

Глава 13

Билинейные и полуторалинейные функции

13.1. Вещественные билинейные функции

1. Какие из следующих функций являются билинейными функциями в указанном линейном пространстве, какие из них являются симметричными? В конечномерных пространствах выбрать базис и построить матрицу билинейной функции.

- 1) $f(x, y) = x_1 y_1$ в $\mathbb{R}^1$;
- 2) $f(x, y) = x_1 y_1$ в $\mathbb{R}^2$;
- 3) $f(x, y) = x_1 y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
- 4) $f(x, y) = x_1 + y_1$ в $\mathbb{R}^2$;
- 5) $f(x, y) = x_1^2 + y_2^2$ в $\mathbb{R}^2$;
- 6) $f(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
- 7) $f(x, y) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_1 - x_2 y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
- 8) $f(x, y) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
- 9) $f(x, y) = x^\top y$ в $\mathbb{R}^n$;
- 10) $f(x, y) = x^\top A y$ в $\mathbb{R}^n$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- 11) $f(X, Y) = \text{tr}(XY)$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- 12) $f(X, Y) = \text{tr}(X^\top Y)$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- 13) $f(X, Y) = \text{tr}(XY^\top)$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- 14) $f(X, Y) = \text{tr}(XY - YX)$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- 15) $f(X, Y) = \text{tr}(X + Y)$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- 16) $f(X, Y) = \det(XY)$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$ при $n \geq 2$;
- 17) $f(X, Y) = \det(X + Y)$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$ при $n \geq 2$;
- 18) $f(X, Y) = z_{ij}$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$ при $n \geq 2$, где z_{ij} — элемент i -й строки j -го столбца матрицы XY ;
- 19) $f(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$ в $\mathbb{R}[t]$;
- 20) $f(x, y) = \int_0^1 x(t)y'(t)dt$ в $\mathbb{R}[t]$;
- 21) $f(x, y) = \int_0^1 (x(t) + y(t))^2 dt$ в $\mathbb{R}[t]$;

- 22) $f(x, y) = x(1)y(1)$ в $\mathbb{R}[t]$;
 23) $f(x, y) = x(1)y(2)$ в $\mathbb{R}[t]$;
 24) $f(x, y) = x(2) + y(2)$ в $\mathbb{R}[t]$;
 25) $f(x, y) = (x, y)$ (скалярное произведение) в $\mathbf{V}_3$;
 26) $f(x, y) = [x, y]$ (векторное произведение) в $\mathbf{V}_3$;
 27) $f(x, y) = (x, y, a)$ (смешанное произведение) в $\mathbf{V}_3$, где a — фиксированный вектор;
 28) $f(x, y) = |x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2$ в $\mathbf{V}_3$.
2. В стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^n$ записать матрицу следующей билинейной функции:
- 1) $x_1y_1 + 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + 4x_2y_2$ в $\mathbb{R}^2$;
 2) $5x_1y_1 + 5x_1y_2 - 4x_1y_3 - 4x_2y_1 + 3x_3y_2 + 5x_3y_3$ в $\mathbb{R}^3$.
3. Пусть g — квадратичная функция, т. е. $g(x) = f(x, x)$ для всех векторов x для некоторой билинейной вещественной функции f . Доказать, что по квадратичной функции соответствующая ей *симметричная* билинейная функция восстанавливается однозначно, а именно

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(g(x + y) - g(x - y)).$$

4. По заданной квадратичной функции пространства $\mathbb{R}^n$ восстановить соответствующую симметричную билинейную функцию. Записать ее матрицу в стандартном базисе.
- 1) $3x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2$;
 2) $-6x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$;
 3) $\sum_{j=1}^{n-1} x_jx_{j+1}$; 4) $\sum_{i \leq j} x_ix_j$.
5. Записать квадратичную функцию по ее матрице в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^n$:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

6. В некотором базисе линейного пространства задана матрица квадратичной функции f и координатные столбцы векторов x и y . Найти $f(x, y)$.

$$1) [f] = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad [x] = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [y] = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2) [f] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad [x] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [y] = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найти матрицу билинейной функции в новом базисе, если даны ее матрица в старом базисе и формулы перехода.

$$\begin{aligned}
1) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1, \\ e'_2 &= e_1 + e_2, \\ e'_3 &= e_1 + e_2 + e_3; \end{aligned} \\
2) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1 + e_2 + e_3, \\ e'_2 &= e_1 - e_2 + e_3, \\ e'_3 &= e_1 + e_3. \end{aligned}
\end{aligned}$$

8. Найти канонический вид заданной билинейной симметричной функции. Указать ее ранг, положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатуру. Является ли функция положительно/отрицательно определенной, полуопределенной?

$n = 2$:

- 1) $3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$;
- 2) $2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 10x_2y_2$;
- 3) $-x_1y_2 - x_2y_1$;
- 4) $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$;

$n = 3$:

- 5) $2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$;
- 6) $x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$;
- 7) $x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$;
- 8) $x_1y_1 - 3x_2y_2 - 2x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$;
- 9) $3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$;
- 10) $3x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$;
- 11) $4x_1y_1 - 2x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2$.

9. Найти канонический вид заданной квадратичной функции. Указать ее ранг, положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатуру. Является ли функция положительно/отрицательно определенной, полуопределенной?

$n = 2$:

- 1) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$;
- 2) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$;
- 3) x_1x_2 ;
- 4) $2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;
- 5) $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_2^2$;

$n = 3$:

- 6) $x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$;
- 7) $6x_1^2 + 8x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3$;
- 8) $2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_1x_3 - 4x_2x_3$;
- 9) $4x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3$;
- 10) $3x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3$;
- 11) $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$;
- 12) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

10. Какие из матриц положительно/отрицательно определены/полуопределены:

$$\begin{aligned}
& 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \\
& 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad 6) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 7) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \\
& 8) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad 10) \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} ?
\end{aligned}$$

11. Выяснить, является ли $(0, 0)$ точкой локального минимума или максимума вещественной функции двух аргументов:

- 1) $x^2 - 3xy + y^2 + e^{x^2+y^2}$;
- 2) $z = xy + y \sin y - y^2 \cos y$;
- 3) $2 \cos x + \sin xy + xy e^y - 2y^2$.

12. Выяснить, является ли $(\pi, 1)$ точкой локального минимума или максимума функции $2y + (y^2 - 1) \cos x - \sin^2 x$.

13. Найти все стационарные точки функции двух вещественных переменных. Выяснить, какие из них являются точками локального минимума и максимума.

- 1) $xy^2 - 2xy + 3x^3$;
- 2) $y^3 + 3xy^2 - 3xy$;
- 3) $5xy + 3xy^2 - 3x^2y + x^2y^2$.

14. При каких значениях λ квадратичная функция положительно/отрицательно определена или полуопределена?

- 1) $4x_1^2 + x_2^2 - 4\lambda x_1 x_2$;
- 2) (р) $\lambda x_1^2 + 8x_1 x_2 + (\lambda - 6)x_2^2$;
- 3) $\lambda x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 6x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$;
- 4) $(\lambda + 1)x_1^2 + (\lambda - 1)x_2^2 - x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_2 x_3$;
- 5) $\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + (\lambda - 6)x_3^2 + 4x_1 x_2 - 8x_1 x_3 + 8x_2 x_3$;
- 6) $(2\lambda^2 + 1)x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4\lambda x_1 x_2 + 2(2\lambda + 1)x_1 x_3 + 4x_2 x_3$.

15. Пусть g — квадратичная функция, действующая в n -мерном вещественном пространстве. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

- 1) квадратичная функция g положительно определена;
- 2) положительный индекс функции g равен n ;
- 3) $g(e_j) > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) для любого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$;
- 4) $g(e_j) > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) для некоторого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$;
- 5) в любом базисе все угловые миноры матрицы функции g положительны;
- 6) в некотором базисе все угловые миноры матрицы функции g положительны;
- 7) в любом базисе все главные миноры матрицы функции g положительны;
- 8) в некотором базисе все главные миноры матрицы функции g положительны.

16. Доказать, что для положительной определенности квадратичной функции необходимо, но не достаточно, чтобы все диагональные элементы ее матрицы в некотором базисе были положительны.
17. Пусть g — квадратичная функция, действующая в n -мерном вещественном пространстве. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
- 1) квадратичная функция g отрицательно определена;
 - 2) квадратичная функция $-g$ положительно определена;
 - 3) отрицательный индекс функции g равен n ;
 - 4) $g(e_j) < 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) для любого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$;
 - 5) $g(e_j) < 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) для некоторого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$;
 - 6) в любом базисе знаки угловых миноров матрицы функции g чередуются следующим образом: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n < 0$;
 - 7) в некотором базисе знаки угловых миноров матрицы функции g чередуются аналогичным образом;
 - 8) в любом базисе все главные миноры матрицы функции g нечетного порядка отрицательны, а четного порядка — положительны;
 - 9) в некотором базисе все главные миноры матрицы функции g нечетного порядка отрицательны, а четного порядка — положительны.
18. Пусть g — квадратичная функция, действующая в n -мерном вещественном пространстве. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
- 1) квадратичная функция g неотрицательно определена;
 - 2) положительный индекс функции g равен рангу этой функции;
 - 3) $g(e_j) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) для любого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$;
 - 4) $g(e_j) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) для некоторого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$;
 - 5) в любом базисе все главные миноры матрицы функции g неотрицательны;
 - 6) в некотором базисе все главные миноры матрицы функции g неотрицательны.
19. Привести пример, показывающий, что для неотрицательной определенности квадратичной функции недостаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы в некотором базисе были неотрицательны.
20. Доказать, что в пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $\text{tr}(X^2)$ является квадратичной функцией. Определить ее ранг и сигнатуру.
21. Доказать, что если квадратичные функции

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j$$

положительно определены, то положительно определенной будет и функция

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} x_i x_j.$$

13.2. Полуторалинейные функции

22. Какие из следующих функций являются полуторалинейными функциями в указанном линейном пространстве, какие из них являются эрмитовыми? В конечномерных пространствах выбрать базис и построить матрицу билинейной функции.

- 1) $f(x, y) = x_1 y_1$ в $\mathbb{C}^1$;
- 2) $f(x, y) = x_1 \bar{y}_1$ в $\mathbb{C}^1$;
- 3) $f(x, y) = x_1 \bar{y}_1$ в $\mathbb{C}^2$;
- 4) $f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ в $\mathbb{C}^2$;
- 5) $f(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
- 6) $f(x, y) = x_1 \bar{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
- 7) $f(x, y) = (1 + i)x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3ix_2 y_1 - 2x_2 y_2$ в $\mathbb{C}^2$;
- 8) $f(x, y) = 2x_1 \bar{y}_1 + ix_1 \bar{y}_2 + (1 - i)x_2 \bar{y}_1 - 3x_2 \bar{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
- 9) $f(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + (2 - i)x_1 \bar{y}_2 + (2 + i)x_2 \bar{y}_1 - 3ix_2 \bar{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
- 10) $f(x, y) = x^\top \bar{y}$ в $\mathbb{C}^n$;
- 11) $f(x, y) = x^\top A \bar{y}$ в $\mathbb{C}^n$, где $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$;
- 12) $f(X, Y) = \text{tr}(X \bar{Y})$ в $\mathbb{C}^{n \times n}$;
- 13) $f(X, Y) = \text{tr}(X^\top \bar{Y})$ в $\mathbb{C}^{n \times n}$;
- 14) $f(X, Y) = \text{tr}(X \bar{Y}^\top)$ в $\mathbb{C}^{n \times n}$;
- 15) $f(x, y) = x(1) \overline{y(1)}$ в $\mathbb{C}[t]$;
- 16) $f(x, y) = x(0) \overline{y(1)} + x(1) \overline{y(0)}$ в $\mathbb{C}[t]$.

23. В стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^n$ записать матрицу следующей полуторалинейной функции. Является ли функция эрмитовой?

- 1) $x_1 \bar{y}_1 + (1 - 3i)x_1 \bar{y}_2 + (1 + 3i)x_2 \bar{y}_1 + 2ix_2 \bar{y}_2$ в $\mathbb{C}^2$;
- 2) $2x_1 \bar{y}_1 - ix_1 \bar{y}_2 - 4x_1 \bar{y}_3 + ix_2 \bar{y}_1 - 4x_3 \bar{y}_1 + 5x_3 \bar{y}_3$ в $\mathbb{C}^3$.

24. Пусть f — полуторалинейная функция, а g — соответствующая ей квадратичная, т. е. $g(x) = f(x, x)$ для всех векторов x . Проверить, что для произвольных x и y

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \left(g(x + y) - g(x - y) + ig(x + iy) - ig(x - iy) \right).$$

Таким образом, по квадратичной функции соответствующая полуторалинейная функция восстанавливается однозначно.

25. По заданной квадратичной функции пространства $\mathbb{C}^n$ восстановить соответствующую полуторалинейную функцию. Записать ее матрицу в стандартном базисе. Является ли функция эрмитовой.

- 1) $|x_1|^2 - ix_1 \bar{x}_2 + ix_2 \bar{x}_1 - 4|x_2|^2$;
- 2) $-2|x_1|^2 + 2ix_1 \bar{x}_2 - 2x_1 \bar{x}_3 + (4 - 3i)x_2 \bar{x}_3 - |x_3|^2$.

26. В некотором базисе линейного пространства задана матрица квадратичной функции f и координатные столбцы векторов x и y . Найти $f(x, y)$.

$$1) [f] = \begin{pmatrix} 1 & -2 + i \\ 1 + i & i \end{pmatrix}, \quad [x] = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad [y] = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$2) [f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & i & i \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [x] = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [y] = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

27. Найти матрицу билинейной функции в новом базисе, если даны ее матрица в старом базисе и формулы перехода:

$$1) (p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 1+i \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1 + ie_2, \\ e'_2 &= e_1 - ie_2; \end{aligned}$$

$$2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & 0 & 1 \\ i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1, \\ e'_2 &= ie_1 + e_2, \\ e'_3 &= ie_1 + ie_2 + e_3. \end{aligned}$$

28. Найти канонический вид заданной эрмитовой полуторалинейной функции. Указать ее ранг, положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатуру. Является ли функция положительно/отрицательно определенной, полуопределенной?

$n = 2$:

$$1) x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2;$$

$$2) -ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1;$$

$$3) x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2;$$

$n = 3$:

$$4) ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_3 - ix_3\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_3 - ix_3\bar{y}_2;$$

$$5) x_3\bar{y}_3 + x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_3 - ix_3\bar{y}_1 + (1+i)x_2\bar{y}_3 + (1-i)x_3\bar{y}_2.$$

29. Восстановить полуторалинейную функцию по заданной квадратичной. Найти канонический вид заданной функции. Указать ее ранг, положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатуру. Является ли функция положительно/отрицательно определенной, полуопределенной?

$n = 2$:

$$1) |x_1|^2 + ix_1\bar{x}_2 - ix_2\bar{x}_1 + 2|x_2|^2;$$

$$2) 3|x_2|^2 + ix_1\bar{x}_2 - ix_2\bar{x}_1;$$

$$3) (1+i)x_1\bar{x}_2 + (1-i)x_2\bar{x}_1;$$

$n = 3$:

$$4) |x_2|^2 + ix_1\bar{x}_3 - ix_3\bar{x}_1;$$

$$5) x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1 + (1+i)x_1\bar{x}_3 + (1-i)x_3\bar{x}_1 + (1+2i)x_2\bar{x}_3 + (1-2i)x_3\bar{x}_2.$$

30. Доказать, что в пространстве комплексных квадратных матриц порядка n функция $\text{tr}(X\bar{X})$ является квадратичной функцией. Определить ее ранг и сигнатуру.

Ответы, указания, решения

1. 1) Симметричная билинейная функция; ее матрица в стандартном базисе (1) ;
2) симметричная билинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
3) несимметричная билинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
4) не является билинейной функцией;
5) не является билинейной функцией;
6) симметричная билинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
7) несимметричная билинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;
8) симметричная билинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;
9) симметричная билинейная функция; ее матрица в стандартном базисе — единичная;
10) симметричная билинейная функция, если матрица A — симметричная; иначе несимметричная билинейная функция; ее матрица в стандартном базисе — матрица A ;
11) симметричная билинейная функция;
12) симметричная билинейная функция;
13) симметричная билинейная функция;
14) функция тождественно равна нулю — симметричная билинейная функция;
15) не является билинейной функцией;
16) не является билинейной функцией;
17) не является билинейной функцией;
18) несимметричная билинейная функция;
19) симметричная билинейная функция;
20) несимметричная билинейная функция;
21) не является билинейной функцией;
22) симметричная билинейная функция;
23) несимметричная билинейная функция;
24) не является билинейной функцией;
25) симметричная билинейная функция;
26) не является билинейной функцией;
27) несимметричная билинейная функция;
28) симметричная билинейная функция.
2. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$;

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4. 1) 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_2y_2; \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix};$$

$$2) -6x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - x_3y_3; \quad \begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3) \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (x_j y_{j+1} + x_{j+1} y_j);$$

$$4) \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j y_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j.$$

$$5. 1) 2x_1^2 + x^2 - 2x_1x_2;$$

$$2) x_1^2 - 2x^2 - 7x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_2x_3.$$

$$6. 1) 33; 2) -1.$$

$$7. 1) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 45 & 15 & -6 \\ 15 & 5 & -2 \\ -18 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. В ответах приведен нормальный вид заданной билинейной функции, а также ранг, положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатура:

- 1) $x'_1y'_1 + x'_2y'_2$, 2, 2, 0, 2, функция положительно определена;
- 2) $x'_1y'_1 - x'_2y'_2$, 2, 1, 1, 0, функция не является знакоопределенной;
- 3) $-x'_1y'_1$, 1, 0, 1, -1, функция отрицательно полуопределенная;
- 4) $x'_1y'_1$, 1, 1, 0, 1, функция положительно полуопределенная;
- 5) $x'_1y'_1 + x'_2y'_2 + x'_3y'_3$, 3, 3, 0, 3, функция положительно определена;
- 6) $x'_1y'_1 + x'_2y'_2$, 1, 1, 0, 1, функция положительно полуопределенная;
- 7) $x'_1y'_1 - x'_2y'_2 - x'_3y'_3$, 3, 1, 2, -1, функция не является знакоопределенной;
- 8) $x'_1y'_1 + x'_2y'_2 - x'_3y'_3$, 3, 2, 1, 1, функция не является знакоопределенной;
- 9) $x'_1y'_1 - x'_2y'_2$, 2, 1, 1, 0, функция не является знакоопределенной;
- 10) $x'_1y'_1 + x'_2y'_2 - x'_3y'_3$, 3, 2, 1, 1, функция не является знакоопределенной;
- 11) $x'_1y'_1 - x'_2y'_2 - x'_3y'_3$, 3, 1, 2, -1, функция не является знакоопределенной.

9. В ответах приведен нормальный вид заданной квадратичной функции:

- 1) $(x'_1)^2$, 1, 1, 0, 1, функция положительно полуопределенная;
- 2) $(x'_1)^2 + (x'_2)^2$, 2, 2, 0, 2, функция положительно определена;
- 3) $(x'_1)^2 - (x'_2)^2$, 2, 1, 1, 0, функция не является знакоопределенной;
- 4) $(x'_1)^2 + (x'_2)^2$, 2, 2, 0, 2, функция положительно определена;
- 5) $(x'_1)^2 - (x'_2)^2$, 2, 1, 1, 0, функция не является знакоопределенной;
- 6) $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2$, 3, 3, 0, 3, функция положительно определена;
- 7) $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2$, 3, 3, 0, 3, функция положительно определена;
- 8) $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 - (x'_3)^2$, 3, 2, 1, 1, функция не является знакоопределенной;
- 9) $(x'_1)^2 - (x'_2)^2 - (x'_3)^2$, 3, 1, 2, -1, функция не является знакоопределенной;
- 10) $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 - (x'_3)^2$, 3, 2, 1, 1, функция не является знакоопределенной;
- 11) $(x'_1)^2 + (x'_2)^2$, 2, 2, 0, 2, функция положительно полуопределенная;
- 12) $(x'_1)^2 - (x'_2)^2$, 2, 1, 1, 0, функция не является знакоопределенной.

10. 1) положительно определена;

2) не определена;

3) положительно полуопределена;

4) отрицательно полуопределена;

- 5) не определена;
- 6) положительно определена;
- 7) положительно полуопределена;
- 8) положительно полуопределена;
- 9) положительно определена;
- 10) не определена.
- 11. 1) точка минимума, второй дифференциал: $2x^2 - 3xy + 2y^2$;
 2) седловая точка (не является экстремальной точкой), второй дифференциал: xy ;
 3) точка максимума, второй дифференциал: $-x^2 + 2xy - 2y^2$.
- 12. Точка максимума, второй дифференциал: $-(x - \pi)^2 - (y - 1)^2$.
- 13. 1) $(0, 0)$, $(0, 2)$ — седловые точки, $(1/3, 1)$ — точка локального минимума, $(-1/3, 1)$ — точка локального максимума;
 2) $(0, 0)$, $(-1, 1)$ — седловые точки.
 3) $(0, 0)$, $(-5, 5)$, $(5/3, 0)$, $(0, -5/3)$ — седловые точки; $(1/2, -1/2)$ — точка локального минимума.
- 14. 1) При $|\lambda| < 1$ положительно определена, при $|\lambda| = 1$ положительно полуопределена.
 2) Запишем матрицу квадратичной функции:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 4 \\ 4 & \lambda - 6 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы функция f была положительно определена необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительными:

$$\Delta_1 = \lambda > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 4 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda + 2)(\lambda - 8) > 0.$$

Решением системы неравенств

$$\begin{cases} \lambda > 0, \\ (\lambda + 2)(\lambda - 8) > 0 \end{cases}$$

является $\lambda > 8$. Для того, чтобы функция f была отрицательно определена необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, начиная с $\Delta_1 < 0$. В нашем случае: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$. Решая получающуюся отсюда систему неравенств, находим $\lambda < -2$. Аналогично рассматриваем случаи неотрицательной и неположительной определенности. Необходимое и достаточное условие неотрицательной определенности: все главные миноры матрицы неотрицательны. Необходимое и достаточное условие неположительной определенности: главные миноры четного порядка неотрицательны, а главные миноры нечетного порядка неположительны. *Ответ:* При $\lambda > 8$ положительно определена, при $\lambda = 8$ положительно полуопределена, при $\lambda < -2$ отрицательно определена, при $\lambda = -2$ отрицательно полуопределена.

- 3) При $\lambda > 2$ положительно определена, при $\lambda = 2$ положительно полуопределена.
- 4) Ни при каких значениях λ функция не является знакоопределенной (полуопределенной).
- 5) При $\lambda > 10$ положительно определена, при $\lambda = 10$ положительно полуопределена, при $\lambda < -2$ отрицательно определена, при $\lambda = -2$ отрицательно полуопределена.
- 6) При всех значениях λ функция является положительно полуопределенной.
- 20. n^2, n .
- 22. 1) Не является полуторалинейной функцией;
 2) эрмитова полуторалинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
 3) эрмитова полуторалинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

- 4) не является полуторалинейной функцией;
 - 5) эрмитова полуторалинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
 - 6) неэрмитова полуторалинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
 - 7) не является полуторалинейной функцией;
 - 8) неэрмитова полуторалинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 2 & i \\ 1-i & -3 \end{pmatrix}$;
 - 9) неэрмитова полуторалинейная функция; ее матрица в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & -3i \end{pmatrix}$;
 - 10) эрмитова полуторалинейная функция; ее матрица в стандартном базисе — единичная;
 - 11) эрмитова полуторалинейная функция, если матрица A — эрмитова ($A^T = \bar{A}$); иначе неэрмитова полуторалинейная функция; ее матрица в стандартном базисе — матрица A ;
 - 12) эрмитова полуторалинейная функция;
 - 13) эрмитова полуторалинейная функция;
 - 14) эрмитова полуторалинейная функция;
 - 15) эрмитова полуторалинейная функция;
 - 16) неэрмитова полуторалинейная функция.
- 23.** 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1-3i \\ 1+3i & 2i \end{pmatrix}$, неэрмитова функция;
- 2) $\begin{pmatrix} 2 & -i & -4 \\ i & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, эрмитова функция.
- 25.** 1) $x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 - 4x_2\bar{y}_2$, $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -4 \end{pmatrix}$, функция эрмитова;
- 2) $-2x_1\bar{y}_1 + 2ix_1\bar{y}_2 - 2x_1\bar{y}_3 + (4-3i)x_2\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_3$, $\begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, функция не является эрмитовой.
- 26.** 1) $-7+2i$; 2) $4+3i$.
- 27.** 1) $[f]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 1+i \end{pmatrix}$, $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $[f]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^T [f]_{\mathbf{e}} \overline{[\mathbf{e}']}_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2i & 2+2i \end{pmatrix}$;
- 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-i \\ i & 1+i & 3+i \\ -1+i & 1+3i & 3+3i \end{pmatrix}$.
- 28.** В ответах приведен нормальный вид заданной функции:
- 1)
 - 2)
 - 3)
 - 4)
 - 5).
- 29.** В ответах приведен нормальный вид заданной функции:
- 1)
 - 2)
 - 3)

4)

5)

30. n^2, n .