Глава 15

Линейные преобразования унитарных и евклидовых пространств

15.1. Сопряженные преобразования

Рассмотрим линейное преобразование φ унитарного или евклидова пространства V. Отображение $V \to V$ называется *сопряженным* к преобразованию φ и обозначается φ^*, если

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y) \tag{15.1}$$

для произвольных x, y из V.

Теорема 15.1. *Для любого преобразования φ унитарного или евклидова пространства V преобразование φ^* существует, единственно и является линейным, причем*

$$[\varphi^*]_e = \overline{\Gamma_e^{-1}[\varphi]_e^\top \Gamma_e}. \tag{15.2}$$

Доказательство. Существование Покажем, что линейное преобразование ψ с матрицей

$$[\psi]_e = \overline{\Gamma_e^{-1}[\varphi]_e^\top \Gamma_e}$$

является сопряженным к преобразованию φ. Используя правила выражения скалярного произведения через координаты векторов и матрицу Грама и правила выражения координатного столбца образа вектора через координаты прообраза и матрицу преобразования, для произвольных x, y из V получаем

$$\begin{aligned}
(x, \psi y) &= [x]^\top \Gamma \overline{[\psi][y]} \\
&= [x]^\top \Gamma \overline{\overline{\Gamma_e^{-1}[\varphi]_e^\top \Gamma_e}[y]} \\
&= ([\varphi][x])^\top \Gamma \overline{[y]} \\
&= (\varphi x, y).
\end{aligned}$$

Единственность и проч Выражая скалярное произведение через координаты векторов, равенство (15.1) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
& & ([\varphi][x])^\top \Gamma \overline{[y]} &= [x]^\top \Gamma \overline{[\varphi^* y]}, \\
&\text{откуда} & [x]^\top [\varphi]^\top \Gamma \overline{[y]} &= [x]^\top \Gamma \overline{[\varphi^* y]}, \\
&\text{так как } x \text{ — любой, то} & [\varphi]^\top \Gamma \overline{[y]} &= \Gamma \overline{[\varphi^* y]}, \\
&\text{следовательно,} & [\varphi^* y] &= \underbrace{\overline{\Gamma^{-1}[\varphi]^\top \Gamma}}_{A=[\varphi^*]}[y].
\end{aligned}$$

Таким образом, преобразование φ^* единственно, является линейным и имеет матрицу (15.2). ∎

Замечание Если базис ортонормированный, то матрица Грама единичная и формула (15.2) приобретает особенно простой вид:

$$[\varphi^*]_e = \overline{[\varphi]_e}^{\top}.$$

Матрица $\overline{A}^{\top}$ называется *сопряженной* к матрице $A \in F^{n\times n}$ и обозначается A^*. Таким образом, в *ортонормированном базисе матрица сопряженного преобразования сопряжена с матрицей исходного преобразавания.*

Теорема 15.2 (Свойства операции сопряжения). *Для произвольных преобразований φ, ψ и любого скаляра $\alpha \in F$ справедливы следующие свойства:*

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
3. $(\alpha\varphi)^* = \overline{\alpha}\varphi^*$;
4. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$.

Доказательство. Свойства можно вывести из соответствующих свойств матриц. Проиллюстрируем на примере свойства 1) другой способ доказательства. Для произвольных x, y из V имеем:

$$\begin{aligned}(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y) &= \overline{(\varphi^* y, x)}\\ &= \overline{(y, \varphi^{**} x)} = (\varphi^{**} x, y).\end{aligned}$$

Откуда $(\varphi x - \varphi^{**}x, y) = 0$. Последнее равенство справедливо для произвольного вектора y. В частности, для $y = \varphi x - \varphi^{**}$ имеем

$$(\varphi x - \varphi^{**}x, \varphi x - \varphi^{**}x) = 0,$$

поэтому $\varphi x = \varphi^{**}x$, где x — любой вектор из V, поэтому $\varphi = \varphi^{**}$. ∎

15.2. Теорема Шу́ра

Лемма 15.3. *Ортогональное дополнение к собственному вектору линейного преобразования φ унитарного или евклидового пространства является инвариантным подпространством для сопряженного преобразования φ^*.*

Доказательство. Пусть x — собственный вектор, λ — соответствующее ему собственное число: $\varphi x = \lambda x$. Покажем, что

$$\varphi^* x^{\perp} \subseteq x^{\perp}.$$

Действительно, для произвольного $y \in x^{\perp}$ имеем

$$(x, \varphi^* y) = (\varphi x, y) = \lambda(x, y) = 0.$$

∎

Лемма 15.4. *Для любого линейного преобразования φ комплексного n-мерного линейного пространства V существует инвариантное подпространство размерности $n-1$.*

Доказательство. Способ 1 См. теорему Жордана.
Способ 2 В пространстве V введем скалярное произведение. Для преобразования φ^* найдем собственный вектор x. Подпространство $x^\perp$, разумеется, имеет размерность $n-1$ и по предыдущей лемме инвариантно относительно преобразования $\varphi^{**} = \varphi$. ∎

Замечание 15.5. Второй способ доказательства дает, конечно, более простой алгоритм нахождения $(n-1)$-мерного инвариантного подпространства.

Лемма 15.6. *Для любого линейного преобразования φ комплексного n-мерного линейного пространства V существует система инвариантных подпространств V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, такая, что $\dim V_i = i$ и*

$$V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V.$$

Доказательство. Способ 1 См. теорему Жордана.
Способ 2 В V найдем $(n-1)$-мерное инвариантное (относительно φ) подпространство. Рассмотрим сужение $\varphi \mid V_{n-1}$ преобразования φ на подпространство V_{n-1}. В нем по лемме 2 снова найдем инвариантное подпространство V_{n-2} размерности на 1 меньше и т. д. ∎

Теорема 15.7 (Шур). *Для любого линейного преобразования φ унитарного пространства существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования верхнетреугольная.*

Доказательство. Способ 1 Построим жорданов базис $e_1, \ldots, e_n$ преобразования φ. С помощью процесса ортогонализации ортонормируем этот базис. Полученный базис обозначим через $f_1, \ldots, f_n$. Заметим, что матрица перехода $Q_{e\to f}$ верхнетреугольная. Имеем

$$[\varphi]_f = Q^{-1}_{e\to f}[\varphi]_e Q_{e\to f},$$

причем все три матрицы в правой части верхнетреугольные. Поэтому матрица $[\varphi]_f$ тоже верхнетреугольная и $f_1, \ldots, f_n$ — искомый базис.
Способ 2 По предыдущей лемме существуют инвариантные подпространства V_i, такие, что $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n$ и $\dim V_i = i$. Пусть f_1 — произвольный нормированный вектор из V_1, f_2 — нормированный вектор из V_2, ортогональный V_1, …, f_n — нормированный вектор из V_n, ортогональный V_{n-1}. Легко видеть, что базис $f_1, \ldots, f_n$ удовлетворяет условиям теоремы. ∎

15.3. Нормальные преобразования

Преобразование φ евклидова или унитарного пространства называется *нормальным*, если

$$\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^*.$$

Матрица $A \in F^{n\times n}$ называется *нормальной*, если $A^*A = AA^*$.

Теорема 15.8. *Критерий нормального преобразования унитарного пространства] Преобразование φ унитарного пространства является нормальным тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис пространства, состоящий из собственных векторов.*

Доказательство. Достаточность Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — система собственных векторов преобразования φ, составляющая ортонормированный базис пространства, тогда

$$[\varphi]_e = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad [\varphi^*]_e = \mathrm{diag}(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n).$$

Легко видеть, что $[\varphi^*]_e[\varphi]_e = [\varphi]_e[\varphi^*]_e$, и, следовательно, $\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^*$.
Необходимость Пусть φ — нормальное преобразование. По теореме Шура для него существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором $[\varphi]_e = (\beta_{ij})$ — верхнетреугольная матрица, т. е. $\beta_{ij} = 0$ при $i > j$. Итак,

$$[\varphi]_e = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [\varphi^*]_e = \begin{pmatrix} \overline{\beta}_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{\beta}_{12} & \overline{\beta}_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ \overline{\beta}_{1n} & \overline{\beta}_{2n} & \ldots & \overline{\beta}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из определения нормального преобразования получаем

$$[\varphi][\varphi^*] - [\varphi^*][\varphi] = 0.$$

Выразим через β_{ij} диагональные элементы матрицы, стоящей в правой части приведенного равенства:

$$\begin{aligned} |\beta_{11}|^2 + |\beta_{12}|^2 + \ldots + |\beta_{1n}|^2 - |\beta_{11}|^2 &= 0, \\ |\beta_{22}|^2 + |\beta_{23}|^2 + \ldots + |\beta_{2n}|^2 - |\beta_{12}|^2 - |\beta_{22}|^2 &= 0, \\ &\ldots \\ |\beta_{nn}|^2 - |\beta_{1n}|^2 - |\beta_{2n}|^2 - \ldots - |\beta_{nn}|^2 &= 0. \end{aligned}$$

Последовательно получаем, что все внедиагональные элементы равны нулю. ∎

Следствие 15.9. *Собственные подпространства нормального преобразования унитарного пространства попарно ортогональны.*

Следствие 15.10. *Для произвольной нормальной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ существует ортогональная $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, такая, что $Q^{-1}AQ$ диагональна (также говорят, что матрица A ортогонально подобна диагональной).*

Теорема 15.11. *Критерий нормального преобразования евклидова пространства Преобразование φ евклидова пространства является нормальным тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис пространства, в котором матрица преобразования φ блочно диагональная с блоками двух типов:*

1. *блоки первого порядка;*
2. *блоки второго порядка вида*

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Достаточность Пусть в некотором ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица преобразования φ имеет блочно-диагональный вид

$$[\varphi]_e = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_m & -\beta_m \\ \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}\right).$$

Тогда

$$[\varphi]_e = \operatorname{diag}\left(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_k, \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 & \overline{\beta}_1 \\ -\overline{\beta}_1 & \overline{\alpha}_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_m & \overline{\beta}_m \\ -\overline{\beta}_m & \overline{\alpha}_m \end{pmatrix}\right).$$

Поэтому

$$[\varphi\varphi^*]_e = \left(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_k|^2, \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 & 0 \\ 0 & |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 & 0 \\ 0 & |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 \end{pmatrix}\right) = [\varphi^*\varphi]_e$$

Следовательно, $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$.

Необходимость Пусть φ — нормальное преобразование евклидова пространства, $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный ортонормированный базис этого пространства. Рассмотрим преобразование $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, заданное формулой $\Phi u = Au$, где $u \in \mathbb{C}^n$, $A = [\varphi]_e$. Пусть в пространстве $\mathbb{C}^n$ определено стандартное скалярное произведение. Так как матрица A — нормальная, то преобразование Φ — нормальное. Так как матрица A — вещественная, то, не нарушая общности можно считать, что система собственных значений имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_1, \ldots, \lambda_t, \lambda_{t+1}, \ldots, \lambda_k, \\ \overline{\lambda}_{t+1}, \ldots, \overline{\lambda}_k, \end{aligned}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, t)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.

Для каждого вещественного собственного значения λ_i $(i = 1, \ldots, t)$ построим ортонормированный базис $u_{i1}, \ldots, u_{is_i}$ собственного подпространства, составленный из векторов с вещественными компонентами. Так как матрица A и собственное значение λ_i — вещественные, то это возможно.

Для пары комплексно сопряженных собственных значений $\alpha_i \pm i\beta_i \notin \mathbb{R}$ $(i = t+1, \ldots, k)$ построим ортогональный базис собственного подпространства

$$u_{i1} = x_{i1} + iy_{i1}, \ldots, u_{is_i} = x_{is_i} + iy_{is_i} \tag{15.3}$$

и

$$v_{i1} = x_{i1} - iy_{i1}, \ldots, v_{is_i} = x_{is_i} - iy_{is_i} \tag{15.4}$$

соответственно, где $x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}^n$ $(i = t+1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, s_i)$.

Таким образом, имеем:

Собственные числа	Собственные векторы
$\lambda_1 :$	$u_{11}, \ldots, u_{1s_1}$
$\vdots$	$\vdots$
$\lambda_t :$	$u_{t1}, \ldots, u_{ts_t}$
$\alpha_{t+1} \pm i\beta_{t+1} :$	$x_{t+1\,1} \pm iy_{t+1\,1}, \ldots, x_{t+1\,s_{t+1}} \pm iy_{t+1\,s_{t+1}}$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_k \pm i\beta_k :$	$x_{k1} \pm iy_{k1}, \ldots, x_{ks_k} \pm iy_{ks_k}$

1. Из формул (15.3,15.4) следует, что

$$x_{ij} = \frac{u_{ij} + v_{ij}}{2}, \quad y_{ij} = \frac{u_{ij} - v_{ij}}{2i},$$

поэтому

$$L(u_{ij}, v_{ij}) = L(x_{ij}, y_{ij}). \tag{15.5}$$

2а. Докажем, что $(x_{ij}, y_{ij}) = 0$. Имеем

$$0 = (u_{ij}, v_{ij}) = (x_{ij} + iy_{ij}, x_{ij} - iy_{ij}) = (x_{ij}, x_{ij}) + i(x_{ij}, y_{ij}) + i(y_{ij}, x_{ij}) - (y_{ij}, y_{ij}),$$

откуда, приравнивая нулю действительные и мнимые части, получаем $(x_{ij}, x_{ij}) = (y_{ij}, y_{ij})$ и $(x_{ij}, y_{ij}) = 0$.

2б. При $i \neq p$ или(и) $j \neq q$ имеем $L(u_{ij}, v_{ij}) \perp L(u_{pq}, v_{pq})$, откуда, в силу (15.5), получаем

$$(x_{ij}, x_{pq}) = (x_{ij}, y_{pq}) = (y_{ij}, y_{pq}) = 0.$$

3. Имеем

$$\Phi x_{ij} + i\Phi y_{ij} = \Phi u_{ij} = (\alpha_{ij} + i\beta_{ij})(x_{ij} + iy_{ij}) = (\alpha_{ij}x_{ij} - \beta_{ij}y_{ij}) + i(\alpha_{ij}y_{ij} + \beta_{ij}x_{ij}),$$

откуда, приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\Phi x_{ij} = \alpha_{ij}x_{ij} - \beta_{ij}y_{ij}, \quad \Phi y_{ij} = \alpha_{ij}y_{ij} + \beta_{ij}x_{ij}.$$

4. Теперь легко видеть, что система f_{ij} $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, s_i)$, f'_{ij} $(i = t+1, \ldots, k;$ $j = 1, \ldots, s_i)$, где

$$\begin{aligned}
[f_{ij}]_e &= u_{ij} && (i = 1, \ldots, t; j = 1, \ldots, s_i),\\
[f_{ij}]_e &= x_{ij}/|x_{ij}| && (i = t+1, \ldots, k; j = 1, \ldots, s_i),\\
[f_{ij}]_e &= y_{ij}/|y_{ij}| && (i = t+1, \ldots, k; j = 1, \ldots, s_i),
\end{aligned}$$

составляет искомый базис. ∎

15.4. Унитарные и ортогональные преобразования

Преобразование φ унитарного (соответственно евклидова) пространства называется *унитарным* (соответственно *ортогональным*), если

$$\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi = \varepsilon. \tag{15.6}$$

Легко видеть, что унитарное (ортогональное) преобразование является нормальным. Условие (15.6), очевидно, эквивалентно утверждению, что

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y) \tag{15.7}$$

для любых векторов x, y и поэтому *унитарные (ортогональные) преобразования — это в точности те преобразования, которые сохраняют*[1] *скалярное произведение.* Из (15.6) также следует, что для унитарного (ортогонального) преобразования φ обратное φ^{-1} существует и $\varphi^{-1} = \varphi^*$.

Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется *унитарной*, если $A^\top A = E$.

[1] в смысле формулы (15.7)

Теорема 15.12. *Преобразование φ унитарного (евклидова) пространства унитарно (ортогонально) тогда и только тогда, когда*

$$(\varphi x, \varphi x) = (x, x) \tag{15.8}$$

для любого вектора x.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Для унитарного (евклидова) пространства легко проверить равенства

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left((x+y, x+y) - (x-y, x-y) + i(x+iy, x+iy) - i(x-iy, x-iy)\right)$$

и

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left((x+y, x+y) - (x-y, x-y)\right)$$

соответственно, откуда $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$. ∎

Замечание 15.13. Для случая евклидова геометрического пространства $\mathbf{V}_3$ можно дать следующее доказательство достаточности условий теоремы. Формула (15.8) означает, что преобразование сохраняет модули (т. е. длины) векторов, а значит расстояние между точками. Сохранение углов следует теперь из теоремы косинусов. Скалярное произведение выражается через длины векторов (которые не изменяются) и косинус угла между ними (который также остается постоянным).

Теорема 15.14. *Преобразование φ унитарного (евклидова) пространства унитарно (ортогонально) тогда и только тогда, когда образы векторов произвольного (какого-нибудь) ортонормированного базиса ортонормированы.*

Доказательство. Необходимость Пусть φ — унитарное (ортогональное) преобразование, $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис. Тогда $(\varphi e_i, \varphi e_j) = (e_i, e_j)$, т. е. система $\varphi e_1, \ldots, \varphi e_n$ — ортонормирована.

Достаточность Пусть $e_1, \ldots, e_n$, $\varphi e_1, \ldots, \varphi e_n$ — две ортонормированные системы, $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, $y = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$ — произвольные векторы. Тогда

$$\begin{aligned}(\varphi x, \varphi y) &= (\alpha_1 \varphi e_1 + \ldots + \alpha_n \varphi e_n, \beta_1 \varphi e_1 + \ldots + \beta_n \varphi e_n) = \alpha_1 \overline{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n \overline{\beta}_n \\ &= (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n, \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n) = (x, y).\end{aligned}$$

∎

Теорема 15.15 (Свойства собственных чисел ортогонального (унитарного) преобразования)**.** *Все собственные числа ортогонального (унитарного) преобразования по абсолютной величине равны* 1.

Доказательство. Для собственного вектора x, такого, что $\varphi x = \lambda x$, имеем

$$(x, x) = (\varphi x, \varphi x) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x, x),$$

откуда $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$. ∎

Теорема 15.16 (Критерий унитарного преобразования)**.** *Если все собственные числа нормального преобразования φ унитарного пространства по абсолютной величине равны* 1, *то φ — унитарное.*

Доказательство. Так как φ — нормальное, то существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, для которого

$$[\varphi]_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

откуда

$$[\varphi^*]_e = \operatorname{diag}(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n).$$

По условию $|\lambda_i| = 1$, поэтому $[\varphi]_e[\varphi^*]_e = E$, т. е. $\varphi\varphi^* = \varepsilon$. ∎

Теорема 15.17 (Критерий ортогонального преобразования)**.** *Преобразование φ евклидова пространства является ортогональным тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис пространства, в котором матрица преобразования φ блочно диагональная с блоками двух типов:*

1. *блоки первого порядка вида*
$$(\pm 1);$$
2. *блоки второго порядка вида*
$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Теорема доказывается аналогично доказательству критерия нормального преобразования евклидова пространства. ∎

15.5. Эрмитовы (самосопряженные) и симметрические преобразования

Преобразование φ унитарного (соответственно евклидова) пространства называется *эрмитовым* (соответственно *симметрическим*), если $\varphi = \varphi^*$. Легко видеть, что эрмитово (симметрическое) преобразование является нормальным.

Теорема 15.18 (Свойства собственных чисел эрмитового преобразования)**.** *Все собственные значения эрмитового преобразования вещественны.*

Доказательство. Для собственного вектора x, такого, что $\varphi x = \lambda x$, имеем

$$\lambda(x, x) = (\varphi x, x) = (x, \varphi x) = \overline{\lambda}(x, x),$$

откуда $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. ∎

Теорема 15.19 (Критерий эрмитового преобразования)**.** *Если все собственные числа нормального преобразования φ унитарного пространства вещественны, то φ эрмитово.*

Доказательство. Так как φ — нормальное, то существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, для которого

$$[\varphi]_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Так как по условию $\lambda_i \in \mathbb{R}$, то $[\varphi]_e = [\varphi^*]_e$, т. е. $\varphi = \varphi^*$. ∎

Теорема 15.20 (Критерий симметрического преобразования)**.** *Преобразование φ евклидова пространства тогда и только тогда является симметрическим, когда для него существует ортонормированный базис из собственных векторов.*

Доказательство. Ну, вообще-то, очевидно. ∎

Эрмитово (симметрическое) преобразование называется

- *положительным*, или *положительно определенным*, если $(x, \varphi x) > 0$ для любого ненулевого вектора x,
- *неотрицательным*, или *положительно полуопределенным*, если $(x, \varphi x) \geq 0$ для любого вектора x,
- *отрицательным*, или *отрицательно определенным*, если $(x, \varphi x) < 0$ для любого ненулевого вектора x,
- *неположительным*, или *отрицательно полуопределенным*, если $(x, \varphi x) \geq 0$ для любого вектора x.

Теорема 15.21 (Критерий положительного (неотрицательного) преобразования)**.** *Эрмитово или симметрическое преобразование положительно определено (соответственно полуопределено) тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (соответственно неотрицательны).*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис из собственных векторов эрмитова или симметрического преобразования φ, причем $\varphi e_i = \lambda_i e_i$. Пусть $[x]_e = (x_1, \ldots, x_n)^\top$, $[y]_e = (y_1, \ldots, y_n)^\top$, тогда $(x, y) = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_n\overline{y}_n$. и $(x, \varphi x) = \lambda_1|x_1|^2 + \ldots + \lambda_n|x_n|^2$, откуда и следует утверждение теоремы. ∎

15.6. Косоэрмитово преобразование

Преобразование φ унитарного пространства называется *косоэрмитовым*, если $\varphi^* = -\varphi$.

Утверждение 15.22. *Преобразование φ унитарного пространства является косоэрмитовым тогда и только тогда, когда $\varphi = i\psi$ для некоторого эрмитова преобразования ψ.*

Доказательство. Необходимость Пусть $\psi = -i\varphi$, где ϕ — косоэрмитово преобразование, тогда

$$(\psi)^* = (-i\varphi)^* = i\varphi^* = -i\varphi = \psi,$$

таким образом, ψ — эрмитово. Легко видеть, что $\varphi = i\psi$.
Достаточность Достаточность проверяется непосредственно. ∎

15.7. Разложения преобразований

Произвольное комплексное число можно представить либо в алгебраической форме $\alpha + i\beta$, либо в тригонометрической $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Следующие две теоремы о разложении пробразований являются аналогами этих представлений.

Теорема 15.23 (Разложение преобразования в прямую сумму эрмитова и косоэрмитова преобразований)**.** *Для любого преобразования φ унитарного пространства существуют единственные эрмитовы преобразования ψ_1, ψ_2, такие, что $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$.*

Доказательство. *Существование* Пусть

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*), \quad \psi_2 = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*). \tag{15.9}$$

Легко проверить, что данные преобразования эрмитовы и $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$.
Единственность Пусть $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$ и преобразования ψ_1, ψ_2 эрмитовы. Тогда $\varphi^* = \psi_1 - i\psi_2$, откуда следуют формулы (15.9). По этим формулам ψ_1, ψ_2 определяются однозначно. ∎

Теорема 15.24 (Полярное разложении)**.** *Для любого преобразования φ унитарного (соответственно евклидова) пространства существуют неотрицательное самосопряженное (соответственно симметрическое) преобразование ψ и унитарное (соответственно ортогональное) преобразование η, такие, что $\varphi = \psi\eta$. Если φ — невырождено, то преобразования ψ, η определяются единственным образом.*

Доказательство. Во-первых, исследуем преобразование $\varphi\varphi^*$. Докажем, что оно самосопряженное (симметрическое) и неотрицательное. Действительно,

$$(\varphi\varphi^*)^* = (\varphi^*)^* \varphi^* = \varphi\varphi^*.$$

Далее,

$$(x, \varphi\varphi^* x) = (\varphi x, \varphi x) \geq 0.$$

для любого вектора x.

Во-вторых, докажем что если φ — невырождено, то преобразования ψ, η определяются единственным образом. Пусть $\varphi = \psi\eta$, $\psi^* = \psi$, $\psi \geq 0$, $\eta^* = \eta^{-1}$. Тогда $\varphi\varphi^* = \psi\eta(\psi\eta)^* = \psi^2$, откуда положительное самосопряженное преобразование ψ определяется единственным образом. Теперь $\eta = \psi^{-1}\varphi$.

Наконец, покажем, как построить преобразования ψ и η[2]. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис из собственных векторов преобразования $\varphi\varphi^* \geq 0$. Имеем

$$\varphi\varphi^* e_i = k_i^2 e_i.$$

Не нарушая общности, будем считать, что

$$k_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad k_i = 0 \quad (i = m+1, \ldots, n).$$

Пусть[3]

$$\psi e_i = k_i e_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{$\star$}$$

Положим

$$w_i = \frac{\varphi^* e_i}{k_i} \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{$\star\star$}$$

и докажем, что векторы $w_1, \ldots, w_m$ образуют ортонормированный базис пространства $W = L(w_1, \ldots, w_m)$. Действительно,

$$k_i k_j (w_i, w_j) = (\varphi^* e_i, \varphi^* e_j) = (e_i, \varphi\varphi^* e_j) = k_j^2 (e_i, e_j).$$

[2]Из предыдущего абзаца следует способ нахождения $\psi = \sqrt{\varphi\varphi^*}$ и $\eta = \psi^{-1}\varphi$ по произвольному *невырожденному* преобразованию φ. Приведенный далее способ уже не требует невырожденности φ.

[3]Таким образом, как и для *невырожденного* преобразования имеем $\psi = \sqrt{\varphi\varphi^*}$. Далее символами $\star$ отмечены основные формулы, используемые в *алгоритме* нахождения полярного разложения.

Пусть

$$\eta w_i = e_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{$\star\star\star$}$$

Легко видеть, что ψ — неотрицательное самосопряженное (симметрическое), η — унитарное (ортогональное). Проверим, что $\varphi = \psi\eta$. Имеем

$$\text{Для } i = 1, \ldots, m: \qquad \psi\eta w_i = \psi e_i = k_i e_i \quad \text{и} \quad \varphi w_i = \varphi\varphi^* e_i / k_i = k_i e_i;$$

$$\text{для } i = m+1, \ldots, n: \quad \psi\eta w_i = \psi e_i = 0 \quad \text{и} \quad (\varphi w_i, \varphi w_i) = (w_i, \underbrace{\varphi^*\varphi w_i}_{\in \operatorname{Im}\varphi^* = W}) = 0.$$

∎

Замечание 15.25. Применим доказанную теорему для преобразования φ^*, тогда $\varphi^* = \psi\eta$, откуда $\varphi = \eta^*\psi$, причем η^* — унитарное (ортогональное), ψ — самосопряженное (симметрическое) неотрицательное преобразование.