Глава 1

Системы линейных уравнений

1.1 Определители второго и третьего порядка

Определителем (*детерминантом*) 2*-го порядка* называется

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определителем (*детерминантом*) 3*-го порядка* называется

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, где $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$;

7) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Для того, чтобы система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не был равен нулю. В этом случае решение может быть найдено по *формулам Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Для того, чтобы система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

не был равен нулю. В этом случае решение может быть найдено по *формулам Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

2. Доказать, что система линейных уравнений имеет единственное решение и найти его:

1) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ -2x + 3y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ -x + 3y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (1+i)x + 2y = 3 + i, \\ 3ix + (1-2i)y = 6 - i; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y + z = 10, \\ -3x + 3y + z = 6, \\ x + 2y + 2z = 14; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 3, \\ -3x - y + z = 1, \\ x - 2z = -2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + iy - (2-i)z = -1 + i, \\ (1-i)x + (1-2i)y = 4 - 5i, \\ x - 2iz = 1 - 3i; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (2+i)x + iy + z = 1 + i, \\ x + (2+i)y + iz = 2i, \\ ix + y + (2+i)z = 2i. \end{cases}$

3. Доказать, что система с буквенными коэффициентами имеет единственое решение и найти его:

1) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\operatorname{tg}\alpha + y = \sin(\alpha+\beta), \\ x - y\operatorname{tg}\alpha = \cos(\alpha+\beta); \end{cases}$ где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \ \ (k \in \mathbb{Z})$;

3) $\begin{cases} 2ax - 3by + cz = 0, \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc, \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc; \end{cases}$ где $abc \neq 0$.

1.2 Метод Гаусса

Рассмотрим *систему m линейных уравнений с n неизвестными*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = \ b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = \ b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $a_{ij} \in F$, $b_i \in F$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, F — произвольное поле. *Решением* (или *частным решением*) системы (1.1) называется набор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ значений неизвестных x_j, при подстановке которых в систему получаем m верных тождеств. Множество всех частных решений системы будем называть *общим решением*. Если множество решений пусто, то система называется *несовместной*, в противном случае система называется *совместной*. Если решение системы единственно, то такая система называется *определенной*. Если система имеет более одного решения, то такая система называется *неопределенной*. Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковое число неизвестных и множества решений этих систем совпадают. Если $m = n$, то система линейных уравнений называется *квадратной*.

Коэффициенты левой части системы (1.1) запишем в матрицу A, коэффициенты правой части системы — в столбец b:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрицу A будем называть *основной матрицей* системы. Блочную матрицу (A, b) будем называть *расширенной матрицей системы*.

Основной метод решения системы линейных уравнений — *метод исключения Гаусса* — заключается в последовательном исключении из нее неизвестных с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы. Под *элементарными преобразованиями строк* матрицы понимаются следующие:

1) i-я и j-я строки меняются местами (обозначение: $(i) \leftrightarrow (j)$);
2) умножение i-й строки на ненулевое число α (обозначение: $\alpha \cdot (i)$);
3) прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на число α (при этом меняется только i-я строка, а j-я строка не изменяется) (обозначение: $(i) + \alpha \cdot (j)$).

Легко видеть, что элементарные преобразования расширенной матрицы системы переводят ее в эквивалентную систему.

Пример 1.1. Решим методом Гаусса систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & & & = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 & & - 3x_4 & = 6, \\ -3x_1 - 4x_2 & 2x_3 & + 3x_4 & = -10, \\ -x_1 & + 3x_3 & + 6x_4 & = 3. \end{cases}$$

Записываем расширенную матрицу системы и выполняем элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -3 & 6 \\ -3 & -4 & 2 & 3 & -10 \\ -1 & 0 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(2)-2\cdot(1)\\(3)+3\cdot(1)\\(4)+(1)}} \tag{1.2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)\leftrightarrow(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right).$$

Матрица системы приведена к верхнему треугольному виду. Ей соответствует следующая система, эквивалентная исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & & & = 5, \\ & 2x_2 + 2x_3 & + 3x_4 & = 5, \\ & & x_3 + 3x_4 & = 3, \\ & & - 3x_4 & = -4. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Выполним обратный ход. Из последнего уравнения полученной системы получаем

$$x_4 = \frac{4}{3}.$$

Подставляем это значение в третье уравнение, получаем:

$$x_3 = 3 - 3x_4 = -1.$$

Найденные значения для x_3 и x_4 подставляем во второе уравнение:

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (5 - 2x_3 - 3x_4) = \frac{3}{2}.$$

И, наконец, найденное значение x_2 подставляем в первое уравнение:

$$x_1 = 5 - 2x_2 = 2.$$

Итак, система имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$, $x_3 = -1$, $x_4 = \dfrac{4}{3}$.

Пример 1.2. Систему линейных уравнений из примера 1.1 решим методом Жордана–Гаусса. Записываем расширенную матрицу системы (1.2). На первой итерации ведущая строка — первая. Ведущий элемент 1. Вычитаем из второй строки первую, умноженную на 2. Прибавляем к третьей строке первую, умноженную на 3. Прибавляем к четвертой строке первую. Получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

Переставляем вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

Ведущая строка — вторая. Ведущий элемент 2. Делим вторую строку на ведущий элемент:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

Вычитаем из первой строки вторую, умноженную на 2. Вычитаем из четвертой строки вторую, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Переставляем третью и четвертую строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right).$$

Ведущая строка — третья. Ведущий элемент 1. Вычитаем из второй строки третью:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right).$$

Ведущая строка — четвертая. Ведущий элемент -3. Делим четвертую строку на ведущий элемент:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4/3 \end{array}\right).$$

Прибавляем ко второй строке четвертую, умноженную на $\dfrac{3}{2}$. Вычитаем из третьей строки четвертую, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right).$$

Получили диагональный вид, по которому сразу записываем ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$, $x_3 = -1$, $x_4 = \dfrac{4}{3}$.

Пример 1.3. Методом Жордана–Гаусса найдем общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 12x_5 = 4, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -13, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_5 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 11x_4 + 7x_5 = 11. \end{cases}$$

Записываем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 2 & -5 & -2 & 12 & 4 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & 0 & -13 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & -7 & 11 & 7 & 11 \end{array}\right).$$

Ведущая строка — первая. Ведущий элемент 1. Прибавлем ко второй строке первую. Вычитаем из третьей строки первую. Вычитаем из четвертой строки первую, умноженную на 2.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -5 & -2 & 12 & 4 \\ 0 & \boxed{3} & -9 & -6 & 12 & -9 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 15 & -17 & 3 \end{array}\right).$$

Ведущая строка — вторая. Ведущий элемент 3. Делим вторую строку на ведущий элемент:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -5 & -2 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 15 & -17 & 3 \end{array}\right).$$

Вычитаем из первой строки вторую, умноженную на 2. Прибавляем к третьей и четвертой строке вторую:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Переставляем третью и четвертую строки:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{13} & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ведущая строка — третья. Ведущий элемент 13. Делим третью строку на ведущий элемент:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вычитаем из первой строки третью, умноженную на 2. Прибавляем ко второй строке третью, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили матрицу в ступенчатой приведенной форме. Ей соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 6x_5 = 10, \\ x_2 - 3x_3 + 2x_5 = -3, \\ + x_4 - x_5 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_3, x_5 — свободные, а x_1, x_2, x_4 — связанные. Каждая связанная переменная встречается ровно в одном уравнении этой приведенной системы. Причем в каждом уравнении (кроме тривиального $0 = 0$) имеется только одна связанная переменная. Выражаем связанные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - x_3 - 6x_5, \\ x_2 = -3 + 3x_3 - 2x_5, \\ x_4 = x_5. \end{cases}$$

Какими бы ни были значения неизвестных x_3 и x_5, по приведенным формулам можно найти соответсвующие им значения x_1, x_2, x_4. Полученная совокупность значений является частным решением исходной системы уравнений. С другой стороны очевидно, что любое частное решение можно получить таким образом. Обозначим $t_1 = x_3$, $t_2 = x_5$. Тогда общее решение можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - t_1 - 6t_2, \\ x_2 = -3 + 3t_1 - 2t_2, \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2, \\ x_5 = t_2, \end{cases}$$

где t_1, t_2 — произвольные вещественные числа. Другая запись общего решения:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что элементарные преобразования системы линейных уравнений не меняют множества ее решений, т. е. переводят систему в эквивалентную.

5. Найти общее решение системы линейных уравнений:

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$;

3) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$;

4) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$;

5) $\begin{cases} x - 3y = 3, \\ 2x - 5y = 7; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 7x + 5y = 0, \\ -8x - 6y = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (1+i)x + 2y = 2 + 4i, \\ 3x + (1-2i)y = 7 - i; \end{cases}$

8) $\begin{cases} (3+i)x + (2+3i)y = 14, \\ (3+i)x + (1+i)y = 8 - 2i; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2014x + 2015y + 2016z = 2017, \\ 2014x + 2015y + 2016z = 2018; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1, \\ 2x + y - z = 2; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 4x + y - z = 3, \\ 8x + 2y - 2z = 6; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4x + y - z = 3, \\ 8x + 2y - 2z = 3; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x + (1-i)y + 2z = 1, \\ (1+i)x + y + 2iz = 2i; \end{cases}$

15) $\begin{cases} (1+3i)x + (2-2i)y - (1-3i)z = -9+9i, \\ (1-\ \ i)x + (1+\ \ i)y - (2-2i)z = \ \ 1+\ \ i; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x \qquad + \ \ z = 0, \\ \ x + 2y + 2z = 0, \\ \ x - 4y - 3z = 0; \end{cases}$

17) $\begin{cases} 3x \qquad + \ \ z = \ \ 1, \\ \ x + 2y + 2z = \ \ 2, \\ \ x - 4y - 3z = -3; \end{cases}$

18) $\begin{cases} \ x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + \ \ y + 3z = 2, \\ \ x \qquad + \ \ z = 1, \\ \qquad y + \ \ z = 1; \end{cases}$

19) $\begin{cases} \ \ x + 2y - 2z = \ \ 2, \\ -3x \qquad + 3z = \ \ 2, \\ \ 7x + 2y - 8z = -2, \\ \ \ x + 4y \qquad = \ \ 2; \end{cases}$

20) $\begin{cases} \ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = \ \ 1, \\ \ 2x_1 + 6x_2 \qquad + \ \ x_4 = \ \ 2, \\ \ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \ \ 2, \\ -x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = -1; \end{cases}$

21) $\begin{cases} \ \ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ \ \ x_1 + x_2 - 2x_3 + \ \ x_4 = 2, \\ -2x_1 \qquad - 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ \ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

22) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = \ \ 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 + 2x_5 = \ \ 0, \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 \qquad + \ \ x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - \ \ x_4 + \ \ x_5 = \ \ 1. \end{cases}$

6. Найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

1) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \ \ 8, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = \ \ 9, \\ \ x_1 \qquad + 6x_3 + 8x_4 = \ \ \lambda; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ 7x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1, \\ 9x_1 - 8x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 6, \\ 9x_1 + 7x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 8; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7, \\ 8x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 9, \\ \lambda x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 11; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 6, \\ 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + 11x_2 + 9x_3 - x_4 = 6, \\ \lambda x_1 + 9x_2 + 7x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

7. Найти многочлен $f(x)$ наименьшей степени, для которого

1) $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 12$, $f(-1) = 0$;
2) $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 2$;
3) (р) $f(1) = 2$, $f'(1) = -4$, $f(2) = 0$, $f'(2) = 1$;
4) $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -6$, $f(-1) = -4$.

8. Продали 2 буйвола, 5 баранов, купили 13 свиней, осталось 1000 цяней[1]. Продали 3 буйвола, 3 свиньи, купили 9 баранов, как раз хватило. Продали 6 баранов, 8 свиней, купили 5 буйволов, не хватило 600 цяней. Сколько стоят буйвол, баран и свинья? Эта задача сформулирована в древнекитайской «Математике в девяти книгах» (между III в. до н. э. и I в. н. э.). Для ее решения предлагалось составить таблицу «фан-чэн» (отличающейся от современной расширенной матрицы системы только тем, что коэффициенты уравнений записываются сверху вниз справа налево) и упрощать ее по правилу «чжэн-фу»

[1] Цянь — денежная единица в Китае до конца XIX века.

— аналогу метода Гаусса. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y = 13z + 1000, \\ 3x + 3z = 9y, \\ 6x + 8z = 5x - 600. \end{cases}$$

Есть в этом трактате и задачи, сводящиеся к системам из большего числа уравнений, в том числе, неопределенным.

9. У 5 семей имеется общий колодец. Чтобы достать до воды, двум веревкам семьи A не достает одной веревки семьи B, трем веревкам семьи B не хватает одной веревки семьи C, четырем веревкам семьи C не хватает одной веревки семьи D, пяти веревкам семьи D не хватает одной веревки семьи E, шести веревкам семьи E не хватает одной веревки семьи A. Какова длина каждого колодца и какова длина каждой веревки? Задача сформулирована в «Математике в девяти книгах». Она сводится к неопределенной системе пяти линейных уравнений с шестью неизвестными.

10. Найти три числа так, чтобы наибольшее превышало среднее на треть наименьшего, чтобы среднее превышало меньшее на треть наибольшего и чтобы наименьшее превышало число 10 на треть среднего числа. Эта задача из «Арифметики» Диофанта Александрийского, II–III вв. н. э.

11. Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь». Второй говорит первому и третьему: «Дайте мне по одной трети ваших денег, и я куплю лошадь». Наконец, третий говорит первым двум: «Дайте мне по четвертой ваших денег, и лошадь будет моя». Теперь спрашивается, сколько денег было у каждого. Задача приводится в трактате «Die Coss» Адама Ризе, 1524.

12. Доказать, что

1) прямой ход метода Гаусса для решения квадратной системы линейных уравнений порядка n использует $\dfrac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ арифметических операций (сложений, вычитаний умножений и делений);
2) обратный ход метода Гаусса для решения квадратной системы линейных уравнений порядка n использует $n^2 + O(n)$ арифметических операций;
3) метод Жордана–Гаусса для решения квадратной системы линейных уравнений порядка n использует $n^3 + O(n)$ арифметических операций.

Ответы, указания, решения

1. 1) -2; 2) -3; 3) 1; 4) 5; 5) 2; 6) $-3\sqrt{3}i$; 7) 1.

2. 1) $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{3}{7}$; 2) $x = 2$, $y = 3$; 3) $x = -i$, $y = 1 + i$; 4) $x = 2$, $y = 3$, $z = 3$; 5) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{5}{4}$, $z = \frac{5}{4}$; 6) $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 2 + i$, $x_3 = 1$; 7) $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}i$, $y = \frac{3}{10} - \frac{1}{2}i$, $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

3. 1) $x = \cos(\beta - \alpha)$, $y = \sin(\beta - \alpha)$; 2) $x = \cos\alpha\cos\beta$, $y = \cos\alpha\sin\beta$; 3) $x = bc$, $y = ac$, $z = ab$.

5. В приведенных ниже формулах для описания общего решения системы параметры $t_1, t_2, \ldots, t_m$ принимают произвольные значения из поля, над которым рассматривается система. Заметим, что способ описания общего решения не единственен.

1) $x_1 = -t_1 - t_2 - t_3$, $x_2 = t_1$, $x_3 = t_2$, $x_4 = t_3$.
2) $x_1 = 1 - t_1 - t_2 - t_3$, $x_2 = t_1$, $x_3 = t_2$, $x_4 = t_3$.
3) $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, $x_3 = t_3$, $x_4 = t_4$.
4) Нет решений.
5) $x = 6$, $y = 1$.
6) $x = 0$, $y = 0$.
7) $x = 1 - i$, $y = 2i$.
8) $x = 1 - i$, $y = 2 - 2i$.
9) Нет решений.
10) $x = t_1$, $y = -7t_1$, $z = -5t_1$.
11) $x = 1 + t_1$, $y = -7t_1$, $z = -5t_1$.
12) $x = t_1$, $y = 3 - 4t_1 + t_2$, $z = t_2$.
13) Нет решений.
14) $x = -1 - 2i + 2it_1$, $y = -1 + 5i + (2 - 4i)t_1$, $z = t_1$.
15) $x = 2i + (2 + 3i)t_1$, $y = -3 + (5 + 4i)t_1$, $z = -i - (1 - 4i)t_1$.
16) $x = 2t_1$, $y = 5t_1$, $z = -6t_1$.
17) $x = \frac{1}{3} + 2t_1$, $y = \frac{5}{6} + 5t_1$, $z = -6t_1$.
18) Нет решений.
19) $x = -\frac{14}{9}$, $y = \frac{8}{9}$, $z = -\frac{8}{9}$.
20) $x_1 = \frac{17}{16}$, $x_2 = -\frac{1}{16}$, $x_3 = -\frac{1}{16}$, $x_4 = \frac{1}{4}$.
21) $x_1 = -\frac{3}{2} - 2t_1$, $x_2 = \frac{5}{2} + 4t_1$, $x_3 = t_1$, $x_4 = 1$.
22) $x_1 = \frac{13}{5} + 2t_1 - \frac{11}{5}t_2$, $x_2 = t_1$, $x_3 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}t_2$, $x_4 = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}t_2$, $x_5 = t_2$.

6. 1) При $\lambda = 3$ общее решение имеет вид $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = -2 - 4t$, $x_3 = 3 + t$, $x_4 = -2 - t$, где t — любое; при $\lambda \neq 3$ система несовместна.

2) При $\lambda = -7$ общее решение имеет вид $x_1 = 1 - 3t_1 - t_2$, $x_2 = 2 - 3t_1 - 2t_2$, $x_3 = 3 + t_1$, $x_4 = 1 + t_2$, где t_1, t_2 — любые; при $\lambda \neq -7$ система несовместна.

3) При $\lambda = -1$ система несовместна; при $\lambda \neq -1$ общее решение имеет вид $x_1 = \dfrac{5(\lambda - 5)}{2(\lambda + 1)} + 5t$, $x_2 = \dfrac{33 - 7\lambda}{2(\lambda + 1)} - 7t$, $x_3 = 2t$, $x_4 = \dfrac{5}{\lambda + 1}$, где t — любое.

4) Общее решение имеет вид $x_1 = -\dfrac{1}{2} + \left(4\lambda + \dfrac{3}{2}\right)t$, $x_2 = -\dfrac{3}{2} + \left(5\lambda + \dfrac{3}{2}\right)t$, $x_3 = 1 - (\lambda + 1)t$, $x_4 = t$, где t — любое.

5) При $\lambda = 10$ общее решение имеет вид $x_1 = t_1$, $x_2 = 3 - 2t_1 - t_2$, $x_3 = t_2$, $x_4 = -1 - t_2$, где t_1, t_2 — любые; при $\lambda \neq 10$ общее решение имеет вид $x_1 = 0$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = t$, $x_4 = -1 - t$, где t — любое.

6) При $\lambda = 1$ общее решение имеет вид $x_1 = t_1$, $x_2 = -6 + 3t_1 - 4t_2$, $8 - 4t_1 + 5t_2$, $x_4 = t_2$, где t_1, t_2 — любые; при $\lambda \neq 1$ общее решение имеет вид $x_1 = 0$, $x_2 = -6 - 4t$, $8 + 5t$, $x_4 = t$, где t — любое.

7. 1) $x^3 - 2x^2 + 3$;

2) $x^2 - 5x + 6$.

3) Ищем многочлен в виде $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$. Имеем $f'(x) = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2$. Учитывая условия $f(1) = 2$, $f'(1) = -4$, $f(2) = 0$, $f'(2) = 1$, получаем систему линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2; \\ 3a_0 + 2a_1 + a_2 = -4; \\ 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3 = 0; \\ 12a_0 + 4a_1 + a_2 = 1, \end{cases}$$

из которой находим: $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 6$. *Ответ:* $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$.

4) $2x^3 - 3x^2 + x + 2$.

8. $x = 1200$, $y = 500$, $z = 300$.

9. Если $x_1, x_2, \ldots, x_5$ — длины веревок, а x_6 — глубина колодца, то общее решение описывается равенствами $x_1 = \dfrac{265}{721}x_6$, $x_2 = \dfrac{191}{721}x_6$, $x_3 = \dfrac{148}{721}x_6$, $x_4 = \dfrac{129}{721}x_6$, $x_5 = \dfrac{76}{721}x_6$. В «Математике в девяти книгах» в качестве ответа приводится минимальное целое положительное значение глубины колодца (721), при котором длины веревок целые и положительные.

10. 45, $\dfrac{75}{2}$, $\dfrac{45}{2}$.

11. $\dfrac{60}{17}$, $\dfrac{132}{17}$, $\dfrac{156}{17}$.

12.