

Глава 6

Векторная алгебра

6.1 Линейные операции

1. Доказать, что векторы $(1, 2)$ и $(2, -3)$ образуют базис на плоскости. Найти в этом базисе координаты векторов $(5, 3)$ и $(-4, 6)$.
2. Доказать, что векторы $(1, 2, -3)$, $(1, -2, 0)$, $(1, 0, 1)$ образуют базис пространства. Найти в этом базисе координаты векторов $(2, 4, -1)$ и $(3, 2, -1)$.
3. Пусть a, b, c — три некопланарных вектора. Будут ли некопланарными векторы d, e, f (в случае отрицательного ответа один из векторов выразить через остальные):
 - 1) $d = a + 2b + c$, $e = -2a + 2b + 4c$, $f = a + 2b + 3c$;
 - 2) $d = a + 2b - 3c$, $e = 2a - b + 4c$, $f = 7a + 4b - c$?
4. На плоскости задан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Определить координаты вершин и центра этого шестиугольника, если в качестве начала системы координат выбрана точка A , а в качестве базиса взяты векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$.
5. На плоскости или в пространстве заданы три точки A, B, C . Доказать, что
 - 1) для того, чтобы точка C лежала на прямой AB необходимо и достаточно, чтобы для некоторых чисел α, β , таких, что $\alpha + \beta = 1$, выполнялось соотношение $\overrightarrow{OC} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$;
 - 2) для того, чтобы точка C принадлежала отрезку AB необходимо и достаточно, чтобы для некоторых чисел α, β , таких, что $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, выполнялось соотношение $\overrightarrow{OC} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$. В каком соотношении точка C делит отрезок AB ?
6. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Найти координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
7. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиус-векторы вершин треугольника. Найти радиус-вектор пересечения медиан этого треугольника. Получить отсюда, что центр тяжести треугольника с равномерно распределенной по его площади массой совпадает с центром тяжести системы из трех равных масс, расположенных в вершинах

этого треугольника. (Для произвольного n -угольника при $n > 3$ аналогичное утверждение в общем случае неверно.)

8. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины.
9. Доказать, что из медиан произвольного многоугольника можно составить параллельным переносом новый треугольник.
10. В пространстве задан треугольник ABC .
 - 1) Найти точку M , такую, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = o$.
 - 2) Найти точку M , такую, что $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = o$.
11. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Доказать, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении $3 : 1$, считая от вершины.
12. Бимедианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер. Доказать, что все три бимедианы произвольного тетраэдра пересекаются в точке пересечения медиан тетраэдра и делятся этой точкой пополам.
13. В пространстве задан тетраэдр $ABCD$. Найти точку M , такую, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = o$.
14. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Доказать, что вектор

$$\ell = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$$

коллинеарен вектору $\overrightarrow{AD}$. Выразить $\overrightarrow{AD}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

15. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Из результата предыдущей задачи вывести, что

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

16. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиус-векторы вершин треугольника. Найти радиус-вектор центра вписанной в треугольник окружности.
17. Пусть в точках A и B сосредоточены массы m_1 и m_2 соответственно. Из механики известно, что центр тяжести такой материальной системы расположен в точке M , лежащей на отрезке AB и делит его в отношении $m_2 : m_1$. Выразить вектор $\overrightarrow{OM}$ через $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.
18. В точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ расположены массы $m_1, m_2, \dots, m_n$ соответственно. Центром тяжести этой материальной системы называется точка M с радиус-вектором

$$r_M = \frac{m_1 \cdot r_{A_1} + m_2 \cdot r_{A_2} + \dots + m_n \cdot r_{A_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Доказать, что центр тяжести M и только он удовлетворяет условию $m_1 \overrightarrow{MA_1} + m_2 \overrightarrow{MA_1} + \dots + m_n \overrightarrow{MA_n} = 0$.

19. Доказать, что если имеется две системы материальных точек, то центр тяжести объединенной системы можно получить, сосредоточив суммарную массу каждой системы в ее центре тяжести, и найдя центр тяжести полученной системы двух материальных точек.
20. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — фиксированные точки, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — фиксированные числа. Выберем произвольную точку X и зададим точку P равенством $\overrightarrow{XP} = \alpha_1 \overrightarrow{XA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{XA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{XA_n}$. Доказать, что положение точки P не зависит от положения X тогда и только тогда, когда $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.
21. Найти центр тяжести однородной пластины, имеющей форму трапеции с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$.
22. Найти центр тяжести однородной пластины, имеющей форму выпуклого пятиугольника с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$.
23. Однородная проволока согнута в виде прямого угла AOB . Найти координаты ее центра тяжести в системе координат O, OA, OB .
24. Даны середины сторон треугольника $(2, 6)$, $(5, 12)$, $(4, 7)$. Найти вершины треугольника.
25. Две вершины треугольника — точки $A(-1, -3)$, $B(4, -1)$. Третья вершина C лежит на оси ординат, а точка пересечения медиан M — на оси абсцисс. Найти координаты точек C и M .
26. Две смежные вершины параллелограмма $(-2, 4)$, $(3, 7)$ и точка пересечения диагоналей $(1, 3)$. Найти две другие вершины параллелограмма.
27. Найти отношение, в котором координатная плоскость Oxy делит отрезок AB , если $A(2, 1, -4)$, $B(-1, 1, 8)$.
28. Найти координаты концов отрезка, который точками $(-1, 2, 0)$, $(2, 1, -4)$ делится на 3 равные части.
29. (р) *Теорема о средней линии трапеции.* Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям, а ее длина равна полусумме оснований.
30. (р) *Теорема, обратная теореме о средней линии трапеции.* Пусть точки M, N являются серединами сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$ (на плоскости или в пространстве), причем $|MN| = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|)$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция.
31. Прямая отсекает от смежных сторон параллелограмма одну треть и одну четверть, считая от общей вершины. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали, выходящей из этой вершины?
32. (р) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N , так, что $|AM|/|MB| = \mu$, а $|AN|/|NC| = \nu$. Пусть O — точка пересечения отрезков BN и CM . Найти координаты вектора $\overrightarrow{AO}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
33. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N , так, что $|AM|/|AB| = \mu$, а $|BN|/|BC| = \nu$. Пусть P — точка пересечения

отрезков AN и CM . Площадь треугольника ABC равна S . Найти площадь треугольника AMP .

34. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки M , N и P , так, что $|AM|/|AB| = |BN|/|BC| = |CP|/|CA| = \lambda$. Площадь треугольника ABC равна S . Найти площадь треугольника, получающегося пересечением прямых AM , BN , CP . Какой вывод можно сделать, положив $\lambda = 1/2$?

6.2 Скалярное произведение

В этом разделе, если не оговорено противное, предполагается, что координаты точек и векторов заданы в некоторой прямоугольной системе координат.

35. *Обобщение основного тригонометрического тождества.* Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует со смежными ребрами углы α , β , γ . Доказать, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
36. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если
- 1) $A(-2, 6)$, $B(1, 2)$;
 - 2) $A(1, -2, 6)$, $B(0, -1, 1)$;
37. Найти $\angle ABC$, если
- 1) $A(2, 5)$, $B(1, 2)$, $C(3, 3)$;
 - 2) $A(2, 5, 1)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 3, 1)$;
38. Найти $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, если
- 1) $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|AC| = 5$;
 - 2) $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 7$.
39. Доказать, что вектор $b(a, c) - c(a, b)$ ортогонален вектору a .
40. Даны две противоположные вершины квадрата $(1, 2)$ и $(3, -2)$. Найти две другие вершины квадрата.
41. Даны две смежные вершины квадрата $(2, 3)$ и $(1, -4)$. Найти две другие вершины квадрата.
42. *Равенство параллелограмма.* Доказать равенство $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$ и выяснить его геометрический смысл.
43. (р) На плоскости выбрана система координат O, e_1, e_2 , причем $|e_1| = \sqrt{3}$, $|e_2| = 1$ и $\angle(e_1, e_2) = 5\pi/6$. Найти длины векторов $a(1, 2)$, $b(-2, 2)$ и угол между ними.
44. В пространстве выбрана система координат O, e_1, e_2, e_3 , причем $|e_1| = 1$, $|e_2| = |e_3| = 2$ и $\angle(e_1, e_2) = \pi/3$, $\angle(e_1, e_3) = 2\pi/3$, $\angle(e_2, e_3) = \pi/3$. Найти длины векторов $a(1, 2, -2)$, $b(2, 0, -1)$ и угол между ними.
45. Пусть AM — медиана, а S — площадь треугольника ABC . Доказать:
- 1) $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (теорема косинусов);
 - 2) $2 \cdot |AM|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 + 2 \cdot (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$;
 - 3) $4 \cdot S^2 = |AB|^2 \cdot |AC|^2 - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})^2$.

46. (р) На плоскости или в пространстве даны два вектора a и b , причем $b \neq 0$. Представить вектор a в виде суммы двух векторов x и y , таких, что x коллинеарен вектору b , а y — ортогонален ему. Вектор x называется *ортогональной проекцией* вектора a на вектор b (или на направление b) и обозначается $\text{pr}_b a$, а y — *ортогональной составляющей* вектора a относительно b и обозначается $\text{ort}_b a$. А именно, доказать, что

$$\text{pr}_b a = \frac{(a, b)}{(b, b)} b, \quad \text{ort}_b a = a - \frac{(a, b)}{(b, b)} b.$$

47. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $a(1, 2, -2)$ на $b(0, 1, -2)$.
48. Найти ортогональную проекцию вектора $(-1, 1, -3)$ на плоскость, перпендикулярную вектору $(1, 1, 2)$.
49. В треугольнике ABC проведена высота AH . Найти координаты вектора $\overrightarrow{AH}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
50. В треугольнике ABC найти длину высоты AH и координаты точки H , если $A(0, 1, -1)$, $B(1, 5, 0)$, $C(4, -1, -6)$.
51. Доказать, что все три высоты треугольника пересекаются в одной точке.
52. В треугольнике ABC найти длину биссектрисы AM и координаты точки M , если $A(1, -2, 2)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-5, 6, 4)$.
53. Найти вектор единичной длины, ортогональный векторам $(1, 2, -4)$ и $(2, 1, -2)$. Сколько решений имеет задача?
54. Найти вектор единичной длины, ортогональный вектору $(1, -2, 0)$ и составляющий с вектором $(-2, 2, 1)$ угол $\arccos(1/3)$. Сколько решений имеет задача?
55. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, перпендикулярны. Найти углы треугольника.
56. Смежные стороны параллелограмма равны a и b а угол между ними равен α . Найти угол между диагоналями параллелограмма.
57. Основания прямоугольной трапеции равны a и b , причем $a > b$, а диагонали перпендикулярны. Найти длины боковых сторон и острый угол трапеции.
58. Доказать, что если в треугольнике равны две высоты, две медианы или две биссектрисы, то треугольник равнобедренный.
59. Найти длину диагонали параллелепипеда, выходящей из вершины O , если известны длины ребер параллелепипеда, выходящих из этой вершины: $OA = \sqrt{2}$, $OB = 3$, $OC = \sqrt{2}$, и углы между ними: $\angle AOB = \pi/3$, $\angle AOC = \pi/6$, $\angle BOC = \pi/4$.
60. Дан произвольный тетраэдр $ABCD$.
- 1) Доказать, что $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 0$.
 - 2) В тетраэдре $ABCD$ перпендикулярны ребра AB и CD и ребра AC и BD . Доказать тогда, что ребра AD и BC также перпендикулярны.

6.3 Векторное и смешанное произведения

61. Найти $[a, b]$, если $a(1, 2, 3)$, $b(3, 4, 2)$.
62. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если $A(3, 2, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(-2, 1, 2)$.
63. (р) Найти площадь треугольника ABC , если $A(1, 2, 1)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-2, 0, 3)$.
64. Найти площадь треугольника ABC , если $A(2, 0)$, $B(3, 2)$, $C(5, -1)$.
65. В параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ найти угол между основанием $ABCD$ и диагональю AC' , если $A(3, -2, -1)$, $B(4, 0, 2)$, $C(5, 1, 3)$, $C'(4, -4, -2)$.
66. (р) Найти смешанное произведение векторов $(1, 3, -4)$, $(-2, -1, 0)$, $(2, 3, -1)$.
67. Найти объем треугольной призмы $ABCA'B'C'$, если $A(2, 1, 1)$, $B(1, 3, 2)$, $C(4, 4, 3)$, $A'(3, -2, 4)$.
68. Найти объем тетраэдра $ABCD$, если $A(3, 2, -1)$, $B(1, 3, 2)$, $C(2, 3, -1)$, $D(2, -1, 1)$.
69. В пространстве задана аффинная система координат O, e_1, e_2, e_3 , причем объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах e_1, e_2, e_3 , равен 2. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $(1, 3, 2)$, $(1, 4, 3)$, $(1, 2, -3)$.
70. Найти объем и длину высоты DH тетраэдра $ABCD$, если
 - 1) $A(1, -4, 2)$, $B(2, -2, 0)$, $C(2, -4, 4)$, $D(2, -3, 1)$;
 - 2) $A(1, 0, -1)$, $B(3, 1, -1)$, $C(3, 2, 0)$, $D(4, -5, 0)$.
71. Векторы a, b, c не компланарны. При каких значениях λ
 - 1) векторы $a + 2b + 3c$, $3a + \lambda b + 4c$, $a + 2b + \lambda c$ компланарны;
 - 2) векторы $(\lambda - 3)a + 2b - c$, $2a + (\lambda - 1)b$, $4a + 4b + \lambda c$ компланарны?
72. Выразить площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC , через площадь S треугольника ABC (см. 9).
73. Пусть A', B', C' — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC . Выразить площадь треугольника $A'B'C'$ через площадь S треугольника ABC .
74. Пусть A', B', C', D' — точки пересечения медиан граней BCD, ACD, ABD, ABC тетраэдра $ABCD$. Выразить объем тетраэдра $A'B'C'D'$ через объем V тетраэдра $ABCD$.
75. Ко всем сторонам простого многоугольника построены внешние нормали, равные по длине длинам соответствующих сторон. Совокупность таких нормалей называется *ежом* многоугольника. Доказать, что сумма векторов ежа произвольного простого многоугольника равна нулевому вектору.
76. Ко всем граням многогранника построены внешние нормали, равные по длине площадям соответствующих сторон. Совокупность таких нормалей называется *ежом* многогранника. Доказать, что векторы ежа любого тетраэдра а) не компланарны; б) в сумме равны нулевому вектору. Это утверждение можно обобщить на произвольный многогранник, разбив его на тетраэдры. *Теорема Г. Минковского* утверждает, что для произвольной системы ненулевых векторов, удовлетворяющих свойствам а) и б) существует многогранник, для которого эта система является ежом. Этот многогранник единственен с точностью до параллельного переноса.

77. Доказать тождества (для произвольных векторов a, b, c, x, y, z):

1) $[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$

($[a, [b, c]]$ называется *двойным векторным произведением*);

2) $(a, b, c)x = (x, b, c)a + (x, c, a)b + (x, a, b)c$;

3) $(a, b, c)(x, y, z) = \begin{vmatrix} (a, x) & (a, y) & (a, z) \\ (b, x) & (b, y) & (b, z) \\ (c, x) & (c, y) & (c, z) \end{vmatrix}$;

4) $([a, b], [x, y]) = \begin{vmatrix} (a, x) & (a, y) \\ (b, x) & (b, y) \end{vmatrix}$;

5) $(a, b, c)[x, y] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ (a, x) & (b, x) & (c, x) \\ (a, y) & (b, y) & (c, y) \end{vmatrix}$.

78. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b , равна

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (a, a) & (a, b) \\ (b, a) & (b, b) \end{vmatrix}}.$$

79. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c , равен

$$V = \sqrt{\begin{vmatrix} (a, a) & (a, b) & (a, c) \\ (b, a) & (b, b) & (b, c) \\ (c, a) & (c, b) & (c, c) \end{vmatrix}}.$$

80. Найти объем тетраэдра $ABCD$, если $|AB| = \sqrt{2}$, $|AC| = \sqrt{3}$, $|AD| = 2$, $\angle COD = \pi/6$, $\angle BOD = \pi/4$, $\angle BOC = \pi/3$.

81. Вычислить объем параллелепипеда, зная длины $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$ его ребер, выходящих из одной вершины O , и углы между ними $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle AOB = \gamma$.

82. Найти двугранные углы трехгранного угла, если его плоские углы равны α , β , γ .

83. Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC равна $3/4$ от площади треугольника ABC .

84. Через точку M , лежащую на стороне AB треугольника ABC , проведена прямая, параллельная BC , до пересечения со стороной AC в точке N . В каком отношении точка N делит отрезок AC , если площадь треугольника ABC в $9/2$ раз больше площади треугольника BMN ?

85. Высота равнобедренной трапеции равна h . Чему равна ее площадь, если диагонали трапеции взаимно перпендикулярны?

86. Точка M — середина ребра AA' параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$. Прямые BD , MD' , $A'C$ попарно перпендикулярны. Найти высоту параллелепипеда, если $|BD| = 2a$, $|A'C| = 4a$, $|BC| = 3a/2$.
87. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины противоположных ребер произвольного тетраэдра, делит его на две равные по объему части.
88. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены два сечения, параллельные ребрам AB и CD . Найти длину ребра тетраэдра, если площади сечений равны S_1 и S_2 , а расстояние между секущими плоскостями равно d .
89. Доказать, что все четыре грани произвольного тетраэдра равновелики (т. е. имеют одинаковые площади) тогда и только тогда, когда они равны.

Контрольная работа

1. В пирамиде $ABCD$ найти

- площадь основания ABC ;
- объем пирамиды;
- высоту пирамиды DH ;
- угол между ребром AD и плоскостью основания ABC ;
- написать уравнение плоскости ABC ;
- написать уравнение прямой DH ;
- найти основание H перпендикуляра;
- найти расстояние между точками D и H и сравнить его с найденным в п. (в).

- $A(-1, 5, -5)$, $B(2, 9, -3)$, $C(2, 9, 1)$, $D(0, 7, -6)$;
- $A(-2, 1, 4)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 4, 4)$, $D(1, 5, 3)$;
- $A(-2, 0, -3)$, $B(-2, 1, -2)$, $C(0, 1, -1)$, $D(-4, -3, 0)$;
- $A(-4, -1, -2)$, $B(-4, 0, -1)$, $C(-2, 1, -1)$, $D(-1, 2, 2)$;
- $A(3, 1, -3)$, $B(5, 4, 1)$, $C(9, 4, 1)$, $D(4, 2, 1)$;
- $A(0, -3, 5)$, $B(2, 1, 2)$, $C(6, 1, 2)$, $D(-3, 1, 0)$;
- $A(3, 3, 2)$, $B(1, -1, 5)$, $C(-3, -1, 5)$, $D(-1, 3, -2)$;
- $A(-4, 2, -2)$, $B(1, -1, -6)$, $C(-5, -1, -2)$, $D(-6, 7, 2)$;
- $A(5, 2, -1)$, $B(2, 0, -2)$, $C(5, 3, -2)$, $D(4, 2, 1)$;

10. $\mathcal{A}(4, -5, 0), \mathcal{B}(1, -3, 3), \mathcal{C}(2, -2, 2), \mathcal{D}(-1, -4, -1);$
11. $\mathcal{A}(4, 0, -1), \mathcal{B}(7, 4, 4), \mathcal{C}(1, -4, 1), \mathcal{D}(0, 0, -1);$
12. $\mathcal{A}(-3, -1, 2), \mathcal{B}(-1, 1, 2), \mathcal{C}(-5, -5, 3), \mathcal{D}(-5, -6, 5);$
13. $\mathcal{A}(1, 1, -1), \mathcal{B}(1, 1, -2), \mathcal{C}(-3, 1, 3), \mathcal{D}(5, -1, -4);$
14. $\mathcal{A}(2, -3, 2), \mathcal{B}(-2, -1, -2), \mathcal{C}(-2, -2, 0), \mathcal{D}(4, -1, 3);$
15. $\mathcal{A}(-1, -2, 3), \mathcal{B}(-3, -7, 7), \mathcal{C}(1, 2, 0), \mathcal{D}(3, 1, 4);$
16. $\mathcal{A}(1, 1, -1), \mathcal{B}(-3, 6, 2), \mathcal{C}(-3, 1, -3), \mathcal{D}(2, -2, 0);$
17. $\mathcal{A}(0, -4, 2), \mathcal{B}(-2, -2, 2), \mathcal{C}(-1, -3, 5), \mathcal{D}(1, -3, 3);$
18. $\mathcal{A}(-1, -5, 4), \mathcal{B}(0, -4, 4), \mathcal{C}(1, -4, 6), \mathcal{D}(-5, -8, 1);$
19. $\mathcal{A}(-3, -2, 0), \mathcal{B}(-3, -3, -1), \mathcal{C}(-1, -4, -1), \mathcal{D}(-2, -1, 1);$
20. $\mathcal{A}(-1, -3, 4), \mathcal{B}(-1, -4, 5), \mathcal{C}(1, -5, 5), \mathcal{D}(-2, -5, 8);$
21. $\mathcal{A}(0, 1, -3), \mathcal{B}(0, 2, -2), \mathcal{C}(2, 3, -2), \mathcal{D}(-5, 5, -1);$
22. $\mathcal{A}(-5, 5, -3), \mathcal{B}(-4, 4, 0), \mathcal{C}(-5, 5, 1), \mathcal{D}(-6, 4, 2);$
23. $\mathcal{A}(3, 3, 2), \mathcal{B}(4, 1, 4), \mathcal{C}(3, 4, 0), \mathcal{D}(-1, 3, 1);$
24. $\mathcal{A}(-4, 3, -2), \mathcal{B}(-6, 3, 0), \mathcal{C}(0, 5, -7), \mathcal{D}(-2, 2, -3);$
25. $\mathcal{A}(-1, 3, 2), \mathcal{B}(0, 0, 3), \mathcal{C}(1, 2, 5), \mathcal{D}(1, 2, 2);$
26. $\mathcal{A}(-1, 0, -5), \mathcal{B}(-2, 4, -10), \mathcal{C}(-1, 2, -8), \mathcal{D}(-3, -3, -7);$
27. $\mathcal{A}(5, -4, 1), \mathcal{B}(5, -5, 4), \mathcal{C}(4, -4, 3), \mathcal{D}(9, -6, 3);$
28. $\mathcal{A}(-1, 4, -1), \mathcal{B}(-1, 7, -3), \mathcal{C}(-1, 5, 3), \mathcal{D}(-4, 6, 0);$
29. $\mathcal{A}(-1, 3, -3), \mathcal{B}(-1, -1, 1), \mathcal{C}(3, 2, 0), \mathcal{D}(-5, 4, -5);$
30. $\mathcal{A}(4, -4, -3), \mathcal{B}(-1, -4, -4), \mathcal{C}(0, -4, -3), \mathcal{D}(5, -1, -1);$
31. $\mathcal{A}(-1, -3, 3), \mathcal{B}(-1, 2, 6), \mathcal{C}(-1, -5, -1), \mathcal{D}(1, -3, 0).$

2. Найти объем параллелепипеда $\mathcal{ABCD}\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{D}'$ и длину его диагонали $\mathcal{AC}'$, если известны длины $|\mathcal{AB}| = a$, $|\mathcal{AD}| = b$, $|\mathcal{AA}'| = c$ и углы $\angle \mathcal{DAA}' = \alpha$, $\angle \mathcal{BAD} = \beta$, $\angle \mathcal{BAA}' = \gamma$, причем

1. $a = \sqrt{2}, b = 3, c = 1, \alpha = 2\pi/3, \beta = 2\pi/3, \gamma = \pi/3;$
2. $a = 1, b = 2, c = 2, \alpha = \pi/4, \beta = \pi/3, \gamma = \pi/3;$

3. $a = \sqrt{3}, b = 1, c = \sqrt{3}, \alpha = \pi/3, \beta = \pi/3, \gamma = \pi/3;$
4. $a = \sqrt{3}/2, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{2}, \alpha = 2\pi/3, \beta = \pi/3, \gamma = 2\pi/3;$
5. $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}/2, c = \sqrt{2}, \alpha = \pi/4, \beta = 2\pi/3, \gamma = 2\pi/3;$
6. $a = \sqrt{2}/2, b = 2, c = \sqrt{2}, \alpha = 2\pi/3, \beta = \pi/4, \gamma = 2\pi/3;$
7. $a = \sqrt{2}, b = 1, c = 1, \alpha = 5\pi/6, \beta = 2\pi/3, \gamma = \pi/3;$
8. $a = 2, b = 2, c = 1, \alpha = \pi/3, \beta = \pi/6, \gamma = \pi/3;$
9. $a = 2, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{3}, \alpha = \pi/4, \beta = \pi/6, \gamma = \pi/6;$
10. $a = 1, b = 2, c = 3, \alpha = \pi/6, \beta = \pi/3, \gamma = \pi/4;$
11. $a = \sqrt{2}/2, b = 2, c = 3, \alpha = \pi/6, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/4;$
12. $a = 3, b = 2, c = 1, \alpha = 2\pi/3, \beta = 2\pi/3, \gamma = \pi/6;$
13. $a = 1, b = 2, c = 2, \alpha = \pi/4, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/4;$
14. $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2}/2, \alpha = \pi/3, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/4;$
15. $a = \sqrt{2}, b = 3, c = 3, \alpha = \pi/4, \beta = 2\pi/3, \gamma = 2\pi/3;$
16. $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{2}, \alpha = \pi/4, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/3;$
17. $a = 2, b = 3, c = \sqrt{3}, \alpha = \pi/3, \beta = \pi/3, \gamma = \pi/6;$
18. $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{3}, \alpha = 5\pi/6, \beta = \pi/4, \gamma = 5\pi/6;$
19. $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}, c = 1, \alpha = \pi/4, \beta = \pi/3, \gamma = \pi/4;$
20. $a = 3, b = 1, c = 2, \alpha = \pi/4, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/6;$
21. $a = 3, b = 1, c = \sqrt{3}/2, \alpha = 2\pi/3, \beta = \pi/3, \gamma = 2\pi/3;$
22. $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}, c = 2, \alpha = 2\pi/3, \beta = \pi/3, \gamma = 2\pi/3;$
23. $a = 3, b = 1, c = \sqrt{2}, \alpha = \pi/4, \beta = 2\pi/3, \gamma = 2\pi/3;$
24. $a = \sqrt{2}/2, b = 3, c = \sqrt{2}, \alpha = \pi/3, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/3;$
25. $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2}, \alpha = \pi/4, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/3;$
26. $a = 3, b = 3, c = 1, \alpha = \pi/3, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/3;$
27. $a = \sqrt{2}, b = 3, c = \sqrt{2}/2, \alpha = 2\pi/3, \beta = \pi/3, \gamma = 2\pi/3;$
28. $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}, c = 1, \alpha = \pi/6, \beta = \pi/6, \gamma = \pi/6;$

29. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$, $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/3$;

30. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$, $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/6$.

Ответы, указания, решения

1. $(3, 1); (0, -2)$.
2. $(1, -1, 2), (1, 0, 2)$.
3. 1) векторы некопланарны; 2) векторы компланарны: $f = 3d + 2e$.
4. Координаты вершин: $A(0, 0), B(1, 0), C(2, 1), D(2, 2), E(1, 2), F(0, 1)$. Координаты центра: $O(1, 1)$.
5. 2) $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{\beta}{\alpha}$.
6. $(1/2, 1/2)$.
7. $\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$.
10. 1) Единственной точкой, удовлетворяющей условиям, является точка пересечения медиан треугольника. *Указание:* Выразить радиус-вектор точки M через радиус-векторы вершин треугольника.
2) Радиус-вектор точки M можно выразить через радиус-векторы вершин треугольника:
$$r_M = \frac{1}{6}(r_A + 2r_B + 3r_C).$$
11. Радиус-вектор r точки пересечения медиан можно выразить через радиус-векторы вершин:
$$r = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4).$$
13. Точка M совпадает с точкой M из предыдущей задачи.
14. $\overrightarrow{AD} = \frac{|AC| \cdot \overrightarrow{AB} + |AB| \cdot \overrightarrow{AC}}{|AB| + |AC|}$ и координаты суть $\left(\frac{|AC|}{|AB| + |AC|}, \frac{|AB|}{|AB| + |AC|} \right)$.
16. $\frac{|r_1 - r_2| \cdot r_3 + |r_2 - r_3| \cdot r_1 + |r_3 - r_1| \cdot r_2}{|r_1 - r_2| + |r_2 - r_3| + |r_3 - r_1|}$.
17. $\overrightarrow{OM} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OA} + m_2 \cdot \overrightarrow{OB}}{m_1 + m_2}$.
21. Разобьем трапецию на части: квадрат с вершинами $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ и треугольник с вершинами $(0, 1), (1, 1), (0, 2)$. Квадрат имеет центр тяжести в точке $M(1/2, 1/2)$. Его площадь 1. Согласно 7 центр тяжести треугольника находится в точке $N(1/3, 4/3)$. Его площадь $1/2$. Центр тяжести всей пластины находится на отрезке MN и делит его пропорционально указанным площадям, т.е. в отношении $1/2$. Получаем, что координаты центра тяжести равны $(4/9, 7/9)$.
22. $\left(\frac{13}{15}, \frac{13}{15} \right)$.
23. $\left(\frac{|OA|/2}{|OA| + |OB|}, \frac{|OB|/2}{|OA| + |OB|} \right)$.
24. $(1, 1), (3, 11), (7, 13)$.
25. $C(0, 4), M(1, 0)$.
26. $(-1, -1), M(4, 2)$.

27. $1 : 2$.

28. $(5, 0, -8), (-4, 3, 4)$.

29. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD и средней линией MN . Пусть O — некоторая фиксированная точка. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}), \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Поэтому

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}),$$

откуда вытекает требуемое.

30. Как и в 29, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, но по условию задачи $|MN| = \frac{1}{2}(|AB| + |DC|)$. Таким

образом, неравенство треугольника выполняется как равенство, следовательно, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ — коллинеарные.

31. $1/7$.

32. Имеем

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\mu}{1+\mu} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{\nu}{1+\nu} \overrightarrow{AC},$$

и так как O лежит на отрезках BN и CM , то для некоторых α, β

$$\overrightarrow{AO} = \alpha \overrightarrow{AB} + (1-\alpha) \overrightarrow{AN} = \beta \overrightarrow{AC} + (1-\beta) \overrightarrow{AM}.$$

Подставляя сюда выражения для $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$, получаем

$$\overrightarrow{AO} = \alpha \overrightarrow{AB} + (1-\alpha) \frac{\nu}{1+\nu} \overrightarrow{AC} = (1-\beta) \frac{\mu}{1+\mu} \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}.$$

Так как координаты в базисе определены единственным образом, то

$$\begin{cases} \alpha = (1-\beta) \frac{\mu}{1+\mu}, \\ \beta = (1-\alpha) \frac{\nu}{1+\nu}. \end{cases}$$

Из этой системы находим $\alpha = \frac{\mu}{1+\mu+\nu}, \beta = \frac{\nu}{1+\mu+\nu}$.

33. $\frac{1-\nu}{\mu+\nu-\mu\nu} \mu^2 S$. *Указание:* Если треугольники имеют одинаковую высоту, но основание одного в λ раз больше другого, то площадь также будет в λ раз больше. Применить это вначале для треугольника ACM , затем для AMF .

34. $\frac{1-2\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1} S$. *Указание:* Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

36. 1) 5; 2) $3\sqrt{3}$.

37. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos \frac{3}{\sqrt{14}}$.

38. 1) 0; 2) -4 .

40. $(4, 1), (0, -2)$.

41. Два решения: $(-5, 4), (-6, -3)$ и $(9, 2), (8, -5)$.

42. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

43. Вначале находим $(e_1, e_1) = 3$, $(e_2, e_2) = 1$, $(e_1, e_2) = |e_1| |e_2| \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{3}{2}$. Теперь имеем:

$$(a, a) = (e_1 + 2e_2, e_1 + 2e_2) = (e_1, e_1) + 4(e_1, e_2) + 4(e_2, e_2) = 1, \text{ откуда } |a| = 1;$$

$$(b, b) = (-2e_1 + 2e_2, -2e_1 + 2e_2) = 28, \text{ откуда } |b| = 2\sqrt{7};$$

$$(a, b) = (e_1 + 2e_2, -2e_1 + 2e_2) = -2(e_1, e_1) - 2(e_1, e_2) + 4(e_2, e_2) = 1,$$

$$\text{откуда } \cos \angle(a, b) = \frac{(a, b)}{|a| |b|} = \frac{1}{2\sqrt{7}}, \text{ т. е. } \angle(a, b) = \arccos \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

44. $|a| = 5$, $|b| = 2\sqrt{3}$, $\angle(a, b) = \frac{\pi}{3}$.

45. 1) *Решение:* $|\overrightarrow{BC}|^2 = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) - 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{AC}|^2 - 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + |\overrightarrow{AB}|^2$.

46. Представим вектор a как $a = \alpha b + y$. Умножим скалярно это равенство на b , получим $(a, b) = \alpha(b, b) + (y, b)$. Учитывая, что $(y, b) = 0$, получаем $\alpha = (a, b)/(b, b)$, откуда

$$\text{pr}_b a = \alpha b = \frac{(a, b)}{(b, b)} b.$$

Указанные формулы можно получить другим способом. Пусть φ — угол между a и b . *Алгебраической величиной проекции* вектора a на вектор b называется число $|a| \cos \varphi$. Ортогональную проекцию вектора a на вектор b получаем, если умножить эту величину на вектор $b/|b|$, сонаправленный с b и имеющий единичную длину:

$$\text{pr}_b a = |a| \cos \varphi \frac{b}{|b|} = \frac{|a| |b| \cos \varphi}{|b|^2} b = \frac{(a, b)}{(b, b)} b.$$

Формула

$$\text{ort}_b a = a - \frac{(a, b)}{(b, b)} b$$

теперь получается из равенства $\text{pr}_b a + \text{ort}_b a = a$.

47. $\text{pr}_b a (0, 6/5, -12/5)$, $\text{ort}_b a (1, 4/5, 2/5)$.

48. $(0, -2, 1)$.

49. $\left(\frac{|b|^2 - (a, c)}{|a|^2}, \frac{|c|^2 - (a, b)}{|a|^2} \right)$, где $a = \overrightarrow{BC}$, $b = \overrightarrow{AC}$, $c = \overrightarrow{AB}$. *Указание:* Воспользоваться тем, что $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$ и $\overrightarrow{AH} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + (1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{AC}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ для некоторого α .

50. $\mathcal{H}(2, 3, -2)$, $|\mathcal{AH}| = 3$.

52. $\mathcal{M}(-5/3, 8/3, 0)$, $|\mathcal{AM}| = \frac{2\sqrt{74}}{3}$.

53. Два решения: $\pm(0, 2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

54. Два решения: $(0, 0, 1)$, $(-8/9, -4/9, 1/9)$.

55. Угол между боковыми сторонами равен $\arccos \frac{4}{5}$.

56. Острый угол равен $\left| \arccos \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \cos 2\alpha}} \right|$.

57. $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $\arccos(1 - b/a)$.

59. $3\sqrt{\sqrt{6} - 2}$. *Указание:* Представить квадрат длины диагонали в виде $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (ср. с 44).

61. $(-8, 7, -2)$.

62. $4\sqrt{2}$.

63. Находим $\overrightarrow{AB}(0, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC}(-3, -2, 2)$. Векторное произведение этих векторов равно

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + 6e_3.$$

Итак, координаты векторного произведения равны $(2, 3, 6)$. Площадь треугольника равна половине длины этого вектора: $\frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \frac{7}{2}$.

64. $\frac{7}{2}$.

65. $\arcsin(2/3)$. *Указание:* Вначале найти нормаль к основанию $ABCD$ и угол между нормалью и диагональю AC' .

66. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 2 + (-4) \cdot (-2) \cdot 3 - (-4) \cdot (-1) \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \cdot 3 = 11.$

67. 16.

68. $\frac{5}{3}$.

69. 2.

70. 1) Объем тетраэдра равен $V = \frac{1}{3}$, а площадь основания ABC равна $S = 3$, поэтому высота

$$DH \text{ равна } \frac{3V}{S} = \frac{1}{3}.$$

2) Объем тетраэдра равен $\frac{5}{2}$, площадь основания ABC равна $\frac{3}{2}$, высота DH равна 5.

71. 1) 3, 6; 2) 4.

72. $\frac{3}{4}S$.

73. $\frac{1}{4}S$.

74. $\frac{1}{27}V$. *Указание:* Принять за базис $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

80. $\frac{\sqrt{6\sqrt{6}-12}}{6}$.

81. $abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$.

82. $\arccos \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \arccos \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}, \arccos \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.

84. 1 : 2 или 2 : 1 (два решения).

85. h^2 .

86. $2\sqrt{2}a$.

88. $\sqrt{2\left(S_1 + S_2 + d^2 + \left(\frac{S_1 - S_2}{2d}\right)^2\right)}.$