

Глава 16

Кривые и поверхности второго порядка

16.1. Эллипс, гипербола и парабола

Основные кривые второго порядка — это эллипс, гипербола и парабола. Характеристики этих кривых собраны в таблице 16.1.

Эти кривые можно определить, задав их канонические уравнения (первая строка таблицы 16.1), но есть и другие альтернативные определения.

Например, каждую из этих кривых можно определить как множество (геометрическое место) точек плоскости, для которых отношение расстояния до заданной точки (называемой *фокусом*) к расстоянию до заданной прямой (называемой *директрисой*) есть величина постоянная (называемая *эксцентриситетом* ε). Для эллипса $0 \leq \varepsilon < 1$, для параболы $\varepsilon = 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$. Это так называемое *фокально-директориальное свойство* (или *фокально-директориальное определение*) данных кривых (см. утверждения 16.4, 16.13, 16.19).

Можно дать другое «геометрическое» определение эллипса и гиперболы. Эллипс — это множество точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух заданных точек (называемых *фокусами*) есть величина постоянная (см. утверждения 16.2). Из этого определения мы получим определение гиперболы, если слово «сумма» заменим на «разность» (см. утверждения 16.11).

В этом разделе рассматриваются эти и другие геометрические свойства основных кривых второго порядка.

16.1.1. Эллипс

Если взять окружность с уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ и сжать ее по оси Oy в a/b раз ($a \geq b > 0$), т. е. сделать замену $y \mapsto ay/b$, то получим кривую с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0). \quad (16.1)$$

Это уравнение эллипса, который иногда называют «сплюснутой окружностью».

Итак, кривая называется *эллипсом* (см. рис. 16.1), если существует прямоугольная система координат Oxy , в которой ее уравнение имеет вид (16.1). Это уравнение и система координат называются *каноническими*.

Эллипс вписан в «габаритный» прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$. Он симметричен относительно начала координат O , а также относительно каждой из осей Ox , Oy . Параметры a , b называются соответственно *большой* и *малой полуосью* эллипса. Точка O — *центр* эллипса, точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ — *вершины* эллипса.

Таблица 16.1. Эллипс, гипербола, парабола

Характеристика	Эллипс	Гипербола	Парабола
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a \geq b > 0$)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)	$y^2 = 2px$ ($p > 0$)
Фокусы	$\mathcal{F}_{1,2} = (\pm c, 0)$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$\mathcal{F}_{1,2} = (\pm c, 0)$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\mathcal{F} = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$	$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$	$\varepsilon = 1$
Фокальный параметр	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$	p
Директрисы	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$	$x = -\frac{p}{2}$
Фокальный радиус	$r_{1,2} = a \mp \varepsilon x$	$r_{1,2} = a \mp \varepsilon x $	$r = \frac{p}{2} + x$
Директориальное расстояние	$d_{1,2} = \frac{a}{\varepsilon} \mp x$	$d_{1,2} = \left \frac{a}{\varepsilon} \mp x \right $	$d = \frac{p}{2} + x$
Уравнения касательных	$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$	$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$	$y_0 y = p(x + x_0)$

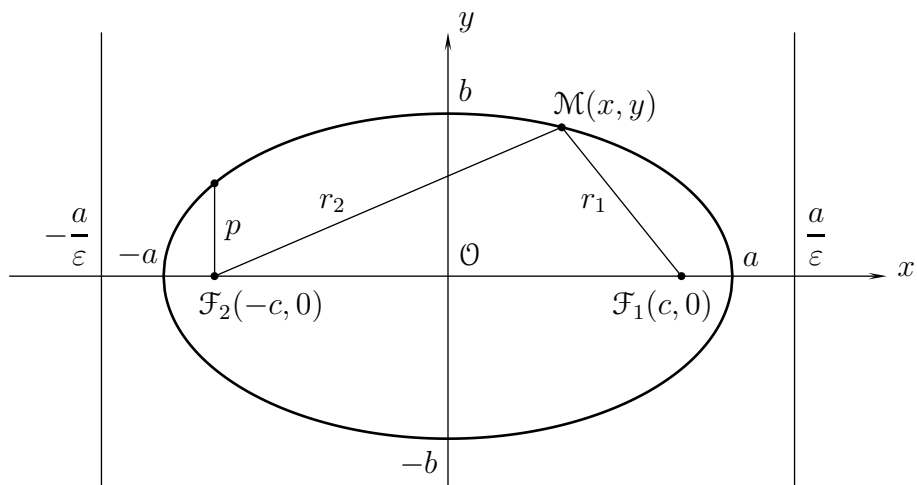


Рис. 16.1. Эллипс

Точки $\mathcal{F}_1 = (c, 0)$, $\mathcal{F}_2 = (-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются *фокусами* эллипса («правым» и «левым» соответственно).

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом*. Очевидно, $\varepsilon < 1$. Для окружности и только для нее $\varepsilon = 0$. Чем больше ε , тем «сплюснутее» эллипс.

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса. Окружность не имеет директрис.

Для произвольной точки \mathcal{M} эллипса отрезки $r_1 = \mathcal{F}_1\mathcal{M}$ и $r_2 = \mathcal{F}_2\mathcal{M}$ называются *фокальными радиусами*.

Утверждение 16.1. Для произвольной точки $\mathcal{M}(x, y)$ эллипса фокальные радиусы равны

$$r_{1,2} = a \pm \varepsilon x.$$

Доказательство. Так как точка \mathcal{M} лежит на эллипсе и, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению (16.1), то

$$r_1^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 = (a - \varepsilon x)^2.$$

Так как $|x| < a$ и $\varepsilon < 1$, то $r_1 = a - \varepsilon x$. Аналогично доказывается, что $r_2 = a + \varepsilon x$. ■

Теперь получаем, что $r_1 + r_2 = 2a$, т.е. для любой точки на эллипсе сумма фокальных радиусов есть величина постоянная. Оказывается, этим свойством обладают только точки эллипса и никакие другие.

Утверждение 16.2 (Фокальное свойство эллипса). *Эллипс есть множество (геометрическое место) точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) постоянна (и равна $2a$).*

Доказательство. Осталось показать, что каждая точка, удовлетворяющая приведенному условию, удовлетворяет также уравнению эллипса. Фокусы имеют координаты $\mathcal{F}_1(c, 0)$, $\mathcal{F}_2(-c, 0)$, $0 < c < a$. Условие запишем в виде

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a. \quad (16.2)$$

Переносим второе слагаемое из левой части в правую и возводим обе части уравнения в квадрат:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2.$$

После очевидных преобразований получаем

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Повторно возводим в квадрат обе части уравнения:

$$(a^2 - xc)^2 = a^2((x - c)^2 + y^2),$$

откуда

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

и

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad (16.3)$$

обозначая $b^2 = a^2 - c^2$, получаем каноническое уравнение эллипса.

Заметим, что выполненные преобразования уравнения (16.2) в (16.3) сохраняли их эквивалентность (это несложно доказать), что дает другое доказательство того факта, что для любой точки на эллипсе сумма фокальных радиусов есть величина постоянная. ■

Величина $p = \frac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром*, или просто *параметром*, эллипса.

Легко видеть, что фокальный параметр равен длине полухорды¹, проходящей через фокус перпендикулярно оси Ox (т.е. фокальному радиусу, перпендикулярному оси Ox).

Расстояние от точки $M(x, y)$ на эллипсе до директрисы называется *директориальным расстоянием*. Так как директрис у эллипса две, то и директориальных расстояний два: d_1 — для правой директрисы и d_2 — для левой. Легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 16.3. *Для произвольной точки $M(x, y)$ эллипса директориальные расстояния равны*

$$d_{1,2} = \frac{a}{\varepsilon} \mp x.$$

Теперь легко видеть, что

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,$$

т.е. для любой точки на эллипсе отношение расстояния до фокуса к расстоянию до одноименной директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету. Оказывается этому свойству удовлетворяют только точки на заданном эллипсе (см. рис. 16.2).

Утверждение 16.4 (Фокально-директориальное свойство эллипса). *Эллипс есть множество (геометрическое место) точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до некоторой прямой (директрисы) есть величина постоянная, меньшая 1 (и равная ε).*

Доказательство данного утверждения предоставляется читателю (осталось доказать, что если точка удовлетворяет данному условию, то она лежит на эллипсе).

Легко показать, что уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0) есть

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Утверждение 16.5 (Оптическое свойство эллипса). *Световой луч, исходящий из одного фокуса, после отражения от эллипса проходит через другой фокус (см. рис. 16.3).*

Доказательство. Найдем расстояния $\mathcal{F}_1\mathcal{N}_1$, $\mathcal{F}_2\mathcal{N}_2$ от фокусов до касательной:

$$\mathcal{F}_1\mathcal{N}_1 = \frac{\left| \frac{x_0 c}{a_2} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|x_0 \varepsilon - a|}{a \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{M\mathcal{F}_1}{a \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}, \quad \mathcal{F}_2\mathcal{N}_2 = \frac{\left| -\frac{x_0 c}{a_2} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{M\mathcal{F}_2}{a \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

¹Хордой называется отрезок, соединяющий две точки на кривой. Полухорда — половина хорды.

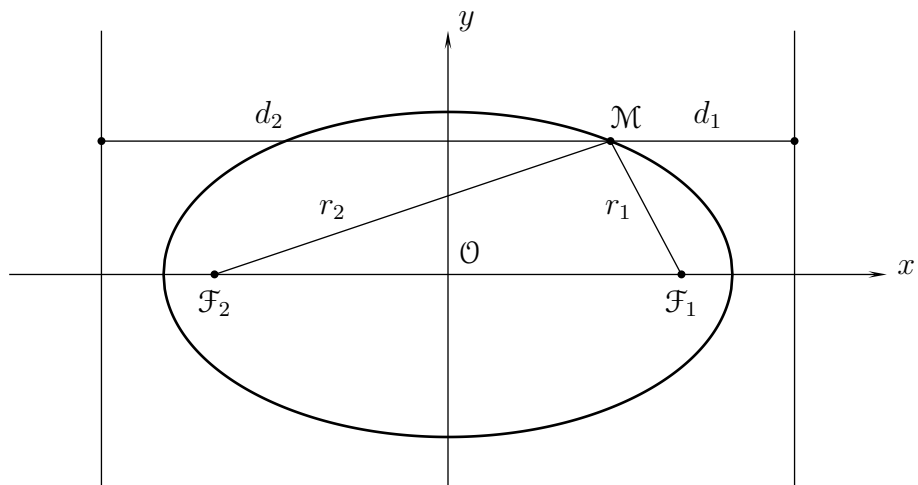


Рис. 16.2. Фокально-директориальное свойство эллипса

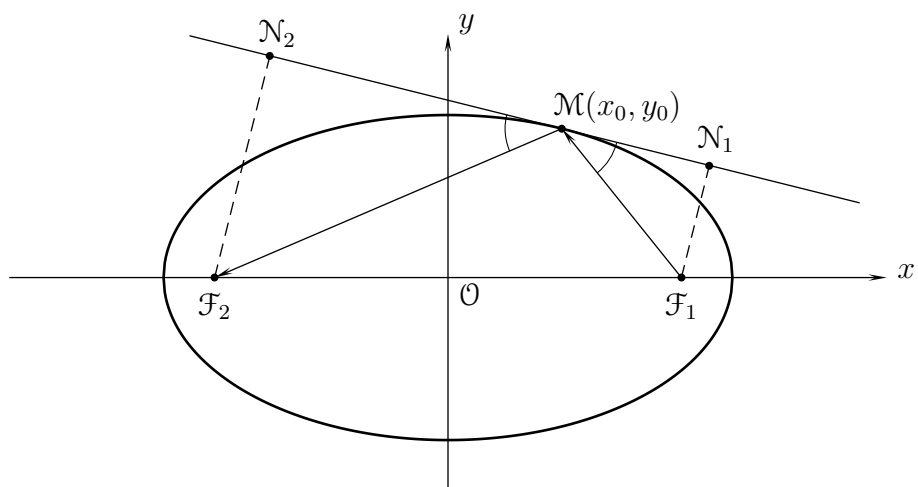


Рис. 16.3. Оптическое свойство эллипса

Имеем

$$\frac{\mathcal{F}_1\mathcal{N}_1}{\mathcal{M}\mathcal{F}_1} = \frac{\mathcal{F}_2\mathcal{N}_2}{\mathcal{M}\mathcal{F}_2},$$

поэтому треугольники $\mathcal{M}\mathcal{F}_1\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{M}\mathcal{F}_2\mathcal{N}_2$ подобны и углы при вершине \mathcal{M} этих треугольников равны. ■

Упражнение 16.6. Докажите, что эллипс можно задать следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Упражнение 16.7. Доказать, что два эллипса подобны тогда и только тогда, когда имеют равные эксцентриситеты.

Упражнение 16.8. Доказать, что преобразование $z \mapsto \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ комплексной плоскости переводит окружность радиуса $r > 1$ с центром в нуле в некоторый эллипс. Функция $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ называется *функцией Жуковского*.

Упражнение 16.9. Доказать, что геометрическое место точек пересечения взаимно ортогональных касательных к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ есть окружность $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

16.1.2. Гипербола

Кривая называется *гиперболой* (см. рис. 16.4), если существует прямоугольная система координат Oxy , в которой ее уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, \quad b > 0).$$

Это уравнение и система координат называются *каноническими*, параметры a, b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосью* гиперболы. Точка O — *центр* гиперболы, точки $(\pm a, 0)$ — *вершины* гиперболы. Гипербола состоит из двух ветвей и симметрична относительно O , а также относительно каждой из осей Ox, Oy .

Гипербола имеет асимптоты. Это две прямые с уравнениями $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$. Если $a = b$, то асимптоты перпендикулярны. Если их принять за координатные оси, то уравнение гиперболы запишется в виде, знакомом со школы: $y = \frac{k}{x}$.

Точки $\mathcal{F}_1 = (c, 0)$, $\mathcal{F}_2 = (-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются *фокусами* гиперболы («правым» и «левым» соответственно).

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом*. Очевидно, что для гиперболы $\varepsilon > 1$. Как и для эллипса, чем больше ε , тем сплюснутее гипербола по оси Oy .

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы.

Для произвольной точки \mathcal{M} гиперболы отрезки $r_1 = \mathcal{F}_1\mathcal{M}$ и $r_2 = \mathcal{F}_2\mathcal{M}$ называются *фокальными радиусами*. Легко доказать следующее утверждение.

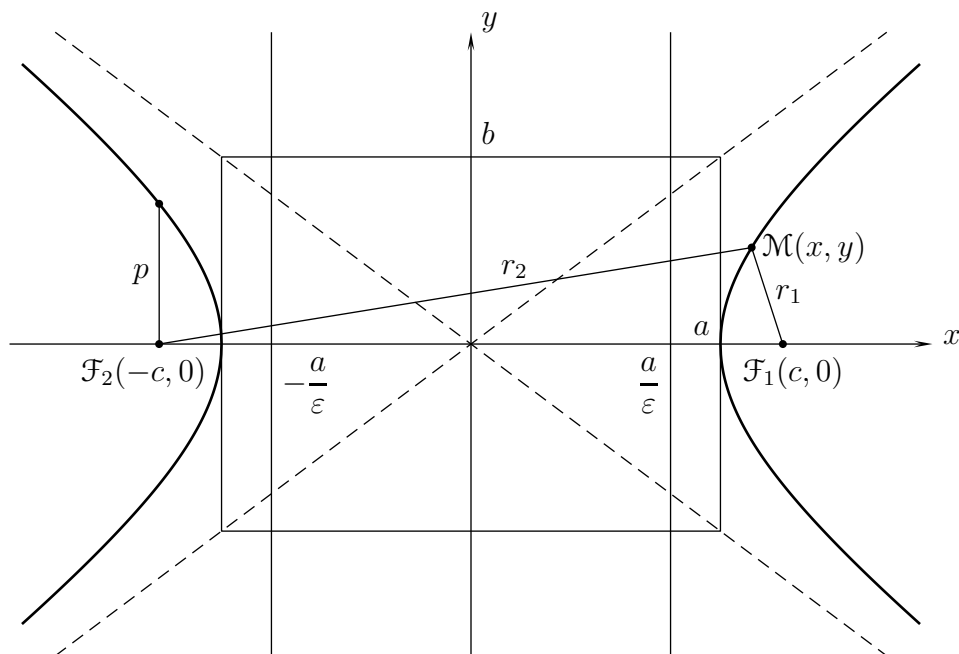


Рис. 16.4. Гипербола

Утверждение 16.10. Для произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы фокальные радиусы равны

$$r_{1,2} = |a \mp \varepsilon x|.$$

Из предыдущего утверждения можно получить, что для любой точки гиперболы $|r_1 - r_2| = 2a$. Оказывается, этому свойству удовлетворяют только точки заданной гиперболы. А именно, справедливо

Утверждение 16.11 (Фокальное свойство гиперболы). Гипербола есть множество (геометрическое место) точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до фокусов постоянен (и равен $2a$).

Доказательство предоставляется читателю.

Величина $p = \frac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* гиперболы. Как и для эллипса он равен длине полухорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси Ox .

Расстояние от точки $M(x, y)$ на гиперболе до директрисы называется *директориальным расстоянием*: d_1 — расстояние до правой директрисы, d_2 — до левой. Легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 16.12. Для произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы директориальные расстояния равны

$$d_{1,2} = \left| \frac{a}{\varepsilon} \mp x \right|.$$

Теперь легко видеть, что

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,$$

т. е., как и для эллипса, для любой точки на гиперболе отношение расстояния до фокуса к расстоянию до одноименной директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету

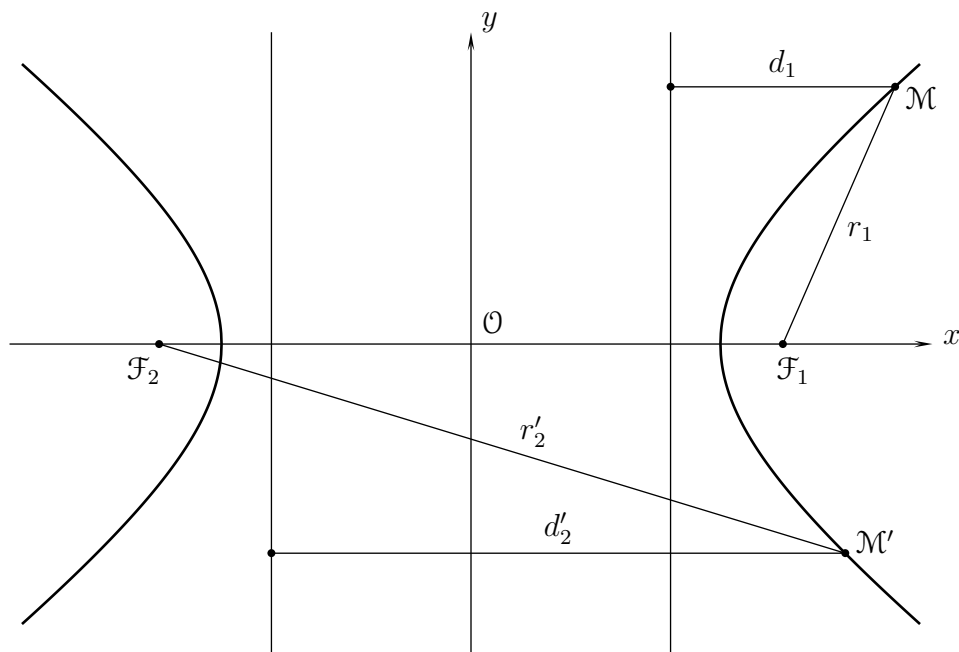


Рис. 16.5. Фокально-директориальное свойство гиперболы

(только для эллипса эксцентриситет меньше 1, а для гиперболы — больше 1). Как и для эллипса, этому свойству удовлетворяют только точки на заданной гиперболе (см. рис. 16.5).

Утверждение 16.13 (Фокально-директориальное свойство гиперболы). *Гипербола есть множество (геометрическое место) точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до некоторой прямой (директрисы) есть величина постоянная, большая 1 (эксцентриситет).*

Доказательство предоставляется читателю.

Легко показать, что уравнение касательной к гиперболе в точке (x_0, y_0) есть

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Утверждение 16.14 (Оптическое свойство гиперболы). *Световой луч, исходящий из одного фокуса, отражается от ветви гиперболы таким образом, что его продолжение проходит через другой фокус (см. рис. 16.6).*

Доказательство предоставляется читателю.

Упражнение 16.15. Докажите, что одну ветвь гиперболы можно задать следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t = a \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \\ y = b \operatorname{sh} t = b \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Упражнение 16.16. Докажите, что две гиперболы подобны тогда и только тогда, когда имеют равные эксцентриситеты.

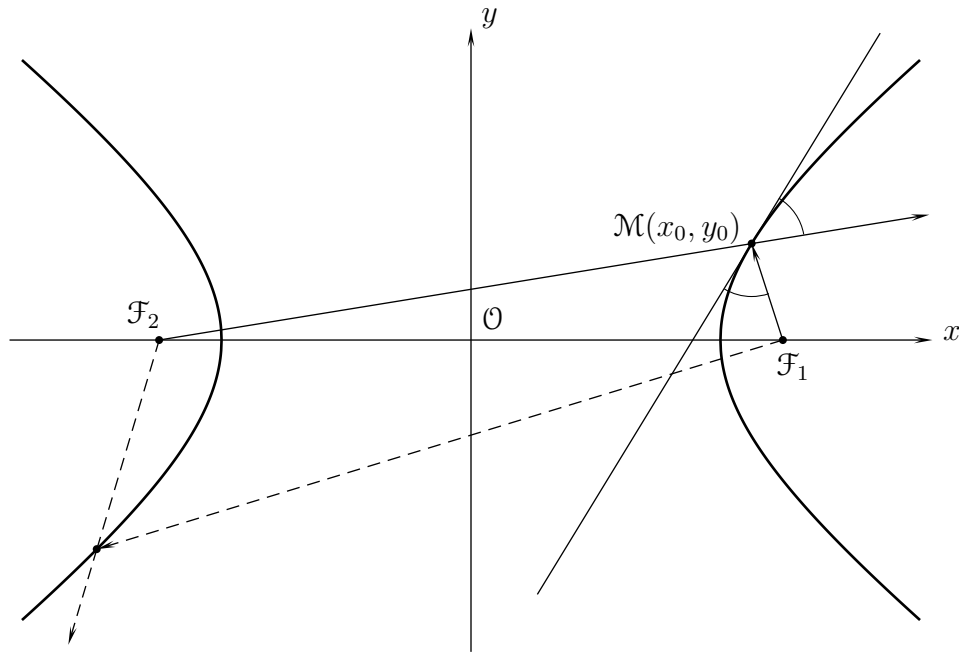


Рис. 16.6. Оптическое свойство гиперболы

16.1.3. Парабола

Кривая называется *параболой* (см. рис. 16.7), если существует прямоугольная система координат Oxy , в которой ее уравнение имеет вид

$$y^2 = 2px \quad (p > 0).$$

Это уравнение и система координат называются *каноническими*, величина p называется (*фокальным*) *параметром* параболы, точка O — *вершина* параболы, точка $\mathcal{F} = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ — *фокус* гиперболы, прямая $x = -\frac{p}{2}$ — *директриса*. Парабола симметрична относительно оси Ox .

Легко видеть, что фокальный параметр равен длине полухорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси Ox .

Для параболы эксцентриситет ε полагается равным 1.

Для произвольной точки M параболы отрезок $r = FM$ называется *фокальным радиусом*.

Утверждение 16.17. Для произвольной точки $M(x, y)$ параболы фокальный радиус равен $r = \frac{p}{2} + x$.

Расстояние от точки на параболе до директрисы называется *директориальным расстоянием*. Легко доказать следующее свойство.

Утверждение 16.18. Для произвольной точки $M(x, y)$ директориальное расстояние равно $d = \frac{p}{2} + x$.

Таким образом, получаем, что для любой точки параболы $r/d = \varepsilon = 1$, т. е. фокальный радиус равен расстоянию до директрисы (см. рис. 16.7).

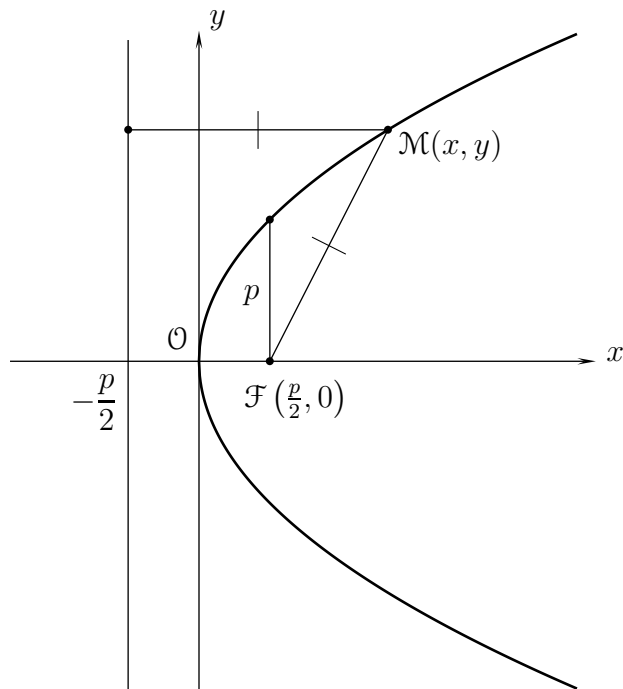


Рис. 16.7. Парабола и ее фокально-директориальное свойство

Утверждение 16.19 (Фокально-директориальное свойство параболы). *Парабола есть множество (геометрическое место) точек плоскости, равноудаленных от заданной прямой (директрисы) и не лежащей на ней фиксированной точки (фокуса).*

Доказательство предоставляется читателю.

Легко проверить, что уравнение касательной к параболе в точке (x_0, y_0) есть

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Теперь рассмотрим оптическое свойство параболы (см. рис. 16.8).

Утверждение 16.20 (Оптическое свойство параболы). *Световой луч, исходящий из фокуса параболы, после отражения в ней идет параллельно оси Ox .*

Доказательство. Найдем координаты точки N пересечения касательной с осью Ox (см. рис. 16.8). Для этого в уравнение касательной подставим $y = 0$, откуда получаем $x = -x_0$. Таким образом, точка N имеет координаты $(-x_0, 0)$. Теперь получаем $FM = FN = \frac{p}{2} + x_0$, т. е. треугольник FMN равнобедренный и углы при вершинах M и N равны. Следовательно, луч света после отражения в параболе будет идти параллельно оси Ox . ■

Упражнение 16.21. Доказать, что любые две параболы подобны.

Упражнение 16.22. Доказать, что геометрическое место точек пересечения взаимно ортогональных касательных у параболы совпадает с ее директрисой.

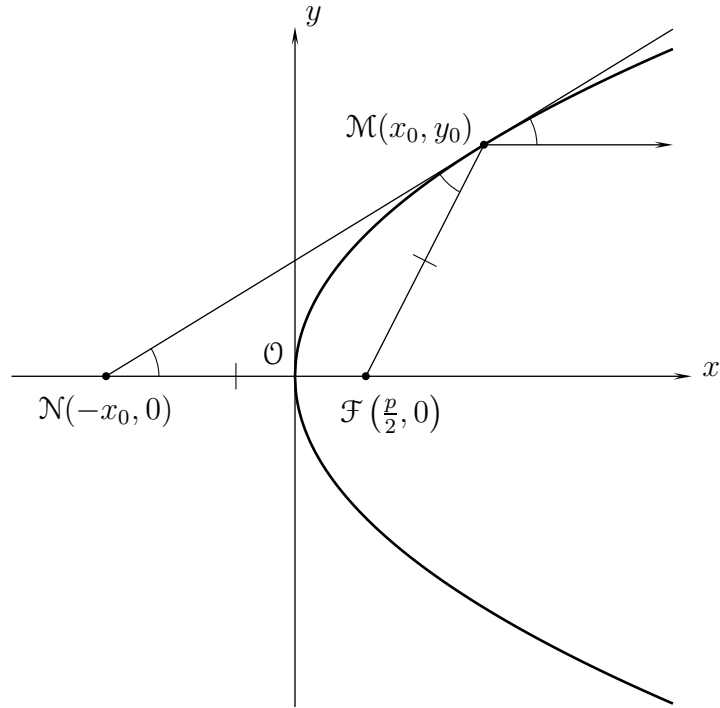


Рис. 16.8. Оптическое свойство параболы

Упражнение 16.23. Доказать, что для каждой из трех основных кривых второго порядка расстояние от фокуса до (ближайшей) директрисы равно $\frac{p}{\varepsilon}$.

Упражнение 16.24. Доказать, что для каждой из трех основных кривых второго порядка расстояние от фокуса до (ближайшей) вершины равно $\frac{p}{1-\varepsilon}$.

16.1.4. Уравнение в полярных координатах

Поместим начало полярной системы координат в один из полюсов: для определенности в правый — для гиперболы, в левый — для параболы, а полярная ось совпадает с осью Ox (см. рис. 16.9). Имеем

$$\frac{FM}{MN} = \frac{r}{d} = \varepsilon.$$

$$\frac{FM'}{M'N'} = \frac{p}{M'N'} = \varepsilon,$$

откуда $M'N' = p/\varepsilon$

$$MN = M'N' + FQ = p/\varepsilon + r \cos \varphi$$

$$\frac{r}{p/\varepsilon + r \cos \varphi} = \varepsilon,$$

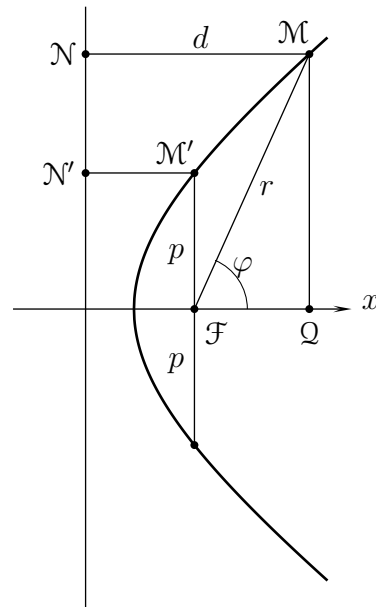


Рис. 16.9. Вывод уравнения кривой второго порядка в полярных координатах

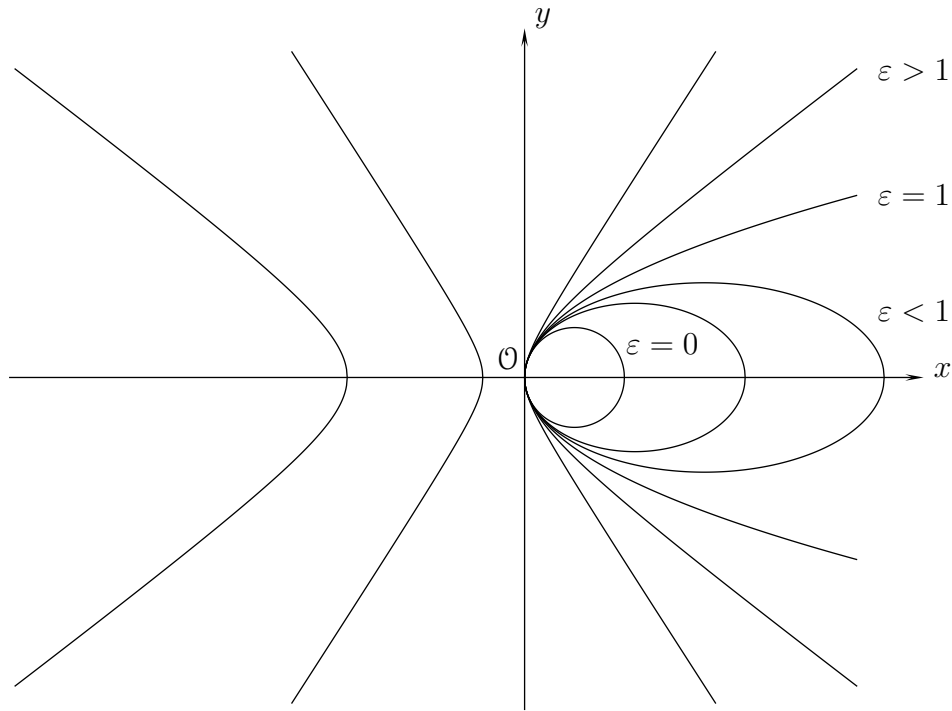


Рис. 16.10. Кривые с вершиной, помещенной в начало координат, с разными ε и равными p

откуда получаем уравнение

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (16.4)$$

Для эллипса параметр φ изменяется в пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Для параболы параметр φ изменяется в пределах $0 < \varphi < 2\pi$.

Для гиперболы при значениях $\theta < \varphi < 2\pi - \theta$, где $\theta = \arccos \frac{1}{\varepsilon}$ — угол между асимптотой и фокальной осью, получаем правую ветвь гиперболы. Чтобы получить левую ветвь, можно рассмотреть значения φ , удовлетворяющие неравенствам $-\theta < \varphi < \theta$. При этом значение полярного радиуса r будет получаться отрицательным, что интерпретируется следующим естественным образом: для соответствующего угла φ откладывается отрезок, равный $|r|$, но в противоположную сторону.

Упражнение 16.25. На плоскости заданы две точки A и B . Найти кривую, которая представляет собой множество точек M , таких, что угол A в треугольнике ABM в 2 раза больше угла B .

16.1.5. Уравнение, отнесенное к вершине

Размещая начало координат в вершине кривой второго порядка (для определенности для эллипса возьмем левую, а для гиперболы — правую вершину) и оставляя направление оси Ox , все три уравнения можно привести к одному виду:

$$y^2 = 2px + x^2(\varepsilon^2 - 1) \quad (p > 0, \quad \varepsilon \geq 0). \quad (16.5)$$

На рис. 16.10 изображены кривые, задаваемые таким уравнением при разных ε и одном и том же значении p .

Покажем, как вывести уравнение (16.5) из (16.4). Связь между координатами, легко видеть, задается формулами:

$$\begin{cases} r \cos \varphi = x - \frac{p}{1 - \varepsilon}, \\ r \sin \varphi = y, \end{cases} \quad (16.6)$$

откуда, в частности,

$$r^2 = \left(x - \frac{p}{1 - \varepsilon} \right)^2 + y^2. \quad (16.7)$$

Из (16.4) получаем равносильное уравнение $r + \varepsilon r \cos \varphi = p$. Подставляя сюда (16.6) и (16.7), получаем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{1 - \varepsilon} \right)^2 + y^2} + \varepsilon \left(x - \frac{p}{1 - \varepsilon} \right) = p.$$

После несложных преобразований получаем уравнение (16.5).

16.2. Аффинная классификация квадратик

Пусть $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, причем $A^\top = A \neq 0$. Множество решений $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ уравнения

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n a_i x_i + \alpha = 0, \quad (16.8)$$

или в матричной форме

$$x^\top A x + 2a^\top x + \alpha = 0, \quad (16.9)$$

называется *квадрикой*.

Левая часть уравнения (16.8), или, что эквивалентно, (16.9), представляет собой многочлен от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим его $F(x)$:

$$F(x) \equiv x^\top A x + 2a^\top x + \alpha.$$

Многочлен $F(x)$ состоит из членов $x^\top A x$, составляющих квадратичную форму; из членов $2a^\top x$, составляющих линейную форму; и свободного члена α .

При $n = 2$ квадратика называется *кривой второго порядка*, при $n = 3$ квадратика называется *поверхностью второго порядка*.

Исследуем, как меняется уравнение квадратика (16.9) при аффинном преобразовании

$$x = q + Qy, \quad (16.10)$$

где $q \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $y \in \mathbb{R}^n$ и матрица Q — невырождена. Для этого подставим (16.10) в (16.9). Раскрывая скобки и замечая, что

$$y^\top Q^\top A q = q^\top A Q y,$$

после преобразований получим уравнение

$$y^\top Q^\top A Q y + 2(Aq + a)^\top Q y + q^\top A q + 2a^\top q + \alpha = 0. \quad (16.11)$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} B = Q^\top A Q, \\ b = Q^\top (Aq + a), \\ \beta = F(q), \end{cases} \quad (16.12)$$

тогда уравнение (16.11) примет вид

$$y^\top B y + 2b^\top y + \beta = 0. \quad (16.13)$$

Наряду с *основными* матрицами A, B рассмотрим *расширенные* матрицы квадратика:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \alpha & a^\top \\ a & A \end{pmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{pmatrix} \beta & b^\top \\ b & B \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что уравнения (16.9, 16.13) можно записать соответственно в виде

$$\widehat{x}^\top \widehat{A} \widehat{x} = 0, \quad \widehat{y}^\top \widehat{B} \widehat{y} = 0,$$

где

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & Q \end{pmatrix},$$

тогда нетрудно проверить, что соотношения (16.10, 16.12) можно записать в следующей матричной форме:

$$\hat{x} = \hat{Q}\hat{y}, \quad \hat{B} = \hat{Q}^\top \hat{A}\hat{Q}. \quad (16.14)$$

Следствие 16.26. *Матрицы A и B конгруэнтны. Матрицы \hat{A} и \hat{B} конгруэнтны.*

Итак, при аффинном преобразовании основная матрица квадратки переходит в конгруэнтную, расширенная матрица квадратки также переходит в конгруэнтную.

Обозначим:

- $t_+(A)$ — положительный индекс матрицы A ;
- $t_-(A)$ — отрицательный индекс матрицы A ;
- $r(A) = t_+(A) + t_-(A)$ — ранг матрицы A ;
- $\sigma(A) = t_+(A) - t_-(A)$ — сигнатура матрицы A .

Функции, зависящие от коэффициентов уравнения квадратки (16.8), не меняющиеся при аффинном преобразовании, называются *аффинными инвариантами*.

Следствие 16.27. *Следующие величины являются аффинными инвариантами:*

$$\begin{aligned} t_+ &= t_+(A), & t_- &= t_-(A), & r &= r(A), & \sigma &= \sigma(A), \\ \hat{t}_+ &= t_+(\hat{A}), & \hat{t}_- &= t_-(\hat{A}), & \hat{r} &= r(\hat{A}), & \hat{\sigma} &= \sigma(\hat{A}). \end{aligned}$$

Теорема 16.28. *Уравнение (16.9) с помощью аффинного преобразования и переноса некоторых членов в правую часть можно привести к одному из видов:*

$$\sum_{j=1}^t y_j^2 - \sum_{j=t+1}^r y_j^2 = \begin{cases} \beta, \\ 2y_{r+1}, \end{cases} \quad (16.15)$$

где $t = t_+(A)$, $r = r(A)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $x = Qz$ — невырожденное преобразование приводящее квадратичную форму $x^\top Ax$ к нормальному виду. Применяя это преобразование ко всему уравнению получаем:

$$\sum_{j=1}^t z_j^2 - \sum_{j=t+1}^r z_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n b_j z_j + \alpha = 0.$$

Выделим полный квадрат:

$$\sum_{j=1}^t (z_j^2 + 2z_j b_j + b_j^2) - \sum_{j=t+1}^r (z_j^2 - 2z_j b_j + b_j^2) + 2 \sum_{j=r+1}^n b_j z_j - \sum_{j=1}^t b_j^2 + \sum_{j=t+1}^r b_j^2 + \alpha = 0.$$

Выполняя сдвиг

$$u_j = \begin{cases} z_j + b_j & (j = 1, 2, \dots, t), \\ z_j - b_j & (j = t + 1, t + 2, \dots, r), \\ z_j & (j = r + 1, r + 2, \dots, n) \end{cases}$$

и обозначая $\beta = \sum_{j=1}^t b_j^2 - \sum_{j=t+1}^r b_j^2 - \alpha$, приводим уравнение к виду:

$$\sum_{j=1}^t u_j^2 - \sum_{j=t+1}^r u_j^2 + 2 \sum_{j=r+1}^n b_j u_j - \beta = 0.$$

Если $r = n$ или $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$, то переносим β в правую часть и, переобозначив $y_i = u_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), получаем первое из уравнений (16.15).

Если $b_j \neq 0$ для некоторого $j \in \{r + 1, \dots, n\}$, то делая замену

$$\begin{cases} y_{r+1} = - \sum_{j=r+1}^n b_j u_j + \frac{\beta}{2}, \\ y_i = u_i & (i \neq r + 1), \end{cases}$$

и перенося член $2y_{r+1}$ в правую часть, получаем второе из уравнений (16.15). ▮

Теперь наряду с аффинными преобразованиями позволим себе преобразования уравнения квадратики, заключающиеся в умножении обеих частей уравнения на произвольное ненулевое число. Очевидно, при таком преобразовании ранги основной и расширенной матриц квадратики не меняются, также сохраняются абсолютные величины их сигнатур.

Теорема 16.29. *Уравнение (16.9) с помощью аффинного преобразования, умножения обеих частей уравнения на ненулевые числа и переноса некоторых членов в правую часть можно привести к одному из видов:*

$$\sum_{j=1}^t z_j^2 - \sum_{j=t+1}^r z_j^2 = \begin{cases} 1, \\ -1, \\ 0, \\ 2z_{r+1}, \end{cases} \quad (16.16)$$

где $t \geq \lfloor r/2 \rfloor$ (т. е. $2t \geq r$) и -1 в правой части возможна лишь при $t \neq 2r$. Уравнения разных видов (с разными t или/и разными r или/и разными правыми частями) нельзя привести таким способом друг к другу.

Доказательство. Пусть уравнение уже приведено к виду (16.15).

Если получено первое из уравнений (16.15) и $\beta \neq 0$, то разделим обе части уравнения на β и сделаем замену $y_j = \sqrt{\beta} z_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Если $t < \lfloor r/2 \rfloor$ или в правой части стоит -1 , хотя $t = 2r$, то домножим обе части уравнения на -1 и перенумеруем переменные.

Если получено второе из уравнений (16.15) и при этом $t < \lfloor r/2 \rfloor$, то домножим обе части уравнения на -1 , заменим $-y_{r+1}$ на z_{r+1} и перенумеруем переменные.

Остается доказать, что уравнения (16.16) разных видов нельзя привести друг к другу с помощью аффинного преобразования, переноса некоторых членов в правую часть и умножения обеих частей уравнения на ненулевое число. Как уже отмечалось, при таких преобразованиях ранги основной и расширенной матриц не меняются, также сохраняются абсолютные

величины их сигнатур, поэтому достаточно сосчитать значения аффинных инвариантов для каждого из видов (16.16). Для каждого из четырех случаев расширенная матрица имеет соответственно вид:

$$\begin{array}{cc}
 \left(\begin{array}{c|cccccc}
 -1 & & & & & \\
 \hline
 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & -1 & \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & -1 \\
 & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 0
 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c|cccccc}
 1 & & & & & \\
 \hline
 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & -1 & \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & -1 \\
 & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 0
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left(\begin{array}{c|cccccc}
 0 & & & & & \\
 \hline
 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & -1 & \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & -1 \\
 & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 0
 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c|cccccc}
 0 & & & & & -1 \\
 \hline
 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & -1 & \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & -1 \\
 & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 -1 & & & & & & & & & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Для каждого из этих случаев соответственно имеем:

$$\begin{aligned}
 \hat{r} &= r + 1, \hat{t} = t; \\
 \hat{r} &= r + 1, \hat{t} = t + 1; \\
 \hat{r} &= r, \hat{t} = t; \\
 \hat{r} &= r + 2, \hat{t} = t + 1.
 \end{aligned}$$

Значения инвариантов различны. ■

Для $n = 2$ из теоремы 16.29 получается

Теорема 16.30 (Аффинная классификация кривых второго порядка). *Для произвольной кривой второго порядка существует аффинная система координат, в которой ее уравнение имеет один из 9 видов, перечисленных в таблице 16.2.*

Эллипс, гипербола и парабола нами уже основательно изучены. Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ задает пару пересекающихся прямых $x = \pm y$. Уравнение $x^2 = 1$ задает пару параллельных прямых $x = \pm 1$, а $x^2 = 0$ — пару «слипшихся» параллельных прямых $x = 0$. Уравнения мнимого эллипса и пары мнимых параллельных прямых описывают одно и то же множество точек — пустое. Уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяет единственная точка $(0, 0)$.

Для $n = 3$ из теоремы 16.29 получается

Теорема 16.31 (Аффинная классификация поверхностей второго порядка). *Для произвольной поверхности второго порядка существует аффинная система координат, в которой ее уравнение имеет один из 17 видов, перечисленных в таблицах 16.3 и 16.4.*

Таблица 16.2. Аффинная классификация кривых второго порядка

Название	Уравнение	\widehat{A}	r	t	\widehat{r}	\widehat{t}
Эллипс	$x^2 + y^2 = 1$	$\text{diag}(-1, 1, 1)$	2	2	3	2
Мнимый эллипс	$x^2 + y^2 = -1$	$\text{diag}(1, 1, 1)$	2	2	3	3
Пара мнимых пересекающихся прямых	$x^2 + y^2 = 0$	$\text{diag}(0, 1, 1)$	2	2	2	2
Гипербола	$x^2 - y^2 = 1$	$\text{diag}(-1, 1, -1)$	2	1	3	1
Пара пересекающихся прямых	$x^2 - y^2 = 0$	$\text{diag}(0, 1, -1)$	2	1	2	1
Парабола	$x^2 = 2y$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	1	3	2
Пара параллельных прямых	$x^2 = 1$	$\text{diag}(-1, 1, 0)$	1	1	2	1
Пара мнимых параллельных прямых	$x^2 = -1$	$\text{diag}(1, 1, 0)$	1	1	2	2
Двойная прямая	$x^2 = 0$	$\text{diag}(0, 1, 0)$	1	1	1	1

Таблица 16.3. Цилиндрические поверхности второго порядка

Название	Уравнение
Эллиптический цилиндр	$x^2 + y^2 = 1$
Мнимый эллиптический цилиндр	$x^2 + y^2 = -1$
Пара мнимых пересекающихся плоскостей	$x^2 + y^2 = 0$
Гиперболический цилиндр	$x^2 - y^2 = 1$
Пара пересекающихся плоскостей	$x^2 - y^2 = 0$
Параболический цилиндр	$x^2 = 2y$
Пара параллельных плоскостей	$x^2 = 1$
Пара мнимых параллельных плоскостей	$x^2 = -1$
Двойная плоскость	$x^2 = 0$

Таблица 16.4. Нецилиндрические поверхности второго порядка

Название	Уравнение	\widehat{A}	r	t	\widehat{r}	\widehat{t}
Эллипсоид	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$	3	3	4	3
Мнимый эллипсоид	$x^2 + y^2 + z^2 = -1$	$\text{diag}(1, 1, 1, 1)$	3	3	4	4
Мнимый конус	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	$\text{diag}(0, 1, 1, 1)$	3	3	3	3
Однополостный гиперboloид	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	$\text{diag}(-1, 1, 1, -1)$	3	2	4	2
Двуполостный гиперboloид	$x^2 + y^2 - z^2 = -1$	$\text{diag}(1, 1, 1, -1)$	3	2	4	4
Конус	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	$\text{diag}(0, 1, 1, -1)$	3	2	3	2
Эллиптический параболоид	$x^2 + y^2 = 2z$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	2	4	2
Гиперболический параболоид	$x^2 - y^2 = 2z$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	1	4	2

Уравнения поверхностей, не содержащие переменной z , перечисленные в таблице 16.3, являются уравнениями цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси Oz , причем в сечениях этих цилиндров плоскостью $z = \text{const}$ лежат соответствующие кривые 2-го порядка, перечисленные в таблице 16.2.

Чтобы представить себе поверхности из таблицы 16.4, можно использовать следующий приём: фиксируя по очереди каждую из переменных, будем рассматривать кривые, получающиеся в соответствующих сечениях, что даёт наглядное представление о поверхности.

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением $x^2 - y^2 = 2z$ (гиперболический параболоид, или «седло»). Ее пересечение с плоскостью $x = c$ происходит по параболе $-c^2 - y^2 = 2z$. Если c меняется, то данная парабола перемещается поступательно, причем ее вершина скользит по параболе $x^2 = 2z$, лежащей в плоскости $y = 0$ и являющейся линией пересечения этой плоскости с параболоидом (см. рис. 16.15).

Кроме того, в сечениях $z = c$ при $c \neq 0$ лежат гиперболы $x^2 - y^2 = 2c$, а при $c = 0$ — две пересекающиеся прямые $x^2 - y^2 = 0$.

Можно провести аналогичный анализ остальных случаев, однако мы поступим иначе. Будем сначала считать, что x, y, z — декартовы прямоугольные координаты (чтобы перейти от прямоугольной системы координат обратно к аффинной достаточно будет провести аффинное преобразование). Заметим, что все оставшиеся уравнения в таблице 16.4 содержат в левой части выражения $x^2 + y^2$ (и другим образом ни переменная x , ни переменная y в уравнение не входят). Вообще, поверхности, задаваемые уравнениями $f(x^2 + y^2, z) = 0$, являются поверхностями, получаемые вращением кривой $f(y^2, z) = 0$, лежащей в плоскости $x = 0$, вокруг оси Oz .

Например, однополостный гиперboloид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ получается вращением гиперболы $y^2 - z^2 = 1$, лежащей в плоскости $x = 0$, вокруг оси Oz (см. рис. 16.11).

Двуполостный гиперboloид $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ — вращением гиперболы $y^2 - z^2 = -1$ (см. рис. 16.12).

Конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ — вращением пары пересекающихся прямых $y^2 - z^2 = 0$ (см. рис. 16.13).

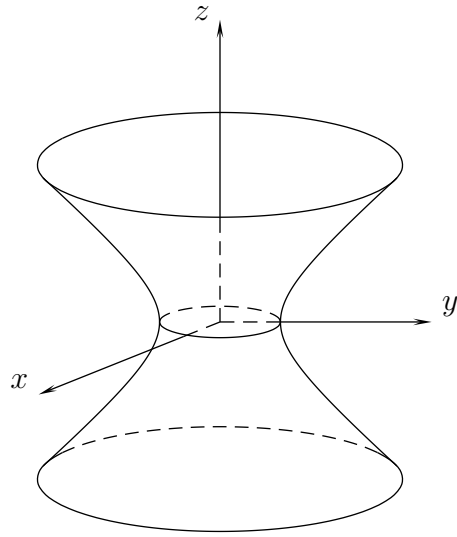


Рис. 16.11. Однополостный гиперboloид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

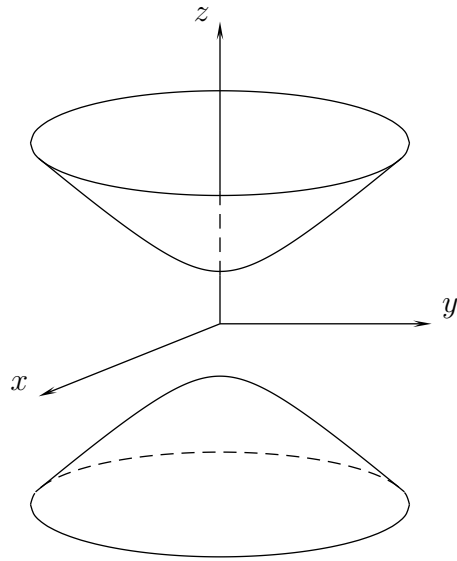


Рис. 16.12. Двуполостный гиперboloид $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

Эллиптический параболоид $x^2 + y^2 = 2z$ — вращением параболы $y^2 = 2z$ (см. рис. 16.14).

16.3. Пересечение квадрики с прямой

Рассмотрим пересечение прямой с квадрикой. Для этого подставим уравнение прямой $x = x_0 + lt$, где $l \neq 0$, в уравнение квадрики 16.9. Получаем

$$l^T A l \cdot t^2 + 2l^T (A x_0 + a) \cdot t + F(x_0) = 0.$$

Если $l^T A l \neq 0$, то это квадратное уравнение. Говорят, что прямая $x = x_0 + lt$ имеет *асимптотическое направление*, если $l^T A l = 0$. Таким образом, прямая неасимптотического направления пересекает квадрику не более, чем в двух точках. Прямая асимптотического направления либо целиком лежит в квадрике, либо пересекается с ней в одной точке, либо не имеет с ней общих точек.

Найдем асимптотические направления для кривых и поверхностей второго порядка:

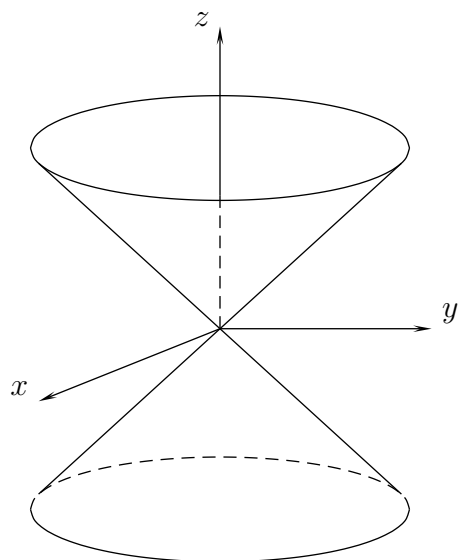


Рис. 16.13. Конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

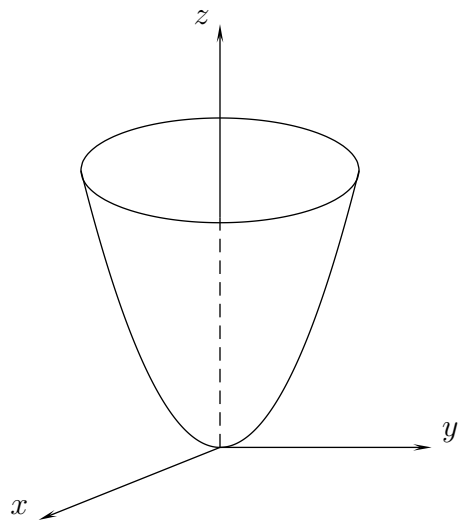


Рис. 16.14. Эллиптический параболоид $x^2 + y^2 = 2z$

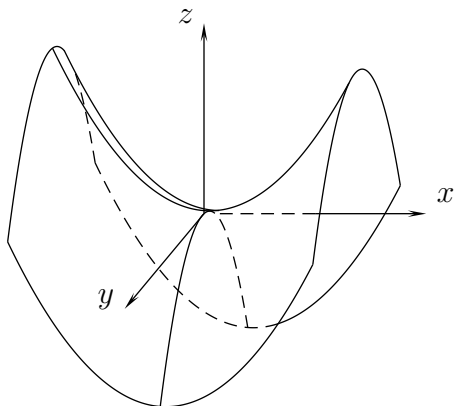


Рис. 16.15. Гиперболический параболоид $x^2 - y^2 = 2z$

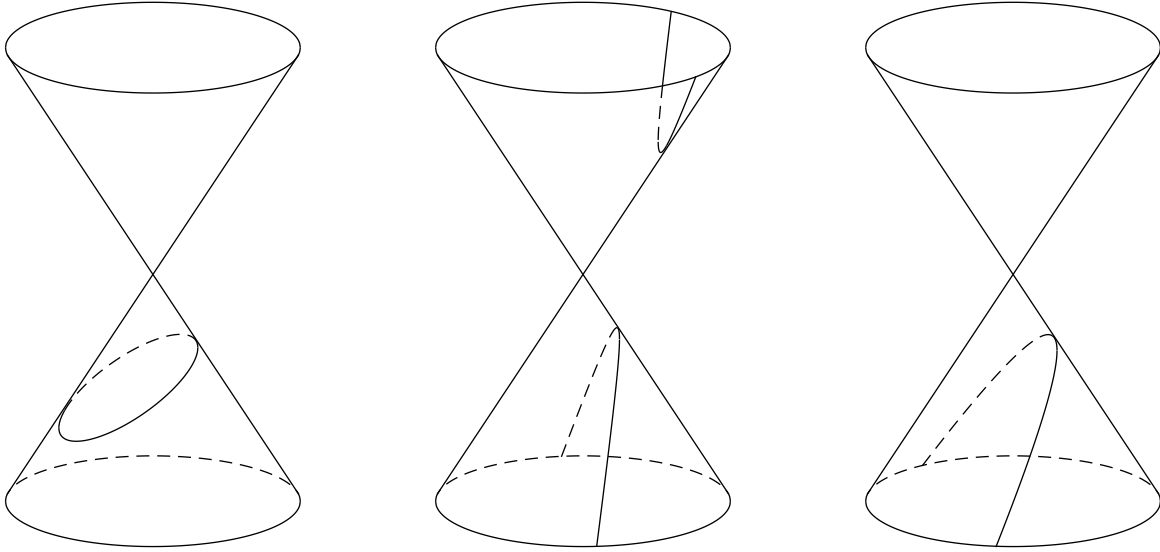
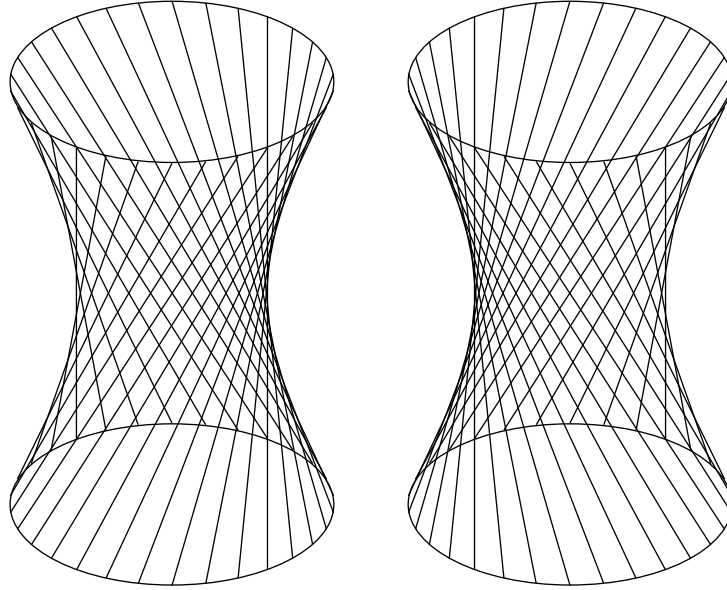


Рис. 16.16. Конические сечения

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + x_2^2 &= \begin{cases} \pm 1, \\ 0 \end{cases} && \text{нет асимптотических направлений} \\
 x_1^2 - x_2^2 &= \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} && \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 x_1^2 &= \begin{cases} \pm 1, \\ 0, \\ 2x_2 \end{cases} && \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= \begin{cases} \pm 1, \\ 0 \end{cases} && \text{нет асимптотических направлений} \\
 x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= \begin{cases} \pm 1, \\ 0 \end{cases} && \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\
 x_1^2 - x_2^2 &= \begin{cases} 1, \\ 0, \\ 2x_3 \end{cases} && \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Центром квадрики называется точка x_0 удовлетворяющая системе линейных уравнений $Ax_0 + a = 0$. Центр квадрики является центром ее симметрии. Квадрика называется *центральной*, если она имеет по крайней мере один центр. Квадрика называется *истинно центральной*, если она имеет ровно один центр. Если центра у квадрики нет, то она называется *нецентральной*.

Во избежание путаницы заметим, что во многих учебниках по аналитической геометрии центральной называется поверхность, имеющая единственный центр, т.е. в нашей терминологии истинно центральная.



Утверждение 16.32. Пусть r и \hat{r} ранги основной и расширенной матрицы квадратки K .

- 1) K — центральная тогда и только тогда, когда $\hat{r} = r$ или $\hat{r} = r + 1$;
- 2) K — нецентральная тогда и только тогда, когда $\hat{r} = r + 2$.

Доказательство. Квадрика K — центральная тогда и только тогда, когда система $Ax_0 + a = 0$ совместна, что равносильно (по теореме Кронекера-Капелли) условию $\text{rank } A = \text{rank}(A, a_0)$. Последнее условие эквивалентно $\hat{r} = r$ или $\hat{r} = r + 1$. ■

Из кривых второго порядка нецентральной является только парабола. Из поверхностей второго порядка нецентральными являются: параболический цилиндр, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид.

16.3.1. Единственность уравнения квадратки

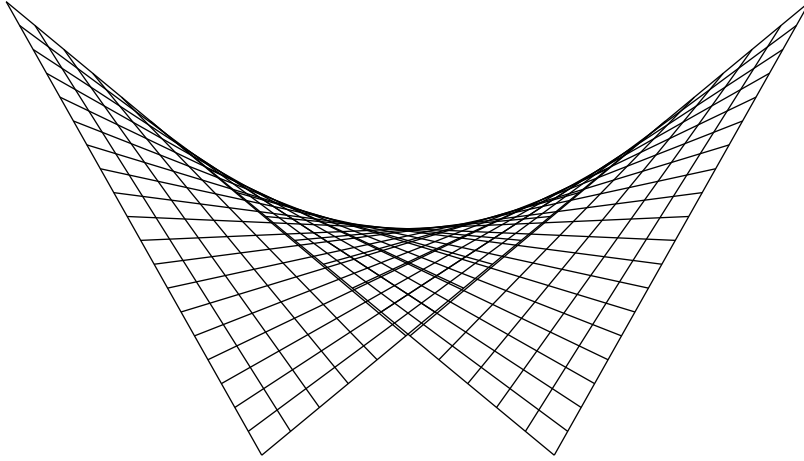
Если два уравнения пропорциональны, то они, очевидно, описывают одну и ту же поверхность. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Уравнения $x_1^2 + 1 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ не пропорциональны, но они описывают одно и то же (пустое) множество точек.

Теорема 16.33. Пусть каждое из уравнений

$$x^T Ax + 2a^T x + \alpha = 0 \quad \text{и} \quad x^T Bx + 2b^T x + \beta = 0 \quad (16.17)$$

описывает одну и ту же квадратку K , причем $K \neq \emptyset$, тогда уравнения (16.17) пропорциональны, т. е. $A = \lambda B$, $a = \lambda b$, $\alpha = \lambda\beta$ для некоторого $\lambda \neq 0$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение следует из теоремы Виета. Рассмотрим случай $n \geq 2$. Не нарушая общности, можно считать, что начало координат находится в одной из точек, принадлежащих квадратке. Тогда в уравнениях (16.17) имеем $\alpha = \beta = 0$.



Для произвольного $x \neq o$ рассмотрим прямую $t \cdot x$, $t \in \mathbb{R}$. Точки ее пересечения с квадрикой определяются каждым из уравнений

$$x^\top Ax \cdot t^2 + 2a^\top x \cdot t = 0 \quad \text{и} \quad x^\top Bx \cdot t^2 + 2b^\top x \cdot t = 0,$$

которые поэтому должны иметь одинаковые множества решений, а следовательно, быть пропорциональны (включая случаи $x^\top Ax = 0$ или/и $a^\top x = 0$), т. е.

$$x^\top Ax \cdot b^\top x = x^\top Bx \cdot a^\top x. \quad (16.18)$$

Заметим, что (16.18) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^n$, включая $x = o$.

Теперь докажем, что a и b пропорциональны. Предположим противное. Тогда, не нарушая общности, можно считать $a^\top x = x_1$, $b^\top x = x_2$, тогда уравнения (16.17) принимают вид $x^\top Ax + x_1 = 0$, $x^\top Bx + x_2 = 0$, а условие (16.18) — вид

$$x_1 x^\top Bx = x_2 x^\top Ax.$$

Изучая данное соотношение, приходим к выводу, что существует $c \in \mathbb{R}^n$, такой, что

$$x^\top Ax = x_1 c^\top x \quad \text{и} \quad x^\top Bx = x_2 c^\top x,$$

поэтому уравнения (16.17) принимают вид

$$(c^\top x + 1)x_1 = 0 \quad \text{и} \quad (c^\top x + 1)x_2 = 0$$

Анализируя первое из них, получаем, что гиперплоскость $x_1 = 0$ целиком принадлежит квадрике, что противоречит второму уравнению.

Итак, существует $\lambda \neq 0$, такое, что $a = \lambda b$. Из (16.18) получаем, что $A = \lambda B$. ■

16.4. Ортогональная классификация квадрик

Пользуясь аффинной классификацией, можно лишь установить, какому из классов аффинной эквивалентности принадлежит данная кривая или поверхность, но при такой классификации кривые (поверхности) внутри каждого класса считаются неразличимыми между собой, например, эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ аффинно эквивалентен окружности $x^2 + y^2 = 1$. Однако существует множество задач, для решения которых этого недостаточно: например, те задачи, где нас интересуют размеры полуосей эллипса. Поэтому естественно было бы попытаться ввести такую классификацию, чтобы, кроме класса аффинной эквивалентности, она учитывала и метрические параметры кривой (поверхности). В основе такой классификации должны лежать аффинные преобразования, оставляющие эти параметры неизменными. Поскольку, как нам уже известно, что из всех линейных преобразований только ортогональные преобразования сохраняют длины (а следовательно, и углы) в евклидовом пространстве, естественно ввести следующее определение.

Преобразование $x = q + Qy$, где Q — ортогональная матрица из $\mathbb{R}^{n \times n}$, а q — произвольный вектор (вектор сдвига) из \mathbb{R}^n , назовем *изометрией*. Если $q = o$, то такую изометрию назовем *ортогональным преобразованием*; если $Q = E$, то изометрию назовем *сдвигом*. Если Q — перестановочная матрица (т. е. получена из E перестановкой ее столбцов) и $q = o$, то изометрия соответствует перестановке переменных.

Легко видеть, что преобразование, обратное изометрии, есть изометрия. Кроме того, последовательное применение изометрий есть также изометрия.

Пусть изометрия

$$x = q + Qy \quad (16.19)$$

переводит уравнение

$$F(x) \equiv x^T Ax + 2a^T x + \alpha = 0 \quad (16.20)$$

в

$$y^T B y + 2b^T y + \beta = 0. \quad (16.21)$$

Напомним, что связь между коэффициентами этих уравнений устанавливается формулами

$$\begin{cases} B = Q^T A Q, \\ b = Q^T (Aq + a), \\ \beta = F(q). \end{cases} \quad (16.22)$$

Мы видели, что уравнения (16.20), (16.21) можно записать соответственно в виде

$$\hat{x}^T \hat{A} \hat{x} = 0, \quad \hat{y}^T \hat{B} \hat{y} = 0,$$

где

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \beta & b^T \\ b & B \end{pmatrix},$$

а (16.19) и (16.22) — в виде

$$\hat{x} = \hat{Q} \hat{y}, \quad \hat{B} = \hat{Q}^T \hat{A} \hat{Q},$$

где

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & Q \end{pmatrix}.$$

Утверждение 16.34. При изометрии матрицы A и B ортогонально подобны. При $q = o$ (ортогональное преобразование) матрицы \hat{A} и \hat{B} ортогонально подобны.

Доказательство. Так как Q ортогональна и $B = Q^T A Q$, то A и B ортогонально подобны. При $q = o$ матрица \hat{Q} , легко видеть, также ортогональна, поэтому \hat{A} и \hat{B} ортогонально подобны. ■

Величины, не изменяющиеся при изометрии, называются *ортогональными инвариантами* квадрики. Величины, не меняющиеся при ортогональном преобразовании, называются ее *ортогональными полуинвариантами* (или *семиинвариантами*).

Обозначим $\lambda_k = \lambda_k(A)$ — k -е собственное число матрицы A ($k = 1, 2, \dots, n$), $s_k = s_k(A)$ — сумму главных миноров порядка k матрицы A ($k = 1, 2, \dots, n$). Будем предполагать, что собственные числа упорядочены так, что $\lambda_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, r$), $\lambda_k = 0$ ($k = r + 1, \dots, n$), где r — ранг матрицы A .

Следствие 16.35.

1. Следующие величины являются ортогональными инвариантами квадрики:

- 1.1. $\lambda_k = \lambda_k(A)$ ($k = 1, 2, \dots, n$),
- 1.2. $s_k = s_k(A)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), в частности, $s_1 = \text{tr } A$, $s_n = \det A$,
- 1.3. $\hat{s}_{n+1} = s_{n+1}(\hat{A}) = \det \hat{A}$,
- 1.4. $\hat{s}_{r+1} = s_{r+1}(\hat{A})$, если $r \leq \hat{r} \leq r + 1$ (т. е. квадрика центральная),
 $\hat{s}_{r+2} = s_{r+2}(\hat{A})$, если $\hat{r} = r + 2$ (т. е. квадрика нецентральная).

2. Следующие величины являются ортогональными полуинвариантами квадрики:

- 2.1. $\hat{\lambda}_k = \lambda_k(\hat{A})$ ($k = 1, 2, \dots, n + 1$),
- 2.2. $\hat{s}_k = s_k(\hat{A})$ ($k = 1, 2, \dots, n + 1$).

Доказательство. 1.1, 1.2, 1.3. У подобных матриц совпадают собственные числа и характеристические многочлены, откуда следует ортогональная инвариантность λ_k и s_k . Инвариантность $\det \hat{A}$ вытекает из соотношений

$$\det \hat{A} = \det(\hat{Q}^{-1} \hat{A} \hat{Q}) = (\det \hat{Q})^{-1} \det \hat{A} \det \hat{Q} = \det \hat{A},$$

так как $\det \hat{Q} = \det Q = 1$ ($\det Q = 1$ следует из того, что матрица Q — ортогональная).

2.1, 2.2. Если $q = o$, то \hat{Q} ортогональна, поэтому \hat{A} и \hat{B} ортогонально подобны, откуда следует, что $\hat{\lambda}_k$ и \hat{s}_k являются ортогональными полуинвариантами.

1.4. Теперь докажем ортогональную инвариантность \hat{s}_{r+1} (для центральной квадрики) и \hat{s}_{r+2} (для нецентральной). Для этого представим изометрию $x = q + Qy$ в виде композиции следующих преобразований:

- 1) ортогонального преобразования $u = Sx$, где S — ортогональная матрица, такая, что $S^T A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ (приведение квадратичной формы $x^T A x$ к главным осям),
- 2) сдвига $v = u + t$, где $t = S Q^{-1} q$,
- 3) ортогонального преобразования $y = T v$, где $T = Q S^{-1}$.

В силу п. 2.2 ортогональные преобразования $u = Sx$, $y = T v$ сохраняют \hat{s}_k . Остается показать, что сдвиг $v = u + t$ сохраняет \hat{s}_{r+1} (для центральной квадрики) и \hat{s}_{r+2} (для нецентральной). Обращаем внимание, что мы свели задачу к уравнению квадрики, в котором ее матрица

диагональна. Итак, имеем расширенную матрицу

$$\widehat{B} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} \alpha & b_1 & \dots & b_r & b_{r+1} & \dots & b_n \\ \hline b_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ b_r & & & \lambda_r & & & \\ \hline b_{r+1} & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ b_n & & & & & & 0 \end{array} \right).$$

В результате сдвига $u + t$ получим

$$\widehat{C} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} \sum_{j=1}^r \lambda_j t_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n b_j t_j + \alpha & b_1 + \lambda_1 t_1 & \dots & b_r + \lambda_r t_r & b_{r+1} & \dots & b_n \\ \hline b_1 + \lambda_1 t_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ b_r + \lambda_r t_r & & & \lambda_r & & & \\ \hline b_{r+1} & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ b_n & & & & & & 0 \end{array} \right).$$

Если квадратика центральная, то $r \leq \widehat{r} \leq r + 1$, поэтому $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$ и

$$s_{r+1}(\widehat{B}) = \left| \begin{array}{c|ccc} \alpha & b_1 & \dots & b_r \\ \hline b_1 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_r & & & \lambda_r \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|ccc|ccc} \sum_{j=1}^r \lambda_j t_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n b_j t_j + \alpha & b_1 + \lambda_1 t_1 & \dots & b_r + \lambda_r t_r & & & \\ \hline b_1 + \lambda_1 t_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ b_r + \lambda_r t_r & & & \lambda_r & & & \end{array} \right| = s_{r+1}(\widehat{C}),$$

так как второй определитель может быть получен из первого прибавлением к верхней строке остальных строк с коэффициентами t_1, \dots, t_r и аналогичными преобразованиями со столбцами.

Если квадратика нецентральная, то

$$s_{r+2}(\widehat{B}) = \sum_{j=r+1}^n \left| \begin{array}{c|ccc|c} \alpha & b_1 & \dots & b_r & b_j \\ \hline b_1 & \lambda_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ b_r & & & \lambda_r & \\ \hline b_j & & & & 0 \end{array} \right| = -\lambda_1 \dots \lambda_r \sum_{j=r+1}^n b_j^2,$$

где каждый определитель в сумме раскладывается по последнему столбцу и последней строке.

Тот же результат получаем для

$$s_{r+2}(\widehat{C}) = \left| \begin{array}{c|cc|c} \sum_{j=1}^r \lambda_j t_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n b_j t_j + \alpha & b_1 + \lambda_1 t_1 & \dots & b_r + \lambda_r t_r & b_j \\ \hline & b_1 + \lambda_1 t_1 & & & \\ & \vdots & & & \\ & b_r + \lambda_r t_r & & \lambda_r & \\ \hline & b_j & & & 0 \end{array} \right| = -\lambda_1 \dots \lambda_r \sum_{j=r+1}^n b_j^2.$$

Итак, $s_{r+2}(\widehat{B}) = s_{r+2}(\widehat{C})$. ■

Теорема 16.36. *Изотметрией любое уравнение (16.9) приводится к виду*

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2 = \begin{cases} \gamma, & \text{если } r \leq \widehat{r} \leq r+1, \\ 2\mu y_{r+1}, & \text{если } \widehat{r} = r+2, \end{cases}$$

где

$$\gamma = -\frac{\widehat{s}_{r+1}}{s_r}, \quad \mu^2 = -\frac{\widehat{s}_{r+2}}{s_r},$$

λ_j — ненулевые собственные числа. Это уравнение (называемое почти каноническим) определяется единственным образом с точностью до переименования переменных.

Доказательство. Вначале ортогональным преобразованием $x = Qu$ приведем квадратичную форму к главным осям. Все уравнение примет вид:

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j u_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n b_j u_j + \alpha = 0.$$

Выделяем полный квадрат:

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \left(u_j + \frac{b_j}{\lambda_j} \right)^2 + 2 \sum_{j=r+1}^n b_j u_j - \sum_{j=1}^r \frac{b_j^2}{\lambda_j} + \alpha = 0.$$

После замены (сдвига)

$$\begin{cases} v_j = u_j + \frac{b_j}{\lambda_j} & (j = 1, 2, \dots, r) \\ v_j = u_j & (j = r+1, r+2, \dots, n) \end{cases}$$

получаем уравнение

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j^2 + 2 \sum_{j=r+1}^n b_j v_j - \gamma = 0,$$

где $\gamma = \sum_{j=1}^r \frac{b_j^2}{\lambda_j} - \alpha$.

Возможны 2 случая:

Если $b_j = 0$ ($j = r+1, r+2, \dots, n$), то уравнение сразу принимает первый вид из (16.9).

Если $(b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n) \neq 0$, то обозначим

$$\mu = \sqrt{b_{r+1}^2 + b_{r+2}^2 + \dots + b_n^2}$$

и сделаем замену

$$\begin{cases} y_1 = v_1 \\ y_2 = v_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_r = v_r \\ y_{r+1} = \beta_{r+1,r+1}v_{r+1} + \dots + \beta_{r+1,n}v_n - \frac{\gamma}{2\mu} \\ y_{r+2} = \beta_{r+2,r+1}v_{r+1} + \dots + \beta_{r+2,n}v_n \\ \dots\dots\dots \\ y_n = \beta_{n,r+1}v_{r+1} + \dots + \beta_{nn}v_n \end{cases}$$

где

$$\beta_{r+1,r+1} = -\frac{b_{r+1}}{\mu}v_{r+1}, \quad \beta_{r+1,r+2} = -\frac{b_{r+2}}{\mu}v_{r+2}, \quad \dots, \quad \beta_{r+1,n} = -\frac{b_n}{\mu}v_n.$$

Чтобы это преобразование было изометрией, векторы

$$\begin{aligned} &(\beta_{r+2,r+1}, \beta_{r+2,r+1}, \dots, \beta_{r+2,n}) \\ &(\beta_{r+3,r+1}, \beta_{r+3,r+1}, \dots, \beta_{r+3,n}) \\ &\dots\dots\dots \\ &(\beta_{n,r+1}, \beta_{r+2,r+1}, \dots, \beta_{nn}) \end{aligned}$$

должны дополнять вектор $(\beta_{r+1,r+1}, \dots, \beta_{r+1,n})$ до ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^{n-r} . ■

Дальнейшее упрощение уравнения квадрики получается при умножении обеих его частей на подходящее число.

В частности, для случая $n = 2$ получаем 9 видов уравнений, представленных в таблице 16.5. Это канонические уравнения кривых второго порядка. Те же уравнения задают цилиндрические поверхности второго порядка. Канонические уравнения нецилиндрических поверхностей представлены в таблице 16.6.

Итак, получаем следующие теоремы.

Теорема 16.37. *Для любой кривой второго порядка существует декартова система координат, в которой эта кривая задается одним из канонических уравнений, представленных в таблице 16.5. Две кривые второго порядка ортогонально эквивалентны тогда и только тогда, когда их канонические уравнения одинаковы.*

Теорема 16.38. *Для любой поверхности второго порядка существует декартова система координат, в которой она задается одним из канонических уравнений, перечисленных в таблицах 16.6 и 16.7. Две поверхности второго порядка ортогонально эквивалентны тогда и только тогда, когда их канонические уравнения совпадают.*

Таблица 16.5. Канонические уравнения кривых второго порядка

№	Название	Каноническое уравнение	Примечание
1.	Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$	
2.	Мнимый эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \geq b > 0$	Пустое множество точек
3.	Пара мнимых пересекающихся прямых	$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad b \geq 1$	Точка (0, 0)
4.	Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0$	
5.	Пара пересекающихся прямых	$x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad b \geq 1$	Две прямые $y = \pm bx$
6.	Парабола	$x^2 = 2py, \quad p > 0$	
7.	Пара параллельных прямых	$\frac{x^2}{a^2} = 1, \quad a > 0$	Две прямые $x = \pm a$
8.	Пара мнимых параллельных прямых	$\frac{x^2}{a^2} = -1, \quad a > 0$	Пустое множество точек
9.	Двойная прямая	$x^2 = 0$	Прямая $x = 0$

Таблица 16.6. Канонические уравнения нецилиндрических поверхностей второго порядка

№	Название	Каноническое уравнение	Примечание
1.	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geq b \geq c > 0$	
2.	Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \geq b \geq c > 0$	Пустое множество точек
3.	Мнимый конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 0, \quad a \geq b \geq 1$	Точка (0, 0, 0)
4.	Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geq b > 0, c > 0$	
5.	Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \geq b > 0, c > 0$	
6.	Конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0, \quad a \geq b \geq 1$	
7.	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a \geq b > 0$	
8.	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a \geq b > 0$	

Таблица 16.7. Канонические уравнения цилиндрических поверхностей второго порядка

№	Название	Каноническое уравнение	Примечание
1.	Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$	
2.	Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \geq b > 0$	Пустое множество точек
3.	Пара мнимых пересекающихся плоскостей	$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad b \geq 1$	Прямая $x = y = 0$
4.	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0$	
5.	Пара пересекающихся плоскостей	$x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad b \geq 1$	Две плоскости $y = \pm bx$
6.	Параболический цилиндр	$x^2 = 2py, \quad p > 0$	
7.	Пара параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = 1, \quad a > 0$	Две плоскости $x = \pm a$
8.	Пара мнимых параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = -1, \quad a > 0$	Пустое множество точек
9.	Двойная плоскость	$x^2 = 0$	Плоскость $x = 0$

Ответы и решения

16.25. В полярной системе координат с полюсом A и полярной осью, направленной в противоположную сторону от AB , кривая имеет уравнение $r = \frac{|AB|}{1 - 2 \cos \varphi}$, $\arccos \frac{1}{2} < \varphi < 2\pi - \arccos \frac{1}{2}$. В полярной системе координат с полюсом A и осью AB кривая имеет уравнение $r = \frac{|AB|}{1 + 2 \cos \varphi}$, $-\pi + \arccos \frac{1}{2} < \varphi < \pi - \arccos \frac{1}{2}$. Это левая (если точка A лежит левее B) ветвь гиперболы с фокусом A , эксцентриситетом 2, фокальным параметром $|AB|$, действительной полуосью $|AB|/3$ и мнимой полуосью $|AB|/\sqrt{3}$.