Глава 5

Линейные отображения и преобразования

5.1 Определение линейного отображения. Образ и ядро

Рассмотрим два линейных пространства V и W, заданных над одним и тем же полем F. Отображение $\varphi : V \to W$ называется *линейным отображением*, или *линейным оператором*, если для произвольных $x, y \in V$ и произвольного $\alpha \in F$ имеют место следующие равенства:

1) $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$,

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$.

Биективное линейное отображение называется *изоморфизмом*. Если $V = W$, то φ называется *линейным преобразованием* пространства V. Обозначим $\Phi(V, W)$ множество всех линейных отображений, действующих из V в U.

Образом, или *множеством значений*, отображения φ называется множество

$$\operatorname{Im} \varphi = \varphi V = \{\varphi x : x \in V\} .$$

Ядром, или *нуль-пространством*, преобразования φ называется множество

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in V : \varphi x = o\} .$$

Образ и ядро линейного отображения являются подпространствами в W и V соответственно. Их размерности называются соответственно *рангом* и *дефектом преобразования* и обозначаются соответственно $\operatorname{rank} \varphi$ и $\operatorname{def} \varphi$. Справедливо равенство $\operatorname{rank} \varphi + \operatorname{def} \varphi = \dim V$. Отображение φ называется *вырожденным*, если $\operatorname{def} \varphi > 0$. Отображение φ называется *невырожденным*, если $\operatorname{def} \varphi = 0$.

Нулевое отображение θ определяется равенством $\theta x = o$ для всех $x \in V$. *Тождественное преобразование* ε определяется равенством $\varepsilon x = x$ для всех $x \in V$.

Произведением отображения $\varphi \in \Phi(V, W)$ *на число* $\alpha \in F$ называется отображение $\alpha\varphi \in \Phi(V, W)$, определяемое равенством $(\alpha\varphi)x = \alpha(\varphi x)$ для произвольного $x \in V$. *Суммой* отображений $\varphi \in \Phi(V, W)$ и $\psi \in \Phi(V, W)$ называется отображение $\varphi + \psi \in \Phi(V, W)$, определяемое равенством $(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x$ для произвольного $x \in V$.

Пусть $\varphi \in \Phi(V, W)$, $\psi \in \Phi(W, V)$. *Произведением*, или *композицией*, *отображений* φ *и* ψ называется отображение $\varphi\psi$, определяемое равенством $(\varphi\psi)x = \varphi(\psi x)$ для произвольного $x \in W$.

Пусть $\varphi \in \Phi(V, W)$, $\psi \in \Phi(W, V)$. Если $\varphi\psi = \varepsilon$, то ψ называется *правым обратным* к φ, а φ — *левым обратным* к ψ. Если $\varphi \in \Phi(V, V)$, $\psi \in \Phi(V, V)$ и $\varphi\psi = \psi\varphi = \varepsilon$, то ψ называется просто *обратным* к φ и обозначается φ^{-1}. У преобразования φ существует обратное (т. е. φ *обратимо*) тогда и только тогда, когда φ невырождено.

Под *k-й степенью* преобразования $\varphi \in \Phi(V, V)$, где k натуральное, понимается

$$\varphi^k = \underbrace{\varphi\varphi \cdot \dots \cdot \varphi}_{k}.$$

По определению, $\varphi^0 = \varepsilon$. Если φ обратимо, то можно определить отрицательную степень: $\varphi^{-k} = (\varphi^{-1})^k$. *Значением многочлена* $f(t) = a_0t^m + a_1t^{m-1} + \dots + a_{m-1}t + a_m$ от преобразования φ понимается $f(\varphi) = a_0\varphi^m + a_1\varphi^{m-1} + \dots + a_{m-1}\varphi + a_m\varepsilon$.

1. Для каждого из преобразований линейного пространства V, заданного над полем F, определить, является ли оно линейным. Для каждого преобразования задан образ произвольного вектора x. Предполагается, что a — фиксированный вектор из V, а α — фиксированный скаляр из F.

1) $\varphi x = a$;
2) $\varphi x = x + a$ (*сдвиг*, или *параллельный перенос*, на вектор a);
3) $\varphi x = \alpha x$ (*гомотетия с коэффициентом* α).

2. Доказать, что следующие преобразования геометрического пространства являются линейными. Указать их геометрический смысл. Для каждого преобразования задан образ произвольного вектора x.

1) $\varphi x = \dfrac{(x, a)}{(a, a)}a$, где a — фиксированный ненулевой вектор;

2) $\varphi x = x - \dfrac{(x, n)}{(n, n)}n$, где n — фиксированный ненулевой вектор;

3) $\varphi x = 2\dfrac{(x, a)}{(a, a)}a - x$, где a — фиксированный ненулевой вектор;

4) $\varphi x = x - 2\dfrac{(x, n)}{(n, n)}n$, где n — фиксированный ненулевой вектор;

5) $\varphi x = \dfrac{(x, n)}{(a, n)}a$, если $(a, n) \neq 0$;

6) $\varphi x = x - \dfrac{(x,n)}{(a,n)}a$, если $(a,n) \neq 0$.

3. Для каждого из следующих отображений геометрического пространства в $\mathbb{R}$ установить, является ли оно линейным?
1) $\varphi x = |x|$;
2) $\varphi x = (x,x)$;
3) $\varphi x = (a,x)$, где a — фиксированный вектор;
4) $\varphi x = (a,b,x)$, где a, b — фиксированные векторы.

4. Для каждого из преобразований геометрического пространства определить, является ли оно линейным. Для каждого преобразования задан образ произвольного вектора x. Векторы a, b фиксированы.
1) $\varphi x = [x,a]$;
2) $\varphi x = (a,x)x$;
3) $\varphi x = (a,x)b$;
4) $\varphi x = [a,[x,b]]$.

5. Доказать, что каждое из следующих преобразований пространства многочленов (произвольной степени) над полем F является линейным. Какие из них являются линейными преобразованиями пространства многочленов степени, не выше n? Для каждого преобразования задан образ произвольного многочлена $f(t)$.
1) $\varphi f(t) = f(-t)$;
2) $\varphi f(t) = f(t-1)$;
3) $\varphi f(t) = f(at+b)$, где a, b — фиксированные числа, $a \neq 0$;
4) $\varphi f(t) = f'(t)$ (*преобразование дифференцирования*);
5) $\varphi f(t) = f^{(k)}(t)$ (*преобразование k-кратного дифференцирования*);
6) $\varphi f(t) = f(t) + f(t-1)$;
7) $\varphi f(t) = tf(t)$;
8) $\varphi f(t) = f(t^2)$;
9) $\varphi f(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ (*преобразование интегрирования*).

6. Доказать, что отображение, определяемое формулой $\varphi f(t) = f'(t)$, является линейным отображением пространства многочленов степени не выше n в пространство многочленов степени не выше $n-1$.

7. Доказать, что отображение, определяемое формулой $\varphi f(t) = tf(t)$, является линейным отображением пространства многочленов степени не выше n в пространство многочленов степени не выше $n+1$.

8. Доказать, что отображение, определяемое формулой $\varphi f(t) = f(t^2)$, является линейным отображением пространства многочленов степени не выше n в пространство многочленов степени не выше $2n$.

9. Будет ли отображение, определяемое формулой $\varphi f(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$, линейным отображением пространства многочленов степени не выше n в пространство многочленов степени не выше $n+1$?

10. Какие из следующих преобразований трехмерного арифметического пространства являются линейными? Для каждого преобразования задан образ произвольного вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$.

1) $\varphi x = (x_3, x_2, x_1)$;
2) $\varphi x = (x_1^2, x_2, x_3)$;
3) $\varphi x = (x_1, x_2, x_3 - 1)$;
4) $\varphi x = (2x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + 4x_2 - x_3,\ 3x_1 + x_2 - 2x_3)$.

11. Пусть A — некоторая матрица из $F^{m\times n}$. Доказать, что отображение из F^n в F^m, определяемое формулой $\varphi x = Ax$, является линейным. Также доказать, что для любого линейного отображения из F^n в F^m найдется такая матрица A, что $\varphi x = Ax$ для любого x из F^n.

12. Пусть φ — линейное отображение из пространства V в пространство W. Что можно сказать о системе векторов $\varphi a_1, \varphi a_2, \ldots, \varphi a_n$, если известно, что

1) система $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависима;
2) система $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независима?

13. Доказать, что образ и ядро линейного отображения $\varphi:\ V \to W$ являются линейными подпространствами в W и V соответственно.

14. Пусть пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств V_1 и V_2, т. е. для произвольного вектора x из V найдется единственный вектор y из V_1 и z из V_2, такие, что $x = y + z$. Вектор y называется *проекцией вектора x на подпространство V_1 параллельно V_2*. Пусть φ — *преобразование проектирования* пространства V, ставящее в соответствие вектору x его проекцию, т. е. $\varphi x = y$. Вектор $y - z$ называется *отражением вектора x в подпространстве V_1 параллельно V_2*. Пусть ψ — *преобразование отражения*, или *преобразование симметрии*, пространства V, ставящее в соответствие вектору x вектор $y - z$, т. е. $\psi x = y - z$.

1) Доказать, что преобразование проектирования является линейным. Найти его образ и ядро.
2) Доказать, что преобразование отражения является линейным. Найти его образ и ядро.
3) Можно ли рассматривать φ как линейное отображение из V в V_1?

15. Доказать, что пространство $V = F^{n\times n}$ квадратных матриц порядка n с элементами из поля F раскладывается в прямую сумму подпространства V_1 симметрических и подпространства V_2 кососимметрических матриц. Пусть φ — преобразование проектирования на V_1 параллельно V_2, а ψ — преобразование проектирования на V_2 параллельно V_1. Найти φA и ψA, если

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 2;$ 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 2.$

16. Доказать, что поворот геометрической плоскости вокруг начала координат на угол α является линейным преобразованием. Найти его ядро и образ.

17. Доказать, что поворот геометрического пространства вокруг некоторой прямой ℓ, проходящей через начало координат, на угол α (в определенную сторону) является линейным преобразованием. Найти его ядро и образ.

18. Найти образ и ядро каждого из следующих преобразований трехмерного арифметического пространства. Для каждого из преобразований задан образ φx произвольного вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$.

1) $\varphi x = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$;
2) $\varphi x = (3x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + x_3,\ 4x_1 + 3x_2 + x_3)$;
3) $\varphi x = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3,\ 2x_1 + x_2 + x_3)$.

19. Описать образ и ядро преобразования дифференцирования пространства многочленов степени не выше n.

20. Описать образ и ядро *разностного преобразования*

$$\varphi f(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

пространства многочленов степени не выше n, где h — фиксированное ненулевое число.

21. Доказать, что отображение, определяемое формулой

$$\varphi f(t) = (f(t_1),\ f(t_2),\ \ldots,\ f_k(t_2)),$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — попарно различные числа, является линейным отображением пространства многочленов степени не выше n в арифметическое k-мерное пространство. Описать его ядро и образ. Чему равен дефект и ранг?

22. Доказать, что для любого линейного отображения $\varphi \in \Phi(V, W)$ справедливо $\operatorname{rank}\varphi + \operatorname{def}\varphi = \dim V$.

23. Привести пример линейного преобразования φ линейного пространства V, для которого $\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi \neq V$.

24. Пусть φ — линейное отображение n-мерного пространства в m-мерное. Доказать:

1) для того, чтобы φ было сюръективным необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank}\varphi = m$;
2) для того, чтобы φ было инъективным необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank}\varphi = n$;
3) для того, чтобы φ было биективным (т. е. являлось изоморфизмом) необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank}\varphi = m = n$.

5.2 Матрицы линейного отображения и линейного преобразования

Пусть $\mathbf{e} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ — базис пространства V, а $\mathbf{f} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ — базис пространства W. *Матрицей отображения* $\varphi \in \Phi(V, W)$, построенной в этих базисах, называется матрица $[\varphi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}} \in F^{m\times n}$, составленная из координатных столбцов $[\varphi e_j]_{\mathbf{f}}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Для произвольного $x \in V$ имеем

$$[\varphi x]_{\mathbf{f}} = [\varphi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}}. \tag{5.1}$$

Если $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ — два базиса пространства V, а $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}'$ — два базиса пространства W, то

$$[\varphi]_{\mathbf{f}',\mathbf{e}'} = [\mathbf{f}']_{\mathbf{f}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}},$$

где $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$, $[\mathbf{f}']_{\mathbf{f}}$ — матрицы перехода из $\mathbf{e}$ в $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{f}$ в $\mathbf{f}'$ соответственно. Матрицы A, B называются *эквивалентными*, если $B = RAS$ для некоторых невырожденных матриц R, S. Таким образом, матрицы одного линейного отображения в разных базисах эквивалентны.

Матрицы результатов операций над отображениями определяются формулами (при условии, что данные операции осуществимы):

$$[\alpha\varphi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}} = \alpha[\varphi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}, \quad [\varphi+\psi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}} + [\psi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}, \quad [\varphi\psi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}[\psi]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}. \tag{5.2}$$

Матрицей преобразования $\varphi \in \Phi(V, V)$, построенной в базисе $\mathbf{e}$, называется матрица $[\varphi]_{\mathbf{e}} \in F^{n\times n}$, составленная из координатных столбцов $[\varphi e_j]_{\mathbf{e}}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Для произвольного $x \in V$ имеем

$$[\varphi x]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}}.$$

Разумеется, равенства (5.2) справедливы и для матриц линейных преобразования. Кроме того, для невырожденного преобразования φ справедливо равенство

$$[\varphi^{-1}]_{\mathbf{e}} = [\varphi]_{\mathbf{e}}^{-1}.$$

Если $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ — два базиса пространства V, а $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ — матрица перехода от $\mathbf{e}$ к $\mathbf{e}'$, то

$$[\varphi]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}.$$

Матрицы A, B называются *подобными*, если $B = Q^{-1}AQ$ для некоторой невырожденной матрицы Q. При этом матрица Q называется *трансформирующей*. Таким образом, матрицы одного и того же линейного преобразования подобны.

Формула (5.1) позволяет отождествить отображения из $\Phi(V, W)$ с матрицами из $F^{m\times n}$. Имея в виду это замечание, можно говорить о ядре (нуль-пространстве) матрицы, ее образе и т. д.

Пример 5.1. Преобразование трехмерного пространства геометрических векторов заключается в проектировании на прямую $x = 2t$, $y = t$, $z = -t$ параллельно плоскости $x - 3y - 6z = 0$. Вычислить матрицу этого преобразования в базисе, в котором записаны уравнения прямой и плоскости.

Решение Рассмотрим два способа решения задачи.

Способ 1 Это решение непосредственно опирается на определение преобразования проектирования. Обозначим через $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ базис пространства, в котором записаны уравнения прямой и плоскости. Имеем $V = L(a_1) \dot{+} L(a_2, a_3)$, $[a_1]_{\mathbf{e}} = (2, 1, -1)^\top$, $[a_2]_{\mathbf{e}} = (3, 1, 0)^\top$, $[a_3]_{\mathbf{e}} = (0, 2, -1)^\top$, где a_1 — направляющий вектор прямой, a_2, a_3 — направляющие векторы рассматриваемой плоскости.

Разложим каждый из базисных векторов e_1, e_2, e_3 по системе a_1, a_2, a_3. Для этого следует решить три системы линейных неоднородных уравнений, левая часть которых есть матрица, составленная из столбцов $[a_1]_{\mathbf{e}}$, $[a_2]_{\mathbf{e}}$, $[a_3]_{\mathbf{e}}$, а правая представляет собой координатный столбец соответствующего базисного вектора. Все три системы решим как одно матричное уравнение:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -3/5 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right).$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{5}a_2 - \frac{1}{5}a_3, & \varphi e_1 &= \frac{1}{5}a_1, \\ e_2 &= -\frac{3}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2 - \frac{3}{5}a_3, & \varphi e_2 &= -\frac{3}{5}a_1, \\ e_3 &= -\frac{6}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2 - \frac{1}{5}a_3, & \varphi e_3 &= -\frac{6}{5}a_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$[\varphi e_1]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [\varphi e_2]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, [\varphi e_3]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и матрица преобразования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Способ 2 Выберем в пространстве базис, состоящий из направляющего вектора прямой a_1 и двух направляющих векторов плоскости a_2 и a_3. В базисе $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ матрица преобразования проектирования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\mathbf{e}$ матрицу $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ преобразования ищем по формуле $[\varphi]_{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{a}}[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}$, где $[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{a}$ к базису $\mathbf{e}$, а $[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}}^{-1} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{a}$. Легко видеть, что

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу и получаем

$$[\mathbf{e}]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу преобразования проектирования в базисе $\mathbf{e}$:

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что преобразование проектирования диагонализируемо. Базис из собственных векторов составляют, например, векторы a_1, a_2, a_3.

25. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Определим подпространства $V_1 = L(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ и $V_2 = L(e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_n)$. В базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ написать матрицу следующих преобразований:
1) проектирование на V_1 параллельно V_2;
2) проектирование на V_2 параллельно V_1;
3) отражение в V_1 параллельно V_2.

26. На плоскости задана правая прямоугольная система координат $\mathcal{O}$, e_1, e_2. В базисе e_1, e_2 записать матрицу линейного преобразования, заключающегося в повороте плоскости вокруг $\mathcal{O}$ на угол α (в положительном направлении).

27. В 3-мерном геометрическом пространстве задана прямоугольная система координат $\mathcal{O}$, e_1, e_2, e_3. Описать (словами) действие преобразования, заданного матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

28. В геометрическом пространстве задана прямоугольная система координат $\mathcal{O}$, e_1, e_2, e_3. В базисе e_1, e_2, e_3 найти матрицу каждого из следующих преобразований:

1) поворот вокруг прямой $x_1 = x_2 = x_3$ на угол $2\pi/3$;
2) поворот вокруг прямой $x_1 = x_2 = 0$ на угол α;
3) ортогональное проектирование на прямую $x_1 = x_2 = 2x_3$;
4) ортогональное проектирование на плоскость $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$;
5) ортогональное отражение в прямой $x_1 = x_2 = 2x_3$;
6) ортогональное отражение в плоскости $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$;
7) проектирование на прямую $x_1 = 2x_2 = 3x_3$ параллельно плоскости $x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$.
8) проектирование на плоскость $x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$ параллельно прямой $x_1 = 2x_2 = 3x_3$;

29. Пусть в трехмерном геометрическом пространстве задан ортонормированный базис и некоторый вектор n. Найти матрицу преобразования:

1) ортогонального проектирования на прямую $[r, n] = o$;
2) ортогонального проектирования на плоскость $(r, n) = 0$;
3) симметрии относительно прямой $[r, n] = o$;
4) симметрии относительно плоскости $(r, n) = 0$.

30. Составить матрицу преобразования дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше n, если в качестве базиса выбрана система

1) $1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^n$;
2) $1,\ \dfrac{t}{1!},\ \dfrac{t^2}{2!},\ \ldots,\ \dfrac{t^n}{n!}$;
3) $1,\ t - t_0,\ (t - t_0)^2,\ \ldots,\ (t - t_0)^n$.

31. Рассмотреть дифференцирование как отображение из пространства многочленов степени не выше n в пространство многочленов степени не выше $n-1$. Составить матрицу этого линейного отображения, если в качестве базисов этих пространств выбраны системы $1, t, t^2, \ldots, t^n$ и $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ соответственно.

32. Составить матрицу преобразования двукратного дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше n, если в качестве базиса выбрана система $1, t, t^2, \ldots, t^n$. Матрицу можно получить, применив к каждому вектору базиса указанное преобразование, или возведя в квадрат матрицу однократного дифференцирования. Проверить, что результат один и тот же.

33. Пусть D — преобразование дифференцирования, а I — преобразование интегрирования пространства вещественных многочленов произвольной степени (см. задачу 5). Проверить, что $DI = \varepsilon$, но $ID \neq \varepsilon$. Таким образом, I является правым обратным к I, но не левым обратным.

34. Пусть D — преобразование дифференцирования пространства вещественных многочленов произвольной степени, а τ — преобразование, определяемое формулой $\tau f(t) = tf(t)$. Проверить, что $D\tau - \tau D = \varepsilon$.

35. Доказать, что не существует двух квадратных матриц A, B, таких, что $AB - BA = E$. Вывести отсюда, что *коммутатор* $\varphi\psi - \psi\varphi$ двух линейных преобразований φ, ψ конечномерного пространства не может быть тождественным преобразованием. Почему это не противоречит утверждению из задачи 34?

36. Доказать линейность преобразования дифференцирования в пространстве всех тригонометрических многочленов $a_0+a_1\cos t+b_1\sin t+\dots+a_n\cos t+b_n\sin t$ степени не выше n. Построить его матрицу в базисе 1, $\cos t$, $\sin t$, $\dots$, $\cos nt$, $\sin nt$.

37. Доказать линейность преобразования дифференцирования в пространстве всех функций вида $e^{\alpha t}f(t)$, где $f(t)$ — вещественный многочлен степни не выше n. Построить его матрицу в базисе $\dfrac{t^k}{k!}e^{\alpha t}$ $(k = 0, 1, \dots, n)$.

38. Доказать линейность преобразования φ, действующего в вещественном пространстве многочленов $f(x, y)$ двух переменных степени не выше 2. Построить матрицу преобразования в базисе 1, x, y, xy, x^2, y^2. Преобразование задано формулой, определяющей образ каждого вектора:

1) $\varphi f(x, y) = f(x + a, y + b)$, где a, b — фиксированные числа;

2) $\varphi f(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (*оператор Лапласа*).

39. Доказать, что формула $\varphi X = AX$, где A — фиксированная матрица размера $k \times m$, задает линейное отображение пространства матриц размера $m \times n$ в пространство матриц размера $k \times n$. Записать матрицу этого отображения в стандартном базисе, если $m = n = k = 2$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

40. Доказать, что множество $\Phi(V, W)$ всех линейных отображений пространства V в пространство W, заданных над полем F, является линейным пространством относительно операций сложения отображений и умножения их на числа из F. Найти размерность этого пространства. Доказать, что $\Phi(V, W)$ изоморфно пространству матриц $F^{m\times n}$, где $n = \dim V$, где $m = \dim W$.

41. Найти образ и ядро линейного отображения, заданного матрицей. Является ли отображение а) сюръективным, б) инъективным, в) биективным?

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

42. Линейное преобразование φ трехмерного арифметического пространства задано в стандартном базисе матрицей. Найти образы векторов a_1, a_2, a_3 и объяснить геометрический смысл преобразования (кроме (4)).

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -1 & 9 & 5 \\ 1 & -8 & -5 \end{pmatrix}$, $a_1 = (7, -6, 5)^\top$, $a_2 = (8, 1, 0)^\top$, $a_3 = (7, 2, -3)^\top$;

2) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $a_1 = (1, 2, 1)^\top$, $a_2 = (1, 1, -1)^\top$, $a_3 = (1, -1, 1)^\top$;

3) $\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -6 & 15 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, $a_1 = (1, 3, -1)^\top$, $a_2 = (1, 0, 2)^\top$, $a_3 = (2, 1, -1)^\top$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $a_1 = (1, -3, -2)^\top$, $a_2 = (3, -1, 2)^\top$, $a_3 = (2, 1, -2)^\top$.

43. Для каждого линейного отображения из №№ 6–9 записать его матрицу в выбранных базисах соответствующих пространств.

44. Отображение φ двумерного вещественного арифметического пространства в пространство квадратных вещественных матриц второго порядка задано формулой

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Доказать линейность и инъективность отображения φ. Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.

45. Отображение φ трехмерного вещественного арифметического пространства в пространство квадратных вещественных матриц второго порядка задано формулой

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}.$$

1) Доказать линейность и инъективность отображения φ. Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.

2) Рассмотреть φ как отображение трехмерного вещественного пространства в пространство симметрических матриц второго порядка. Доказать его биективность и вычислить матрицу в стандартных базисах пространств.

46. Отображение φ трехмерного вещественного арифметического пространства в пространство квадратных вещественных матриц второго порядка задано формулой

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Доказать линейность и инъективность отображения φ. Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.

47. Отображение φ трехмерного вещественного арифметического пространства в пространство квадратных вещественных матриц третьего порядка задано формулой

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Доказать линейность и инъективность отображения φ. Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.
2) Рассмотреть φ как отображение трехмерного вещественного пространства в пространство кососимметрических матриц третьего порядка. Доказать его биективность и вычислить матрицу в стандартных базисах пространств.

48. Линейное преобразование пространства многочленов степени не выше 2 задано своей матрицей в базисе 1, t, t^2. Записать матрицу того же преобразования в базисе 1, $1+t$, $1+t+t^2$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

49. Линейное преобразование пространства многочленов степени не выше 2 задано своей матрицей в базисе 1, $1+t$, $1+2t+t^2$. Записать матрицу того же преобразования в базисе 1, t, t^2.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 5.2. Линейное преобразование трехмерного арифметического пространства переводит линейно независимые векторы $a_1 = (1,1,1)^\top$, $a_2 = (1,2,0)^\top$, $a_3 = (1,0,-1)^\top$ соответственно в векторы $b_1 = (3,5,0)^\top$, $b_2 = (3,6,-1)^\top$, $b_3 = (-3,-8,1)^\top$. Найти матрицу этого преобразования:

а) в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0)^\top$, $e_2 = (0,1,0)^\top$, $e_3 = (0,0,1)^\top$;

б) в базисе a_1, a_2, a_3.

Решение Искомое преобразование существует и единственно, так как векторы a_1, a_2, a_3 — линейно независимые и, следовательно, составляют базис трехмерного арифметического пространства.

а) Имеют место соотношения $b_i = [\varphi]_{\mathbf{e}} a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, которые могут быть записаны в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = [\varphi]_{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение будем решать при помощи элементарных преобразований над столбцами расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ \hline 3 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & -13 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ \hline 3 & 0 & -6 \\ 4 & 1 & -12 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, матрица линейного преобразования имеет вид

$$[\varphi]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Приведем два способа решения. *Способ 1* Матрицу линейного преобразования в базисе $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ищем по формуле $[\varphi]_{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}^{-1} [\varphi]_{\mathbf{e}} [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$, где

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{a}$. Найдем обратную матрицу[1]:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

[1]Обращение матрицы $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}$ и нахождение произведения $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}}^{-1}[\varphi]_{\mathbf{e}}$ можно выполнить одновременно, решив одно матричное уравнение $[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} X = [\varphi]_{\mathbf{e}}$.

Окончательно получаем

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 10 & -14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Способ 2 Столбцы матрицы $[\varphi]_{\mathbf{a}}$ представляют собой столбцы координат векторов b_1, b_2, b_3 в базисе $\mathbf{a}$. Для нахождения этих координат решим матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}[\varphi]_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 6 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 7 & -9 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 7/3 & 10/3 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right).$$

Окончательно получаем

$$[\varphi]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 10 & -14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

50. Линейное преобразование арифметического пространства переводит векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в b_1, b_2, b_3. Составить матрицу этого преобразования а) в базисе a_1, a_2, a_3, б) в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, если

1) $a_1 = (1,2,2)$, $a_2 = (2,0,1)$, $a_3 = (3,-1,1)$,
$b_1 = (3,1,2)$, $b_2 = (2,0,-1)$, $b_3 = (1,1,-2)$;

2) $a_1 = (2,0,1)$, $a_2 = (1,1,1)$, $a_3 = (1,4,2)$,
$b_1 = (2,-1,2)$, $b_2 = (0,1,3)$, $b_3 = (2,-2,-1)$.

51. В геометрическом пространстве задана прямоугольная система координат $\mathcal{O}, e_1, e_2, e_3$. Для каждого из следующих преобразований найти его матрицу в базисе e_1, e_2, e_3. Задачу решить, пользуясь надлежащей заменой базиса.

1) ортогональное проектирование на прямую $2x_1 = 2x_2 = x_3$;
2) ортогональное проектирование на плоскость $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$;
3) проектирование на прямую $2x_1 = x_2 = -2x_3$ параллельно плоскости $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$;

4) проектирование на плоскость $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ параллельно прямой $x_1 = x_2 = 2x_3$;
5) ортогональное отражение в прямой $2x_1 = x_2 = 2x_3$;
6) ортогональное отражение в плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;
7) поворот вокруг прямой $x_1 = x_2 = x_3$ на угол $\pi/2$;
8) поворот вокруг прямой $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$ на угол $\pi/3$.

52. Доказать, что отношение 1) эквивалентности матриц; 2) подобия матриц обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности.

53. Доказать, что элементарные преобразования строк и столбцов матрицы переводят ее в эквивалентную.

54. Доказать, что любая матрица ранга r эквивалентна матрице вида

$$I_r = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 0 &&& \\ &&&&& 0 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 0 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

в которой на диагонали стоят r единиц, а все непомеченные элементы равны 0. Вывести отсюда, что для любого линейного отображения φ пространства V в пространство W найдется такая пара базисов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f_1, f_2, \ldots, f_m$ пространств V и W соответственно, что

$$\varphi e_j = f_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r), \qquad \varphi e_j = o \quad (j = r+1, r+2, \ldots, n),$$

где $r = \operatorname{rank} \varphi$.

55. Доказать, что две прямоугольные матрицы одинаковых размеров эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги равны.

Пример 5.3. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 14 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

найдем такие невырожденные матрицы R и S, что RAS имеет вид (5.3).

Чтобы найти матрицы R и S припишем к матрице A снизу и справа по единичной матрице:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} -7 & 2 & 14 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right).$$

Все преобразования со строками матрицы A будем выполнять и со строками матрицы, приписанной справа. Все преобразования со столбцами матрицы A будем выполнять и со столбцами матрицы, приписанной снизу. Умножим вторую строку на -1 и вычтем удвоенную вторую из первой. Затем ко второй строке прибавим первую, умноженную на 4:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right).$$

Прибавляем к третьему столбцу первый, умноженный на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 2 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & R \\ \hline S & \end{array}\right),$$

где

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

56. Для каждой из заданных матриц A найти такие невырожденные матрицы R и S, что RAS имеет вид (5.3):

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 15 & -9 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -25 & 15 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

57. Проверить, что матрицы A и B эквивалентны. Найти такие невырожденные R и S, что $B = RAS$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 3 \\ 13 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

58. Доказать, что каждое из следующих пар преобразований матрицы переводит ее в подобную:

1) умножение i-й строки на ненулевое число α; затем умножение i-го столбца на $1/\alpha$;
2) прибавление к i-й строке j-й, умноженной на число α; затем вычитание из j-го столбца i-го, умноженного на α;

3) транспозиция i-й и j-й строк; затем транспозиция i-го и j-го столбцов.

59. *Метод Данилевского.* Доказать, что с помощью элементарных преобразований строк и столбцов из №58 квадратную матрицу можно привести к *фробениусовой форме*, т. е. блочно-диагональной матрице, каждый диагональный блок которой есть матрица Фробениуса (см. №83).

60. Доказать, что если по крайней мере одна из двух кадратных матриц A, B одного порядка невырождена, то матрицы AB и BA подобны. Привести пример двух вырожденных матриц A, B, таких, что AB и BA не подобны.

61. Пусть матрицы A, B подобны. Доказать, что

1) подобны A^2 и B^2;

2) подобны $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ для произвольного числа λ;

3) вообще, подобны $f(A)$ и $f(B)$ для любого многочлена $f(t)$.

62. Описать все матрицы, каждая из которых подобна только самой себе.

5.3 Собственные числа и собственные векторы

Ненулевой вектор $x \in V$ называется *собственным вектором* преобразования φ, если $\varphi x = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in F$. Число λ при этом называется *собственным числом*, или *собственным значением*, преобразования φ. Говорят также, что собственный вектор x *относится* к собственному числу λ, или *принадлежит* собственному числу λ. Множество всех собственных векторов, относящихся к одному собственному значению λ, дополненное нулевым вектором, является подпространством и называется *собственным подпространством.*

Вектор x является собственным вектором преобразования φ тогда и только тогда, когда его координатный столбец $[x]_{\mathbf{e}}$ является нетривиальным решением системы линейных уравнений

$$([\varphi]_{\mathbf{e}} - \lambda E)\,[x]_{\mathbf{e}} = 0.$$

Для существования такого x необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(\lambda E - [\varphi]_{\mathbf{e}}) = 0.$$

Это уравнение, рассматриваемое относительно неизвестного λ, называется *характеристическим уравнением преобразования* φ. Левая часть характеристического уравнения есть многочлен от λ степени $n = \dim V$. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом преобразования* φ. Этот многочлен не зависит от выбора базиса.

Алгебраической кратностью собственного значения λ называется кратность числа λ как корня характеристического многочлена. *Геометрической кратностью* собственного значения λ называется размерность собственного подпространства, относящегося к собственному значению λ. Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности. Собственные векторы, относящиеся к разным собственным значениям, линейно независимы.

Все недиагональные элементы j-го столбца матрицы $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ равны нулю тогда и только тогда, когда j-й вектор базиса — собственный. При этом на диагонали в j-м столбце матрицы $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ находится собственное число. Матрица $[\varphi]_{\mathbf{e}}$ диагональна тогда и только тогда, когда все векторы базиса $\mathbf{e}$ собственные. При этом на диагонали находятся соответствующие собственные числа. Преобразование называется *диагонализируемым*, если существует базис, в котором матрица преобразования диагональна.

Выражения «собственный вектор матрицы», «собственное число матрицы», «характеристический многочлен матрицы» и т. п. следует понимать в том смысле, как это определено в конце вводной части раздела 5.1. В частности, под собственным вектором матрицы $A \in F^{n\times n}$ понимается ненулевой столбец $x \in F^n$, такой, что $Ax = \lambda x$, где λ — число, называемое собственным.

Пример 5.4. Пусть линейное преобразование задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем его собственные числа и собственные векторы.

Записываем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 6 \\ -3 & -1-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2.$$

Его корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ являются собственными числами преобразования. Алгебраические кратности собственных чисел равны соответственно $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Для каждого собственного числа находим собственные векторы. Собственное подпространство, относящееся к собственному числу $\lambda_1 = 2$ описывается системой однородных уравнений $(A - \lambda_1 E)x = o$, где $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ — координатный столбец искомого собственного вектора:

$$\begin{cases} \qquad\qquad\quad 6x_3 = 0; \\ -3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0; \\ \qquad\qquad -3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t\cdot(1,-1,0)^\top$, где t — произвольное число. Таким образом, геометрическая кратность собственного числа $\lambda_1 = 2$, т. е. размерность соответствующего собственного подпространства, равна $d_1 = 1$. Собственное подпространство, относящееся к $\lambda_2 = -1$ описывается системой однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_3 = 0; \\ -3x_1 - 6x_3 = 0; \\ \qquad\quad 0 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t_1\cdot(0,1,0)^\top + t_2\cdot(2,0,-1)^\top$. Таким образом, геометрическая кратность собственного числа $\lambda_2 = -1$, т. е. размерность соответствующего собственного подпространства, равна $d_2 = 2$. Имеем $d_1 + d_2 = 3$, т. е. из собственных векторов можно составить базис и, следовательно, преобразование диагонализируемо (как в вещественном, так и в комплексном пространствах). Окончательно записываем в матрицу B (матрицу преобразования в базисе из собственных векторов) по диагонали собственные числа, а в матрицу Q (матрицу перехода к базису из собственных векторов):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.5. Линейное преобразование задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, диагонализируемо ли оно: а) в вещественном пространстве, б) в комплексном пространстве. Если да, то вычислить матрицу B преобразования в базисе из собственных векторов и матрицу Q перехода к этому базису.

Решение Для нахождения коэффициентов характеристического многочлена найдем суммы главных миноров матрицы A:

$$s_1 = 5 - 1 - 2 = 2,$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Характеристический многочлен имеет вид $\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$. Среди делителей ± 1, ± 2 свободного коэффициента находим один из корней $\lambda_1 = 2$. Для нахождения остальных корней исходный многочлен, умноженный на (-1), поделим на $\lambda - 2$. Воспользуемся схемой Горнера:

	1	-2	1	-2
2	1	$2 \cdot 1 - 2 = 0$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	$2 \cdot 1 - 2 = 0$

В частном получаем многочлен $\lambda^2 + 1$, корни которого равны $\lambda_{2,3} = \pm i$.

а) В вещественном случае преобразование обладает лишь одним собственным значением $\lambda_1 = 2$ с алгебраической кратностью 1. Геометрическая кратность не превосходит алгебраической, следовательно, в нашем случае тоже равна 1. Максимальная линейно независимая система из собственных векторов состоит из одного вектора, следовательно, базиса из собственных векторов нет, преобразование не диагонализируемо.

б) В комплексном случае имеем три собственных значения. Для каждого из них решим систему $(A - \lambda_i E)x = 0$, где $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$.

Для $\lambda_1 = 2$ система имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (4, 6, -3)^\top$, $t \in \mathbb{C}$.

Для $\lambda_2 = i$ система имеет вид

$$\begin{cases} (5-i)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - (1+i)x_2 + 2x_3 = 0, \\ -6x_1 + 2x_2 - (2+i)x_3 = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы можно воспользоваться методом Гаусса, а можно, обратив внимание на то, что определитель системы равен нулю, воспользоваться «правилом векторного произведения». Первые две строки не пропорциональны, поэтому частное решение найдем через миноры, составленные из элементов этих двух строк:

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1-i & 2 \end{vmatrix} = 2i, \qquad x_2 = -\begin{vmatrix} 5-i & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2+2i,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 5-i & -1 \\ 6 & -1-i \end{vmatrix} = -4i.$$

Общее решение: $x = \tau \cdot (2i, 2+2i, -4i)^\top = t \cdot (1, 1-i, -2)^\top$, $\tau, t \in \mathbb{C}$.

Легко видеть, что для собственного числа $\lambda_3 = -i$, комплексно сопряженного с λ_2, общее решение системы, описывающей собственное подпространство, получается из предыдущего заменой всех чисел на сопряженные: $x = t \cdot (1, 1+i, -2)^\top$, $t \in \mathbb{C}$.

Итак, в комплексном пространстве преобразование диагонализируемо. Записывая в матрицу B по диагонали собственные числа, а в матрицу Q по столбцам — координаты собственных векторов, получаем

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1-i & 1+i \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.6. Выяснить, диагонализируемо ли преобразование комплексного линейного пространства, заданное матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение Находим характеристический многочлен: $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. Один корень, $\lambda_1 = 1$, — простой, другой, $\lambda_{2,3} = -1$, имеет алгебраическую кратность 2.

Для собственного числа $\lambda_1 = 1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 \qquad\quad - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (1, -1, 1)^\top$, $t \in \mathbb{C}$.

Для собственного числа $\lambda_{2,3} = -1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (1, 0, -1)^\top$, $t \in \mathbb{C}$.

Максимальная линейно независимая система из собственных векторов содержит только два вектора, поэтому преобразование не диагонализируемо.

Пример 5.7. Выяснить, диагонализируемо ли преобразование вещественного линейного пространства, заданное матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если да, то вычислить матрицу B преобразования в базисе из собственных векторов и матрицу Q перехода к этому базису.

Решение Находим характеристический многочлен: $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. Один корень, $\lambda_1 = 1$, — простой, другой, $\lambda_{2,3} = -1$, имеет алгебраическую кратность 2.

Для $\lambda_1 = 1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 \phantom{{}- 2x_2} - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 \phantom{{}+ 2x_3} = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t \cdot (1, -1, 1)^\top$, $t \in \mathbb{R}$. Геометрическая кратность собственного числа $\lambda_1 = 1$ равна 1.

Для $\lambda_{2,3} = -1$ система, описывающая собственное подпространство, имеет вид

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение: $x = t_1 \cdot (1, 0, 1)^\top + t_2 \cdot (0, 1, 1)^\top$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Геометрическая кратность собственного числа $\lambda_{2,3} = -1$ равна 2.

Максимальная линейно независимая система из собственных векторов содержит три вектора, поэтому преобразование диагонализируемо.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

63. Пусть λ — некоторое собственное число и x — соответствующий собственный вектор линейного преобразования φ. Доказать:

1) $\alpha\lambda$ и x — собственное число и соответствующий собственный вектор преобразования $\alpha\varphi$ при любом ненулевом числе α;
2) $\lambda - \lambda_0$ и x — собственное число и соответствующий собственный вектор преобразования $\varphi - \lambda_0\varepsilon$;
3) λ^2 и x — собственное число и соответствующий собственный вектор преобразования φ^2;
4) вообще, $f(\lambda)$ и x — собственное число и соответствующий собственный вектор преобразования $f(\varphi)$ для любого многочлена $f(t)$;

5) λ^{-1} и x — собственное число и соответствующий собственный вектор преобразования φ^{-1}, если φ обратимо.

64. Пусть $f(t)$ — многочлен. Показать, что преобразование $f(\varphi)$ может иметь собственные векторы, отличные от собственных векторов преобразования φ.

65. Найти собственные векторы и собственные числа преобразования дифференцирования пространства многочленов степени не выше n.

66. Найти собственные векторы и собственные числа преобразования поворота геометрической плоскости на угол α.

67. Найти собственные векторы и собственные числа преобразования поворота геометрического пространства вокруг некоторой прямой ℓ на угол α.

68. Пусть линейное пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств V_1 и V_2. Найти собственные векторы и собственные числа следующих преобразований:

1) проектирование на V_1 параллельно V_2;
2) отражение в V_1 параллельно V_2.

69. Какой вид имеет матрица преобразования в базисе, если

1) последние k векторов базиса — собственные;
2) первые k векторов базиса — собственные?

70. Доказать, что собственные числа диагональной матрицы совпадают с ее диагональными элементами. Чему равны собственные векторы?

71. Пусть сумма элементов каждой строки некоторой квадратной матрицы равна 1. Доказать, что матрица имеет собственное число 0. Указать соответствующий собственный вектор.

72. Найти все собственные числа и сответствующие собственные векторы матриц порядка n:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \dots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \dots & \alpha_2\beta_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_n\beta_1 & \alpha_n\beta_2 & \dots & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$.

73. Доказать, что характеристические матрицы подобных матриц совпадают. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение — если характеристические многочлены совпадают, то матрицы подобны — не верно.

74. Записать в явном виде характеристический многочлен $\det(\lambda E - A)$ матрицы $A = (a_{ij})$

1) 1-го порядка;
2) 2-го порядка;

3) 3-го порядка.

75. Доказать, что коэффициент s_k характеристического многочлена $\det(\lambda E - A) = \lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + \dots + s_k\lambda^{n-k} + \dots + s_n$ равен сумме всех главных миноров k-го порядка, умноженной на $(-1)^k$. В частности, $s_1 = \operatorname{tr} A$, $s_n = (-1)^n \det A$.

76. Доказать, что сумма всех корней (с учетом их кратностей) характеристического многочлена равна следу матрицы, а произведение всех корней — определителю матрицы.

77. Доказать, что характеристический многочлен матрицы $A^\top$ совпадает с характеристическим многочленом матрицы A.

78. Доказать, что если в комплексной матрице все элементы заменить на сопряженные, то все коэффициенты характеристического многочлена заменятся на сопряженные.

79. Пусть A, B — квадратные матрицы одного порядка. Доказать, что характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают. Ср. с задачей 60.

80. Пусть $f(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A, а $g(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы $A - \lambda_0 E$. Доказать, что $g(\lambda) = f(\lambda + \lambda_0)$.

81. Пусть матрица A невырождена и имеет порядок n. Доказать, что характеристический многочлен матрицы A^{-1} равен

$$(-\lambda)^n \frac{1}{\det A} \chi\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где $\chi(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A.

82. Составить характеристические многочлены матриц из задачи 72. Проверить, что корни этих многочленов совпадают с собственными числами, найденными в задаче 72.

83. Доказать, что характеристический многочлен *матрицы Фробениуса*

$$F(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Матрица $F(a_1, \dots, a_n)$ называется также *сопровождающей матрицей* данного многочлена. Таким образом, любой многочлен степени n со старшим коэффициентом 1 может быть характеристическим многочленом некоторой матрицы.

84. Найти характеристический многочлен преобразования дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше n.

85. Найти характеристический многочлен преобразования поворота геометрической плоскости на угол α.

86. Найти характеристический многочлен преобразования геометрического пространства, определяемого формулой $\varphi x = [a, x]$, где a — фиксированный вектор.

87. Чему равны характеристический многочлен и собственные числа верхнетреугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}?$$

88. Доказать, что в комплексном пространстве любое преобразование имеет по крайней мере один собственный вектор.

89. Доказать, что в вещественном пространстве нечетной размерности любое преобразование имеет по крайней мере один собственный вектор.

90. Линейное преобразование задано своей матрицей. Найти все собственные числа. Для каждого из них указать его алгебраическую и геометрическую кратности. Выяснить, диагонализируемо ли преобразование а) в вещественном пространстве; б) в комплексном пространстве. Если да, то записать матрицу перехода к базису из собственных векторов и матрицу преобразования в этом базисе.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 12 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

91. В пространстве тригонометрических многочленов $a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t$ степени не выше 1 задано преобразование $\varphi = D^2 + D + 2\varepsilon$, где D — преобразование дифференцирования. Найти все собственные числа и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования φ. Диагонализируемо ли φ?

92. В пространстве всех функций вида $e^{\alpha t} f(t)$, где $f(t)$ — вещественный многочлен степени не выше 2, задано преобразование $\varphi = D^2 - 2D$, где D — преобразование дифференцирования. Найти все собственные числа и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования φ. Диагонализируемо ли φ?

93. Найти все собственные числа и максимальную линейно независимую систему собственных векторов для следующих преобразований пространства вещественных функций вида $a_0 \cos t + b_0 \sin t + a_0 t \cos t + b_0 t \sin t$:
1) дифференцирование;
2) двукратное дифференцирование.

94. Найти все собственные числа и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования φ, действующего в вещественном пространстве многочленов $f(x, y)$ двух переменных степени не выше 2. Диагонализируемо ли φ? Преобразование φ задано формулой:
1) $\varphi f(x, y) = f(x - 1, y - 2)$;
2) $\varphi f(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

95. Найти все собственные числа и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования φ пространства вещественных квадратных матриц второго порядка, если

$$\varphi X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X.$$

Диагонализируемо ли φ?

96. Найти собственные числа матрицы

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_0 & \dots & b_{n-3} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_0 \end{pmatrix}.$$

97. Матрица

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

называется *жордановой клеткой.* Здесь n — ее порядок. Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа указать его алгебраическую и геометрическую кратности. Подобна ли матрица диагональной?

98. Диагонализируемо ли преобразование дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше n?

99. Пусть n, k, d — натуральные числа и $1 \leq d \leq k \leq n$. Привести пример линейного преобразования n-мерного пространства, в котором собственное число λ имеет алгебраическую кратность k и геометрическую кратность d.

5.4 Инвариантные подпространства

Подпространство W линейного пространства V называется *инвариантным* относительно преобразования φ, если $\varphi W \subseteq W$, т.е. $\varphi x \in W$ для любого x из W. *Сужением* (или *ограничением*) преобразования φ на инвариантное подпространство W называется преобразование $\psi : W \to W$, такое, что $\psi x = \varphi x$ для любого $x \in W$. Говорят также, что на инвариантном подпространстве W преобразование φ *индуцирует* преобразование ψ.

100. Доказать, что сумма и пересечение инвариантных подпространств сами являются инвариантными подпространствами.

101. Доказать, что образ и ядро линейного преобразования являются инвариантными подпространствами. Доказать также, что любое подпросранство, содержащее образ, и любое подпространство, содержащееся в ядре, являются инвариантными.

102. Доказать, что линейная оболочка любой системы собственных векторов является инвариантным подпространством.

103. Доказать, что если преобразование φ невырождено, то φ и φ^{-1} имеют одни и те же инвариантные подпространства.

104. Доказать, что φ и $\varphi - \lambda\varepsilon$, где λ — число, имеют одни и те же инвариантные подпространства.

105. Доказать, что любое подпространство, инвариантное относительно преобразования φ инвариантно относительно $f(\varphi)$, где $f(t)$ — многочлен. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение в общем случае не верно.

106. Как выгладит матрица преобразования, если

1) подпространство, натянутое на первые k базисных векторов, инвариантно;
2) подпространство, натянутое на последние k базисных векторов, инвариантно.

107. Доказать, что

1) любое линейное преобразование комплексного n-мерного пространства имеет инвариантные подпространства размерности 1 и $n-1$;
2) любое линейное преобразование вещественного n-мерного пространства, где n нечетно, имеет инвариантные подпространства размерности 1 и $n-1$;
3) если линейное преобразование линейного n-мерного пространства имеет одномерное инвариантное подпространство, то оно имеет и $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство.

108. Найти все подпространства, инвариантные относительно

1) гомотетии;
2) преобразования поворота геометрической плоскости на угол α;
3) преобразования поворота геометрического трехмерного пространства на угол α вокруг некоторой прямой ℓ, проходящей через начало координат;
4) преобразования дифференцирования пространства многочленов степени не выше n;
5) преобразования проектирования на V_1 параллельно V_2, если пространство есть прямая сумма подпространств V_1 и V_2;
6) преобразования отражения в V_1 параллельно V_2.

109. Пусть линейное преобразование n-мерного пространства имеет n попарно различных собственных чисел. Описать все инвариантные подпространства.

110. Описать все инвариантные подпространства диагонализируемого линейного преобразования.

111. Матрица преобразования в некотором базисе представляет собой жорданову клетку $J_n(\lambda)$. Описать все инвариантные подпространства.

112. Матрица преобразования в некотором базисе есть блочно-диагональная матрица, по диагонали которой расположены два блока: $J_m(\lambda_1)$ и $J_k(\lambda_2)$, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Описать все инвариантные подпространства.

5.5 Жорданова форма линейного преобразования

113. Многочлен $f(t) \in F[t]$ называется многочленом, *аннулирующим* преобразование φ, если $f(\varphi) = \theta$. Ненулевой аннулирующий многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1 называется *минимальным.* Доказать, что множество всех многочленов, аннулирующих заданное преобразование φ, имеет вид $\{f(t)h(t) :\ h(t) \in F[t]\}$, где $f(t)$ — минимальный многочлен.

114. Пусть $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ — минимальные многочлены, аннулирующие преобразование φ на подпространствах W_1 и W_2 соответственно, причем $W_1 \subseteq W_2$. Доказать, что $f_2(\lambda)$ делится без остатка на $f_1(\lambda)$.

115. Пусть $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ — многочлены, аннулирующие преобразование φ на подпространствах W_1 и W_2 соответственно. Доказать, что $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$ аннулирует φ на подпространстве $W_1 + W_2$.

116. Пусть $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ — минимальные многочлены, аннулирующие преобразование φ на подпространствах W_1 и W_2 соответственно. Доказать, что $\text{НОК}\big(f_1(\lambda),\ f_2(\lambda)\big)$ является минимальным многочленом, аннулирующим φ на подпространстве $W_1 + W_2$.

117. Найти минимальный многочлен для каждого из следующих преобразований:
1) нулевое преобразование;
2) тождественное преобразование;
3) гомотетия с коэффициентом λ_0;
4) преобразование поворота геометрической плоскости на угол α;

5) преобразования поворота геометрического трехмерного пространства на угол α вокруг некоторой прямой ℓ, проходящей через полюс;
6) преобразования дифференцирования пространства многочленов степени не выше n;
7) преобразования проектирования на V_1 параллельно V_2, если пространство есть прямая сумма подпространств V_1 и V_2;
8) преобразования отражения в V_1 параллельно V_2.

118. Найти минимальные многочлены матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Для каждого преобразования φ комплексного пространства существует базис, называемый *жордановым*, в котором матрица имеет блочно-диагональный вид

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

где $J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_s$ — жордановы клетки. Матрица J называется *жордановой формой* преобразования φ.

119. Пусть $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda - \lambda_s)^{k_s}$ — многочлен, аннулирующий преобразование φ. Множество

$$P_i = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$$

называется *корневым подпространством*, принадлежащим собственному числу λ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Доказать следующие утверждения:
1) все линейное пространство есть прямая сумма подпространств $P_1 + P_2 + \cdots + P_s$;
2) каждое корневое пространство P_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ инвариантно относительно преобразования φ;
3) сужение преобразования φ на подпространство P_i (индуцированное преобразование) имеет одно собственное значение λ_i.

120. Пусть λ — собственное число преобразования φ и пусть

$$H_k = \operatorname{Ker}\psi^k \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

где $\psi = \varphi - \lambda\varepsilon$. В частности, $H_0 = \{o\}$, а H_1 — собственное подпространство, относящееся к собственному числу λ.

1) Доказать, что $H_k \subseteq H_{k+1}$ $(k = 0, 1, \dots)$.
2) Доказать, что если $H_s = H_{s+1}$ для некоторого s, то $H_k = H_s$ для всех $k \geq s$.
3) Пусть $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_s$ и $x \in H_s \setminus H_{s-1}$. Проверить, что $\psi^k x \in H_{s-k} \setminus H_{s-k-1}$ $(k = 0, 1, \dots)$. Доказать, что система векторов $x, \psi x, \dots, \psi^{s-1}x$, называемая *жордановой цепочкой*, линейно независима.
4) Пусть первые s векторов базиса образуют жорданову цепочку. Как выглядит матрица линейного преобразования φ?

Схема построения жорданова базиса:

1. Определить собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.

2. Выбирая в качестве λ поочередно каждое из собственных чисел, выполнить следующие действия:

   (a) найти $H_k = \ker \psi^k$ $(k = 1, \dots, s)$, где $\psi = \varphi - \lambda\varepsilon$, $s = \min\{k : \ H_k = H_{k+1}\}$;

   (b) найти систему $a_{11}, \dots, a_{1t_1}$, дополняющую базис пространства H_{k-1} до базиса пространства H_k;

   (c) для каждого $h = 2, 3, \dots, k$ найти векторы $a_{h1}, \dots, a_{ht_h}$ (возможно, $t_h = 0$), дополняющие систему, состоящую из базиса пространства H_{k-h} и векторов
   $$\psi^{h-1}a_{11}, \dots, \psi^{h-1}a_{1t_1}, \dots, \psi a_{h-1,1}, \dots, \psi a_{h-1,t_{h-1}},$$
   до базиса пространства H_{k-h-1} (предполагается, что «базис» подпространства $H_0 = \{o\}$ не содержит векторов).

Система векторов

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & \dots & a_{1t_1} & & & & & & & & \\
\psi a_{11} & \dots & \psi a_{1t_1} & \psi a_{21} & \dots & \psi a_{2t_2} & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \\
\psi^{s-1}a_{11} & \dots & \psi^{s-1}a_{1t_1} & \psi^{s-2}a_{21} & \dots & \psi^{s-2}a_{2t_2} & \dots & a_{s1} & \dots & a_{st_s}
\end{array}$$

образует базис пространства H_k. Каждый вертикальный ряд векторов, рассматриваемый снизу вверх, образует жорданову цепочку.

Пример 5.8. Построим жорданов базис и жорданову форму преобразования, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем характеристическое уравнение и находим собственные числа. Преобразование обладает только одним собственным числом $\lambda = 2$. Вычисляем степени B^k матрицы $B = A - \lambda E = A - 2E$. Каждый раз будем находить базис пространства H_k решений системы $B^k x = o$. Процесс заканчивается, как только $H_{s+1} = H_s$. В случае одного собственного числа это условие эквивалентно условию, что H_s совпадает со всем пространством (т. е. матрица B^s нулевая). Имеем

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

матрица B^3 нулевая, следовательно, $H_3 = H_4 = \ldots$ Построенные базисы пространств H_k запишем в следующую таблицу:

$$\begin{array}{lll}
H_3 = L\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} & a_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} & \\
H_2 = L\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} & Ba_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\4\\1\\0\end{pmatrix} & a_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
H_1 = L\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\4\\2\\1\end{pmatrix}\right\} & B^2a_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\4\\2\\1\end{pmatrix} & Ba_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}
\end{array}$$

В строке, соответствующей подпространству H_k, также записана система векторов, которая дополняет базис пространства H_{k-1} до базиса пространства H_k, причем предполагается, что «базис» пространства $H_0 = \{o\}$ не содержит ни одного вектора. Построение этих систем выполнялось в следующей последовательности. Сначала дополняем базис пространства H_2 до базиса пространства H_3. Так как размерности пространств отличаются на 1, то для этого нужно взять только один вектор. Возьмем a_1. Находим Ba_1. Дополняем систему, состоящую из базиса пространства H_2 и вектора Ba_1, до базиса пространства H_2. Тоже нужно взять только один вектор. Возьмем a_2. Находим $B^2 a_1$ и Ba_2. Эти векторы уже образуют базис пространства H_1, поэтому ничего делать не надо. Имеем две жордановы цепочки: $a_1, Ba_1, B^2 a_1$ и a_2, Ba_2. Записываем эти векторы в матрицу Q. Каждой жордановой цепочке соответствует жорданова клетка в матрице J:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

121. Для заданной матрицы A найти ее жорданову форму J и трансформирующую матрицу Q, такие, что $J = Q^{-1}AQ$.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

122. Доказать, что число жордановых клеток порядка k, относящихся к собственному значению λ, в жордановой форме матрицы A равно $r_{k-1}-2r_k+r_{k+1}$, где $r_0=0$, а r_k — ранг матрицы $(A-\lambda E)^k$. Таким образом, жорданова форма преобразования определена единственным образом с точностью до перестановок жордановых клеток.

123. Доказать, что две квадратные матрицы подобны тогда и только тогда, когда их жордановы формы совпадают с точностью до перестановок жордановых клеток.

124. Подобны ли между собой матрицы A и B. Если да, то найти невырожденную матрицу Q, такую, что $B=Q^{-1}AQ$.

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \end{pmatrix};$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

125. Что можно сказать о жордановой форме матрицы A, если

1) ее характеристический многочлен равен $(\lambda-1)^2$;
2) характеристический многочлен равен $(\lambda-1)^3$;
3) характеристический многочлен равен $(\lambda-1)^4$, а минимальный многочлен равен $(\lambda-1)^2$?

126. Найти жорданов базис и жорданову форму для следующих преобразований пространства многочленов степени не выше n:

1) преобразование дифференцирования;
2) преобразование двукратного дифференцирования.

127. Найти жорданову форму следующих матриц порядка n:

1) $\begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}, \quad a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n}\neq 0;$

2) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$

128. Как, зная жорданову форму J матрицы A, построить жорданову форму матрицы

1) $A - \lambda E$;
2) A^{-1}, если A невырождена;
3) A^2?

129. Для каждой из следующих матриц найти минимальный многочлен:
1) жорданова клетка $J_n(\lambda_0)$;
2) жорданова матрица, составленная из клеток $J_{m_1}(\lambda_0), J_{m_2}(\lambda_0), \dots, J_{m_s}(\lambda_0)$;
3) жорданова матрица, составленная из клеток $J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_s}(\lambda_1),\ J_{k_1}(\lambda_2), \dots, J_{k_t}(\lambda_2)$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

130. Доказать *теорему Гамильтона–Кэли*: преобразование является корнем своего характеристического многочлена.

131. Для каждой матрицы из задачи 121 найти ее минимальный многочлен.

132. Что можно сказать о жордановой форме преобразования φ и каков геометрический смысл этого преобразования, если
1) $\varphi^2 = \varphi$ (*идемпотентное преобразование*);
2) $\varphi^2 = \varepsilon$ (*инволютивное преобразование*).

133. Доказать, что преобразование φ *нильпотентно* (т. е. $\varphi^p = \theta$ для некоторого натурального p) тогда и только тогда, когда все ее характеристические числа равны нулю.

134. Преобразование φ называется *периодическим*, если $\varphi^p = \varepsilon$ для некоторого p. Доказать, что в комплексном пространстве периодическое преобразование диагонализируемо. Привести пример недиагонализируемого периодического преобразования вещественного пространства.

5.6 Функции от матриц

135. Пусть матрицы A, B подобны, причем $B = Q^{-1}AQ$ для некоторой невырожденной матрицы Q. Доказать, что $g(B) = Q^{-1}g(A)Q$, где $g(t)$ — произвольный многочлен.

136. Доказать, что m-я степень жордановой клетки $J_n(\lambda)$ равна

$$J_n(\lambda)^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \dots & \binom{m}{n-1}\lambda^{m-n+1} \\ 0 & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \dots & \binom{m}{n-2}\lambda^{m-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^m & \dots & \binom{m}{n-2}\lambda^{m-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^m \end{pmatrix},$$

где $\binom{m}{k} = 0$ при $k \geq m$.

137. Доказать, что для произвольного многочлена $g(t)$ выполняется соотношение

$$g\left(J_n(\lambda)\right) = \begin{pmatrix} g(\lambda) & \frac{g'(\lambda)}{1!} & \frac{g''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{g^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & g(\lambda) & \frac{g'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{g^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (5.4)$$

В частности, если $g(t) = t^m$, то получаем формулу из предыдущей задачи.

Пусть

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

— минимальный многочлен матрицы A. Предполагается, что $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$. Будем говорить, что произвольная функция $g(\lambda) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *задана на спектре матрицы* A, если существует набор значений

$$\begin{array}{c} g(\lambda_1), g'(\lambda_1), \dots, g^{k_1-1}(\lambda_1); \\ g(\lambda_2), g'(\lambda_2), \dots, g^{k_2-1}(\lambda_1); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g(\lambda_s), g'(\lambda_s), \dots, g^{k_s-1}(\lambda_1). \end{array} \qquad (5.5)$$

В данном случае говорят также, что *функция* $g(\lambda)$ *на спектре матрицы* A *принимает значения* (5.5). Обозначим через $g_A(\lambda)$ многочлен минимальной степени, совпадающий на спектре матрицы A с функцией $g(\lambda)$ (так называемый интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра, заданный на спектре матрицы A). Значение $g(A)$ функции $g(\lambda)$ определим как значение многочлена $g_A(\lambda)$ от матрицы A:

$$g(A) = g_A(A).$$

Отметим, что степень интерполяционного многочлена Лагранжа–Сильвестра, заданного на спектре матрицы A, меньше степени минимального многочлена этой матрицы.

138. Пусть $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ — многочлены из $\mathbb{C}[\lambda]$, A — матрица из $\mathbb{C}^{n\times n}$. Доказать, что для того, чтобы $g(A) = h(A)$ необходимо и достаточно, чтобы значения многочленов $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ совпадали на спектре матрицы A.

139. Доказать, что если матрицы A, B подобны, причем $B = Q^{-1}AQ$, тогда для любой функции $g(\lambda)$, определенной на спектре матрицы A, $g(B)$ существует, причем

$$g(B) = Q^{-1}g(A)Q.$$

140. Доказать, что для произвольной функции $g(\lambda)$, определенной на спектре блочно-диагональной матрицы $\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_p)$ функция $g(A_i)$ существует для каждого $i = 1, 2 \ldots, p$, причем

$$g\left(\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_p)\right) = \operatorname{diag}\left(g(A_1), \ldots, g(A_p)\right).$$

141. Пусть функция $g(\lambda)$ определена на спектре матрицы $J_n(\lambda_0)$. Доказать, что тогда имеет место формула (5.4).

Пример 5.9. Найдем A^{2000}, если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 способ. Вначале находим жорданову форму J матрицы A и соответствующую трансформирующую матрицу Q:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя результат задачи 137, получаем

$$J^{2000} = \begin{pmatrix} 3^{2000} & 2000 \cdot 3^{1999} \\ 0 & 3^{2000} \end{pmatrix}.$$

Имеем $J = Q^{-1}AQ$, поэтому, согласно задаче 135, $J^{2000} = Q^{-1}A^{2000}Q$, откуда $A^{2000} = QJ^{2000}Q^{-1}$. Окончательно получаем

$$A^{2000} = \begin{pmatrix} 2001 \cdot 3^{2000} & -18000 \cdot 3^{1999} \\ 2000 \cdot 3^{1999} & -1999 \cdot 3^{2000} \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

2 способ. Минимальный многочлен матрицы A равен $(\lambda - 3)^2$. Интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра имеет степень меньше 2 и поэтому имеет вид $g_A(\lambda) = a_0\lambda + a_1$. Коэффициенты a_0, a_1 находим из условий $g_A(3) = 3^{2000}$, $g_A'(3) = 2000 \cdot 3^{1999}$, которые записываются следующим образом:

$$\begin{cases} 3a_0 + a_1 = & 3^{2000}, \\ a_0 & = 2000 \cdot 3^{1999}. \end{cases}$$

Из этой системы определяем $a_0 = 2000 \cdot 3^{1999}$, $a_1 = -1999 \cdot 3^{2000}$. Таким образом, $g_A(\lambda) = 2000 \cdot 3^{1999}\lambda - 1999 \cdot 3^{2000}$. Значение этого многочлена от матрицы A и есть A^{2000}. Результат совпадает с (5.6).

142. Вычислить значения функций от матриц:

1) A^{2000}, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$;

2) A^{2000}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\sqrt{A}$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\sqrt{A}$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$;

5) e^A, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

6) e^A, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$;

7) $\sin A$, если $A = \begin{pmatrix} \pi+1 & -1 \\ 1 & \pi-1 \end{pmatrix}$;

8) $\cos A$, если $A = \begin{pmatrix} \pi+1 & 1 \\ -1 & \pi-1 \end{pmatrix}$;

9) $\ln A$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

10) $\ln A$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -6 & -1 & -4 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответы, указания, решения

1. 1), 2) Линейное при $a = o$, нелинейное при $a \neq o$.
3) Линейное при $\alpha = 0$, нелинейное при $\alpha \neq 0$.

2. 1) Ортогональная проекция на прямую $[a, x] = o$.
2) Ортогональная проекция на плоскость $(n, x) = 0$.
3) Ортогональное отражение в прямой $[a, x] = o$.
4) Ортогональное отражение в плоскости $(n, x) = 0$.
5) Проекция на прямую $[a, x] = o$ параллельно плоскости $(a, n) = 0$.
6) Проекция на плоскость $(a, n) = 0$ параллельно прямой $[a, x] = o$.

3. 1), 2) не линейное; 3), 4) линейное.

4. 1), 3), 4) является; 2) не является.

5. 1)–6) является; 7)–9) не является.

9. Да.

10. 1), 3), 4) является; 2) не является.

12. 1) Система $\varphi a_1, \varphi a_2, \ldots, \varphi a_n$ линейно зависима.
2) Система $\varphi a_1, \varphi a_2, \ldots, \varphi a_n$ может быть как линейно зависимой, так и линейно независимой.

14. 1) $\operatorname{Ker}\varphi = V_1$, $\operatorname{Im}\varphi = V_2$; 2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$, $\operatorname{Im}\varphi = V$; 3) можно.

15. 1) $\varphi A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\psi A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
2) $\varphi A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\psi A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Ядро — нулевое подпространство, образ — вся плоскость.

17. Ядро — нулевое подпространство, образ — все пространство.

18. 1) Базис образа: $(3, 2, 4)$, $(1, 1, 3)$; базис ядра: $(1, -1, -1)$.
2) Базис образа: $(1, 1, 1)$; базис ядра: $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$.
3) Образ — все пространство, ядро — нулевое подпространство.

19. Ядро — пространство многочленов степени не выше 1, образ — пространство многочленов степени не выше $n - 1$.

20. Ядро — пространство многочленов степени не выше 1, образ — пространство многочленов степени не выше $n - 1$.

21. Образ — все k-мерное арифметическое пространство. Если $k \leq n$, то ядро — множество многочленов вида $f(t) = h(t)(t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_k)$, где $h(t)$ — произвольный многочлен степени не выше $n - k$. Если $k > n$, то ядро — нулевое подпространство. Ранг равен k. Дефект равен $n + 1 - k$, если $k \leq n$, и равен 0, если $k > n$.

26. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

27. 1) ортогональная проекция на плоскость $\mathcal{O}xy$;
2) симметрия относительно плоскости $\mathcal{O}xy$;
3) поворот вокруг оси $\mathcal{O}y$ на угол γ;
4) растяжение пространства с коэффициентом 3;
5) симметрия относительно оси $\mathcal{O}y$ (поворот вокруг этой оси на угол π).

28. 1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
в зависимости от направления поворота;

2) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
в зависимости от направления поворота;

3) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$; 5) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$;

6) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -24 \\ 3 & 3 & -12 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -5 & -6 & 24 \\ -3 & -2 & 12 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

29. В выражении $n \cdot n^\top$ предполагается, что n — координатный столбец вектора в заданном базисе:
1) $\dfrac{1}{|n|^2}\, n \cdot n^\top$; 2) $E - \dfrac{1}{|n|^2}\, n \cdot n^\top$; 3) $-E + \dfrac{2}{|n|^2}\, n \cdot n^\top$; 4) $E - \dfrac{2}{|n|^2}\, n \cdot n^\top$.

30. 1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$.

32. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

35. *Указание:* Доказать, что след матрицы $AB - BA$ равен нулю.

38. 1) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & ab & a^2 & b^2 \\ 0 & 1 & 0 & b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

39. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

40. $\dim \Phi(V, W) = mn$.

41. Для каждого из преобразований указаны базисы образа и ядра. Векторы заданы своими координатами в тех базисах, в которых построена матрица отображения.

1) Базис образа $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$; базис ядра $(1, -1, -1, 0)$, $(1, 1, 0, -1)$.

2) Базис образа $(1, 0, 1, 2)$, $(1, 2, 0, 1)$, $(1, -1, 2, 1)$; ядро — нулевое подпространство. Отображение инъективное.

3) Базис образа $(1, 0)$, $(0, 1)$; базис ядра $(2, 1, -1)$. Отображение сюръективное.

4) Базис образа $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$; ядро — нулевое подпространство. Отображение биективное.

42. 1) $\varphi a_1 = (42, -36, 30)^\top = 6a_1$, $\varphi a_2 = a_2$, $\varphi a_3 = (-14, -4, 6)^\top = -2a_3$. Произведение растяжений пространства в направлении векторов a_1, a_2, a_3 с коэффициентами растяжения 6, 1, -2 соответственно.

2) $\varphi a_1 = a_1$, $\varphi a_2 = a_2$, $\varphi a_3 = o$. Проекция на плоскость $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ параллельно прямой $x_1 = -x_2 = x_3$.

3) $\varphi a_1 = a_1$, $\varphi a_2 = o$, $\varphi a_3 = o$. Проекция на прямую $x_1 = \dfrac{x_2}{3} = \dfrac{x_3}{-1}$ параллельно плоскости $2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0$.

4) $\varphi a_1 = a_1$, $\varphi a_2 = (3, -17, 18)^\top$, $\varphi a_3 = (7, -23, -3)^\top$.

48. 1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

49. 1) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

50. 1) а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -3 & -4 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 3 & 15 & 23 \\ -1 & -8 & -13 \end{pmatrix}$.

2) а) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & -10 \\ -8 & -6 & 15 \\ -9 & -8 & 20 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & -8 & 5 \\ 11 & 21 & -10 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

51. 1) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; 6) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ или $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

в зависимости от направления поворота;

8) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & -1 \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -1 & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$ или $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ -1 & \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$

в зависимости от направления поворота.

56. Матрицы R и S определяются не единственным образом.

1) $I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

57. $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

59. Пусть последние k строк матрицы A такие же, как у матрицы Фробениуса ($0 \le k < n$).

1. Если $a_{n-k,n-k-1} \neq 0$, то прибавляя с подходящими множителями $(n-k-1)$-й столбец к остальным столбцам и выполняя соответствующие преобразования, сохраняющие подобие, со строками (т. е. прибавляя с нужными множителями все строки к $(n-k-1)$-й строке), приводим матрицу A к виду, в котором уже послениe $k+1$ строк такие же, как в матрице Фробениуса.

2. Если $a_{n-k,n-k-1} = 0$, но $a_{n-k,j} \neq 0$ для некоторого $j < n-k-1$, то переставляем местами j-й и $(n-k-1)$-й столбцы и j-ю и $(n-k-1)$-ю строки. Получится матрица подобная исходной. Приходим к случаю 1.

3. Если $a_{n-k,j} = 0$ для всех $j < n-k$, то матрица имеет вид
$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & F \end{pmatrix},$$
где B и F — квадратные матрицы, причем F — фробениусова матрица, поэтому задача сводится к вычислению характеристического многочлена для B.

62. Скалярные матрицы, т. е. матрицы вида λE, где λ — произвольное число.

65. Собственные векторы — все многочлены нулевой степени. Соответствующее собственное число — 0.

66. Если $\alpha \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то собственных векторов нет. Если $\alpha = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то каждый ненулевой вектор — собственный, собственное число равно 1. Если $\alpha = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то каждый ненулевой вектор — собственный, собственное число равно -1.

67. Если $\alpha \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то собственными векторами являются все ненулевые векторы, коллинеарные прямой ℓ, и только они, собственное число равно 1. Если $\alpha = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то каждый ненулевой вектор — собственный, собственное число равно 1. Если $\alpha = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то собственными векторами являются все векторы, коллинеарные прямой ℓ (соответствующее собственное число равно 1), и все векторы, ортогональные прямой ℓ (соответствующее собственное число равно -1).

68. 1) Собственные векторы — все ненулевые векторы пространства V_1 (соответствующее собственное число равно 1) и все ненулевые векторы пространства V_2 (соответствующее собственное число равно 0).

2) Собственные векторы — все ненулевые векторы пространства V_1 (соответствующее собственное число равно 1) и все ненулевые векторы пространства V_2 (соответствующее собственное число равно -1).

69. Пусть E — единичная матрица порядка k, а O — нулевая матрица.

1) $\begin{pmatrix} E & B \\ O & C \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} B & O \\ C & E \end{pmatrix}$.

71. Векторы, относящиеся к собственному значению 1, — это $(1, 1, \ldots, 1)$ и все ему коллинеарные (ненулевые).

72. 1) Собственные векторы, относящиеся к собственному значению 1, — это $(1, 1, \ldots, 1)$ и все ему коллинеарные (ненулевые). Собственные векторы, относящиеся к собственному значению 0, — это все ненулевые векторы, компоненты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

2) Собственные векторы, относящиеся к собственному значению $\alpha + \beta(n-1)$, — это $(1, 1, \ldots, 1)$ и все ему коллинеарные (ненулевые). Собственные векторы, относящиеся к собственному значению $\alpha - \beta$, — это все ненулевые векторы, компоненты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

3) Собственные векторы, относящиеся к собственному значению $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n$, — это $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и все ненулевые, ему коллинеарные. Собственные векторы, относящиеся к собственному значению 0, — это все ненулевые векторы, компоненты которых удовлетворяют уравнению $\beta_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \beta_1 x_n = 0$.

74. 1) $\lambda - a_{11}$;

2) $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A$;

3) $\lambda^3 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \cdot \lambda - \det A$.

79. *Указание:* можно воспользоваться теоремой Бине–Коши и результатом задачи 75.

82. 1) $\lambda^n - \lambda^{n-1}$.

2) $\big(\lambda - \alpha - (n-1)\beta\big)\,(\lambda - \alpha + \beta)^{n-1}$. *Указание:* использовать задачу **??** (**??**).

3) $\lambda^n - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n)\lambda^{n-1}$.

84. λ^{n+1}.

85. $\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1$.

86. $\lambda^3 + |a|^2\lambda$.

87. Характеристический многочлен равен $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\ldots(\lambda - a_{nn})$. Собственные числа — $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

90. Для каждого преобразования приведены собственные числа матрица Q перехода к собственному базису и матрица B преобразования в этом базисе. Для каждого собственного числа λ_j

указаны его алгебраическая кратность k_j и геометрическая кратность d_j.

1) $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $k_2 = 1$, $d_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $k_3 = 1$, $d_3 = 1$,
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) а) $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 1$, $d_1 = 1$. Преобразование не диагонализируемо в вещественном пространстве.

б) $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $k_2 = 1$, $d_2 = 1$, $\lambda_3 = -i$, $k_3 = 1$, $d_3 = 1$,
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{pmatrix}.$$

3) а) $\lambda_1 = 1$, $k_1 = 1$, $d_1 = 1$. Преобразование не диагонализируемо в вещественном пространстве.

б) $\lambda_1 = 1$, $k_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+i$, $k_2 = 1$, $d_2 = 1$, $\lambda_3 = 1-i$, $k_3 = 1$, $d_3 = 1$,
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $k_2 = 2$, $d_2 = 2$,
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) $\lambda_1 = 3$, $k_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $k_2 = 2$, $d_2 = 2$,
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6) $\lambda_1 = 1$, $k_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $k_2 = 2$, $d_2 = 1$,
Характеристический многочлен $(\lambda-1)(\lambda+1)^2$. Собственному числу 1 относятся собственные векторы $t \cdot (1,1,1)$. Собственному числу -1 относятся собственные векторы $t \cdot (0,1,1)$. Преобразование не диагонализируемо ни в вещественном, ни в комплексном пространстве.

7) $\lambda_1 = 3$, $k_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $k_2 = 2$, $d_2 = 1$,
Характеристический многочлен $(\lambda-3)(\lambda-2)^2$. Собственному числу 3 относятся собственные векторы $t \cdot (1,-1,1)$. Собственному числу 2 относятся собственные векторы $t \cdot (0,1,-1)$. Преобразование не диагонализируемо ни в вещественном, ни в комплексном пространстве.

91. Собственное число 2; собственный вектор 1. Преобразование не диагонализируемо.

92. Собственное число -1; собственные векторы e^t и te^t. Преобразование не диагонализируемо.

93. 1) Собственных векторов нет. Преобразование не диагонализируемо.

2) Собственное число -1; собственные векторы $\cos t$ и $\sin t$. Преобразование не диагонализируемо.

94. 1) Собственное число 1; собственные векторы 1, $2x - y$, $4x^2 - 4xy + y^2$. Преобразование не диагонализируемо.

2) Собственное число 0; собственные векторы 1, x, y, xy, $x^2 - y^2$. Преобразование не диагонализируемо.

95. К собственному числу 1 относятся собственные «векторы» $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. К собственному числу 2 относятся собственные «векторы» $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Преобразование диагонализируемо.

96. $f(\varepsilon^k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, где ε — первообразный корень n-й степени из 1 и $f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$. *Указание:* Использовать задачу (**??**).

97. Жорданова клетка имеет единственное собственное число λ. Его алгебраическая кратность равна n, а геометрическая — равна 1. Матрица подобна диагональной только при $n = 1$.

98. Диагонализируемо, если $n = 0$. Нет в противном случае.

99. Преобразование с матрицей $\mathrm{diag}(\lambda E_{d-1}, J_{k-d+1}(\lambda), \mu E_{n-k})$, $\lambda \neq \mu$.

107. 3) Пусть x — собственный вектор преобразования φ (базисный вектор одномерного инвариантного пространства), а λ — соответствующее ему собственное число. Согласно задаче 104 пространство $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon)$ является инвариантным относительно φ. Любое $(n-1)$-мерное подпространство, содержащее $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda\varepsilon)$, также является инвариантным.

108. 1) Каждое подпространство является инвариантным.

2) Если α не кратно π, то инвариантными подпространствами являются только нульмерное подпространство и вся геометрическая плоскость. Если α кратно π, то любое подпространство инвариантно.

3) Если α не кратно π, то инвариантными подпространствами являются нульмерное подпространство, прямая ℓ, плоскость, проходящая через полюс, ортогональная этой прямой, и все пространство. Если $\alpha = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то инвариантными подпространствами являются также любая прямая, ортогональная ℓ, проходящая через полюс. Если $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то любое подпространство инвариантно.

4) Для любого $k \leq n$ пространство многочленов степени не выше k, включая нульмерное подпространство, является инвариантным.

5) $W_1 + W_2$, где W_1 — произвольное подпространство в V_1, W_2 — произвольное подпространство в V_2.

6) $W_1 + W_2$, где W_1 — произвольное подпространство в V_1, W_2 — произвольное подпространство в V_2.

109. 2^n инвариантных подпространств. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис из собственных векторов, тогда ненулевые инвариантные подпространства натянуты на всевозможные подсистемы, составленные из векторов этого базиса.

110. Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_k$ — все собственные подпространства (относящиеся к разным собственным числам). Тогда любое инвариантное подпространство имеет вид $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$, где W_j — произвольное подпространство в V_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

111. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис, в котором построена матрица преобразования, тогда ненулевые инвариантные подпространства натянуты на всевозможные системы $e_1, e_2, \ldots, e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

112. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, f_2, \ldots, f_k$ — базис, в котором построена матрица преобразования, тогда инвариантные подпространства натянуты на всевозможные системы $e_1, e_2, \ldots, e_i, f_1, f_2, \ldots, f_j$ $(i = 0, 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, \ldots, k)$ (предполагается, что подпространство, натянутое на пустую систему, — нулевое).

117. 1) λ. 2) $\lambda - 1$. 3) $\lambda - \lambda_0$.

4) Если α не кратно π, то $\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1$. Если $\alpha = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\lambda + 1$. Если $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\lambda - 1$.

5) Если α не кратно π, то $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1)$. Если $\alpha = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\lambda^2 - 1$. Если $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\lambda - 1$.

6) λ^{n+1}.

7) $\lambda^2 - \lambda$.

8) $\lambda^2 - 1$.

118. 1) $(\lambda - 1)^3$;
2) $(\lambda + 1)^2$;
3) $(\lambda - 2)^2$;

4) $(\lambda-1)(\lambda-2)$.

120. 4) $\begin{pmatrix} J_s(\lambda) & B \\ O & C \end{pmatrix}$, где $J_s(\lambda)$ — жорданова клетка порядка s, O — нулевая матрица.

121. Для каждой матрицы A указана ее жорданова форма J и трансформирующая матрица Q, такие, что $J = Q^{-1}AQ$.

1) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$

2) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

3) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

4) $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$

5) $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -9 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

6) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

7) $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

8) $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

9) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$

10) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

11) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$$12)\ J=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&4&4&1\\0&0&2&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$13)\ J=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&1&1&-1\\0&1&1&-1&1\\1&1&-1&-2&2\end{pmatrix}.$$

124. 1) Матрицы подобны, $Q=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$.

2) Матрицы не подобны, так как их жордановы формы различны:

$$J_A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},\quad J_B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

125. С точностью до перестановок жордановых клеток жорданова форма может иметь указанный ниже вид:

1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$

126. 1) Жорданова форма представляет собой одну жорданову клетку $J_{n+1}(0)$. Жорданов базис, например, образует система

$$1, t, \frac{1}{2!}t^2, \dots, \frac{1}{n!}t^n.$$

2) Пусть $n = 2k$ четно. Жорданова форма содержит две клетки $J_{k+1}(0)$, $J_k(0)$. Жорданов базис, например, образует система

$$1, \frac{1}{2!}t^2, \dots, \frac{1}{n!}t^n,\ t, \frac{1}{3!}t^3, \dots, \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}.$$

Аналогично для нечетного n.

127. $J_n(\lambda)$.

128. 1) Из каждого диагонального элемента матрицы J вычесть λ.

2) Каждый диагональный элемент матрицы J заменить на обратный.

3) Каждую клетку, относящуюся к $\lambda \neq 0$, заменить на клетку, относящуюся к λ^2. Каждую клетку порядка m, относящуюся к $\lambda = 0$, при четном $m = 2k$ заменить двумя равными клетками порядка k, а при нечетном $m = 2k + 1$ заменить клеткой порядка k и клеткой порядка $k + 1$.

129. 1) $(\lambda - \lambda_0)^n$;
2) $(\lambda - \lambda_0)^m$, где $m = \max\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$;
3) $(\lambda - \lambda_1)^m(\lambda - \lambda_2)^k$, где $m = \max\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$, $k = \max\{k_1, k_2, \dots, k_t\}$.

130. *Указание:* проверить, что жорданова матрица является корнем характеристического многочлена.

132. *Указание:* Выяснить вид минимального многочлена. По минимальному многочлену выяснить вид жордановой формы.
1) Жорданова форма — диагональная матрица с нулями и единицами на диагонали. Это преобразование проектирования.
2) Жорданова форма — диагональная матрица с ± 1 на диагонали. Это преобразование отражения.

142. 1) $\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{2000} - 2 & 2^{2000} - 1 \\ -6 \cdot 2^{2000} + 6 & -2 \cdot 2^{2000} + 3 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 2001 & -2000 \\ 2000 & -1999 \end{pmatrix}$;

3) $\pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$; 4) $\pm\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 3e & -4e \\ 1e & -1e \end{pmatrix}$;

6) $\frac{1}{e}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -8 & -2 & -6 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.