Глава 14

Евклидовы и унитарные пространства

14.1. Скалярное произведение. Матрица Грама

1. Какие из следующих функций можно взять в качестве скалярного произведения в соответствующих линейных пространствах?

1) $f(x, y) = x_1 y_1$ в $\mathbb{R}^1$;
2) $f(x, y) = x_1 y_1$ в $\mathbb{R}^2$;
3) $f(x, y) = x_1 y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
4) $f(x, y) = x_1 + y_1$ в $\mathbb{R}^2$;
5) $f(x, y) = x_1^2 + y_2^2$ в $\mathbb{R}^2$;
6) $f(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
7) $f(x, y) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_1 - x_2 y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
8) $f(x, y) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
9) $f(x, y) = x^\top y$ в $\mathbb{R}^n$;
10) $f(x, y) = x^\top A y$ в $\mathbb{R}^n$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
11) $f(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$ в $\mathbb{R}^{n\times n}$;
12) $f(X, Y) = \operatorname{tr}(X^\top Y)$ в $\mathbb{R}^{n\times n}$;
13) $f(X, Y) = \operatorname{tr}(XY^\top)$ в $\mathbb{R}^{n\times n}$;
14) $f(X, Y) = \operatorname{tr}(XY - YX)$ в $\mathbb{R}^{n\times n}$;
15) $f(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$ в $\mathbb{R}[t]$;
16) $f(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)y'(t)dt$ в $\mathbb{R}[t]$;
17) $f(x, y) = x(1)y(1)$ в $\mathbb{R}[t]$;
18) $f(x, y) = (x, y)$ (скалярное произведение) в $\mathbf{V}_3$;
19) $f(x, y) = [x, y]$ (векторное произведение) в $\mathbf{V}_3$;
20) $f(x, y) = |x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2$ в $\mathbf{V}_3$.

2. Доказать, что в унитарном пространстве следующие равенства в общем случае не имеют места (в отличие от евклидова пространства):

1) $(x, y) = \frac{1}{4}\big(|x + y|^2 - |x - y|^2\big)$;
2) $(x, y) = \frac{1}{2}\big(|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2\big)$.

3. Доказать, что в 2-мерном вещественном линейном пространстве функцию

$$f(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

можно выбрать в качестве скалярного произведения тогда и только тогда, когда $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{12} = a_{21}$, $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$, где x_1, x_2, y_1, y_2 — координаты векторов x и y в некотором базисе.

4. Вывести из неравенства Коши–Буняковского *неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным*:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные вещественные числа.

5. Вывести из неравенства Коши–Буняковского *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим* двух неотрицательных чисел:

$$\sqrt{x \cdot y} \le \frac{x + y}{2}.$$

6. В пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение задано как функция компонент $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ векторов x и y. Записать матрицу Грама а) в стандартном базисе; б) в базисе $e_1', \ldots, e_n'$. Записать выражение скалярного произведения векторов x, y через их координаты в базисе $e_1', \ldots, e_n'$.

1) $3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$, $e_1' = (1, -3)^\top$, $e_2' = (-2, 1)^\top$;
2) $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$, $e_1' = (3, 4)^\top$, $e_2' = (-1, 1)^\top$;
3) $2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$, $e_1' = (1, 0, 0)^\top$, $e_2' = (1, 1, 0)^\top$, $e_2' = (1, 1, 1)^\top$.

7. В некотором базисе евклидова пространства задана матрица Грама и координатные столбцы векторов x и y. Найти (x, y), $|x|$, $|y|$ и угол между векторами x и y.

1) $[f] = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[x] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[y] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2) $[f] = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $[x] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $[y] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) $[f] = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $[x] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $[y] = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

4) $[f] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $[x] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[y] = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$;

5) $[f] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $[x] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[y] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

8. Найти матрицу Грама в новом базисе, если даны матрица Грама в старом базисе и формулы перехода:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{aligned} e_1' &= e_1, \\ e_2' &= e_1 + e_2, \\ e_3' &= e_1 + e_2 + e_3; \end{aligned}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + e_3, \\ e_2' &= e_1 - e_2 + e_3, \\ e_3' &= e_1 + e_3. \end{aligned}$

14.2. Ортогональность

9. Найти какой-либо ненулевой вектор, ортогональный к данной системе векторов арифметического пространства с указанным скалярным произведением:
1) $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$, скалярное произведение стандартное;
2) $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 1)$, скалярное произведение стандартное;
3) (р) $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$, если $(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$;
4) $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 1)$, если $(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_4y_4$.

10. Проверить, что заданные векторы образуют ортогональную систему векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением. Дополнить ее до ортогонального базиса всего пространства.
1) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, -3)$;
2) $(1, 2, 2, -3)$, $(2, 2, 3, 4)$;
3) $(1, 1, 1, -3)$, $(1, 2, 3, 2)$.

11. Проверить, что заданные векторы образуют ортонормированную систему векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением. Дополнить ее до ортонормированного базиса всего пространства.
1) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

12. Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта построить ортонормированный базис линейной оболочки данной системы векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:
1) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, -2)$, $(1, 3, 1)$;
2) $(2, 1, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(1, -4, -5, 8)$;
3) $(0, 1, -1, 1)$, $(1, 1, -3, 2)$, $(1, -1, -1, 0)$, $(2, 1, 3, 1)$;
4) $(1, 1, -1, -1)$, $(1, 1, 3, -3)$, $(1, 1, -9, 3)$, $(2, 2, -1, -2)$.

13. Найти ортонормированный базис пространства решений указанной системы линейных уравнений, если скалярное произведение стандартное:

1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

14. В арифметическом пространстве задать скалярное произведение так, чтобы указанная система векторов образовывала ортонормированный базис:

1) (1, 1), (1, −1);
2) (1, 0), (1, 1);
3) (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1);
4) (3, 1, −1), (3, 1, 0), (3, −1, 2);
5) (1, 2, 3), (3, 1, 4), (1, 0, 2).

15. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую проекции вектора b на линейную оболочку векторов $a_1, \dots, a_m$ (скалярное произведение стандартное).

1) $b = (1,\ 1,\ 1)$, $a_1 = (1,\ 2,\ 3)$;
2) $b = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$, $a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$;
3) $b = (2 - 3,\ 2,\ 2)$, $a_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 2,\ -1,\ 0)$;
4) $b = (3,\ -6,\ -4,\ 3)$, $a_1 = (2,\ 1,\ -1,\ 1)$, $a_2 = (5,\ 3,\ 0,\ 1)$;
5) $b = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $a_1 = (2,\ 2,\ -2,\ 1)$, $a_2 = (2,\ 2,\ 1,\ -2)$, $a_3 = (3,\ 1,\ -1,\ 1)$;
6) $b = (7,\ -5,\ 1,\ 5)$, $a_1 = (1,\ -1,\ -2,\ 2)$, $a_2 = (0,\ 4,\ 5,\ -3)$, $a_3 = (1,\ -5,\ -7,\ 5)$.

16. Найти псевдорешение системы уравнений и матрицу, псевдообратную к матрице, составленной из коэффициентов левой части системы:

1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

17. Найти нормальное псевдорешение системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \\ -3x_1 + 3x_2 = -5. \end{cases}$

18. Найти расстояние от точки до линейного многообразия, заданного своим уравнением (параметрическими или общими) в некотором ортонормированном базисе:

1) (3, 3, 4, 2), $x_1 = 1 + 4t$, $x_2 = 1 + 2t$, $x_3 = 1 + 4t$, $x_4 = 1 + 3t$;
2) (5, 3, −4, −3), $x_1 = 2 + 2t_1 - 3t_2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1 + t_1 - t_2$, $x_4 = 1 - 2t_1 + 3t_2$;
3) (4, 0, 5, 0), $x_1 = 2 + 3t_1 - t_2 - t_3$, $x_2 = 1 - 2t_1$, $x_3 = 2 - 2t_1 + t_2 + t_3$, $x_4 = 3 - t_1 - t_2 + 4t_3$;

4) (1, 2, 3, 4), $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$;
5) (2, 0, 1, 4), $4x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 7$.

19. Найти расстояние между линейными многообразиями, заданными своими уравнениями (параметрическими или общими) в некотором ортонормированном базисе:
1) $x_1 = 3+t$, $x_2 = 2+t$, $x_3 = -1+t$, $x_4 = t$ и $x_1 = 1+t$, $x_2 = -1+2t$, $x_3 = 3t$, $x_4 = -4+4t$;
2) $x_1 = 1+t_1+t_2$, $x_2 = 2+2t_2$, $x_3 = 5-t_1+2t_2$, $x_4 = 1+3t_1+t_2$ и $x_1 = -1+3t$, $x_2 = 1+t$, $x_3 = 5$, $x_4 = -2+2t$;
3) $x_1 = 1-2t_2$, $x_2 = -1+t_1-t_2$, $x_3 = 2+t_1-t_2$, $x_4 = 3-t_1-3t_2$ и $x_1 = -3+4t$, $x_2 = -5+2t$, $x_3 = 2+2t$, $x_4 = 5-t$;
4) $x_1 = 2+t_1-4t_2$, $x_2 = 3+2t_2$, $x_3 = 1+t_1+4t_2$, $x_4 = 1-t_2$ и $x_1 = 1+4t_1$, $x_2 = -t_1+t_2$, $x_3 = -2+3t_1+7t_2$, $x_4 = -1-t_2$;
5) $x_1 = 1+t$, $x_2 = 2-2t$, $x_3 = -2+2t$, $x_4 = -4-t$ и $4x_1+2x_2-x_3-2x_4 = 3$.

14.3. Унитарные пространства

20. Какие из следующих функций можно взять в качестве скалярного произведения в соответствующих линейных пространствах?
1) $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$ в $\mathbb{C}^2$;
2) $f(x,y) = \overline{x}_1y_1 + \overline{x}_2y_2$ в $\mathbb{C}^2$;
3) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
4) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1$ в $\mathbb{C}^1$;
5) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1$ в $\mathbb{C}^2$;
6) $f(x,y) = x_1\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
7) $f(x,y) = x_1 + \overline{y}_1$ в $\mathbb{C}^2$;
8) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + ix_1\overline{y}_2 - ix_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
9) $f(x,y) = 3x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-2i)x_2\overline{y}_1 + 6x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
10) $f(x,y) = 2x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
11) $f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + (1-i)x_1\overline{y}_2 + (1+i)x_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
12) $f(x,y) = x^\top y$ в $\mathbb{C}^n$;
13) $f(x,y) = x^\top \overline{y}$ в $\mathbb{C}^n$;
14) $f(x,y) = x^\top A\overline{y}$ в $\mathbb{C}^n$, где $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$;
15) $f(X,Y) = \mathrm{tr}(X^\top \overline{Y})$ в $\mathbb{C}^{n\times n}$;
16) $f(X,Y) = \mathrm{tr}(X\overline{Y}^\top)$ в $\mathbb{C}^{n\times n}$;
17) $f(X,Y) = \mathrm{tr}\,X\,\mathrm{tr}\,\overline{Y})$ в $\mathbb{C}^{n\times n}$;
18) $f(X,Y) = \mathrm{tr}(XY - YX)$ в $\mathbb{C}^{n\times n}$;
19) $f(x,y) = x(1)y(1)$ в $\mathbb{C}[t]$.

21. В пространстве $\mathbb{C}^{n\times n}$ введено скалярное произведение $\mathrm{tr}(X^\top\overline{Y})$. Доказать, что норма в этом пространстве равна квадратному корню из суммы квадратов модулей всех компонент матрицы.

22. Доказать, что в унитарном пространстве равенства из №2 в общем случае не имеют места.

23. Доказать, что в унитарном пространстве для любых векторов x, y

$$(x,y)=\frac{1}{4}\Big(|x+y|-|x-y|+|x+iy|-i|x-iy|\Big).$$

24. Доказать, что в 2-мерном комплексном линейном пространстве функцию

$$f(x,y)=a_{11}x_1\overline{y}_1+a_{12}x_1\overline{y}_2+a_{21}x_2\overline{y}_1+a_{22}x_2\overline{y}_2$$

можно выбрать в качестве скалярного произведения тогда и только тогда, когда a_{11}, a_{22} — вещественные положительные и $a_{12}=\overline{a}_{21}$, $a_{11}a_{22}>|a_{12}|^2$, где x_1, x_2, y_1, y_2 — координаты векторов x и y в некотором базисе.

25. В пространстве $\mathbb{C}^n$ скалярное произведение задано как функция компонент $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ векторов x и y. Записать матрицу Грама а) в стандартном базисе; б) в базисе $e'_1,\ldots,e'_n$. Записать выражение скалярного произведения векторов x, y через их координаты в базисе $e'_1,\ldots,e'_n$.

1) $2x_1\overline{y}_1+(1+i)x_1\overline{y}_2+(1-i)x_2\overline{y}_1+3x_2\overline{y}_2$, $e'_1=(1,i)^\top$, $e'_2=(1,-i)^\top$;

2) $2x_1\overline{y}_1+2x_2\overline{y}_2+2x_3\overline{y}_3-ix_1\overline{y}_2+ix_2\overline{y}_1-ix_2\overline{y}_3+ix_3\overline{y}_2$, $e'_1=(-2+2i,0,2-2i)^\top$, $e'_2=(3,1+2i,1+i)^\top$, $e'_3=(1+2i,-2+3i,-2)^\top$.

26. В некотором базисе евклидова пространства задана матрица Грама и координатные столбцы векторов x и y. Найти (x,y), $|x|$, $|y|$.

1) $[f]=\begin{pmatrix}3 & -i\\ i & 2\end{pmatrix}$, $[x]=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $[y]=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$;

2) $[f]=\begin{pmatrix}3 & 1-i\\ 1+i & 2\end{pmatrix}$, $[x]=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, $[y]=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$;

3) $[f]=\begin{pmatrix}3 & 1+i & 0\\ 1-i & 3 & i\\ 0 & -i & 2\end{pmatrix}$, $[x]=\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}$, $[y]=\begin{pmatrix}1\\0\\-4+i\end{pmatrix}$.

27. Найти матрицу Грама в новом базисе, если даны матрица Грама в старом базисе и формулы перехода:

1) $\begin{pmatrix}2 & 1+i\\ 1-i & 2\end{pmatrix}$, $\quad \begin{aligned}e'_1&=e_1+ie_2,\\ e'_2&=ie_1+e_2;\end{aligned}$

2) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & i\\ 0 & -i & 2\end{pmatrix}$, $\quad \begin{aligned}e'_1&=e_1+ie_2+ie_3,\\ e'_2&=e_2+ie_3,\\ e'_3&=e_3.\end{aligned}$

28. Найти какой-либо ненулевой вектор, ортогональный к данной системе векторов арифметического пространства с указанным скалярным произведением:

1) $(-1,\ 1+i,\ 0)$, $(0,\ 1,\ i)$, скалярное произведение стандартное;

2) $(1,2,3)$, $(1,1,1)$, если $(x,y) = 2x_1\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2 + 2x_3\overline{y}_3 + ix_1\overline{y}_2 - ix_2\overline{y}_1 + ix_2\overline{y}_3 - ix_3\overline{y}_2$.

29. Проверить, что заданные векторы образуют ортогональную систему векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением. Дополнить ее до ортогонального базиса всего пространства.

1) $(1+i,\ 1-i)$;
2) $(1,\ 2i,\ 1)$, $\quad (i,\ 1,\ i)$;
3) $(2+i,\ i,\ -3-i)$, $\quad (3-7i,\ -3+3i,\ 2-4i)$;
4) $(1+i,\ 1+i,\ 1+i,\ 1+i)$, $\quad (1-i,\ -1+i,\ -1+i,\ 1-i)$.

30. Проверить, что заданные векторы образуют ортонормированную систему векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением. Дополнить ее до ортонормированного базиса всего пространства.

1) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$, $\quad \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$;
2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(i,\ -i,\ 0)$, $\quad \frac{1}{\sqrt{3}}(i,\ i,\ -1)$;
3) $(1,\ 1,\ 1)$, $\quad \left(1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;
4) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\quad \left(\frac{1}{2},\ \frac{i}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{i}{2}\right)$.

31. Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта построить ортонормированный базис линейной оболочки данной системы векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

1) $(1,1)$, $(1,i)$;
2) $(1,\ 1,\ i)$, $(2i,\ 1,\ 1+i)$;
3) $(1,\ 1,\ i)$, $(1+i,\ 1,\ 1+i)$, $(i,\ -1,\ 1)$;
4) $(1-2i,\ -1-3i,\ -1-3i)$, $(-i,\ 3+i,\ 3+i)$, $(1-2i,\ -3+2i,\ -3+2i)$;
5) $(0,\ 1,\ -3)$, $(3i,\ 1-i,\ 3+3i)$, $(3+i,\ 3+2i,\ 3-2i)$.

32. Найти ортонормированный базис пространства решений указанной системы линейных уравнений, если скалярное произведение стандартное:

1) $x_1 + ix_2 - ix_3 = 0$; $\qquad$ 2) $\begin{cases} x_1 + \ \ ix_2 + ix_3 = 0, \\ x_1 + 3ix_2 - ix_3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + (1+i)x_2 \qquad\quad + (1-i)x_4 = 0, \\ \qquad\quad (1-i)x_2 + 2x_3 + (1+i)x_4 = 0. \end{cases}$

33. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую проекции вектора b на линейную оболочку векторов $a_1, \ldots, a_m$ (скалярное произведение стандартное).

1) $b = (1,\ 0)$, $a_1 = (1,\ i)$;
2) $b = (i,\ 1,\ -1)$, $a_1 = (-1+i,\ 2-i,\ -1+2i)$;
3) $b = (1,\ 1+i,\ 1+i)$, $a_1 = (1,\ -1,\ i)$, $a_2 = (0,\ 1+i,\ 1-i)$;
4) $b = (3+i,\ 3-i,\ 0)$, $a_1 = (1,\ 1,\ 2i)$, $a_2 = (i,\ i,\ 1)$.

Ответы, указания, решения

1. 1) Можно;
2) нельзя, так как функция не является положительно определенной;
3) нельзя, так как функция не является симметричной;
4) нельзя, так как функция не является билинейной;
5) нельзя, так как функция не является билинейной;
6) нельзя, так как функция не является положительно определенной;
7) нельзя, так как функция не является симметричной;
8) можно;
9) можно;
10) можно, тогда и только тогда, когда A — симметричная положительно определенная;
11) нельзя при $n \geq 2$, так как функция не является положительно определенной;
12) можно;
13) можно;
14) нельзя: функция тождественно равна нулю — не является положительно определенной;
15) можно;
16) нельзя, так как функция не является положительно определенной;
17) нельзя, так как функция не является положительно определенной;
18) можно;
19) нельзя;
20) можно.

4. *Указание:* Применить неравенство Коши–Буняковского к векторам $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)^\top$, $(1,\, 1,\, \ldots,\, 1)^\top$.

5. *Указание:* Применить неравенство Коши–Буняковского к векторам $(\sqrt{x},\, \sqrt{y})^\top$ и $(\sqrt{y},\, \sqrt{x})^\top$.

6. 1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$, $15x_1'y_1' - 5x_1'y_2' - 5x_2'y_1' + 10x_2'y_2'$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $17x_1'y_1' + 6x_1'y_2' + 6x_2'y_1' + 5x_2'y_2'$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

7. 1) -1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\arccos(1/\sqrt{6})$;
2) -12, $\sqrt{12}$, $\sqrt{12}$, 0;
3) -11, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{5}$, $\arccos(11/\sqrt{140})$;
4) 0, $\sqrt{14}$, $2\sqrt{42}$, $\pi/2$;
5) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{14}$, $\arccos(1/\sqrt{28})$.

8. 1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 11 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

9. 1) Любой из векторов $t \cdot (1, -2, 1)$, где $t \neq 0$.

2) Требуемым условиям удовлетворяет любое ненулевое решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

например, вектор $(1, -2, 1, 0)$. Общее решение указанной системы: $t_1 \cdot (1, -2, 1, 0) + t_2 \cdot (2, -3, 0, 1)$, где $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Так как необходим ненулевой вектор, то t_1, t_2 одновременно не равны нулю.

3) Условие ортогональности вектору $a_1 = (1, 2, 3)$ запишется как $(x, a_1) = 2x_1 + 2x_1 + x_2 + 6x_2 + 12x_3 = 4x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 0$. Условие ортогональности вектору $a_2 = (1, 1, 1)$ запишется как $(x, a_2) = 2x_1 + x_1 + x_2 + 3x_2 + 4x_3 = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0$. Общее решение полученной системы линейных уравнений: $t \cdot (4, -4, 1)$, где $t \in \mathbb{R}$. Необходим ненулевой вектор, поэтому $t \neq 0$.

4) Требуемым условиям удовлетворяет любое ненулевое решение системы

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

например, вектор $(4, -4, 1, 0)$. Общее решение указанной системы: $t_1 \cdot (4, -4, 1, 0) + t_2 \cdot (9, -8, 0, 5)$, где $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Так как необходим ненулевой вектор, то t_1, t_2 одновременно не равны нулю.

10. 1) Любой из векторов $t \cdot (5, -4, -1)$, где $t \neq 0$.

2) Например, $(2, 1, -2, 0)$, $(5, -6, 2, -1)$.

3) Например, $(1, -2, 1, 0)$, $(5, 1, -3, 1)$.

11. 1) Один из векторов $\pm\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$.

2) Например, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

12. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{78}},\ \frac{5}{\sqrt{78}},\ -\frac{7}{\sqrt{78}}\right)$, $\left(-\frac{4}{\sqrt{26}},\ \frac{3}{\sqrt{26}},\ \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$;

2) $\left(\frac{2}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}},\ \frac{2}{\sqrt{10}},\ -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{26}},\ \frac{2}{\sqrt{26}},\ -\frac{3}{\sqrt{26}},\ \frac{2}{\sqrt{26}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ -\frac{2}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}},\ \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$;

3) $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{22}},\ \frac{1}{\sqrt{22}},\ \frac{1}{\sqrt{22}},\ \frac{2}{\sqrt{22}}\right)$;

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{4}},\ \frac{1}{\sqrt{4}},\ -\frac{1}{\sqrt{4}},\ -\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{76}},\ \frac{1}{\sqrt{76}},\ \frac{7}{\sqrt{76}},\ -\frac{5}{\sqrt{76}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{38}},\ \frac{3}{\sqrt{38}},\ \frac{2}{\sqrt{38}},\ \frac{4}{\sqrt{38}}\right)$.

13. 1) Например, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,\ -1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1,\ 1,\ -2)$.

2) $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1,\ -2,\ 1)$ или противоположный ему вектор.

3) Например, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,\ 1,\ 0,\ -1)$.

4) Например, $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1,\ -2,\ -1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (2,\ -1,\ 4,\ 3)$.

14. Скалярное произведение должно быть задано так, чтобы указанные в задании векторы образовывали бы ортонормированную систему, т. е. $X^\top \Gamma X = E$, где X — матрица, по столбцам которой записаны указанные векторы, а Γ — матрица Грама стандартного базиса относительно искомого скалярного произведения. Получаем $\Gamma = (XX^\top)^{-1}$.

1) $\frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_2y_2$;
2) $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$;
3) $x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$;
4) $\frac{1}{6}(x_1y_1 + 21x_2y_2 + 12x_3y_3 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 15x_2y_3 + 15x_3y_2)$;
5) $\frac{1}{5}(9x_1y_1 + 6x_2y_2 + 6x_3y_3 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 - 7x_1y_3 - 7x_3y_1 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2)$.

15. Указаны два вектора: ортогональная проекция и ортогональная составляющая:
1) $(-1, 0, 1)$, $(2, 2, 2)$;
2) $(3, 3, 3, 3, 3)$, $(-2, -1, 0, 1, 2)$;
3) $(1, -2, 3, 2)$, $(1, -1, -1, 0)$;
4) $(0, -1, -5, 3)$, $(3, -5, 1, 0)$;
5) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, 2\right)$;
6) $(4, 0, -3, 5)$, $(3, -5, 4, 0)$.

16. 1) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{3}{5}$, $\quad \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 & 5 \\ -6 & 5 & -7 & 2 \\ -3 & 10 & -11 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $x_1 = \frac{13}{4}$, $x_2 = \frac{7}{4}$, $x_3 = -1$, $\quad \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $x_1 = -\frac{17}{5}$, $x_2 = \frac{7}{3}$, $x_3 = \frac{77}{15}$, $\quad \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -5 & 0 \\ -20 & -12 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

17. 1) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 0$, $\quad \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

2) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{3}$, $x_3 = -\frac{5}{3}$, $\quad \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

18. 1) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; 3) 3; 4) 3; 5) 1.

19. 1) $\sqrt{\frac{69}{5}}$; 2) 0; 3) $2\sqrt{2}$; 4) $\frac{11}{\sqrt{39}}$; 5) 3.

20.
1) Нельзя, так как функция не является полуторалинейной;
2) нельзя, так как функция не является полуторалинейной;
3) можно;
4) можно;
5) нельзя, так как функция не является положительно определенной;
6) нельзя, так как функция не является эрмитовой;
7) нельзя, так как функция не является полуторалинейной;
8) нельзя, так как функция не является положительно определенной;
9) нельзя, так как функция не является эрмитовой;
10) можно;

11) нельзя, так как функция не является положительно определенной;
12) нельзя, так как функция не является полуторалинейной;
13) можно;
14) можно, тогда и только тогда, когда A — эрмитова положительно определенная;
15) можно;
16) можно;
17) нельзя, так как функция не является положительно определенной;
18) нельзя: функция тождественно равна нулю — не является положительно определенной;
19) нельзя, так как функция не является положительно определенной.

25. 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & -1+2i \\ -1-2i & 3 \end{pmatrix}$, $7x_1'\overline{y}_1'+(-1+2i)x_1'\overline{y}_2'+(-1-2i)x_2'\overline{y}_1'+3x_2'\overline{y}_2'$;
2) $\begin{pmatrix} 2 & -i & 0 \\ i & 2 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 2-16i \\ 0 & 2+16i & 18 \end{pmatrix}$, $32x_1'\overline{y}1'+22x_2'\overline{y}_2'+18x_3'\overline{y}_3'+(2-16i)x_2'\overline{y}_1'+$ $(2+16i)x_1'\overline{y}_3'$.

26. 1) $-i$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$;
2) $1+2i$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$;
3) 0, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{37}$.

27. 1) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 4+3i & -1+2i \\ 4-3i & 6 & 3i \\ -1-2i & -3i & 2 \end{pmatrix}$.

28. 1) Любой из векторов $t\cdot(1-i,\,1,\,-i)$, где $t\neq 0$;
2) любой из векторов $t\cdot(1-i,\,1,\,-i)$, где $t\neq 0$.

29. 1) Любой из векторов $t\cdot(1+i,-1+i)$, где $t\in\mathbb{C}$, $t\neq 0$;
2) $t\cdot(i,\,0,\,-i)$, где $t\in\mathbb{C}$, $t\neq 0$;
3) $t\cdot(1,\,3,\,1-i)$, где $t\in\mathbb{C}$, $t\neq 0$;
4) например, $(1-i,\,1-i,\,-1+i,\,-1+i)$, $(1+i,\,-1-i,\,1+i,\,-1-i)$.

30. 1) Любой вектор вида $\varepsilon\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$, где $\varepsilon\in\mathbb{C}$, $|\varepsilon|=1$.
2) любой вектор вида $\frac{1}{\sqrt{6}}\big(1,\ 1,\ -2i\big)$, где $\varepsilon\in\mathbb{C}$, $|\varepsilon|=1$;
3) любой вектор вида $\varepsilon\left(1,\ -\frac{1}{2}-\sqrt{\sqrt{3}}2i,\ -\frac{1}{2}+\sqrt{\sqrt{3}}2i\right)$, где $\varepsilon\in\mathbb{C}$, $|\varepsilon|=1$;
4) например, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{i}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{i}{2}\right)$.

31. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,\ 1\big)$, $\frac{1}{2}\big(1-i,\ -1+i\big)$;
2) $\frac{1}{\sqrt{3}}\big(1,\ 1,\ i\big)$, $\frac{1}{4\sqrt{3}}\big(-2+5i,\ 1-i,\ 4+i\big)$;
3) $\frac{1}{\sqrt{3}}\big(1,\ 1,\ i\big)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(i,\ 0,\ 1\big)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\big(1,\ -2,\ i\big)$;
4) $\frac{1}{5}\big(1-2i,\ -1-3i,\ -1-3i\big)$, $\frac{1}{5\sqrt{2}}\big(-2-6i,\ 2+i,\ 2+i\big)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(0,\ 1,\ -1\big)$;
5) $\frac{1}{\sqrt{10}}\,(0,\ 1,\ -3)$, $\frac{1}{\sqrt{35}}\,(5i,\ 3,\ 1)$, $\frac{1}{2\sqrt{7}}\,(2-2i,\ 3+3i,\ 1+i)$.

32. 1) Например, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(0,\,1,\,1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(2i,\,1,\,-1)$;

2) любой вектор вида $\frac{\varepsilon}{\sqrt{6}} \cdot (2,\ -i,\ -i)$, где $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$;

3) например, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{i}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{i}{2}\right)$.

33. Указаны два вектора: ортогональная проекция и ортогональная составляющая:

1) $(1/2,\ i/2)$, $(1/2,\ -i/2)$;

2) $\frac{1}{6}(-3,\ 5,\ -4+3i)$, $(3+5i,\ 1,\ 4-9i)$;

3) $(1,\ i,\ 1)$, $(0,\ 1,\ i)$;

4) $(3,\ 3,\ 0)$, $(i,\ -i,\ 0)$.