найти полярное и сингулярное разложения матрицы.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 8) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. 10) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. 12) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

13) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$. 14) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

15) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 16) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

17) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. 18) $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

19) $\begin{pmatrix} 0 & -7 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. 20) $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

21) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$. 22) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

23) $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 24) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

25) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. 26) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

27) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. 28) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

29) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 30) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

15.9 Ответы, указания, решения

4. Любое преобразование одномерного пространства заключается в умножении на α каждого вектора x. Поэтому сопряженное преобразование евклидова одномерного пространства также заключается в умножении каждого вектора на α. Сопряженное преобразование унитарного одномерного пространства заключается в умножении каждого вектора на $\overline{\alpha}$.

5. $\varphi^* = \varphi^{-1}$ (поворот на угол α в противоположном направлении).

6. $\varphi^* = -\varphi$.

11. *Указание:* Можно воспользоваться №№ 7, 8.

12. *Указание:* Можно воспользоваться №№ 9, 10.

15. Проектирование на прямую $2x = -y = 2z$ параллельно плоскости $2x + y - 2z = 0$.

16. Отражение в прямой $2x = -y = 2z$ параллельно плоскости $2x + y - 2z = 0$.

17. 1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

18. 1) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$.

19. 1) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -12 & 8 & 8 \\ -5 & 0 & 5 \\ -8 & -8 & 12 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

20. $\varphi^* X = A^\top X$ для пространства вещественных матриц; $\varphi^* X = A^* X$ для пространства комплексных матриц.

21. $\varphi^* X = (A^{-1})^\top X A^\top$ для пространства вещественных матриц; $\varphi^* X = (A^{-1})^* X A^*$ для пространства комплексных матриц.

29. 1) $\dfrac{(x,g_1)}{(f_1,g_1)} f_1 + \ldots + \dfrac{(x,g_m)}{(f_m,g_m)} f_m$;

2) $2\left(\dfrac{(x,g_1)}{(f_1,g_1)} f_1 + \ldots + \dfrac{(x,g_m)}{(f_m,g_m)} f_m\right) - x$.

35. Нулевое подпространство; линейные оболочки систем многочленов $x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

36. Множество многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=0}^{n} f(x) = 0$.

37. Множество многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

38. *Указание:* Для доказательства 1) рассмотреть φ^* (скалярное произведение может быть введено любым допустимым образом, чтобы рассматриваемое пространство стало унитарным).

39. *Указание:* Воспользовавшись предыдущей задачей, доказать, что найдутся инвариантные подпространства L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, такие, что $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n$, причем размерность L_k равна k, а размерность всего пространства равна n. Другое доказательство может быть основано на следующем. Для получения базиса Шура достаточно применить процесс ортогонализации и нормировки к Жорданову базису.

40. 1) Так как $[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, то $[\varphi^*]_e = [\varphi]_e^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & -6 & -4 \\ 3 & 13 & 8 \end{pmatrix}$. Находим характеристический многочлен: $(\lambda - 1)^3$. Преобразование имеет единственное собственное число $\lambda_0 = 1$. Решаем однородную систему линейных уравнений с матрицей

$$[\varphi^*]_e - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & -7 & -4 \\ 3 & 13 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пространство решений этой системы одномерно. Его базис составляет вектор с координатами $(1, 3, -6)^\top$. Ортогональное дополнение описывается уравнением $x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0$ и является двумерным подпространством L_2, инвариантным относительно φ. В качестве его базиса возьмем векторы f_1, f_2:

$$[f_1]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [f_2]_e = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$[\varphi f_1]_e = [\varphi]_e [f_1]_e = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [\varphi f_2]_e = [\varphi]_e [f_2]_e = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\varphi f_1 = -f_2$, $\varphi f_2 = f_1 + 2f_2$, то матрица индуцированного на L_2 преобразования в базисе f_1, f_2 имеет вид $[\varphi|_{L_2}]_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому матрица сопряженного преобразования (относительно некоторым образом введенного *нового* скалярного произведения) равна $[\varphi|_{L_2}]_f^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Характеристический многочлен равен $(\lambda^2 - 1)^2$. Преобразование имеет единственное собственное число: $\lambda_0 = 1$. Решаем однородную систему линейных уравнений с матрицей

$$[\varphi|_{L_2}]^*_f - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пространство решений этой системы одномерно. Его базис составляет вектор с координатами $(1,-1)^\top$. Ортогональное дополнение описывается уравнением $x_1 - x_2 = 0$, где x_1, x_2 — координаты вектора в базисе f_1, f_2, и является одномерным подпространством L_3, инвариантным относительно φ. В качестве его базиса возьмем вектор g_1:

$$[g_1]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вектора g_1 в исходном базисе:

$$[g_1]_e = [1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2]_e = [f_1]_e + [f_2]_e = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(заметим, что вектор g_1 можно найти проще: как собственный вектор преобразования φ). Итак, найдена цепочка инвариантных относительно φ подпространств: $V_1 \subset V_2 \subset V_3$, где $V_1 = L(g_1)$, $V_2 = L(f_1, f_2)$, а V_3 совпадает со всем трехмерным пространством. Вектор g_1 можно дополнить до базиса пространства V_2 вектором f_1, поэтому $V_2 = L(g_1, f_1)$. Систему g_1, f_1 можно дополнить до базиса пространства V_3 вектором e_1, поэтому $V_3 = L(g_1, f_1, e_1)$. В базисе g_1, f_1, e_1 матрица преобразования φ уже верхняя треугольная. Чтобы найти ортогональный базис, в котором матрица этого преобразования верхняя треугольная, ортогонализируем систему g_1, f_1, e_1 (в указанном порядке):

$$[g_1']_e = [g_1]_e = (3,1,1)^\top;$$

$$[f_1']_e = [f_1]_e - \frac{(f_1, g_1')}{(g_1', g_1')} \cdot [g_1']_e = \frac{1}{11} \cdot (-9, 19, 8)^\top;$$

$$[e_1']_e = [e_1]_e - \frac{(e_1, g_1')}{(g_1', g_1')} \cdot [g_1']_e - \frac{(e_1, f_1')}{(f_1', f_1')} \cdot [f_1']_e = \frac{1}{46} \cdot (1, 3, -6)$$

Чтобы найти ортонормированную систему, нормируем полученные векторы, откуда получаем искомую матрицу перехода к базису Шура

$$[h]_e = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & -9/\sqrt{506} & 1/\sqrt{46} \\ 1/\sqrt{11} & 19/\sqrt{506} & 3/\sqrt{46} \\ 1/\sqrt{11} & 8/\sqrt{506} & -6/\sqrt{46} \end{pmatrix}$$

и матрицу преобразования в этом базисе:

$$[\varphi]_h = [h]_e^{-1}[\varphi]_h[h]_e = [h]_e^\top[\varphi]_h[h]_e = \begin{pmatrix} 1 & -11/\sqrt{46} & -237/\sqrt{506} \\ 0 & 1 & -46/\sqrt{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{5} & 7/\sqrt{5} \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

3) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

41. *Указание:* Матрица преобразования дифферецирования в базисе 1, x, x^2 уже верхняя треугольная, поэтому для нахождения базиса Шура достаточно применить к системе 1, x, x^2 процесс ортогонализации и нормировки.

1) 1, x, x^2;

2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $\frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}x$, $\frac{3\sqrt{10}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$.

42. Пусть e — собственный вектор преобразования φ и λ — соответствующее собственное число. Пусть векторы $e, \psi e, \psi^2 e, \ldots, \psi^{m-1} e$ линейно независимы, а вектор $\psi^m e$ является их линейной комбинацией. Получаем, что линейная оболочка L этих векторов инвариантна относительно ψ и поэтому содержит собственный вектор этого преобразования. Однако любой вектор из L является собственным для преобразования φ, так как $\varphi\psi^k e = \psi^k \varphi e = \lambda \psi^k e$ $(k = 0, 1, \ldots)$ в силу перестановочности φ и ψ.

43. *Указание:* Использовать существование общего собственного вектора преобразований φ^* и ψ^*.

61. *Указание:* Доказать существование ортонормированного базиса из собственных векторов, повторяя доказательство теоремы Шура.

63. Не может, если все собственные числа различны. Может в противном случае.

64. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 3-i \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} -3\sqrt{2}/10 & -3\sqrt{2}/10 & 4/5 \\ -i\sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 & 0 \\ 2\sqrt{2}/5 & 2\sqrt{2}/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5i & 0 & 0 \\ 0 & -5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Сперва находим собственные числа: $\lambda_1 = 3+i$, $\lambda_2 = -3+i$. Собственное подпространство, относящееся к собственному числу $\lambda_1 = 3+i$, имеет размерность 2. Его базис: $(1,0,1)$, $(2,1,0)$, откуда (например, производя процесс ортогонализации Грама–Шмидта) получаем ортономированный базис собственного пространства: $(1,0,1)/\sqrt{2}$, $(1,1,-1)/\sqrt{3}$. Собственное подпространство, относящееся к собственному числу $\lambda_2 = -3+i$, имеет размерность 1. Собственный вектор (после нормировки): $(-1,2,1)/\sqrt{6}$. Записываем базис из собственных векторов (по столбцам) в матрицу перехода, а собственные числа — по диагонали в матрицу преобразования в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & -3+i \end{pmatrix}.$$

4) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -i & i \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$

5) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & i & -i \\ 0 & \sqrt{2} & i & -i \\ \sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$.

65. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Воспользуемся ответом к задаче № 64(4), в которой рассмотрено преобразование, являющееся комплексификацией преобразования рассматриваемой задачи. Вещественные собственные значения, $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 0$, и соответствующие им вещественные собственные векторы, $u_1 = (1,1,1,1)/2$, $u_2 = (1,-1,1,-1)/2$, сохраняются без изменений. Паре комплексно сопряженных собственных значений $\lambda_3 = \alpha + i\beta = 1+i$, $\lambda_4 = \alpha - i\beta = 1-i$ и соответствующих собственных векторов $u_3 = x+iy = (i,-1,-i,1) = (0,-1,0,1)+i\cdot(1,0,-1,0)$, $u_4 = x-iy = (-i,-1,i,1) = (0,-1,0,1) - i\cdot(1,0,-1,0)$, соответствует двумерное инвариантное подпространство с базисом $x = (0,-1,0,1)$, $y = (1,0,-1,0)$, или, после нормировки $(0,-1,0,1)/\sqrt{2}$, $(1,0,-1,0)/\sqrt{2}$, и клетка $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ в матрице преобразования.

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

66. Можно только при $n = 0$. В остальных случаях преобразование не диагонализируемо и, следовательно, не может быть нормальным, как бы ни было введено скалярное произведение.

67. При $n = 0$ числа a, b — любые. Если $n \geq 1$, то $a = \pm 1$, $b = 0$.

69. Далее $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots y_n$ — координаты векторов x и y соответственно в исходном базисе:

1) $(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$;

2) $(x,y) = 3x_1y_1 + 6x_2y_2 + 6x_3y_3 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 - 4x_1y_3 - 4x_3y_1 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$.

3) В случае вещественного пространства этого сделать нельзя: преобразование не диагонализируемо. В случае комплексного пространства собственные числа равны 1, i, $-i$ и матрица перехода к базису из собственных векторов равна

$$Q = \begin{pmatrix} 13 & -2+i & -2-i \\ 6 & -1+i & -1-i \\ -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем скалярное произведение так, чтобы собственные векторы образовывали ортонормированную систему. Для этого матрица Грама Γ, составленная для векторов исходного базиса, должна удовлетворять условию $Q^\top \Gamma \overline{Q} = E$, откуда

$$\Gamma = \left(Q^\top\right)^{-1} \left(\overline{Q}\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 46 & -49 & 34 \\ -49 & 54 & -35 \\ 34 & -35 & 26 \end{pmatrix}.$$

Поэтому скалярное произведение можно задать формулой $(x,y) = \dfrac{1}{4}(46x_1y_1 + 54x_2y_2 + 26x_3y_3 - 49x_1y_2 - 49x_2y_1 + 34x_1y_3 + 34x_3y_1 - 35x_2y_3 - 35x_3y_2)$, где $x_1, x_2, x_3,\ y_1, y_2, y_3$ — координаты векторов x и y соответственно в исходном базисе.

70. *Указание:* Построить интерполяционный многочлен, такой, что $f(\lambda_i) = \overline{\lambda}_i$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа преобразования φ.

71. *Указание:* Воспользоваться задачей № 70.

72. *Указание:* Воспользоваться задачей № 44.

73. В ответах приведены собственные числа матриц A, B соответственно и матрицы перехода к общему ортонормированному базису из собственных векторов.

1) $2,\ -1,\ -1;\quad 0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3};\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i & -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i & -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix};$

2) $3,\ 3,\ -3;\quad 6i,\ 6i,\ 6;\quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$

76. Нет. Например, если φ — унитарное, то $\dfrac{|\varphi x|}{|x|} = 1$ для любого $x \neq 0$.

80. Для доказательства необходимости положим $y = \varphi^*\varphi x - x$, тогда из равенства $(\varphi^*\varphi x, y) = (\varphi x, \varphi y) = (x, y)$ получаем $(\varphi^*\varphi x - x, \varphi^*\varphi x - x) = 0$, откуда $\varphi^*\varphi x = x$ для произвольного x, т. е. $\varphi^*\varphi = \varepsilon$.

83. Пусть e — собственный вектор унитарного (ортогонального) преобразования φ, причем $\varphi e = \lambda e$. Тогда $(e,e) = (\varphi e, \varphi e) = (\lambda e, \lambda e) = \lambda\overline{\lambda}(e,e)$, откуда $|\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda} = 1$.

84. *Указание:* Рассмотреть матрицу преобразования в ортонормированном базисе из собственных векторов.

85. Преобразования, заключающиеся в умножении на число, по модулю равное 1.

87. Нет. Это преобразование вырождено.

89. 1) Да; 2) нет.

90. Нет, если преобразование не тождественно.

99. 1) Для $\lambda = 1$ собственное подпространство совпадает с множеством всех четных многочленов; для $\lambda = -1$ собственное подпространство совпадает с множеством всех нечетных многочленов. 2) Для $\lambda = 1$ собственное подпространство есть линейная оболочка системы многочленов $x^n+1, x^{n-1}+x, \ldots$; для $\lambda = -1$ собственное подпространство есть линейная оболочка системы многочленов $x^n - 1, x^{n-1} - x, \ldots$; если $n = 2k-1$, то оба подпространства имеют размерность k; если $n = 2k$, то первое имеет размерность $k+1$, второе — k.

100. Собственными векторами преобразования являются многочлены $1+x^2$, x, $1+2x+2x^2$. Введем скалярное произведение так, чтобы эти векторы образовывали ортонормированную систему: если $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, то $(f,g) = 9a_0b_0 + 2a_0b_1 - 7a_0b_2 + 2a_1b_0 + a_1b_1 - 2a_1b_2 - 7a_2b_0 - 2a_2b_1 + 6a_2b_2$.

103.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Указание: Дополнить заданную систему до ортогонального базиса и в нем определить матрицу преобразования. Затем перейти к стандартному базису.

106. Преобразование является ортогональным. *Указание:* Можно построить матрицу преобразования в стандартном базисе и проверить, что она ортогональна. Можно также сравнить матрицы Грама, составленные для каждой из двух систем векторов.

107. *Указание:* Использовать соотношения: $(x, y) = \dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$ для вещественного случая и $(x, y) = \dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x+iy|^2 - i|x-iy|^2}{4}$ — для комплексного.

108. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{pmatrix}$.

2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha}{2} & -\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/6 - i/2 & \sqrt{3}/6 + i/2 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/6 + i/2 & \sqrt{3}/6 - i/2 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 + \sqrt{3}i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 - \sqrt{3}i/2 \end{pmatrix}$.

5) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} i & -2i & 2 \\ -2i & i & 2 \\ 2 & 2 & -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

6) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \sqrt{2} + \sqrt{2}i & \sqrt{2} - \sqrt{2}i & -\sqrt{2} + \sqrt{2}i & -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \\ 2i & -2i & -2i & 2i \\ -\sqrt{2} + \sqrt{2}i & -\sqrt{2} - \sqrt{2}i & \sqrt{2} + \sqrt{2}i & \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} + i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} - i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} + i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

7) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

109. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha}{2} & -\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\dfrac{5\pi}{3} & -\sin\dfrac{5\pi}{3} \\ 0 & \sin\dfrac{5\pi}{3} & \cos\dfrac{5\pi}{3} \end{pmatrix}$$

3) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{7\pi}{4} & -\sin\dfrac{7\pi}{4} & 0 & 0 \\ \sin\dfrac{7\pi}{4} & \cos\dfrac{7\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\dfrac{5\pi}{4} & -\sin\dfrac{5\pi}{4} \\ 0 & 0 & \sin\dfrac{5\pi}{4} & \cos\dfrac{5\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

111. $|v| = 1$

112. $E - 2ww^*$, где w — столбец координат вектора v.

114. Собственные значения равны ± 1. Число -1 имеет кратность 1; соответствующие собственные векторы коллинеарны вектору w. Число -1 имеет кратность $n-1$, где n — размерность всего пространства; соответствующие собственные векторы вместе с 0 составляют ортогональное дополнение к w.

116. $w = \begin{pmatrix} \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ -\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

117. $n(n+1)/2$.

118. Множество всех эрмитовых преобразований ненулевого унитарного пространства сами пространства не образуют (см. задачу № 119).

121. Пусть e — собственный вектор эрмитова преобразования φ, причем $\varphi e = \lambda e$. Тогда $\lambda(e,e) = (\varphi e, e) = (e, \varphi e) = \overline{\lambda}(e,e)$, откуда $\lambda = \overline{\lambda}$.

122. *Указание:* Рассмотреть матрицу преобразования в ортонормированном базисе из собственных векторов.

126. Эрмитовыми преобразованиями одномерного унитарного пространства являются преобразования умножения на действительное число и только они. Все преобразования одномерного евклидова пространства являются симметрическими.

130. Да. Матрица преобразования в стандартном базисе

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -2 & -4 \\ -5 & 0 & 0 & -13 \\ -2 & 0 & -8 & 4 \\ -4 & -13 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

141. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} (3-i)/\sqrt{35} & (-3+i)/\sqrt{14} \\ 5/\sqrt{35} & 2/\sqrt{14} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{66} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{11} & -7/\sqrt{66} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{11} & 4/\sqrt{66} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

4) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

5) $\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & 2/\sqrt{22} & 0 \\ -1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{11} & -3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$

6) $\begin{pmatrix} (1+i)/\sqrt{6} & (-4-2i)/\sqrt{66} & 2/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{6} & (3-i)/\sqrt{66} & (-1+i)/\sqrt{11} \\ 0 & 6/\sqrt{66} & (2-i)/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$

7) $\begin{pmatrix} (1-2i)/\sqrt{7} & 0 & 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{7} & 1/\sqrt{2} & (-1-2i)/\sqrt{14} \\ i/\sqrt{7} & -i/\sqrt{2} & (2-i)/\sqrt{14} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

8) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

142. *Указание:* Пусть e — собственный вектор преобразования $\varphi^*\varphi$. Доказать, что $\varphi e = 0$ тогда и только тогда, когда соответствующее собственное значение равно 0. Проверить, что φe является собственным для преобразования $\varphi\varphi^*$.

143. Докажем существование квадратного корня. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис из собственных векторов преобразования φ и $\varphi e_i = \lambda_i e_i$, то ψ однозначно определяется равенствами $\psi e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$. Легко проверить, что ψ положительно (неотрицательно) определено и $\psi^2 = \varphi$. Теперь докажем единственность квадратного корня. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — ортонормированный базис из собственных векторов преобразования ψ и $\psi f_i = \mu_i f_i$. Тогда $\varphi f_i = \psi^2 f_i = \mu_i^2 f_i$. Делаем вывод, что подпространство, порожденное всеми собственными векторами преобразования ψ, соответствующими собственному числу μ_i, совпадает с подпространством, порожденным всеми собственными векторами преобразования φ, соответствующими собственному числу μ_i^2. Таким образом, это подпространство однозначно определяется преобразованием φ и действие на нем преобразования ψ также определено однозначно.

144. 1) Находим собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, откуда получаем матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

такие, что $Q^{-1}AQ = D$. Вычисляем квадратный корень из диагональной матрицы D:

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

откуда находим квадратный корень из A:

$$Q\sqrt{D}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

4) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

149. В ответах приведены запись функции в новом ортонормированном базисе и формулы замены координат при переходе к этому базису:

1) $5x_1'^2 + x_2'^2$, $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2'$, $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2'$;

2) $4x_1'^2 - 7x_2'^2 - x_3'^2$; $x_1 = \dfrac{3}{\sqrt{11}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{66}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{11}}x_1' - \dfrac{7}{\sqrt{66}}x_2' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$, $x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{11}}x_1' + \dfrac{4}{\sqrt{66}}x_2' - \dfrac{2}{\sqrt{6}}x_3'$;

3) $3x_1'^2 + 3x_2'^2 - 3x_3'^2$; $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \dfrac{2}{\sqrt{6}}x_3'$, $x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$;

4) $6x_1'^2 - 5x_2'^2 - 5x_3'^2$; $x_1 = \dfrac{3}{\sqrt{11}}x_1' + \dfrac{2}{\sqrt{22}}x_2'$, $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{11}}x_1' + \dfrac{3}{\sqrt{22}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3'$, $x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{11}}x_1' - \dfrac{3}{\sqrt{22}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3'$;

5) $\dfrac{1}{2}(5x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2)$, $x_1 = \dfrac{1}{2}(-x_1' + x_2' + x_3' - x_4')$, $x_2 = \dfrac{1}{2}(x_1' + x_2' - x_3' - x_4')$, $x_3 = \dfrac{1}{2}(-x_1' + x_2' - x_3' + x_4')$, $x_4 = \dfrac{1}{2}(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')$.

150. В ответах приведены запись функции в новом ортонормированном базисе и формулы замены координат при переходе к этому базису:

1) $7|x_1'|^2$, $x_1 = \dfrac{3-i}{\sqrt{35}}x_1' - \dfrac{3-i}{\sqrt{14}}x_2'$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}x_1' + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}x_2'$;

2) $4x_1'^2 + 4x_2'^2 - 7x_3'^2$; $x_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{6}}x_1' - \dfrac{4+2i}{\sqrt{66}}x_2' + \dfrac{2}{\sqrt{11}}x_3'$, $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{6}}x_1' + \dfrac{3-i}{\sqrt{66}}x_2' - \dfrac{1-i}{\sqrt{11}}x_3'$, $x_3 = \dfrac{6}{\sqrt{66}}x_2' + \dfrac{2-i}{\sqrt{11}}x_3'$;

3) $6x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; $x_1 = \dfrac{1-2i}{\sqrt{7}}x_1' + \dfrac{2}{\sqrt{14}}x_3'$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{7}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' - \dfrac{1+2i}{\sqrt{14}}x_3'$, $x_3 = \dfrac{i}{\sqrt{7}}x_1' - \dfrac{i}{\sqrt{2}}x_2' + \dfrac{2-i}{\sqrt{14}}x_3'$.

153. *Указание:* Использовать задачу №7.

154. В ответах приведены запись функций в новом базисе и формулы замены координат при переходе к этому базису:

1) Матрица функций f и g в исходном базисе имеют соответственно виды:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что каждая из функций положительно определена.

Воспользуемся методом задачи №151. Припишем к матрице B единичную и синхронными элементарными преобразованиями строк и столбцов (вычитаем из второй строки первую, вычитаем из второго столбца первый) приведем B к единичной:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Транспонированная к матрице, стоящей от черты справа, — это матрица Q, такая, что $Q^\top BQ$ — единичная. Вычислим

$$C = Q^\top AQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы C равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Собственные векторы равны $(1,-1)^\top$, $(1,1)^\top$ соответственно, откуда, нормируя эти векторы, получаем матрицу перехода

$$P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$S = QP = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$S^\top AS = P^\top CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица S — это матрица перехода к базису, в котором f определяется диагональной матрицей $S^\top AS$. Матрица квадратичной функции g — единичная. Таким образом, мы нашли следующие диагональные виды квадратичных функций f и g: $f = x_1'^2 + 3x_2'^2$, $g = x_1'^2 + x_2'^2$, где $x_1 = \sqrt{2}x_1'$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2'$.

2) Матрица функций f и g в исходном базисе имеют соответственно виды:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что каждая из функций положительно определена.Воспользуемся методом задачи № 153. Решим обобщенную задачу на собственные числа и собственные векторы $Ax = \lambda Bx$. Запишем характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 5-2\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Его корни (собственные числа): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Собственные векторы находим как решения однородных систем линейных уравнений $A - \lambda_j B = 0$ $(j = 1, 2)$. Для $\lambda_1 = 4$ получаем систему

$$\begin{cases} -3x_1 - 0x_2 = 0; \\ -0x_1 - 0x_2 = 0. \end{cases}$$

Собственными векторами, относящимися к $\lambda_1 = 1$, являются $c \cdot (0, 1)^\top$, где $c \neq 0$. Для $\lambda_2 = 4$ получаем систему

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = 0; \\ -3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Собственными векторами, относящимися к $\lambda_2 = 4$, являются $c \cdot (1, -1)^\top$, где $c \neq 0$. Из собственных векторов составляем матрицу перехода к искомому базису:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $S^\top AS$ квадратичной функции f в новом базисе диагональна, на диагонали стоят собственные числа:

$$S^\top AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица квадратичной функции g — единичная. Таким образом, мы нашли следующие диагональные виды квадратичных функций f и g: $f = x_1'^2 + 4x_2'^2$, $g = x_1'^2 + x_2'^2$, где $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1' - x_2'$.

3) $f = 10x_1'^2 + 8x_2'^2$; $g = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$; $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{10}}x_1' - \dfrac{1}{\sqrt{10}}x_3'$; $x_2 = -\sqrt{2}x_2'$; $x_3 = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}x_3'$;

4) $f = 4x_1'^2 - x_2'^2$; $g = -x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{4}x_1' + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}x_3'$; $x_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_2' - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x_3'$; $x_3 = \dfrac{7}{4\sqrt{5}}x_1' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_2' - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}x_3'$;

5) $f = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$; $g = \dfrac{1}{2}x_1'^2 - 3x_2'^2$; $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$; $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{5}{\sqrt{3}}x_2' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$; $x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{2}{\sqrt{3}}x_2' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$;

6) $f = -x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; $g = 2x_1'^2 + x_2'^2$; $x_1 = \frac{1}{4}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \frac{1}{4}x_3'$; $x_2 = -\frac{3}{4}x_1' + \frac{1}{4}x_3'$; $x_3 = -\frac{5}{4}x_1' - \frac{1}{4}x_3'$.

155. В ответах приведены запись функций в новом базисе и формулы замены координат при переходе к этому базису. *Указание:* Использовать задачу № 72.

1) $f = x_1'^2 + x_2'^2 - 9x_3'^2$, $g = 2x_1'^2 + 2x_2'^2 - 3x_3'^2$, где $x_1 = x_1'$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{5}}x_3'$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}x_2' - \frac{2}{\sqrt{5}}x_3'$;

2) $f = x_1'^2 - 2x_2'^2 - 2x_3'^2$, $g = x_1'^2 + x_2'^2 + 5x_3'^2$, где $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3'$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2'$,

$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3'$.

157. Минимальное значение, равное -3, достигается на векторах $\pm(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})^\top$. Максимальное значение, равное 3, достигается на векторах $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^\top$.

158. Минимальное значение равно -3; достигается на векторах $\pm(2/\sqrt{3}, -5/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})^\top$. Максимальное значение, равное $1/2$, достигается на векторах $\pm(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\top$. *Указание:* Перейти к базису, ортонормированному согласно скалярному произведению $8x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

160. *Указание:* Доказать, что $\psi_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*)$, $\psi_2 = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*)$.

161. В алгебраическую форму записи комплексного числа.

162. Для преобразований евклидова пространства утверждение не верно. Например, преобразование $\varphi x = [a, x]$ трехмерного геометрического пространства удовлетворяет условию $(\varphi x, x) = 0$. *Указание:* Для доказательтьва утверждения в случае унитарного пространства воспользоваться эрмитовым разложением φ и задачей № 136.

163. В тригонометрическую форму записи комплексного числа.

164. Не является, так как второй сомножитель не является неотрицательно определенной матрицей.

165. *Указание:* Рассмотреть полярное разложение преобразования φ^*.

169. Найдем матрицу преобразования $\varphi^*\varphi$ в базисе e_1, e_2, в котором задана матрица $[\varphi]_e$ преобразования φ:

$$[\varphi^*\varphi]_e = [\varphi]_e^*[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 34 & 34 \\ 34 & 34 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами преобразования $\varphi^*\varphi$ являются $\lambda_1 = 68$, $\lambda_2 = 0$. Находим относящиеся к этим собственным числам собственные векторы:

$$[f_1]_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [f_2]_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(векторы f_1, f_2 нормированы и образуют ортонормированную систему). Извлекая квадратные корни из собственных чисел находим сингулярные числа $\sigma_1 = 2\sqrt{17}$, $\sigma_2 = 0$. Вычисляем

$$[g_1]_e = \frac{1}{\sigma_1}[\varphi f_1]_e = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Вектор g_1 дополняем до ортонормированного базиса пространства вектором g_2:

$$[g_2]_e = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Матрицы перехода от базиса e_1, e_2 к базисам f_1, f_2 и g_1, g_2 равны соответственно

$$[f]_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad [g]_e = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем ортогональное преобразование η из условия $\eta f_j = g_j$ $(j = 1, 2)$. Матрицу $[\eta]_e$ можно найти из условия $[\eta]_e[f]_e = [g]_e$:

$$[\eta]_e = [g]_e[f]_e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$$

откуда получаем матрицу преобразования $\psi = \eta^{-1}\varphi$:

$$[\psi]_e = [\eta]_e^{-1}[\varphi]_e = \begin{pmatrix} \sqrt{17} & \sqrt{17} \\ \sqrt{17} & \sqrt{17} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что преобразование ψ можно найти также, извлекая квадратный корень из преобразования $\varphi^*\varphi$.

170. Для каждой матрицы A в ответе приведено ее полярное разложение $A = UH$:

1) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3/5 & 4i/5 \\ 4i/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

171. 1) 2, 1, 0;

2) $\sqrt{12}$, $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, 0.

3) Матрицы преобразования дифференцирования и сопряженного к нему преобразования в базисе 1, x, $\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$ (можно взять любой базис) равны

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно (см. задачи №№ 17, 19). Собственные числа матрицы

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равны 15, 3, 0, поэтому сингулярные числа преобразования дифференцирования равны $\sqrt{15}$, $\sqrt{3}$, 0.

176. $\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}$.

177. $|\alpha|\sigma_1, \ldots, |\alpha|\sigma_n$.

186. *Указание:* Написать полярное разложение матрицы A, а затем эрмитову (симметрическую) неотрицательно определенную матрицу S в этом разложении представить в виде $S = Q^{-1}DQ$, где Q — унитарная (ортогональная) матрица.

188. $A^* = QDP^*$.

189. $A^{-1} = QD^{-1}P^*$ (если мы не требуем, чтобы сингулярные числа на диагонали в D располагались в убывающем порядке).

190. Для каждой матрицы A в ответе приведено ее сингулярное разложение $A = PDQ^*$:

1) $\begin{pmatrix} 7/\sqrt{50} & -1/\sqrt{50} \\ -1/\sqrt{50} & -7/\sqrt{50} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 3/5 & -4i/5 \\ 4i/5 & -3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

5) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

6) Матрица

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. Находим и нормируем ее собственные векторы, из которых составляем ортогональную матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Находим сингулярные числа $\sigma_1 = \sqrt{15}$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, которые записываем по диагонали в матрицу

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{15} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь ищем векторы

$$f_1 = \frac{1}{\sigma_1} A f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sigma_2} A f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и дополняем их до ортонормированного базиса, например, векторами

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Из координатных столбцов f_1, f_2, f_3, f_4 составляем матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Мы нашли сингулярное разложение $A = PDQ^*$.

7) $$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{12} & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6} & 0 & -1/2 \\ 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

193. Пусть b' — ортогональная проекция вектора b на образ отображения φ, а b'' — ортогональная проекция вектора b на ядро отображения φ^*, или, что эквивалентно, на ортогональное дополнение к образу отображения φ, тогда $b = b' + b''$. Докажем, что любое псевдорешение удовлетворяет уравнению $\varphi^*\varphi x = \varphi^* b$. Имеем $b = b' + b'' = \varphi x + b''$ для любого псевдорешения x, откуда $\varphi^* b = \varphi^*\varphi x + \varphi^* b''$. Но $\varphi^* b'' = 0$, поэтому $\varphi^*\varphi x = \varphi^* b$. Теперь покажем, что любое решение уравнения $\varphi^*\varphi x = \varphi^* b$ является псевдорешением уравнения $\varphi x = b$. Действительно, так как $\varphi^* b'' = 0$, то $\varphi^*\varphi x + \varphi^* b'' = \varphi^* b$, откуда $\varphi^*(b' - \varphi x) = 0$. Таким образом, вектор $b' - \varphi x$ принадлежит ядру отображения φ^*, но очевидно, что этот вектор принадлежит также образу отображения φ, поэтому он нулевой и $\varphi x = b'$, т. е. x есть псевдорешение.

196. 1) Единственное псевдорешение $(1, 2)^\top$.

2) Матрица системы A и вектор b равны:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^*b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы $A^*Ax = A^*b$ дает описание всех псевдорешений заданной системы линейных уравнений:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где t_1, t_2 — произвольные числа. Находим проекцию вектора $(1, 0, 0)^\top$ на ортогональное дополнение к ядру матрицы A, т. е. к вектору $(1, 1, 1)^\top$. Найденная проекция $(1/3, 1/3, 1/3)^\top$ и есть искомое нормальное псевдорешение.

3) Все псевдорешения описываются формулой $x = (0, 0, 1/4)^\top + t(1, 1, -1)^\top$, где t — любое. Для нахождения нормального псевдорешения найдем проекцию вектора $(0, 0, 1/4)^\top$ на ортогональное дополнение к $(1, 1, -1)^\top$. Получим $(1/12, 1/12, 2/12)^\top$.

4) Все псевдорешения описываются формулой $x = (-4, 3, 3, 0)^\top + t(1, 1, -1, 1)^\top$, t — любое. Нормальное псевдорешение находим как проекцию вектора $(-4, 3, 3, 0)^\top$ на ортогональное дополнение к вектору $(1, 1, -1, 1)^\top$. Получаем $(-3, 4, 2, 1)^\top$.

5) Единственное псевдорешение $(0, 0)^\top$. *Указание:* b принадлежит ядру матрицы A^*.

6) Единственное псевдорешение $(288/49, -369/49)^\top$. *Указание:* Найти более простой базис ядра матрицы A^*.

197. 1) Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — сингулярный базис пространства W, соответствующий сингулярному базису $e_1, \ldots, e_n$. Согласно задаче № 191, множество псевдорешений уравнения $\varphi x = b$ есть множество всех решений уравнения $\varphi x = b'$, где b' — проекция вектора b на образ T преобразования φ. Найдем b'. Легко проверить, что векторы $f_1, \ldots, f_r$ составляют (ортонормированный) базис подпространства T, поэтому $b' = (b, f_1)f_1 + \ldots + (b, f_r)f_r$. Рассмотрим произвольный вектор $x = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$. Имеем $\varphi x = \beta_1 \varphi e_1 + \ldots + \beta_n \varphi e_n = \beta_1\sigma_1 f_1 + \ldots + \beta_n \sigma_n f_n = \beta_1\sigma_1 f_1 + \ldots + \beta_r\sigma_r f_r$. Теперь уравнение $\varphi x = b'$ примет вид $\beta_1\sigma_1 f_1 + \ldots + \beta_r\sigma_r f_r = (b, f_1)f_1 + \ldots + (b, f_r)f_r$, откуда находим $\beta_i = \dfrac{(b, f_i)}{\sigma_i} = \dfrac{(b, \varphi e_i)}{\sigma_i^2}$ $(i = 1, \ldots, r)$, а $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ — любые.

2) Вытекает из предыдущего по теореме Пифагора.

199. Утверждения можно получить из задачи № 197. Приведем независимое доказательство. Так как P — унитарная (ортогональная), то

$$|Ax - b|^2 = |P^*Ax - P^*b|^2 = \left| \begin{pmatrix} D_1Q_1^*x - P_1^*b \\ -P_2^*b \end{pmatrix} \right|^2 = |D_1Q_1^*x - P_1^*b|^2 + |P_2^*b|^2.$$

Минимум достигается, когда $D_1Q_1^*x = P_1^*b$. Так как $Q_1^*Q_2 = 0$ и, следовательно, $Q_1^*Q_2z = 0$, то общее решение полученной системы есть $x = Q_1D_1^{-1}P_1^*b + Q_2z$, где z — произвольный вектор. По теореме Пифагора $|x|^2 = |Q_1D_1^{-1}P_1^*b|^2 + |Q_2z|^2$. Минимум получаем, когда $z = 0$.

203. $(4, -3)^\top$. *Указание:* Воспользоваться линейностью псевдообратного отображения.

204. *Указание:* Для каждого вектора e_i стандартного базиса найти нормальное псевдорешение системы $Ax = e_i$.

1) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

213. Отображения φ и χ взаимно обратны на паре подпространств T_{φ^*} и T_φ.

215. Отображения χ должно иметь тот же ранг, что и φ. Следовательно, T_{varphi^*} является образом этого отображения.

217. *Указание:* Уравнение $(\varphi\chi)^* = \varphi\chi$ показывает, что ядро отображения χ должно быть ортогонально к подпространству T_φ. Воспользоваться задачей № 207.

Литература

[1] *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1983.

[2] *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987.

[3] *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1974.

[4] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.

[5] *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975.

[6] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: Наука. Физматлит, 1996.

Ответы, указания, решения

4. Любое преобразование одномерного пространства заключается в умножении на α каждого вектора x. Поэтому сопряженное преобразование евклидова одномерного пространства также заключается в умножении каждого вектора на α. Сопряженное преобразование унитарного одномерного пространства заключается в умножении каждого вектора на $\overline{\alpha}$.

5. $\varphi^* = \varphi^{-1}$ (поворот на угол α в противоположном направлении).

6. $\varphi^* = -\varphi$.

11. *Указание:* Можно воспользоваться №№ 7, 8.

12. *Указание:* Можно воспользоваться №№ 9, 10.

15. Проектирование на прямую $2x = -y = 2z$ параллельно плоскости $2x + y - 2z = 0$.

16. Отражение в прямой $2x = -y = 2z$ параллельно плоскости $2x + y - 2z = 0$.

17. 1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

18. 1) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$.

19. 1) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -12 & 8 & 8 \\ -5 & 0 & 5 \\ -8 & -8 & 12 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

20. $\varphi^* X = A^\top X$ для пространства вещественных матриц; $\varphi^* X = A^* X$ для пространства комплексных матриц.

21. $\varphi^* X = (A^{-1})^\top X A^\top$ для пространства вещественных матриц; $\varphi^* X = (A^{-1})^* X A^*$ для пространства комплексных матриц.

29. 1) $\dfrac{(x, g_1)}{(f_1, g_1)} f_1 + \ldots + \dfrac{(x, g_m)}{(f_m, g_m)} f_m$;

2) $2\left(\dfrac{(x, g_1)}{(f_1, g_1)} f_1 + \ldots + \dfrac{(x, g_m)}{(f_m, g_m)} f_m\right) - x$.

35. Нулевое подпространство; линейные оболочки систем многочленов $x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

36. Множество многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=0}^{n} f(x) = 0$.

37. Множество многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

38. *Указание:* Для доказательства 1) рассмотреть φ^* (скалярное произведение может быть введено любым допустимым образом, чтобы рассматриваемое пространство стало унитарным).

39. *Указание:* Воспользовавшись предыдущей задачей, доказать, что найдутся инвариантные подпространства L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, такие, что $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n$, причем размерность L_k равна k, а размерность всего пространства равна n. Другое доказательство может быть основано на следующем. Для получения базиса Шура достаточно применить процесс ортогонализации и нормировки к Жорданову базису.

40. 1) Так как $[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, то $[\varphi^*]_e = [\varphi]_e^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & -6 & -4 \\ 3 & 13 & 8 \end{pmatrix}$. Находим характеристический многочлен: $(\lambda - 1)^3$. Преобразование имеет единственное собственное число $\lambda_0 = 1$. Решаем однородную систему линейных уравнений с матрицей

$$[\varphi^*]_e - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & -7 & -4 \\ 3 & 13 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пространство решений этой системы одномерно. Его базис составляет вектор с координатами $(1, 3, -6)^\top$. Ортогональное дополнение описывается уравнением $x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0$ и является двумерным подпространством L_2, инвариантным относительно φ. В качестве его базиса возьмем векторы f_1, f_2:

$$[f_1]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [f_2]_e = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$[\varphi f_1]_e = [\varphi]_e [f_1]_e = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [\varphi f_2]_e = [\varphi]_e [f_2]_e = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\varphi f_1 = -f_2$, $\varphi f_2 = f_1 + 2f_2$, то матрица индуцированного на L_2 преобразования в базисе f_1, f_2 имеет вид $[\varphi|_{L_2}]_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому матрица сопряженного преобразования (относительно некоторым образом введенного *нового* скалярного произведения) равна $[\varphi|_{L_2}]_f^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Характеристический многочлен равен $(\lambda^2 - 1)^2$. Преобразование имеет единственное собственное число: $\lambda_0 = 1$. Решаем однородную систему линейных уравнений с матрицей

$$[\varphi|_{L_2}]_f^* - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пространство решений этой системы одномерно. Его базис составляет вектор с координатами $(1, -1)^\top$. Ортогональное дополнение описывается уравнением $x_1 - x_2 = 0$, где x_1,

x_2 — координаты вектора в базисе f_1, f_2, и является одномерным подпространством L_3, инвариантным относительно φ. В качестве его базиса возьмем вектор g_1:

$$[g_1]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вектора g_1 в исходном базисе:

$$[g_1]_e = [1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2]_e = [f_1]_e + [f_2]_e = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(заметим, что вектор g_1 можно найти проще: как собственный вектор преобразования φ). Итак, найдена цепочка инвариантных относительно φ подпространств: $V_1 \subset V_2 \subset V_3$, где $V_1 = L(g_1)$, $V_2 = L(f_1, f_2)$, а V_3 совпадает со всем трехмерным пространством. Вектор g_1 можно дополнить до базиса пространства V_2 вектором f_1, поэтому $V_2 = L(g_1, f_1)$. Систему g_1, f_1 можно дополнить до базиса пространства V_3 вектором e_1, поэтому $V_3 = L(g_1, f_1, e_1)$. В базисе g_1, f_1, e_1 матрица преобразования φ уже верхняя треугольная. Чтобы найти ортогональный базис, в котором матрица этого преобразования верхняя треугольная, ортогонализируем систему g_1, f_1, e_1 (в указанном порядке):

$$[g_1']_e = [g_1]_e = (3, 1, 1)^\top;$$

$$[f_1']_e = [f_1]_e - \frac{(f_1, g_1')}{(g_1', g_1')} \cdot [g_1']_e = \frac{1}{11} \cdot (-9, 19, 8)^\top;$$

$$[e_1']_e = [e_1]_e - \frac{(e_1, g_1')}{(g_1', g_1')} \cdot [g_1']_e - \frac{(e_1, f_1')}{(f_1', f_1')} \cdot [f_1']_e = \frac{1}{46} \cdot (1, 3, -6)$$

Чтобы найти ортонормированную систему, нормируем полученные векторы, откуда получаем искомую матрицу перехода к базису Шура

$$[h]_e = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & -9/\sqrt{506} & 1/\sqrt{46} \\ 1/\sqrt{11} & 19/\sqrt{506} & 3/\sqrt{46} \\ 1/\sqrt{11} & 8/\sqrt{506} & -6/\sqrt{46} \end{pmatrix}$$

и матрицу преобразования в этом базисе:

$$[\varphi]_h = [h]_e^{-1}[\varphi]_h[h]_e = [h]_e^\top[\varphi]_h[h]_e = \begin{pmatrix} 1 & -11/\sqrt{46} & -237/\sqrt{506} \\ 0 & 1 & -46/\sqrt{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{5} & 7/\sqrt{5} \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

3) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$

4) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

41. *Указание:* Матрица преобразования дифферецирования в базисе 1, x, x^2 уже верхняя треугольная, поэтому для нахождения базиса Шура достаточно применить к системе 1, x, x^2 процесс ортогонализации и нормировки.

1) $1,\ x,\ x^2$;

2) $\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{2}x,\ \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2}x,\ \frac{3\sqrt{10}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$.

42. Пусть e — собственный вектор преобразования φ и λ — соответствующее собственное число. Пусть векторы $e, \psi e, \psi^2 e, \ldots, \psi^{m-1}e$ линейно независимы, а вектор $\psi^m e$ является их линейной комбинацией. Получаем, что линейная оболочка L этих векторов инвариантна относительно ψ и поэтому содержит собственный вектор этого преобразования. Однако любой вектор из L является собственным для преобразования φ, так как $\varphi\psi^k e = \psi^k \varphi e = \lambda \psi^k e$ $(k = 0, 1, \ldots)$ в силу перестановочности φ и ψ.

43. *Указание:* Использовать существование общего собственного вектора преобразований φ^* и ψ^*.

61. *Указание:* Доказать существование ортонормированного базиса из собственных векторов, повторяя доказательство теоремы Шура.

63. Не может, если все собственные числа различны. Может в противном случае.

64. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 3-i \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} -3\sqrt{2}/10 & -3\sqrt{2}/10 & 4/5 \\ -i\sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 & 0 \\ 2\sqrt{2}/5 & 2\sqrt{2}/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5i & 0 & 0 \\ 0 & -5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Сперва находим собственные числа: $\lambda_1 = 3 + i$, $\lambda_2 = -3 + i$. Собственное подпространство, относящееся к собственному числу $\lambda_1 = 3 + i$, имеет размерность 2. Его базис: $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$, откуда (например, производя процесс ортогонализации Грама–Шмидта) получаем ортономированный базис собственного пространства: $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$, $(1, 1, -1)/\sqrt{3}$. Собственное подпространство, относящееся к собственному числу $\lambda_2 = -3 + i$, имеет размерность 1. Собственный вектор (после нормировки): $(-1, 2, 1)/\sqrt{6}$. Записываем базис из собственных векторов (по столбцам) в матрицу перехода, а собственные числа — по диагонали в матрицу преобразования в новом базисе:

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & -3+i \end{pmatrix}$.

4) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -i & i \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$

5) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & i & -i \\ 0 & \sqrt{2} & i & -i \\ \sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$.

65. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Воспользуемся ответом к задаче №64(4), в которой рассмотрено преобразование, являющееся комплексификацией преобразования рассматриваемой задачи. Вещественные собственные значения, $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 0$, и соответствующие им вещественные собственные векторы, $u_1 = (1,1,1,1)/2$, $u_2 = (1,-1,1,-1)/2$, сохраняются без изменений. Паре комплексно сопряженных собственных значений $\lambda_3 = \alpha + i\beta = 1 + i$, $\lambda_4 = \alpha - i\beta = 1 - i$ и соответствующих собственных векторов $u_3 = x + iy = (i,-1,-i,1) = (0,-1,0,1) + i\cdot(1,0,-1,0)$, $u_4 = x - iy = (-i,-1,i,1) = (0,-1,0,1) - i\cdot(1,0,-1,0)$, соответствует двумерное инвариантное подпространство с базисом $x = (0,-1,0,1)$, $y = (1,0,-1,0)$, или, после нормировки $(0,-1,0,1)/\sqrt{2}$, $(1,0,-1,0)/\sqrt{2}$, и клетка $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ в матрице преобразования.

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

66. Можно только при $n = 0$. В остальных случаях преобразование не диагонализируемо и, следовательно, не может быть нормальным, как бы ни было введено скалярное произведение.

67. При $n = 0$ числа a, b — любые. Если $n \geq 1$, то $a = \pm 1$, $b = 0$.

69. Далее $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots y_n$ — координаты векторов x и y соответственно в исходном базисе:

1) $(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$;

2) $(x, y) = 3x_1y_1 + 6x_2y_2 + 6x_3y_3 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 - 4x_1y_3 - 4x_3y_1 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$.

3) В случае вещественного пространства этого сделать нельзя: преобразование не диагонализируемо. В случае комплексного пространства собственные числа равны 1, i, $-i$ и матрица перехода к базису из собственных векторов равна

$$Q = \begin{pmatrix} 13 & -2+i & -2-i \\ 6 & -1+i & -1-i \\ -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем скалярное произведение так, чтобы собственные векторы образовывали ортонормированную систему. Для этого матрица Грама Γ, составленная для векторов исходного базиса, должна удовлетворять условию $Q^\top\Gamma\overline{Q} = E$, откуда

$$\Gamma = \left(Q^\top\right)^{-1}\left(\overline{Q}\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 46 & -49 & 34 \\ -49 & 54 & -35 \\ 34 & -35 & 26 \end{pmatrix}.$$

Поэтому скалярное произведение можно задать формулой $(x, y) = \dfrac{1}{4}(46x_1y_1 + 54x_2y_2 + 26x_3y_3 - 49x_1y_2 - 49x_2y_1 + 34x_1y_3 + 34x_3y_1 - 35x_2y_3 - 35x_3y_2)$, где $x_1, x_2, x_3,\ y_1, y_2, y_3$ — координаты векторов x и y соответственно в исходном базисе.

70. *Указание:* Построить интерполяционный многочлен, такой, что $f(\lambda_i) = \overline{\lambda}_i$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа преобразования φ.

71. *Указание:* Воспользоваться задачей №70.

72. *Указание:* Воспользоваться задачей №44.

73. В ответах приведены собственные числа матриц A, B соответственно и матрицы перехода к общему ортонормированному базису из собственных векторов.

1) $2,\ -1,\ -1;\quad 0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3};\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i & -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i & -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix};$

2) $3,\ 3,\ -3;\quad 6i,\ 6i,\ 6;\quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$

76. Нет. Например, если φ — унитарное, то $\dfrac{|\varphi x|}{|x|} = 1$ для любого $x \neq 0$.

80. Для доказательства необходимости положим $y = \varphi^*\varphi x - x$, тогда из равенства $(\varphi^*\varphi x, y) = (\varphi x, \varphi y) = (x, y)$ получаем $(\varphi^*\varphi x - x, \varphi^*\varphi x - x) = 0$, откуда $\varphi^*\varphi x = x$ для произвольного x, т. е. $\varphi^*\varphi = \varepsilon$.

83. Пусть e — собственный вектор унитарного (ортогонального) преобразования φ, причем $\varphi e = \lambda e$. Тогда $(e, e) = (\varphi e, \varphi e) = (\lambda e, \lambda e) = \lambda\overline{\lambda}(e, e)$, откуда $|\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda} = 1$.

84. *Указание:* Рассмотреть матрицу преобразования в ортонормированном базисе из собственных векторов.

85. Преобразования, заключающиеся в умножении на число, по модулю равное 1.

87. Нет. Это преобразование вырождено.

89. 1) Да; 2) нет.

90. Нет, если преобразование не тождественно.

99. 1) Для $\lambda = 1$ собственное подпространство совпадает с множеством всех четных многочленов; для $\lambda = -1$ собственное подпространство совпадает с множеством всех нечетных многочленов. 2) Для $\lambda = 1$ собственное подпространство есть линейная оболочка системы многочленов $x^n + 1, x^{n-1} + x, \ldots$; для $\lambda = -1$ собственное подпространство есть линейная оболочка системы многочленов $x^n - 1, x^{n-1} - x, \ldots$; если $n = 2k - 1$, то оба подпространства имеют размерность k; если $n = 2k$, то первое имеет размерность $k + 1$, второе — k.

100. Собственными векторами преобразования являются многочлены $1 + x^2$, x, $1 + 2x + 2x^2$. Введем скалярное произведение так, чтобы эти векторы образовывали ортонормированную систему: если $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, то $(f, g) = 9a_0b_0 + 2a_0b_1 - 7a_0b_2 + 2a_1b_0 + a_1b_1 - 2a_1b_2 - 7a_2b_0 - 2a_2b_1 + 6a_2b_2$.

103.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Указание: Дополнить заданную систему до ортогонального базиса и в нем определить матрицу преобразования. Затем перейти к стандартному базису.

106. Преобразование является ортогональным. *Указание:* Можно построить матрицу преобразования в стандартном базисе и проверить, что она ортогональна. Можно также сравнить матрицы Грама, составленные для каждой из двух систем векторов.

107. *Указание:* Использовать соотношения: $(x,y) = \dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$ для вещественного случая и $(x,y) = \dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x+iy|^2 - i|x-iy|^2}{4}$ — для комплексного.

108. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{pmatrix}$.

2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha}{2} & -\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/6 - i/2 & \sqrt{3}/6 + i/2 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/6 + i/2 & \sqrt{3}/6 - i/2 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 + \sqrt{3}i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 - \sqrt{3}i/2 \end{pmatrix}$.

5) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} i & -2i & 2 \\ -2i & i & 2 \\ 2 & 2 & -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

6) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \sqrt{2}+\sqrt{2}i & \sqrt{2}-\sqrt{2}i & -\sqrt{2}+\sqrt{2}i & -\sqrt{2}-\sqrt{2}i \\ 2i & -2i & -2i & 2i \\ -\sqrt{2}+\sqrt{2}i & -\sqrt{2}-\sqrt{2}i & \sqrt{2}+\sqrt{2}i & \sqrt{2}-\sqrt{2}i \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}+i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}-i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

7) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

109. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{5\pi}{3} & -\sin\frac{5\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{5\pi}{3} & \cos\frac{5\pi}{3} \end{pmatrix}$$

3) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{7\pi}{4} & -\sin\frac{7\pi}{4} & 0 & 0 \\ \sin\frac{7\pi}{4} & \cos\frac{7\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{5\pi}{4} & -\sin\frac{5\pi}{4} \\ 0 & 0 & \sin\frac{5\pi}{4} & \cos\frac{5\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

111. $|v| = 1$

112. $E - 2ww^*$, где w — столбец координат вектора v.

114. Собственные значения равны ± 1. Число -1 имеет кратность 1; соответствующие собственные векторы коллинеарны вектору w. Число -1 имеет кратность $n-1$, где n — размерность всего пространства; соответствующие собственные векторы вместе с 0 составляют ортогональное дополнение к w.

116. $w = \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

117. $n(n+1)/2$.

118. Множество всех эрмитовых преобразований ненулевого унитарного пространства сами пространства не образуют (см. задачу № 119).

121. Пусть e — собственный вектор эрмитова преобразования φ, причем $\varphi e = \lambda e$. Тогда $\lambda(e,e) = (\varphi e, e) = (e, \varphi e) = \overline{\lambda}(e,e)$, откуда $\lambda = \overline{\lambda}$.

122. *Указание:* Рассмотреть матрицу преобразования в ортонормированном базисе из собственных векторов.

126. Эрмитовыми преобразованиями одномерного унитарного пространства являются преобразования умножения на действительное число и только они. Все преобразования одномерного евклидова пространства являются симметрическими.

130. Да. Матрица преобразования в стандартном базисе

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -2 & -4 \\ -5 & 0 & 0 & -13 \\ -2 & 0 & -8 & 4 \\ -4 & -13 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

141. В ответах приведены матрица перехода к новому базису и матрица преобразования в этом базисе.

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} (3-i)/\sqrt{35} & (-3+i)/\sqrt{14} \\ 5/\sqrt{35} & 2/\sqrt{14} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{66} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{11} & -7/\sqrt{66} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{11} & 4/\sqrt{66} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

4) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

5) $\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & 2/\sqrt{22} & 0 \\ -1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{11} & -3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$

6) $\begin{pmatrix} (1+i)/\sqrt{6} & (-4-2i)/\sqrt{66} & 2/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{6} & (3-i)/\sqrt{66} & (-1+i)/\sqrt{11} \\ 0 & 6/\sqrt{66} & (2-i)/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$

7) $\begin{pmatrix} (1-2i)/\sqrt{7} & 0 & 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{7} & 1/\sqrt{2} & (-1-2i)/\sqrt{14} \\ i/\sqrt{7} & -i/\sqrt{2} & (2-i)/\sqrt{14} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

8) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

142. *Указание:* Пусть e — собственный вектор преобразования $\varphi^*\varphi$. Доказать, что $\varphi e = 0$ тогда и только тогда, когда соответствующее собственное значение равно 0. Проверить, что φe является собственным для преобразования $\varphi\varphi^*$.

143. Докажем существование квадратного корня. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис из собственных векторов преобразования φ и $\varphi e_i = \lambda_i e_i$, то ψ однозначно определяется равенствами $\psi e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$. Легко проверить, что ψ положительно (неотрицательно) определено и $\psi^2 = \varphi$. Теперь докажем единственность квадратного корня. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — ортонормированный базис из собственных векторов преобразования ψ и $\psi f_i = \mu_i f_i$. Тогда $\varphi f_i = \psi^2 f_i = \mu_i^2 f_i$. Делаем вывод, что подпространство, порожденное всеми собственными векторами преобразования ψ, соответствующими собственному числу μ_i, совпадает с подпространством, порожденным всеми собственными векторами преобразования φ, соответствующими собственному числу μ_i^2. Таким образом, это подпространство однозначно определяется преобразованием φ и действие на нем преобразования ψ также определено однозначно.

144. 1) Находим собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, откуда получаем матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

такие, что $Q^{-1}AQ = D$. Вычисляем квадратный корень из диагональной матрицы D:

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

откуда находим квадратный корень из A:

$$Q\sqrt{D}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

4) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

149. В ответах приведены запись функции в новом ортонормированном базисе и формулы замены координат при переходе к этому базису:

1) $5x_1'^2 + x_2'^2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2'$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2'$;

2) $4x_1'^2 - 7x_2'^2 - x_3'^2$; $x_1 = \frac{3}{\sqrt{11}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{66}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3'$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}x_1' - \frac{7}{\sqrt{66}}x_2' - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3'$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}x_1' + \frac{4}{\sqrt{66}}x_2' - \frac{2}{\sqrt{6}}x_3'$;

3) $3x_1'^2 + 3x_2'^2 - 3x_3'^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3'$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{2}{\sqrt{6}}x_3'$, $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3'$;

4) $6x_1'^2 - 5x_2'^2 - 5x_3'^2$; $x_1 = \frac{3}{\sqrt{11}}x_1' + \frac{2}{\sqrt{22}}x_2'$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{11}}x_1' + \frac{3}{\sqrt{22}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3'$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}x_1' - \frac{3}{\sqrt{22}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3'$;

5) $\frac{1}{2}(5x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2)$, $x_1 = \frac{1}{2}(-x_1' + x_2' + x_3' - x_4')$, $x_2 = \frac{1}{2}(x_1' + x_2' - x_3' - x_4')$, $x_3 = \frac{1}{2}(-x_1' + x_2' - x_3' + x_4')$, $x_4 = \frac{1}{2}(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')$.

150. В ответах приведены запись функции в новом ортонормированном базисе и формулы замены координат при переходе к этому базису:

1) $7|x_1'|^2$, $x_1 = \dfrac{3-i}{\sqrt{35}}x_1' - \dfrac{3-i}{\sqrt{14}}x_2'$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}x_1' + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}x_2'$;

2) $4x_1'^2 + 4x_2'^2 - 7x_3'^2$; $x_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{6}}x_1' - \dfrac{4+2i}{\sqrt{66}}x_2' + \dfrac{2}{\sqrt{11}}x_3'$, $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{6}}x_1' + \dfrac{3-i}{\sqrt{66}}x_2' - \dfrac{1-i}{\sqrt{11}}x_3'$, $x_3 = \dfrac{6}{\sqrt{66}}x_2' + \dfrac{2-i}{\sqrt{11}}x_3'$;

3) $6x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; $x_1 = \dfrac{1-2i}{\sqrt{7}}x_1' + \dfrac{2}{\sqrt{14}}x_3'$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{7}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' - \dfrac{1+2i}{\sqrt{14}}x_3'$, $x_3 = \dfrac{i}{\sqrt{7}}x_1' - \dfrac{i}{\sqrt{2}}x_2' + \dfrac{2-i}{\sqrt{14}}x_3'$.

153. *Указание:* Использовать задачу № 7.

154. В ответах приведены запись функций в новом базисе и формулы замены координат при переходе к этому базису:

1) Матрица функций f и g в исходном базисе имеют соответственно виды:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что каждая из функций положительно определена.

Воспользуемся методом задачи № 151. Припишем к матрице B единичную и синхронными элементарными преобразованиями строк и столбцов (вычитаем из второй строки первую, вычитаем из второго столбца первый) приведем B к единичной:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Транспонированная к матрице, стоящей от черты справа, — это матрица Q, такая, что $Q^\top BQ$ — единичная. Вычислим

$$C = Q^\top AQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы C равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Собственные векторы равны $(1,-1)^\top$, $(1,1)^\top$ соответственно, откуда, нормируя эти векторы, получаем матрицу перехода

$$P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$S = QP = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$S^\top AS = P^\top CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица S — это матрица перехода к базису, в котором f определяется диагональной матрицей $S^\top AS$. Матрица квадратичной функции g — единичная. Таким образом, мы нашли следующие диагональные виды квадратичных функций f и g: $f = x_1'^2 + 3x_2'^2$, $g = x_1'^2 + x_2'^2$, где $x_1 = \sqrt{2}x_1'$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2'$.

2) Матрица функций f и g в исходном базисе имеют соответственно виды:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что каждая из функций положительно определена.Воспользуемся методом задачи № 153. Решим обобщенную задачу на собственные числа и собственные векторы $Ax = \lambda Bx$. Запишем характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 5 - 2\lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Его корни (собственные числа): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Собственные векторы находим как решения однородных систем линейных уравнений $A - \lambda_j B = 0$ $(j = 1, 2)$. Для $\lambda_1 = 4$ получаем систему

$$\begin{cases} -3x_1 - 0x_2 = 0; \\ -0x_1 - 0x_2 = 0. \end{cases}$$

Собственными векторами, относящимися к $\lambda_1 = 1$, являются $c \cdot (0, 1)^\top$, где $c \neq 0$. Для $\lambda_2 = 4$ получаем систему

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = 0; \\ -3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Собственными векторами, относящимися к $\lambda_2 = 4$, являются $c \cdot (1, -1)^\top$, где $c \neq 0$. Из собственных векторов составляем матрицу перехода к искомому базису:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $S^\top AS$ квадратичной функции f в новом базисе диагональна, на диагонали стоят собственные числа:

$$S^\top AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица квадратичной функции g — единичная. Таким образом, мы нашли следующие диагональные виды квадратичных функций f и g: $f = x_1'^2 + 4x_2'^2$, $g = x_1'^2 + x_2'^2$, где $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1' - x_2'$.

3) $f = 10x_1'^2 + 8x_2'^2$; $g = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$; $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{10}}x_1' - \dfrac{1}{\sqrt{10}}x_3'$; $x_2 = -\sqrt{2}x_2'$; $x_3 = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}x_3'$;

4) $f = 4x_1'^2 - x_2'^2$; $g = -x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{4}x_1' + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}x_3'$; $x_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_2' - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x_3'$; $x_3 = \dfrac{7}{4\sqrt{5}}x_1' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}x_2' - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}x_3'$;

5) $f = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$; $g = \dfrac{1}{2}x_1'^2 - 3x_2'^2$; $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$; $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{5}{\sqrt{3}}x_2' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$; $x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{2}{\sqrt{3}}x_2' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3'$;

6) $f = -x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; $g = 2x_1'^2 + x_2'^2$; $x_1 = \frac{1}{4}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \frac{1}{4}x_3'$; $x_2 = -\frac{3}{4}x_1' + \frac{1}{4}x_3'$; $x_3 = -\frac{5}{4}x_1' - \frac{1}{4}x_3'$.

155. В ответах приведены запись функций в новом базисе и формулы замены координат при переходе к этому базису. *Указание:* Использовать задачу № 72.

1) $f = x_1'^2 + x_2'^2 - 9x_3'^2$, $g = 2x_1'^2 + 2x_2'^2 - 3x_3'^2$, где $x_1 = x_1'$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{5}}x_3'$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}x_2' - \frac{2}{\sqrt{5}}x_3'$;

2) $f = x_1'^2 - 2x_2'^2 - 2x_3'^2$, $g = x_1'^2 + x_2'^2 + 5x_3'^2$, где $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3'$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2'$,
$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3'$.

157. Минимальное значение, равное -3, достигается на векторах $\pm(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})^\top$. Максимальное значение, равное 3, достигается на векторах $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^\top$.

158. Минимальное значение равно -3; достигается на векторах $\pm(2/\sqrt{3}, -5/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})^\top$. Максимальное значение, равное $1/2$, достигается на векторах $\pm(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\top$. *Указание:* Перейти к базису, ортонормированному согласно скалярному произведению $8x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

160. *Указание:* Доказать, что $\psi_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*)$, $\psi_2 = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*)$.

161. В алгебраическую форму записи комплексного числа.

162. Для преобразований евклидова пространства утверждение не верно. Например, преобразование $\varphi x = [a, x]$ трехмерного геометрического пространства удовлетворяет условию $(\varphi x, x) = 0$. *Указание:* Для доказательства утверждения в случае унитарного пространства воспользоваться эрмитовым разложением φ и задачей № 136.

163. В тригонометрическую форму записи комплексного числа.

164. Не является, так как второй сомножитель не является неотрицательно определенной матрицей.

165. *Указание:* Рассмотреть полярное разложение преобразования φ^*.

169. Найдем матрицу преобразования $\varphi^*\varphi$ в базисе e_1, e_2, в котором задана матрица $[\varphi]_e$ преобразования φ:

$$[\varphi^*\varphi]_e = [\varphi]_e^*[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 34 & 34 \\ 34 & 34 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами преобразования $\varphi^*\varphi$ являются $\lambda_1 = 68$, $\lambda_2 = 0$. Находим относящиеся к этим собственным числам собственные векторы:

$$[f_1]_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [f_2]_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(векторы f_1, f_2 нормированы и образуют ортонормированную систему). Извлекая квадратные корни из собственных чисел находим сингулярные числа $\sigma_1 = 2\sqrt{17}$, $\sigma_2 = 0$. Вычисляем

$$[g_1]_e = \frac{1}{\sigma_1}[\varphi f_1]_e = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Вектор g_1 дополняем до ортонормированного базиса пространства вектором g_2:

$$[g_2]_e = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Матрицы перехода от базиса e_1, e_2 к базисам f_1, f_2 и g_1, g_2 равны соответственно

$$[f]_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad [g]_e = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем ортогональное преобразование η из условия $\eta f_j = g_j$ $(j = 1, 2)$. Матрицу $[\eta]_e$ можно найти из условия $[\eta]_e[f]_e = [g]_e$:

$$[\eta]_e = [g]_e[f]_e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$$

откуда получаем матрицу преобразования $\psi = \eta^{-1}\varphi$:

$$[\psi]_e = [\eta]_e^{-1}[\varphi]_e = \begin{pmatrix} \sqrt{17} & \sqrt{17} \\ \sqrt{17} & \sqrt{17} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что преобразование ψ можно найти также, извлекая квадратный корень из преобразования $\varphi^*\varphi$.

170. Для каждой матрицы A в ответе приведено ее полярное разложение $A = UH$:

1) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3/5 & 4i/5 \\ 4i/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

171. 1) 2, 1, 0;

2) $\sqrt{12}$, $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, 0.

3) Матрицы преобразования дифференцирования и сопряженного к нему преобразования в базисе 1, x, $\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$ (можно взять любой базис) равны

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно (см. задачи №№ 17, 19). Собственные числа матрицы

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равны 15, 3, 0, поэтому сингулярные числа преобразования дифференцирования равны $\sqrt{15}$, $\sqrt{3}$, 0.

176. $\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}$.

177. $|\alpha|\sigma_1, \ldots, |\alpha|\sigma_n$.

186. *Указание:* Написать полярное разложение матрицы A, а затем эрмитову (симметрическую) неотрицательно определенную матрицу S в этом разложении представить в виде $S = Q^{-1}DQ$, где Q — унитарная (ортогональная) матрица.

188. $A^* = QDP^*$.

189. $A^{-1} = QD^{-1}P^*$ (если мы не требуем, чтобы сингулярные числа на диагонали в D располагались в убывающем порядке).

190. Для каждой матрицы A в ответе приведено ее сингулярное разложение $A = PDQ^*$:

1) $\begin{pmatrix} 7/\sqrt{50} & -1/\sqrt{50} \\ -1/\sqrt{50} & -7/\sqrt{50} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 3/5 & -4i/5 \\ 4i/5 & -3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

5) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

6) Матрица

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. Находим и нормируем ее собственные векторы, из которых составляем ортогональную матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Находим сингулярные числа $\sigma_1 = \sqrt{15}$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, которые записываем по диагонали в матрицу

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{15} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь ищем векторы

$$f_1 = \frac{1}{\sigma_1} A f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sigma_2} A f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и дополняем их до ортонормированного базиса, например, векторами

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Из координатных столбцов f_1, f_2, f_3, f_4 составляем матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Мы нашли сингулярное разложение $A = PDQ^*$.

7) $$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{12} & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6} & 0 & -1/2 \\ 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

193. Пусть b' — ортогональная проекция вектора b на образ отображения φ, а b'' — ортогональная проекция вектора b на ядро отображения φ^*, или, что эквивалентно, на ортогональное дополнение к образу отображения φ, тогда $b = b' + b''$. Докажем, что любое псевдорешение удовлетворяет уравнению $\varphi^*\varphi x = \varphi^* b$. Имеем $b = b' + b'' = \varphi x + b''$ для любого псевдорешения x, откуда $\varphi^* b = \varphi^*\varphi x + \varphi^* b''$. Но $\varphi^* b'' = 0$, поэтому $\varphi^*\varphi x = \varphi^* b$. Теперь покажем, что любое решение уравнения $\varphi^*\varphi x = \varphi^* b$ является псевдорешением уравнения $\varphi x = b$. Действительно, так как $\varphi^* b'' = 0$, то $\varphi^*\varphi x + \varphi^* b'' = \varphi^* b$, откуда $\varphi^*(b' - \varphi x) = 0$. Таким образом, вектор $b' - \varphi x$ принадлежит ядру отображения φ^*, но очевидно, что этот вектор принадлежит также образу отображения φ, поэтому он нулевой и $\varphi x = b'$, т. е. x есть псевдорешение.

196. 1) Единственное псевдорешение $(1, 2)^\top$.

2) Матрица системы A и вектор b равны:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$A^* A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^* b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы $A^*Ax = A^*b$ дает описание всех псевдорешений заданной системы линейных уравнений:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где t_1, t_2 — произвольные числа. Находим проекцию вектора $(1, 0, 0)^\top$ на ортогональное дополнение к ядру матрицы A, т. е. к вектору $(1, 1, 1)^\top$. Найденная проекция $(1/3, 1/3, 1/3)^\top$ и есть искомое нормальное псевдорешение.

3) Все псевдорешения описываются формулой $x = (0, 0, 1/4)^\top + t(1, 1, -1)^\top$, где t — любое. Для нахождения нормального псевдорешения найдем проекцию вектора $(0, 0, 1/4)^\top$ на ортогональное дополнение к $(1, 1, -1)^\top$. Получим $(1/12, 1/12, 2/12)^\top$.

4) Все псевдорешения описываются формулой $x = (-4, 3, 3, 0)^\top + t(1, 1, -1, 1)^\top$, t — любое. Нормальное псевдорешение находим как проекцию вектора $(-4, 3, 3, 0)^\top$ на ортогональное дополнение к вектору $(1, 1, -1, 1)^\top$. Получаем $(-3, 4, 2, 1)^\top$.

5) Единственное псевдорешение $(0, 0)^\top$. *Указание:* b принадлежит ядру матрицы A^*.

6) Единственное псевдорешение $(288/49, -369/49)^\top$. *Указание:* Найти более простой базис ядра матрицы A^*.

197. 1) Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — сингулярный базис пространства W, соответствующий сингулярному базису $e_1, \ldots, e_n$. Согласно задаче №191, множество псевдорешений уравнения $\varphi x = b$ есть множество всех решений уравнения $\varphi x = b'$, где b' — проекция вектора b на образ T преобразования φ. Найдем b'. Легко проверить, что векторы $f_1, \ldots, f_r$ составляют (ортонормированный) базис подпространства T, поэтому $b' = (b, f_1)f_1 + \ldots + (b, f_r)f_r$. Рассмотрим произвольный вектор $x = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$. Имеем $\varphi x = \beta_1 \varphi e_1 + \ldots + \beta_n \varphi e_n = \beta_1\sigma_1 f_1 + \ldots + \beta_n \sigma_n f_n = \beta_1\sigma_1 f_1 + \ldots + \beta_r\sigma_r f_r$. Теперь уравнение $\varphi x = b'$ примет вид $\beta_1\sigma_1 f_1 + \ldots + \beta_r\sigma_r f_r = (b, f_1)f_1 + \ldots + (b, f_r)f_r$, откуда находим $\beta_i = \dfrac{(b, f_i)}{\sigma_i} = \dfrac{(b, \varphi e_i)}{\sigma_i^2}$ $(i = 1, \ldots, r)$, а $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ — любые.

2) Вытекает из предыдущего по теореме Пифагора.

199. Утверждения можно получить из задачи №197. Приведем независимое доказательство. Так как P — унитарная (ортогональная), то

$$|Ax - b|^2 = |P^*Ax - P^*b|^2 = \left| \begin{pmatrix} D_1 Q_1^* x - P_1^* b \\ -P_2^* b \end{pmatrix} \right|^2 = |D_1 Q_1^* x - P_1^* b|^2 + |P_2^* b|^2.$$

Минимум достигается, когда $D_1 Q_1^* x = P_1^* b$. Так как $Q_1^* Q_2 = 0$ и, следовательно, $Q_1^* Q_2 z = 0$, то общее решение полученной системы есть $x = Q_1 D_1^{-1} P_1^* b + Q_2 z$, где z — произвольный вектор. По теореме Пифагора $|x|^2 = |Q_1 D_1^{-1} P_1^* b|^2 + |Q_2 z|^2$. Минимум получаем, когда $z = 0$.

203. $(4, -3)^\top$. *Указание:* Воспользоваться линейностью псевдообратного отображения.

204. *Указание:* Для каждого вектора e_i стандартного базиса найти нормальное псевдорешение системы $Ax = e_i$.

1) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

213. Отображения φ и χ взаимно обратны на паре подпространств T_{φ^*} и T_φ.

215. Отображения χ должно иметь тот же ранг, что и φ. Следовательно, T_{varphi^*} является образом этого отображения.

217. *Указание:* Уравнение $(\varphi\chi)^* = \varphi\chi$ показывает, что ядро отображения χ должно быть ортогонально к подпространству T_φ. Воспользоваться задачей № 207.