3.1 Основные операции над многочленами

1. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных:
1) $(1+x)^{100}$;
2) $(2015x^{2015}-2016x^{2016})^{2017}\cdot(x^{2015}-x^{2016}+x^{2017})^{2018}$.

2. Многочлен $f(x)$ разделить с остатком на $g(x)$:
1) $f(x)=2x^4-3x^3-x^2+2x+1$, $g(x)=x^2-3x+3$;
2) $f(x)=x^3-2x^2+x+3$, $g(x)=3x^2-2x-1$;
3) $f(x)=x^3+px+q$, $g(x)=x^2+mx-1$;
4) $f(x)=x^4+px^2+q$, $g(x)=x^2+mx+1$.

3. Разделить с остатком $x^4-\dfrac{7}{2}a^2x^2+3a^2x-\dfrac{1}{2}a^4$ на многочлен $x^2-2ax+a^2$ (Задача из «Всеобщей арифметики» Ньютона).

4. С помощью схемы Горнера разделить $f(x)$ на $g(x)$:
1) $f(x)=x^4-2x^2+2x^3-2x+2$, $g(x)=x-2$;
2) $f(x)=x^4+(-1+i)x^3+(25-7i)x^2+(-33+16i)x+11-10i$, $g(x)=x-1+i$.

5. С помощью схемы Горнера разложить $f(x)$ по степеням $g(x)$:
1) $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+5x$, $g(x)=x+1$;
2) $f(x)=x^5$, $g(x)=x-1$;
3) $f(x)=x^4+4ix^3-4x^2-x^3-3ix^2+3x-3+i$, $g(x)=x+i$;
4) $f(x)=(x+1)^4-2(x+1)^3+2(x+1)^2-1$, $g(x)=x$;
5) $f(x)=(x-4)^4-2(x-4)^3+2(x-4)^2-(x-4)+1$, $g(x)=x-2$;
6) $f(x)=(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)-2(x+2)(x+1)x(x-1)+(x+2)(x+1)x-(x+2)(x+1)+3(x+2)-1$, $g(x)=x$.

6. С помощью схемы Горнера найти значение многочлена и его производных в точке 2:
1) $x^4-6x^3+10x^2+x-9$;
2) $x^4+(-8+i)x^3+(25-7i)x^2+(-35+16i)x+18-10i$,

7. Найти остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$:
1) $f(x)=1+x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$, $g(x)=x^2-1$;
2) $f(x)=1+x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$, $g(x)=x^2+1$;
3) $f(x)=1+x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$, $g(x)=x^4-1$;
4) $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $g(x)=x^3-x$.
5) $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $g(x)=x^2+2x+1$.

8. Многочлен $f(x)$ при делении на $x-1$ дает в остатке 1, при делении на $x-2$ дает в остатке 3, при делении на $x-3$ дает в остатке 5, при делении на $x-4$ дает в остатке 6. Какой остаток получится при делении $f(x)$ на $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$?

9. При каких условиях $f(x)$ делится на $g(x)$:
1) $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$, $g(x)=x^2+x+1$;
2) $f(x)=x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2}$, $g(x)=x^2-x+1$;
3) $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$, $g(x)=x^4+x^2+1$;

4) $f(x) = x^{2m} + x^m + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$;
5) $f(x) = (x+1)^m - x^m - 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$;
6) $f(x) = (x+1)^m + x^m + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$;
7) $f(x) = (x+1)^m - x^m - 1$, $g(x) = (x^2 + x + 1)^2$;
8) $f(x) = (x+1)^m + x^m + 1$, $g(x) = (x^2 + x + 1)^2$;
9) $f(x) = (x+1)^m - x^m - 1$, $g(x) = (x^2 + x + 1)^3$;
10) $f(x) = (x+1)^m + x^m + 1$, $g(x) = (x^2 + x + 1)^3$;
11) $f(x) = (\cos\alpha - x^2\sin\alpha)^n - \cos n\alpha + x^2 \sin n\alpha$, $g(x) = x^4 + 1$;

10. При каких a, b, c многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$ имеет -1 корнем не ниже третьей кратности?

11. При каких условия многочлен имеет кратный корень:
1) $x^3 + px + q$;
2) $x^4 + px + q$;
3) $x^5 + px + q$?

12. Показать, что трехчлен $x^n + px^m + q$, где $q \neq 0$, $m < n$ не может иметь корней выше второй кратности.

13. Показать, что кратность всякого ненулевого корня s-членного многочлена $a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \cdots + a_sx^{k_s}$, где $k_1 > k_2 > \cdots > k_s$, $a_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, s$), меньше s.

14. Показать, что многочлен

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

15. Найти кратность корня a многочлена

$$f(x) - (x-a)f'(a) - \cdots - (x-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

где $f(x)$ — многочлен степени n и $1 \leq k < n$.

16. Определить показатель кратности корня a многочлена

$$\frac{x-a}{2}\Big(f'(x) + f'(a)\Big) - f(x) + f(a),$$

где $f(x)$ — многочлен.

3.2 Наибольший общий делитель

17. Пусть $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, где $d(x)$ — НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Найти $d(x)$, $u(x)$, $v(x)$.
1) $f(x) = 2x^6 + x^5 + 15x^3 - 4x^4 + 5x^2 - 2x - 1$, $g(x) = 2x^4 + 5x^3 - x$;
2) $f(x) = 4x^5 - 23x^4 + 47x^3 - x^2 - 48x - 36$, $g(x) = 4x^3 - 15x^2 + 5x + 18$;

3) $f(x) = 4x^7-2x^6+4x^5-20x^3+9x^2-8x-2$, $g(x) = 4x^5-2x^4-2x^3+3x^2-12x+2$;
4) $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 27x^2 - 27x - 3$, $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 6x$;
5) $f(x) = x^3$, $g(x) = (1-x)^2$;
6) $f(x) = x^3$, $g(x) = (1-x)^4$;
7) $f(x) = x^3(x-1)^2(x-2)$, $g(x) = x^2(x-1)^3(x-3)$;
8) $f(x) = x^m$, $g(x) = (1-x)^n$.

18. Найти НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$:
1) $f(x) = x^m - 1$, $g(x) = x^n - 1$;
2) $f(x) = x^m + a^m$, $g(x) = x^n + a^n$.

19. Чему равен НОД многочленов $x^{2011} + x^3 - 2x^2 + 3$ и $x^3 - 2x^2 + 3$.

20. Найти наибольший общий делитель многочленов $u(x)$ и $v(x)$, если $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, где $d(x)$ — НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

21. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{1+2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$; 2) $\dfrac{1}{1-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$;

3) $\dfrac{1}{4-3\alpha+\alpha^2}$, если $1-3\alpha+\alpha^3=0$;

4) $\dfrac{1}{1+\alpha-2\alpha^2+\alpha^3}$, если $1-\alpha-3\alpha^2-2\alpha^3+\alpha^4=0$;

5) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; 6) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$.

22. Найти многочлены наименьшей степени $u(x)$ и $v(x)$, такие, чтобы
1) $(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 1)u(x) + (x^3 - 5x - 3)v(x) = x^4$;
2) $(x^4 + 2x^3 + x + 1)u(x) + (x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1)v(x) = x^3 - 2x$.

23. Найти многочлен наименьшей степени, дающий в остатке
1) $2x$ при делении на $(x-1)^2$ и $3x$ при делении на $(x-2)^3$;
2) $x^2 + x + 1$ при делении на $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$ и $2x^2 - 3$ при делении на $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 13x - 10$.

24. Отделить кратные множители:
1) $x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 12x + 4$;
2) $x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 13x^3 - 34x^2 + 28x - 8$;
3) $x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x - 1$;
4) $x^6 + x^4 + 3x^2 - 2x + 2$.

3.3 Разложение на линейные и квадратные множители

25. Указанные многочлены разложить на неприводимые множители а) над полем $\mathbb{C}$; б) над полем $\mathbb{R}$:
1) $x^3 + x + 2$;
2) $x^4 + 4$;

3) $x^4 - 10x^2 + 1$;
4) $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + 4$;
5) $x^4 + 4x^2 + 64$;
6) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 100$;
7) $x^4 + 2x^2 + 24x + 72$;
8) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$;
9) $x^4 + 8x^3 + 8x - 1$;
10) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
11) $x^6 - 1$;
12) $x^6 + 27$;
13) $x^4 - ax^2 + 1$ $(-2 < a < 2)$;
14) $x^{2n} - 1$;
15) $x^{2n+1} - 1$.

26. Указанные многочлены разложить на линейные множители:
1) $\cos(n \arccos x)$ (*многочлены Чебышева*);
2) $(x + \cos\theta + i\sin\theta)^n + (x + \cos\theta - i\sin\theta)^n$;
3) $x^m - \binom{2m}{2}x^{m-1} + \binom{2m}{4}x^{m-2} - \dots + (-1)^m\binom{2m}{2m}$.

27. Указанные многочлены разложить на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$:
1) $x^{2n} - 2x^n + 2$;
2) $x^{2n} + x^n + 1$.

28. Освободиться от кратных корней и разложить на линейные множители исходный многочлен:
1) $x^8 - 2x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4$;
2) $x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x - 1$;
3) $x^5 + 6x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 20x + 8$;
4) $x^6 + x^4 + 3x^2 + 2x + 2$.

29. По заданным корням построить многочлен наименьшей степени а) с комплексными коэффициентами; б) с вещественными коэффициентами:
1) двойной корень i, простые корни 1, 2, 3;
2) двойной корень 1, простые корни $1 - 2i$, 2, 3.

30. Многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ имеет корни $x_1, x_2, \dots, x_n$. Какие корни имеют многочлены:
1) $a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n$;
2) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$;
3) $f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}x + \dfrac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$;
4) $a_0x^n + a_1bx^{n-1} + a_2b^2x^{n-2} + \dots + a_nb^n$?

31. Определить λ так, чтобы один из корней многочлена $x^3 - 7x + \lambda$ равнялся удвоенному другому.

32. Сумма двух корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ равна 1. Определить λ.

33. Определить соотношение между коэффициентами многочлена x^3+px+q, при выполнении которого $x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$, если x_1, x_2, x_3 — корни этого многочлена.

34. Найти сумму квадратов корней многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$.

35. Пусть корни многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Найти все корни многочлена, зная a_1 и a_2.

36. Найти многочлен 4-й степени, корнями которого являются числа α, $\dfrac{1}{\alpha}$, $-\alpha$, $-\dfrac{1}{\alpha}$.

37. Найти многочлен 6-й степени, корнями которого являются числа α, $\dfrac{1}{\alpha}$, $1-\alpha$, $\dfrac{1}{1-\alpha}$, $1-\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\alpha}}$.

38. Найти многочлен, корнями которого являются квадраты корней многочлена:
1) x^2+ax+b; 2) x^3+ax+b; 3) x^4+ax+b;
4) x^4+ax^3+b; 5) x^n+ax+b; 6) $x^n+ax^{n-1}+b$.

39. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $f(x) = x^3+ax+b$. Найти многочлен, корни которого суть
1) x_1+x_2, x_1+x_3, x_2+x_3;
2) $(x_1-x_2)^2$, $(x_1-x_3)^2$, $(x_2-x_3)^2$;

3.4 Интерполяционный многочлен

40. Найти интерполяционный многочлен по таблице его значений:

1)

x_j	0	1	2	3
y_j	-1	-1	1	11

2)

x_j	0	1	2	3
y_j	-2	-2	-2	4

3)

x_j	0	1	2	3
y_j	3	-1	-5	3

4)

x_j	1	i	-1	$-i$
y_j	1	2	3	4

5)

x_j	0	1	2	3	4
y_j	3	3	-7	-15	15

6)

x_j	-2	-1	0	1	2
y_j	6	6	0	0	-6

7)

x_j	0	1	2	$\dots$	n
y_j	1	2	4	$\dots$	2^n

8)

x_j	0	1	2	$\dots$	n
y_j	1	0	0	$\dots$	0

9)

x_j	1	2	3	$\dots$	n
y_j	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dots$	$\dfrac{1}{n}$

41. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^m \binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{при } m < n, \\ (-1)^n n! & \text{при } m = n, \end{cases}$$

где m — натуральное число.

42. Доказать, что многочлен

$$f(x) = \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}$$

принимает целые значения при всех целых x.

43. Доказать, что многочлен $f(x)$ степени, не превосходящей n, принимающий целые значения для $n+1$ последовательных целых значений независимой переменной, принимает целые значения для всех целых значений независимой переменной.

44. Доказать, что многочлен $f(x)$ степени n, принимающий целые значения при $x = 0, 1, 4, 9, \dots, n^2$, принимает целые значения при всех квадратах натуральных чисел.

3.5 Разложение на простейшие дроби

45. Пусть степень многочлена $f(x)$ не превосходит степени многочлена $g(x)$, причем $g(x)$ не содержит кратных корней. Доказать, что дробь $f(x)/g(x)$ допускает следующее разложение в сумму простейших дробей над $\mathbb{C}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{b_0(x-x_i)\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{g'(x_i)(x-x_i)},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — комплексные корни, а b_0 — старший коэффициент многочлена $g(x)$.

46. Разложить на простейшие дроби над полем $\mathbb{C}$:

1) $\dfrac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 2) $\dfrac{x^2+2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

3) $\dfrac{1}{x^3-1}$; 4) $\dfrac{16}{x^4+4}$; 5) $\dfrac{1}{x^n-1}$; 6) $\dfrac{1}{x^n+1}$;

7) $\dfrac{1}{\cos(n\arccos x)}$.

47. Разложить на простейшие дроби над полем $\mathbb{C}$:

1) $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$; 2) $\dfrac{x-1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$;

3) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$; 4) $\dfrac{1}{(x^n-1)^2}$.

48. Разложить на простейшие дроби над полем $\mathbb{R}$:

1) $\dfrac{1}{(x^3-1)}$; 2) $\dfrac{x^2}{(x^4-16)}$; 3) $\dfrac{1}{(x^4+4)}$; 4) $\dfrac{x^2}{(x^6+27)}$;

5) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)^2)}$; 6) $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

3.6 Многочлены с рациональными коэффициентами

49. Доказать, что если $\dfrac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами, то

1) a_0 делится на q;
2) a_n делится на p;
3) $f(m)$ делится на $p - mq$ при любом целом m.

В частности, $f(1)$ делится на $p - q$, $f(-1)$ делится на $p + q$.

50. Найти все рациональные корни и определить их кратности:

1) $3x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 4$;
2) $5x^6 - 16x^5 + 3x^4 + 10x^3 - 27x^2 - 10x + 3$;
3) $3x^6 + 11x^5 + 14x^4 + 36x^3 + 82x^2 + 40x - 24$;
4) $18x^6 - 6x^5 + x^4 - 9x^3 + x^2 - 3x + 10$.

51. Доказать, что если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа, то многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней.

52. Пусть многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 при двух целых значениях x_1, x_2. Доказать, что если $|x_1 - x_2| \le 2$, то рациональным корнем многочлена $f(x)$ может быть только $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Если $|x_1 - x_2| \le 2$, то рациональных корней нет.

53. Пользуясь признаком Эйзенштейна, доказать неприводимость над полем $\mathbb{Q}$:
1) $x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 12x - 6$;
2) $2x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 15x^2 + 6$;
3) $x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 20x + 11$;
4) $2x^4 + 11x^3 + 12x^2 + 5x - 4$;
5) $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1$, где p — простое;
6) $\Phi_{p^k}(x) = \dfrac{x^{p^k} - 1}{x^{p^{k-1}} - 1}$, где p — простое.

54. Методом Кронекера разложить на неприводимые над полем $\mathbb{Q}$ множители:
1) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 2$;
2) $3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 3$;
3) $2x^5 - 7x^3 + x^2 + 5x - 2$;
4) $2x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 2$;
5) $x^5 + x + 1$;
6) $4x^4 - 8x^3 - x^2 + 5x + 1$;
7) $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 1$;
8) $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5$;
9) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$;
10) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$.

55. Пусть все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ по абсолютной величине не превосходят M. Доказать, что если $f(x_0)$ — простое число для некоторого целого x_0, причем $|x_0| > M + 1$, то $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

56. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — попарно различные целые числа.
1) Доказать, что многочлен $(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) - 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.
2) Доказать, что многочлен $(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$ за исключением следующих случаев:

$$(x - a)(x - a - 2) + 1 = (x - a - 1)^2;$$

$$(x - a)(x - a - 1)(x - a - 2)(x - a - 3) + 1 = \big((x - a - 1)(x - a - 2) - 1\big)^2.$$

3) Доказать, что многочлен $(x - a_1)^2(x - a_2)^2\dots(x - a_n)^2 + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

57. Доказать, что не существует многочлена с целыми коэффициентами степени большей 0, значения которого являются простыми числами при всех целых x.

58. Доказать, что если многочлен $f(x)$ степени $n \geq 1$ с целыми коэффициентами принимает значение ± 1 более чем при n целых значениях x, то $f(x)$ неприводим.

3.7 Распределение корней на вещественной оси

59. Пусть α — корень многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$. Докажите, что $|\alpha| < A/|a_0| + 1$.

60. Пусть α — положительный вещественный корень многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ с вещественными коэффициентами, $a_0 > 0$ и k — минимальное, такое, что $a_k < 0$,

$$B = \max_{a_j < 0} |a_j|.$$

Докажите неравенство

$$\alpha \leq \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1.$$

61. С помощью теоремы Штурма локализовать вещественные корни многочленов:

1) $x^4 + 3x^2 - 1$;
2) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 8x + 1$;
3) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 6x + 1$;
4) $x^5 + 5x^4 + 5x^2 - 5x - 3$.

62. Определить число вещественных корней многочленов:

1) $x^3 + px + q$;
2) $x^n + px + q$;
3) $x^5 - 5ax^3 + 5ax^2 + 2b$;
4) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$;
5) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}$;
6) $f(x) = nx^n - x^{n-1} - \cdots - 1$.

63. Пусть $0 < m_1 < \cdots < m_n$. Доказать, что многочлен $a_0 + a_1x^{m_1} + a_2x^{m_2} + \cdots + a_nx^{m_n}$ с вещественными коэффициентами имеет не более n положительных корней.

64. Пусть $0 < m_1 < \cdots < m_n$ и m_j четно тогда и только тогда, когда j четно ($j = 0, 1, \ldots, n$). Доказать, что многочлен $a_0 + a_1x^{m_1} + a_2x^{m_2} + \cdots + a_nx^{m_n}$ с вещественными коэффициентами имеет не более n вещественных корней.

3.8 Симметрические многочлены

Элементарными симметрическими многочленами от n переменных называются многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, где

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

В частности,

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Степенными суммами от n переменных называются многочлены $s_1, s_2, \ldots, s_n$, где

$$s_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Моногенным многочленом $S(Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n})$ называется многочлен

$$S(Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}) = A \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} x_{i_1}^{k_{i_1}} x_{i_2}^{k_{i_2}} \ldots x_{i_n}^{k_{i_n}},$$

где суммирование идет по всем перестановкам $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$, в частности,

$$s_k = S(x_1^k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

65. Показать, что всякий симметрический многочлен есть сумма моногенных.

66. Выразить через элементарные симметрические многочлены:

1) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$;
2) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;
3) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$;
4) $x_1^5x_2^2 + x_1^2x_2^5 + x_1^5x_3^2 + x_1^2x_3^5 + x_2^5x_3^2 + x_2^2x_3^5$;
5) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$;
6) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$;
7) $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$;
8) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.

67. Выразить через элементарные симметрические многочлены:

1) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_2}$;
2) $\dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 + x_2} + \dfrac{(x_1 - x_3)^2}{x_1 + x_3} + \dfrac{(x_2 - x_3)^2}{x_2 + x_3}$;
3) $\left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1}\right) \cdot \left(\dfrac{x_1}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}\right)$.

68. Вычислить значение симметрической функции от корней многочлена $f(x)$:

1) $x_1^4x_2 + x_1^4x_3 + x_2^4x_3$, $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$;
2) $x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_4^3 + x_2^3x_3^3 + x_2^3x_4^3 + x_3^3x_4^3$,
$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$;
3) $(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)$,
$f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 8$.

69. *Первая формула Ньютона для степенных сумм.* Доказать, что при $k \le n$ имеет место равенство

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

70. *Вторая формула Ньютона для степенных сумм.* Доказать, что при $k \ge n$ имеет место равенство

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 + \dots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0,$$

причем $s_0 = n$.

71. Найти степенные суммы s_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ для корней многочлена

$$f(x) = x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

72. Найти многочлен n-й степени, степенные суммы $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ которого равны 0.

3.9 Результант и дискриминант

Матрицей Сильвестра двух многочленов

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m,$$

где $a_0 \ne 0$, $b_0 \ne 0$, называется квадратная матрица порядка $m + n$

$$S(f,g) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots\dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots\dots & a_n & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots\dots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots\dots & b_m & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix},$$

где непомеченные элементы равны 0, коэффициенты многочлена $f(x)$ записаны «лесенкой» в первых m строках, а коэффициенты многочлена $g(x)$ — в первых n строках. Например, при $m=3$, $n=2$

$$S(f,g)=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы Сильвестра называется *результантом* многочленов f и g и обозначается $R(f,g)$.

73. Доказать, что $R(f,g)\neq 0$ тогда и только тогда, когда многочлены f и g взаимно простые.

74. Вычислить результант многочленов:
1) $2x^2+x+2$ и x^2+2x-1;
2) x^3-x^2+2x+3 и $2x^2-x-1$;
3) $2x^3+5x^2-2x-2$ и x^3+4x^2+2x-4.

75. Найти значение параметра λ, при котором многочлены имеют общий корень:
1) $x^3+\lambda x+2$ и $x^2+\lambda x+2$;
2) $x^3+\lambda x-1$ и $x^2+\lambda x-1$;
3) $x^3+\lambda x^2-3x+1$ и $x^3+\lambda x-2$.

76. Исключить x из системы уравнений:
1) (р) $x^2-3xy+y^2=1$, $2x^2-xy+3y^2=2$;
2) $x^3+2x^2y-xy^2+y=-2$, $x^2(y+1)+3xy^2=3$.

77. Решить с помощью результанта систему уравнений:
1) (р) $x^2-4xy+3x+y^2-4y-2=0$, $x^2-3xy-3x+2y^2+4y+2=0$;
2) $x^2y+x^2+2xy+y^3=0$, $x^2-6x-3y^2=0$;
3) $x^2y^2+xy^2+x+y=0$, $x^2y+xy+1=0$.
4) $x^3-4x^2+6x-3xy^2+4y^2-4=0$, $y^3-3x^2y+8xy-6y=0$.
5) $x^4-6x^2y^2+y^4+6x^3-12xy^2+13x^2-6y^2+14x+6=0$, $x^3-xy^2+5x^2-y^2+7x+3=0$.

78. (р) *Декартов лист* задается параметрической системой

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3},\qquad t\in\mathbb{R},\ t\neq -1,\ a\neq 0.$$

С помощью результанта исключите параметр t и получите неявное уравнение декартова листа.

79. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена f, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — корни многочлена g. Доказать, что

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (x_i - y_j) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(x_i) = b_0^n \prod_{j=1}^{m} f(y_j).$$

Дискриминантом многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$, называется

$$D(f) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0} \cdot R(f, f').$$

80. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена f. Доказать, что

$$D(f) = a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2.$$

81. Доказать, что

$$D(f) = a_0^{2n-2} \cdot \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

где s_k — степенная сумма от корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлена f.

82. Найти дискриминант многочлена (ср. № 11):

1) $ax^2 + bx + c$;
2) $x^3 + px + q$;
3) $x^4 + px + q$;
4) $x^5 + px + q$.

Ответы, указания, решения

1. 1) 2^{100}; 2) -1. *Указание:* Найти значение многочлена в точке 1.

2. 1) Частное $2x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x + 16$, остаток $-x - 5$;

2) частное $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$, остаток $\frac{4}{9}x + \frac{23}{9}$;

3) частное $x - m$, остаток $(p + 1 + m^2)x + (q - m)$;

4) частное $x^2 - mx + (p - 1 + m^2)$, остаток $m(2 - p - m^2)x + (q - p + 1 - m^2)$.

3. Частное $x^2 + 2ax - \frac{a^2}{2}$, остаток 0.

4. 1) Частное $x^3 + 4x^2 + 6x + 10$, остаток 22;

2) частное $x^3 + (25 - 7i)x - 15 - 16i$, остаток $-20 - 11i$.

5. 1) $(x + 1)^4 - (x + 1)^3 + 2(x + 1)^2 - 2$;

2) $(x - 1)^5 + 5(x - 1)^4 + 10(x - 1)^3 + 10(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 1$;

3) $(x + i)^4 - (x + i)^3 + 2(x + i)^2 - 2$;

4) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$;

5) $(x - 2)^4 + 2(x - 2)^3 + 2(x - 2)^2 + 2(x - 2)$;

6) $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 4$.

6. 1) $f(2) = 1$, $f'(2) = 1$, $f''(2) = -4$, $f'''(2) = 12$, $f^{IV} = 24$;

2) $f(2) = 2i$, $f'(2) = 1$, $f''(2) = 2 - 2i$, $f'''(2) = 6i$, $f^{IV} = 24$.

7. 1) Пусть $q(x)$ — частное, а $r(x) = ax + b$ — остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$. Тогда $1 + x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = q(x)(x^2 - 1) + ax + b$. Подставляя $x = 1$, получаем $7 = a + b$. Подставляя $x = -1$, получаем $-5 = -a + b$. Откуда $a = 6$, $b = 1$. *Ответ:* $6x + 1$.

2) 1;

3) $3x^3 + 3x + 1$;

4) $(a_0 + a_2 + \cdots + a_{n-4} + a_{n-2})x^2 + (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-3} + a_{n-1})x + a_n$ при четном n; $(a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-4} + a_{n-2})x^2 + (a_0 + a_2 + \cdots + a_{n-3} + a_{n-1})x + a_n$ при нечетном n.

5) $\bigl(-(n+1)a_0 + na_1 - (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} - a_n\bigr)x - na_0 + (n-1)a_1 - (n-2)a_2 + \cdots + a_{n-1}$ при четном n; $\bigl((n+1)a_0 - na_1 + (n-1)a_2 - \cdots + 2a_{n-1} - a_n\bigr)x + na_0 - (n-1)a_1 + (n-2)a_2 - \cdots + a_{n-1}$ при нечетном n; *Указание:* Найти производную.

8. $-\frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{1}{6}x$.

9. 1) Если ε — корень многочлена $x^2 + x + 1$, то $\varepsilon^3 = 1$, поэтому $\varepsilon^{3m} + \varepsilon^{3n+1} + \varepsilon^{3p+2} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. *Ответ:* При любых значениях параметров.

2) Любой корень λ многочлена $x^2 - x + 1$ также является корнем многочлена $x^3 + 1$, поэтому

$$\lambda^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2} = (-1)^m - (-1)^n\lambda + (-1)^p\lambda^2 = (-1)^m - (-1)^p + \lambda\bigl((-1)^p - (-1)^n\bigr).$$

Последнее выражение может равняться нулю только в случае $(-1)^m = (-1)^n = (-1)^p$, т. е. если m, n, p — одновременно четные или одновременно нечетные.

3) Множители многочлена $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ взаимно просты. Многочлен $f(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ всегда делится на $x^2 + x + 1$. Выясним, когда $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$

делится на $x^2 - x + 1$. При подстановке корня λ многочлена $x^2 - x + 1$ в $f(x)$ получим

$$f(\lambda) = (-1)^m + (-1)^n\lambda + (-1)^p\lambda^2 = (-1)^m - (-1)^p + \lambda\big((-1)^n + (-1)^p\big).$$

При этом получим 0 тогда и только тогда, когда $(-1)^m = (-1)^p = -(-1)^n$, т. е. если m, p, $n + 1$ — одновременно четные или одновременно нечетные.

4) Если m не делится на 3.
5) При $m = 6n + 1$ и $m = 6n + 5$, $n \in \mathbb{Z}$.
6) При $m = 6n + 2$ и $m = 6n + 4$, $n \in \mathbb{Z}$.
7) При $m = 6n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.
8) При $m = 6n + 4$, $n \in \mathbb{Z}$.
9) Первая и вторая производные многочлена $f(x)$ не обращаются в 0 одновременно, следовательно, $f(x)$ не имеет корней кратности выше 2, поэтому $f(x)$ не делится на $g(x)$ ни при каких значениях параметра m.
10) $f(x)$ не делится на $g(x)$ ни при каких значениях параметра.
11) $f(x)$ делится на $g(x)$ при любых значениях параметров.

10. $a = 2$, $b = 0$, $c = -2$. *Указание:* Приравнять нулю значение многочлена и его первой и второй производной в точке -1.

11. 1) При $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 = 0$;

2) при $\left(\dfrac{q}{3}\right)^3 - \left(\dfrac{p}{4}\right)^4 = 0$;

3) при $\left(\dfrac{q}{4}\right)^4 + \left(\dfrac{p}{5}\right)^5 = 0$.

13. *Указание:* Применить индукцию по s.

15. Кратность корня a не меньше $k + 1$.

16. Кратность корня a есть $k + 3$, где k — показатель кратности a как корня $f'''(x)$.

17. 1) $d(x) = x^2 + 2x - 1$, $u(x) = -2x + 1$, $v(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 2$;

2) $d(x) = x - 2$, $u(x) = -\dfrac{1}{54}x + \dfrac{1}{18}$, $v(x) = \dfrac{1}{54}x^3 - \dfrac{5}{54}x^2 + \dfrac{1}{6}x$;

3) $d(x) = x^2 - 2$, $u(x) = \dfrac{2}{5}x^2 + \dfrac{3}{2}$, $v(x) = -\dfrac{2}{5}x^4 - \dfrac{6}{5}x^2 - \dfrac{2}{5}$;

4) $d(x) = 1$, $u(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - x - \dfrac{1}{3}$, $v(x) = -\dfrac{2}{3}x^4 + x^3 + \dfrac{7}{3}x^2 - 5x - 2$;

5) $d(x) = 1$, $u(x) = 3x^2 - 8x + 6$, $v(x) = 3x + 1$;

6) $d(x) = 1$, $u(x) = 20 - 45x + 36x^2 - 10x^3$, $v(x) = 1 + 4x + 10x^2$;

7) $d(x) = x^2(x-1)^2$, $u(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3}$, $v(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$. *Указание:* Для нахождения $u(x)$ и $v(x)$ разделить $f(x)$ и $g(x)$ на $d(x)$ и применить метод неопределенных коэффициентов.

8) $d(x) = 1$,

$$u(x) = 1 + \frac{m}{1!}(1-x) + \frac{m(m+1)}{2!}(1-x)^2 + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{(n-1)!}(1-x)^{n-1},$$

$$v(x) = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n+1)\dots(n+m-2)}{(m-1)!}x^{m-1}.$$

Указание: Для нахождения $u(x)$ и $v(x)$ дифференцировать равенство $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ и полагать $x = 0$, $x = 1$.

18. 1) $x^d - 1$, где d — наибольший общий делитель m и n. *Указание:* Найти общие корни многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

2) $x^d + a^d$, если $\dfrac{m}{d}$, $\dfrac{n}{d}$ — нечетные; 1 в противном случае.

19. 1.

20. 1.

21. 1) $\dfrac{7}{34} + \dfrac{1}{34}\sqrt[3]{3} + \dfrac{5}{34}\sqrt[3]{9}$;

2) $\dfrac{11}{16} + \dfrac{7}{16}\sqrt[3]{25} + \dfrac{3}{16}\sqrt[3]{25}$;

3) $\dfrac{19}{71} + \dfrac{11}{71}\alpha + \dfrac{2}{71}\alpha^2$;

4) $\dfrac{56}{121} + \dfrac{95}{121}\alpha + \dfrac{86}{121}\alpha^2 - \dfrac{40}{121}\alpha^3$;

5) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\sqrt{2} - \dfrac{1}{4}\sqrt{6}$; минимальным многочленом для $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является $x^4 - 10x^2 + 1$;

6) $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}\sqrt{2} + \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{9} - \dfrac{1}{10}\sqrt{2}\sqrt[3]{3} - \dfrac{1}{10}\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$; минимальным многочленом для $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ является $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$;

22. 1) $u(x) = 9x^2 - 26x - 21$, $v(x) = -9x^3 + 44x^2 - 39x - 7$;

2) $u(x) = 3x^3 + 3x^2 - 7x + 2$, $v(x) = -3x^3 - 6x^2 + x + 2$.

23. 1) $4x^4 - 27x^3 + 66x^2 - 65x + 24$;

2) $-5x^7 + 13x^6 + 27x^5 - 130x^4 + 75x^3 + 266x^2 - 440x + 197$.

24. 1) $(x-1)^4(x+2)^2$;

2) $(x-1)^3(x-2)^2(x+2)$;

3) $(x^2 - x - 1)^3$;

4) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 1)^2$.

25. 1) $(x+1)\left(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}i\right)\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}i\right) = (x+1)(x^2 - x + 2)$;

2) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i) = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$;

3) $(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

4) $$\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right) \times$$
$$\times \left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right) =$$
$$= \bigl(x^2 - (1+\sqrt{3})x + 2\bigr)\bigl(x^2 + (1+\sqrt{3})x + 2\bigr);$$

5) $(x-\sqrt{3}-i\sqrt{5})(x-\sqrt{3}+i\sqrt{5})(x+\sqrt{3}-i\sqrt{5})(x+\sqrt{3}+i\sqrt{5}) =$
$= (x^2 - 2\sqrt{3}x + 8)(x^2 + 2\sqrt{3}x + 8)$;

6) $(x+1+2i)(x+1-2i)(x-4+2i)(x-4-2i) = (x^2+2x+5)(x^2-8x+20)$. *Указание:* представить многочлен в виде суммы квадратов.

7) $(x+2+\sqrt{2}i)(x+2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)(x-2-\sqrt{2}i) = (x^2+4x+6)(x^2-4x+12)$. *Указание:* представить многочлен в виде суммы квадратов.

8) $$\left(x+1-\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\left(x+1-\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \times$$
$$\times \left(x+1+\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\left(x+1+\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right);$$

9) $(x-i)(x+i)(x+4-\sqrt{17})(x+4+\sqrt{17}) = (x^2+1)(x+4-\sqrt{17})(x+4+\sqrt{17})$;

10) $$\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}i\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}i\right) \times$$
$$\times \left(x + \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}i\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}i\right) =$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{5} + \frac{1}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{5} + \frac{1}{2}x + 1\right);$$

11) $(x-1)(x+1)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times$
$\times \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1);$

12) $(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})\left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times$
$\times \left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = (x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3);$

13) $\left(x - \frac{\sqrt{2+a}}{2} - \frac{\sqrt{2-a}}{2}i\right)\left(x - \frac{\sqrt{2+a}}{2} + \frac{\sqrt{2-a}}{2}i\right) \times$
$\times \left(x + \frac{\sqrt{2+a}}{2} - \frac{\sqrt{2-a}}{2}i\right)\left(x + \frac{\sqrt{2+a}}{2} + \frac{\sqrt{2-a}}{2}i\right) =$
$= (x^2 - x\sqrt{2+a} + 1)(x^2 + x\sqrt{2+a} + 1);$

14) $\prod\limits_{k=0}^{2n-1}\left(x - \cos\frac{\pi k}{n} - i\sin\frac{\pi k}{n}\right) = (x-1)(x+1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{n} + 1\right);$

15) $\prod\limits_{k=0}^{2n}\left(x - \cos\frac{\pi k}{n} - i\sin\frac{\pi k}{n}\right) = (x-1)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{n} + 1\right).$

26. 1) $2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. *Указание:* найти корни и учесть старший коэффициент.

2) $2\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x + \frac{\sin\left(\theta + \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right)$. *Указание:* найти корни и учесть старший коэффициент.

3) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x - \operatorname{tg}^2\frac{(2k-1)\pi}{4m}\right)$. *Указание:* для разыскания корней удобно положить $x = \operatorname{tg}^2\theta$.

27. 1) $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2\sqrt[2n]{2}x\cos\frac{(8k+1)\pi}{4n} + \sqrt[n]{2}\right);$

2) $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)2\pi}{3n} + 1\right).$

28. 1) $(x^2+1)^2(x^2-2)^2 = (x-i)(x+i)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2});$

2) $(x^2-x-1)^3 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3;$

3) $(x+2)(x^2+2x+2)^2 = (x+2)(x+1+i)^2(x+1-i)^2;$

4) $(x^2-2x+2)(x^2+x+1)^2 = (x-1-i)(x-1+i)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$

29. 1) а) $x^5 - (6+2i)x^4 + (10+12i)x^3 - 22ix^2 - (11-12i)x + 6$; б) $x^7 - 6x^6 + 13x^5 - 18x^4 + 23x^3 - 18x^2 + 11x - 6$;

2) а) $x^5 - (8-2i)x^4 + (24-14i)x^3 - (34-34i)x^2 + (23-34i)x - 6 + 12i$; б) $x^6 - 9x^5 + 36x^4 - 86x^3 + 125x^2 - 97x + 30$.

30. 1) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n;$

2) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n};$

3) $x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a;$

4) $bx_1, bx_2, \ldots, bx_n.$

31. $\lambda = \pm 6$.
32. $\lambda = -3$.
33. $q^3 + pq + q = 0$.
34. $a_1^2 - 2a_2$.
35. $x_i = -\dfrac{a_1}{n} + \dfrac{2i-n-1}{2}h$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, где $h = \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{12(n-1)a_1^2 - 24na_2}{n^2-1}}$.
36. $x^4 - ax^2 + 1$, где $a = \dfrac{\alpha^4+1}{\alpha^2}$. *Указание:* Можно воспользоваться тем, что многочлен не должен меняться при замене x на $-x$ и x на $\dfrac{1}{x}$.
37. $(x^2-x+1)^3 - a(x^2-x)^2$, где $a = \dfrac{(\alpha^2-\alpha+1)^3}{(\alpha^2-\alpha)^2}$. *Указание:* Воспользоваться тем, что многочлен не должен меняться при замене x на $-x$ и x на $1-x$.
38. 1) $x^2 - (a^2-2b)x + b^2$; 2) $x^3 + 2ax^2 + a^2x - b^2$;
3) $x^4 + 2bx^2 - a^2x + b^2$; 4) $x^4 - a^2x^3 + 2bx^2 + b^2$;
5) $x^n + 2ax^{\frac{n+1}{2}} + a^2x - b^2$ при нечетном n, $x^n + 2bx^{\frac{n}{2}} - a^2x + b^2$ при четном n;
6) $x^n - a^2x^{n-1} - 2abx^{\frac{n-1}{2}} - b^2$ при нечетном n, $x^n - a^2x^{n-1} + 2bx^{\frac{n}{2}} + b^2$ при четном n.
39. 1) $x^3 + ax - b$; 2) $x^3 + 6ax^2 + (4a^3 + 3a^2 + 2b^2)x + 4a^3 + 27b^2$;
40. 1) $x^3 - 2x^2 + x - 1$;
2) $x^3 - 3x^2 + 2x - 2$;
3) $2x^3 - 6x^2 + 3$;
4) $-\dfrac{1+i}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1-i}{2}x + \dfrac{5}{2}$;
5) $x^4 - 4x^3 + 3x + 3$;
6) $-x^4 + 4x^2 - 3x$;
7) $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x(x-1)}{2!} + \dots + \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$;
8) $1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n\dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$;
9) $1 - \dfrac{x-1}{2!} + \dfrac{(x-1)(x-2)}{3!} - \dots + (-1)^n\dfrac{(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!} =$
$= \dfrac{n! - (1-x)(2-x)\dots(n-x)}{n!x}$. *Указание:* Можно воспользоваться методом Ньютона. Легче рассмотреть многочлен $xf(x) - 1$.
41. Записать формулу интерполяционного многочлена Лагранжа степени не выше n, принимающего значения x^m при $x = 0, 1, 2, \dots, n$, и выразить коэффициент при x^n этого многочлена.
42. Утверждение докажем индукцией по n. При $n = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что многочлен $\binom{x}{n}$ принимает целые значения при всех целых x. То, что $\binom{x}{n+1}$ принимает целые значения при всех целых x, следует теперь из равенств

$$\binom{x+1}{n+1} = \binom{x}{n+1} + \binom{x}{n}, \quad \binom{0}{n+1} = 0.$$

43. Ищем многочлен $f(x)$ в форме Ньютона:

$$c_0 + c_1\frac{x-m}{1!} + c_2\frac{(x-m)(x-m-1)}{2!} + \dots + c_n\frac{(x-m)(x-m-1)\dots(x-m-n+1)}{n!},$$

где $m, m+1, \dots, m+n$ — целые значения переменной x, в которых $f(x)$ по условию принимает целые значения. Последовательно полагая $x = m, m+1, \dots, m+n$, получаем равенства для определения коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_n$:

$$c_j = f(m+j) - c_0 - \frac{j}{1!}c_1 - \frac{j(j-1)}{2!}c_2 - \cdots - jc_{j-1}, \quad (j = 0, 1, \ldots, n),$$

откуда получаем, что $c_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Таким образом, при целых x значение многочлена $f(x)$ представляет собой сумму биномиальных коэффициентов с целыми множителями и поэтому является целым числом.

44. *Указание:* К многочлену $f(x^2)$ применить утверждение из задачи 43.

45. *Указание:* Воспользоваться формулой Лагранжа для интерполяционного многочлена.

46. 1) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$;

2) $-\dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{11}{2(x-3)} + \dfrac{3}{x-4}$;

3) $\dfrac{1}{3(x-1)} + \dfrac{\varepsilon}{3(x-\varepsilon)} + \dfrac{\varepsilon^2}{3(x-\varepsilon^2)}$, где $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

4) $\dfrac{1+i}{x+1+i} + \dfrac{1-i}{x+1-i} + \dfrac{-1+i}{x-1+i} + \dfrac{-1-i}{x-1-i}$;

5) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$;

6) $-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\eta_k}{x-\eta_k}$, где $\eta_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{n} + i\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{n}$;

7) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}\sin\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{x - \cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}$.

47. 1) $-\dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{1}{4(x-1)^2} + \dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{1}{4(x+1)^2}$.

Решение: Разложение ищем в виде

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}.$$

Домножая на общий знаменатель, получаем

$$A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2 = 1. \tag{3.1}$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, можно получить систему линейных уравнений, из которой определяются коэффициенты A, B, C, D. Более рациональный способ заключается в следующем. Подставим в (3.1) вместо x вначале 1, а затем -1, соответсвенно получим:

$$4B = 1, \qquad 4D = 1,$$

откуда $B = D = \dfrac{1}{4}$. Продифференцируем (3.1):

$$A(x+1)^2 + 2A(x-1)(x+1) + 2B(x+1) + C(x-1)^2 + 2C(x+1)(x-1) + 2D(x-1) = 0.$$

Подставим в полученное равенство вместо x вначале 1, а затем -1, соответсвенно получим:

$$4A + 4B = 0, \qquad 4C - 4D = 0,$$

откуда $A=-\dfrac{1}{4}$, $C=\dfrac{1}{4}$.

2) $\dfrac{1}{8(x-1)}-\dfrac{1}{8(x+1)}-\dfrac{1}{4(x+1)^2}-\dfrac{1}{2(x+1)^3}$;

3) $\dfrac{3}{8(x+1)}+\dfrac{6}{x+2}-\dfrac{3}{(x+2)^2}-\dfrac{51}{8(x+3)}-\dfrac{15}{4(x+3)^2}-\dfrac{3}{2(x+3)^3}$;

4) $-\dfrac{n-1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}+\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k^2}{(x-\varepsilon_k)^2}$, где $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$.

48. 1) $\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$;

2) $\dfrac{1}{8(x-2)}-\dfrac{1}{8(x+2)}+\dfrac{1}{2(x^2+4)}$;

3) $\dfrac{x+2}{8(x^2+2x+2)}-\dfrac{x-2}{8(x^2-2x+2)}$;

4) $\dfrac{1}{18(x^2+3x+3)}+\dfrac{1}{18(x^2-3x+3)}-\dfrac{1}{9(x^2+3)}$;

5) $-\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{x-1}{4(x^2+1)}+\dfrac{x+1}{2(x^2+1)^2}$;

6) $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}-\dfrac{6x+2}{x^2+x+1}-\dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

49. Докажем 1), 2). Так как $f(p/q)=0$, то

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=a_0\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\dots+a_{n-1}\cdot\frac{p}{q}+a_n=0.$$

Домножая обе части полученного равенства на q^n, получаем $a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\dots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0$. Слагаемые в левой части со второго до последнего делятся на q, следовательно, первое слагаемое a_0p^n также делится на q, но так как НОД$(p,q)=1$, то a_0 делится на q. Аналогично, слагаемые с первого до предпоследнего в левой части равенства делятся на p, следовательно, последнее слагаемое a_nq^n также делится на p, но так как НОД$(p,q)=1$, то a_n делится на p. Докажем 3). Разделим $f(x)$ на $x-m$. Получим в частном $h(x)$, а в остатке $f(m)$: $f(x)=(x-m)g(x)+f(m)$, откуда при $x=p/q$ получаем $0=(p/q-m)g(p/q)+f(m)$. Домножаем обе части этого равенства на q^n и применяем рассуждения, аналогичные пп. 1), 2).

50. 1) Простые корни 2, $\dfrac{2}{3}$;

2) простые корни 3, $\dfrac{1}{5}$, -1;

3) простой корень $\dfrac{1}{3}$, 2-кратный корень -2;

4) нет рациональных корней.

51. *Указание:* Использовать задачу 49.

52. *Указание:* Использовать задачу 49.

53. 3) *Указание:* Рассмотреть многочлен $f(x+1)$.

4) *Указание:* Рассмотреть многочлен $f(x-1)$.

5) Многочлен

$$\Phi_p(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{x-1}=x^{p-1}+\binom{p}{1}x^{p-2}+\binom{p}{2}x^{p-3}+\dots++\binom{p}{p-1}$$

неприводим по признаку Эйзенштейна, поэтому неприводим и многочлен $\Phi_p(x)$.

6) *Указание:* Рассмотреть многочлен $\Phi_{p^k}(x+1)$. Чтобы применить к нему признак Эйзенштейна, использовать индукцию.

54. 1) $(x^2-2)(x^2+x-1)$;
2) $(x^2+x-1)(3x^2-x-3)$;
3) $(x^2+x-1)(2x^3-2x^2-3x+2)$;
4) $(x^2-x-1)(2x^3-2x^2-3x+2)$;
5) $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$;
6) $(x^2-x-1)(4x^2-4x-1)$;
7) $(x^2-x-1)(2x^2-4x+1)$;
8) $(x^2-5x+5)(x^2-3x+1)$;
9) неприводим;
10) неприводим.

55. Предположим, что $f(x)=g(x)h(x)$, где $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $h(x)\in\mathbb{Z}[x]$ и $\deg g(x)\geq 1$, $\deg h(x)\geq 1$. Так как число $g(x_0)=p$ простое, то, не нарушая общности, можно считать, что $g(x_0)=1$, $h(x_0)=p$. Корни $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ многочлена $g(x)$ являются корнями многочлена $f(x)$, поэтому $|\beta_j|\leq M$, откуда $|g(x_0)|=|a_0|\cdot|x_0-\beta_1|\cdot|x_0-\beta_2|\cdot\dots\cdot|x_0-\beta_m|$. Но $|a_0|\leq 1$ и $|x_0-\beta_j|\geq |x_0|-|\beta_j|>(M+1)-M=1$, поэтому $|g(x_0)|>1$. Противоречие.

56. 1) Пусть $f(x)=g(x)h(x)$, где $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$, а $g(x)$ и $h(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Так как $f(a_j)=g(a_j)h(a_j)=-1$, то либо $g(a_j)=1$, $h(a_j)=-1$, либо $g(a_j)=-1$, $h(a_j)=1$, поэтому $g(a_j)+h(a_j)=0$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Если $g(x)$ и $h(x)$ оба не константы, то $\deg(g(x)+h(x))<n$, откуда $g(x)+h(x)=0$, т. е. $g(x)=-h(x)$, следовательно, $f(x)=-g^2(x)$. Это невозможно, так как старший коэффициент многочлена $f(x)$ равен 1.

2) Пусть $f(x)=g(x)h(x)$. Так как $f(a_j)=1$, то $g(a_j)=h(a_j)=\pm1$ и если $\deg g(x)>0$ и $\deg h(x)>0$, то $g(x)=h(x)$, т. е. $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1=g^2(x)$. Из последнего равенства получаем, что n четное, и после перенумерации (если необходимо) чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$, считая, что старший коэффициент $g(x)$ положителен, выводим

$$g(x)+1=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n/2}),\quad g(x)-1=(x-a_{n/2+1})(x-a_{n/2+2})\ldots(x-a_n),$$

откуда

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n/2})-(x-a_{n/2+1})(x-a_{n/2+2})\ldots(x-a_n)=2.$$

Не нарушая общности, будем считать, что $a_1>a_2>\dots>a_{n/2}$. Подставив в последнее равенство $x=a_j$ $(j=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1,\ldots,n)$, получаем

$$(x_j-a_1)(x_j-a_2)\ldots(x_j-a_{n/2})=2\qquad\left(j=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1,\ldots,n\right).$$

Таким образом, число 2 раскладывается в произведение $\frac{n}{2}$ целых множителей, расположенных в порядке возрастания, $\frac{n}{2}$ способами. Это возможно только при $\frac{n}{2}=1$ (единственное разложение имеет вид $2=2$) и при $\frac{n}{2}=2$ (разложения имеют вид $2=(-2)\cdot(-1)=1\cdot 2$). Указанные возможности приводят к двум случаям, перечисленным в условии задачи.

3) Пусть $f(x)=g(x)h(x)$ и $\deg g(x)\geq 1$, $\deg h(x)\geq 1$. Так как $f(x)$ не имеет вещественных корней, то $g(x)$ и $h(x)$ также вещественных корней не имеют и, следовательно, не меняют знака при всех вещественных значениях x. Не нарушая общности, предположим, что $g(x)>0$, $h(x)>0$ при всех вещественных значениях x. Так как $f(a_j)=1$, то $g(a_j)=h(a_j)=1$

$(j = 1, 2, \dots, n)$. Если $\deg g(x) < n$, то $g(x) = 1$. Аналогично, если $\deg h(x) < n$, то $h(x) = 1$. Поэтому $\deg g(x) = \deg h(x) = n$, откуда $g(x) = 1 + \alpha(x - a_1) \dots (x - a_n)$, $g(x) = 1 + \beta(x - a_1) \dots (x - a_n)$, где α, β — целые числа, тогда $f(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1 = 1 + (\alpha + \beta)(x - a_1) \dots (x - a_n) + \alpha\beta(x - a_1)^2 \dots (x - a_n)^2$. Сравнение коэффициентов при x^{2n} и x^n приводит к системе $\alpha\beta = 1$, $\alpha + \beta = 0$, не имеющей целых решений.

57. Предположим противное: пусть $f(x)$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами, значения которого при всех целых x являются простыми числами. Пусть $f(0) = p$. При произвольном целом k имеем

$$f(kp) = p + \frac{f'(0)}{1!} kp + \frac{f''(0)}{2!} (kp)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (kp)^n,$$

откуда $f(kp)$ делится на p. Так как $f(kp)$ — простое число, то $f(kp) = \pm p$. Получаем, что по крайней мере один из ногочленов $f(x) - p$ или $f(x) + p$ имеет бесконечно много корней.

58. *Указание:* Доказать, что если $f(x) = g(x)h(x)$, где $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, то в условиях задачи $g(x)$ и $h(x)$ принимают постоянные значения не менее чем при $\dfrac{n}{2}$ значениях x.

59. Покажем, что если $|\alpha| \geq \dfrac{A}{|a_0|} + 1$, то α не может быть корнем многочлена $f(x)$. Действительно, $f(\alpha) \geq |a_0| \cdot |\alpha|^n - |a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n| \geq |a_0| \cdot |\alpha|^n - A|\alpha|^{n-1} + \dots + 1| = |a_0| \cdot |\alpha|^n - A \cdot \dfrac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} > |a_0| \cdot |\alpha|^n - A \cdot \dfrac{|\alpha|^n}{A} \cdot |a_0| = 0$. Итак, $f(\alpha) > 0$, т. е. α не является корнем.

60. Пусть $\alpha > \sqrt[k]{\dfrac{B}{a_0}} + 1$, откуда $(x - 1)^k > \dfrac{B}{a_0}$. Покажем тогда, что α не может быть корнем многочлена $f(x)$. Имеем $f(\alpha) \geq a_0 \alpha^n - B(\alpha^{n-k} + \alpha^{n-k-1} + \dots + \alpha + 1) = a_0 \alpha^n - B \cdot \dfrac{\alpha^{n-k+1} - 1}{\alpha - 1} > a_0 \alpha^n - B \cdot \dfrac{\alpha^{n-k+1}}{\alpha - 1} = \dfrac{\alpha^{n-k+1}}{\alpha - 1} \big(a_0 \alpha^{k-1}(\alpha - 1) - B\big) > \dfrac{\alpha^{n-k+1}}{\alpha - 1} \big(a_0 (\alpha - 1)^k - B\big) > 0$. Итак, $f(\alpha) > 0$, т. е. α не является корнем.

61. 1) Два вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$;
2) два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$, $(2, 3)$;
3) два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$, $(2, 3)$;
4) три вещественных корня в интервалах $(-6, -5)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

62. 1) Систему Штурма образуют многочлены $x^3 + px + q$, $3x^2 + p$, $-2px - 3q$, $-4p^3 - 27q^2$. Если $-4p^3 - 27q^2 > 0$, то $p < 0$. Все старшие коэффициенты многочленов Штурма положительны, поэтому все корни многочлена $x^3 + px + q$ вещественны. Если $-4p^3 - 27q^2 < 0$, то независимо от знака p система Штурма имеет при $-\infty$ две перемены знака, а при $+\infty$ — одну перемену знака. В этом случае многочлен $x^3 + px + q$ имеет один вещественный корень.
2) Систему Штурма образуют многочлены $x^n + px + q$, $nx^{n-1} + p$, $-(n-1)px - nq$, $-p - n\left(\dfrac{-nq}{(n-1)p}\right)^{n-1}$. При нечетном n знак последнего выражения совпадает со знаком $\Delta = -(n-1)^{n-1} p^n - n^n q^{n-1}$; если $\Delta > 0$, то $p < 0$ и многочлен имеет три вещественных корня; если $\Delta < 0$, то независимо от знака p многочлен имеет один вещественный корень. При четном n при $\Delta > 0$ многочлен имеет два вещественных корня, при $\Delta < 0$ вещественных корней нет.
3) Если $a^2 > b^2$, то все пять корней многочлена вещественны. Если $a^2 < b^2$, многочлен имеет один вещественный корень. *Указание:* Построить систему Штурма.
4) При четном n многочлен имеет один вещественный (отрицательный) корень. При нечетном n вещественных корней нет. *Указание:* Доказать, что систему Штурма на интервале

$(-\infty, -\varepsilon)$, где ε — сколь угодно малая положительная величина, образуют многочлены $f(x)$, $f'(x)$, $-\dfrac{x^n}{n!}$. Положительных корней многочлен $f(x)$ не имеет. Другой способ может быть основан на рассмотрении поведения $f'(x)$ (использовать индукцию).

5) При нечетном n многочлен имеет один вещественный корень. При четном n вещественных корней нет.

6) При четном n многочлен имеет два вещественных корня (в том числе 1). При нечетном n многочлен имеет один вещественный корень 1. *Указание:* Исследовать производную многочлена $(x-1)f(x)$ или применить к нему правило знаков Декарта.

64. *Указание:* Применить правило знаков Декарта для заданного многочлена $f(x)$ и многочлена $f(-x)$.

66. 1) $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$. *Решение:* Рассмотрим один из способов решения задачи. Высший член многочлена $f(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$ относительно лексикографического порядка равен x_1^3. Чтобы избавиться от него, вычтем из f многочлен $\sigma_1^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3$:

$$f_1 = f - \sigma_1^3 = -3(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2) - 9x_1x_2x_3.$$

Высший член многочлена f_1 равен $-3x_1^2x_2$. Чтобы избавиться от него, прибавим к f_1 многочлен $3\sigma_1\sigma_2 = 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$:

$$f_2 = f_1 + 3\sigma_1\sigma_2 = -3S(x_1^2x_2) - 9S(x_1x_2x_3) + 3S(x_1^2x_2) + 9S(x_1x_2x_3) = 0.$$

Так как $f_2 = 0$, процесс нахождения представления для f в виде многочлена от элементарных закончен. Имеем $f = f_1 + \sigma_1^3 = f_2 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$.

2) $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.

3) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3$. *Решение:* Найдем решение методом неопределенных коэффициентов.

$$f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2 = S(x_1^4) - 2S(x_1^2x_2^2).$$

Выпишем возможные показатели в высших членах многочленов $f, f_1, f_2, \ldots$ в процедуре последовательного исключения высших членов:

$$(4,\,0,\,0),\ (3,\,1,\,0),\ (2,\,2,\,0),\ (2,\,1,\,1).$$

Следовательно, $f = \sigma_1^4 + A\sigma_1^2\sigma_2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_3$. Для нахождения коэффициентов A, B, C зададим частные значения для x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} f(1,\ \ 1,0) &= 16 + \ \ 4A + \ B \qquad\quad = 0;\\ f(1,-1,0) &= \qquad\qquad\quad B \qquad\quad = 0;\\ f(1,\ \ 1,1) &= 81 + 27A + 9B + 3C = -3, \end{aligned}$$

откуда находим $A = -4$, $B = 0$, $C = 8$.

4) $\sigma_1^3\sigma_2^2 - 2\sigma_1^4\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_2^3\sigma_3 - 7\sigma_1\sigma_3^3$;

5) $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$;

6) $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2$;

7) $2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$;

8) $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2$.

67. 1) $\dfrac{\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3}{\sigma_3}$; 2) $\dfrac{2(\sigma_1^2\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2)}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}$; 3) $\dfrac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3\sigma_3 - 6\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 0\sigma_3^2}{\sigma_3^2}$.

68. 1) $\dfrac{25}{27}$; 2) $\dfrac{35}{27}$; 3) $-\dfrac{1679}{625}$.

69. *Указание:* Представить $s_{k-i}\sigma_i$ в виде

$$s_{k-i}\sigma_i = S(x_1^{k-i+1}x_2\ldots x_i) + S(x_1^{k-i}x_2\ldots x_{i+1}).$$

71. $s_1 = -1$, $s_2 = s_3 = \cdots = s_n = 0$.
72. $x^n - a$.
73. *Указание:* Сперва доказать, что многочлены f и g имеют нетривиальный общий делитель тогда и только тогда, когда существуют многочлены u и v, такие, что $uf = vg$, причем степень u меньше степени g, а степень v меньше степени f. Далее записать это условие в виде однородной системы линейных уравнений, неизвестные которой суть коэффициенты многочленов u и v. Показать, что определитель этой системы с точностью до знака совпадает с $R(f, g)$.
74. 1) 31; 2) 65; 3) 0.
75. 1) $\lambda = -3$; 2) $\lambda = 0$; 3) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.
76. 1) Относим y к коэффициентам и составляем результант многочленов $f(x,y) = x^2 - 3yx + (y^2 - 1)$, $g(x,y) = 2x^2 - yx + (3y^2 - 2)$:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & -3y & y^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & -3y & y^2-1 \\ 2 & -y & 3y^2-2 & 0 \\ 0 & 2 & -y & 3y^2-2 \end{vmatrix} = 41y^4 - 25y^2.$$

Приравняв результант к нулю, получаем уравнение $41y^4 - 25y^2 = 0$.
2) $6y^7 - 18y^6 - 28y^5 + 5y^4 + 14y^3 - 85y^2 - 40y + 23 = 0$.
77. 1) Относим y к коэффициентам и составляем результант многочленов $f(x,y) = x^2 + (3 - 4y)x + (y^2 - 4y - 2)$, $g(x,y) = x^2 - (3y+3)x + (2y^2 + 4y + 2)$:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 3-4y & y^2-4y-2 & 0 \\ 0 & 1 & 3-4y & y^2-4y-2 \\ 1 & -3y-3 & 2y^2+4y+2 & 0 \\ 0 & 1 & -3y-3 & 2y^2+4y+2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6y^4 + 5y^3 - 28y^2 - 20y + 16 = 6(y-2)(y+2)\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{4}{3}\right).$$

Корни уравнения $R(f,g) = 0$ суть $y_1 = 2$, $y_2 = -2$, $y_3 = \frac{1}{2}$, $y_4 = -\frac{4}{3}$.
Общий корень многочленов $f(x, y_1) = x^2 - 9x + 18$, $g(x, y_1) = 4x - 24$: $x_1 = 6$.
Общий корень многочленов $f(x, y_2) = x^2 + 3x + 2$, $g(x, y_2) = 8x + 8$: $x_2 = -1$.
Общий корень многочленов $f(x, y_3) = x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$, $g(x, y_3) = \frac{11}{2}x - \frac{33}{4}$: $x_3 = \frac{3}{2}$.
Общий корень многочленов $f(x, y_4) = x^2 + x + \frac{2}{9}$, $g(x, y_4) = \frac{22}{3}x + \frac{44}{9}$: $x_4 = -\frac{2}{3}$.
Найдены решения: $x_1 = 6$, $y_1 = 2$; $x_2 = -1$, $y_2 = -2$; $x_3 = \frac{3}{2}$, $y_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -\frac{2}{3}$, $y_4 = -\frac{4}{3}$.
2) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 3 + \frac{3}{4\sqrt{19}}$, $y_2 = -\frac{3}{4}$; $x_3 = 3 - \frac{3\sqrt{19}}{4}$, $y_3 = -\frac{3}{4}$.
3) нет решений.
4) $x_1 = 2$, $y_1 = 0$; $x_{2,3} = 1$, $y_{2,3} = \pm 1$; $x_{4,5} = 1 \pm i$, $y_{4,5} = 0$; $x_{6,7} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$, $y_{6,7} = \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$; $x_{8,9} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$, $y_{8,9} = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$.
5) $x_1 = -1$, $y_1 = 0$; $x_2 = -3$, $y_2 = 0$; $x_{3,4} = \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{5})$, $y_{3,4} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{14 + 10\sqrt{5}}$; $x_{5,6} = -\frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})$, $y_{5,6} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{14 - 10\sqrt{5}}$.

78. Умножая каждое из двух уравнений на $1+t^3$ приходим к системе $3at = x(1+t^3)$, $3at^2 = y(1+t^3)$, откуда приходим к многочленам $f(x,y,t,a) = xt^3 - 3at + x$ и $g(x,y,t,a) = yt^3 - 3at^2 + y$. Относим x, y, a к коэффициентам и составляем результант этих многочленов:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} x & 0 & -3a & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & -3a & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & -3a & x \\ y & -3a & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & y & -3a & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y & -3a & 0 & y \end{vmatrix} = 81a^4xy - 27a^3x^3 - 27a^3y^3.$$

Приравняем результант нулю, и после очевидных преобразований получаем уравнение $x^3 + y^3 = 3axy$.

79. *Указание:* Двумя способами вычислить произведение $R(f,g)M$, где

$$M = \begin{vmatrix} y_1^{m+n-1} & y_2^{m+n-1} & \dots & y_m^{m+n-1} & x_1^{m+n-1} & x_2^{m+n-1} & \dots & x_n^{m+n-1} \\ y_1^{m+n-2} & y_2^{m+n-2} & \dots & y_m^{m+n-2} & x_1^{m+n-2} & x_2^{m+n-2} & \dots & x_n^{m+n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_m^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

80. Пусть $f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, тогда

$$f'(x_1) = a_0(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n),$$
$$f'(x_2) = a_0(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f'(x_n) = a_0(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1}).$$

Согласно № 79, теперь имеем

$$D(f) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0} \cdot R(f,f') = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0} \cdot a_0^{n-1} f'(x_1)f'(x_2)\dots f'(x_n) =$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{n-2} \cdot a_0^n \prod_{i\neq j}(x_i - x_j) = a_0^{2n-2} \prod_{i<j}(x_i-x_j)^2.$$

82. 1) $b^2 - 4ac$; 2) $-4p^3 - 27q^2$; 3) $256q^3 - 27p^4$; 4) $256p^5 + 3125q^4$.