Глава 13

Вещественные билинейные функции

13.1. Определения

Рассмотрим линейное векторное пространство V над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 13.1. Отображение

$$f : V \times V \to \mathbb{R}, \tag{13.1}$$

ставящее каждой паре векторов x, y из V число $f(x, y)$ из $\mathbb{R}$, называется *билинейной функцией*, если для любых x, y, z из V и любых α, β из $\mathbb{R}$ выполнены соотношения

1) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$,
2) $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$,
3) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$,
4) $f(x, \beta y) = \beta f(x, y)$.

Обозначим множество всех билинейных функций, действующих в пространстве V, через $\mathcal{F}(V)$.

Пример 13.2. Легко проверить, что следующие функции являются билинейными:

1) $f(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ в $\mathbb{R}^n$;
2) скалярное произведение $f(x, y) = (x, y) = |x||y| \cos\alpha$ в пространствах $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$, где α — угол между векторами x и y.

Упражнение 13.3.

1) Доказать, что $f(o, x) = 0$ для любой билинейной функции f и любого вектора $x \in V$.
2) Доказать, что для любых $x_1, \ldots x_m$, $y_1, \ldots y_l$ из V и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta, \ldots, \beta_l$ из $\mathbb{R}$ справедливо
$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i,\ \sum_{j=1}^{l} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{l} \beta_j f(x_i, y_j).$$
3) Доказать, что для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ отображение $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданное формулой
$$f(x, y) = x^\top A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$
является билинейной функций.

4) Доказать, что для любой функции $k(t) \in \mathbb{R}(a,b)$ отображение $f : \mathbb{R}(a,b) \times \mathbb{R}(a,b) \to \mathbb{R}$, заданное формулой

$$f(x,y) = \int_a^b k(t)x(t)y(t)dt,$$

является билинейной функций.

5) Привести пример отображения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, не являющегося билинейной функцией.

13.2. Матрица билинейной функции

13.2.1. Определение матрицы билинейной функции

Определение 13.4. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис пространства V. Матрицу

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

в которой

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) \quad (i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, n),$$

назовем *матрицей билинейной функции* $f \in \mathcal{F}(V)$ *в базисе* $\mathbf{e}$ и обозначим $[f]_{\mathbf{e}} = A$.

Пример 13.5. Определим в $\mathbb{R}^3$ билинейную функцию f следующим образом: если $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$, то $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + z_3y_3$. Найдем матрицу функции f в базисе $e_1 = (1,1,0)^\top$, $e_2 = (1,0,1)^\top$, $e_3 = (0,1,1)^\top$. По определению имеем:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = f(e_1,e_1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 2,\\
&a_{22} = f(e_2,e_2) = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 2,\\
&a_{33} = f(e_3,e_3) = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2,\\
&a_{12} = f(e_1,e_2) = a_{21} = f(e_2,e_1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 1,\\
&a_{13} = f(e_1,e_3) = a_{31} = f(e_3,e_1) = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1,\\
&a_{23} = f(e_2,e_3) = a_{32} = f(e_3,e_2) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1,
\end{aligned}$$

откуда

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.2.2. Матричное представление билинейной функции

Пусть

$$[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots x_n)^\top, \quad [y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \dots y_n)^\top,$$

тогда

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j f(e_i, e_j),$$

или на матричном языке

$$f(x,y) = [x]_{\mathbf{e}}^\top [f]_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}}. \tag{13.2}$$

Пример 13.6. Найдем в базисе $\mathbf{e} = \{1, t, t^2\}$ пространства $\mathbb{R}_2[t]$ матрицу билинейной функции

$$f(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Имеем

$$\begin{array}{ll} a_{11} = \int\limits_0^1 1 \cdot 1dt = 1, & a_{12} = a_{21} = \int\limits_0^1 1 \cdot tdt = 1/2\,, \\ a_{22} = \int\limits_0^1 t \cdot tdt = 1/3\,, & a_{13} = a_{31} = \int\limits_0^1 1 \cdot t^2dt = 1/3\,, \\ a_{33} = \int\limits_0^1 t^2 \cdot t^2dt = 1/5\,, & a_{23} = a_{32} = \int\limits_0^1 t \cdot t^2dt = 1/4\,, \end{array}$$

откуда

$$[f]_\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу $[f]_\mathbf{e}$, вычислим

$$\int_0^1 x(t)y(t)dt,$$

где $x(t) = 1 + t + t^2$, $y(t) = 1 + t + t^2$. Так как $[x]_\mathbf{e} = (1, 1, 1)^\top$, $[y]_\mathbf{e} = (1, 1, 1)^\top$, то

$$\int_0^1 (1 + t + t^2)(1 + t + t^2)dt = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{37}{10}.$$

В данном примере обратим внимание на специальный вид матрицы $[f]_\mathbf{e}$. Нетрудно видеть, что в случае произвольного n матрица рассматриваемой билинейной функции в базисе $\mathbf{e} = \{1, t, \ldots, t^n\}$ является *матрицей Гильберта*, т. е. матрицей вида

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \quad \text{где} \quad a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}.$$

Упражнение 13.7. В базисе $\mathbf{e} = \{1, t, t^2, t^3\}$ пространства $\mathbb{R}_3[t]$ найти матрицу билинейной функции

$$f(x, y) = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt.$$

13.2.3. Представление билинейных функций билинейными формами

Утверждение 13.8. *Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — произвольный базис пространства V, $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица из $\mathbb{R}^{n\times n}$. Функция*

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j = [x]_\mathbf{e}^\top A[y]_\mathbf{e} \tag{13.3}$$

является билинейной, причем $A = [f]_\mathbf{e}$.

Доказательство. Непосредственной проверкой свойств 1–4 убеждаемся, что функция f — билинейная. Кроме того, по формуле (13.3) получаем $f(e_i, e_j) = a_{ij}$, следовательно, $A = [f]_\mathbf{e}$. ∎

Итак, формула (13.3) задает общий вид билинейной функции.

Заметим, что в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^n$ матрица билинейной функции, задаваемой формулой $f(x, y) = x^\top Ay$ (см. упражнение 13.3 (3)), есть A. Таким образом, формула $f(x, y) = x^\top Ay$ задает общий вид билинейной функции пространства $\mathbb{R}^n$.

Выражения вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

называются *билинейными формами.* Таким образом, в заданном базисе произвольная билинейная форма определяет билинейную функции и, наоборот, любая билинейная функция определяется некоторой билинейной формой.

Переформулировка результатов последних двух пунктов приводит нас к следующему.

Следствие 13.9. *Пусть* $\mathbf{e}$ *— базис пространства* V*. Отображение, ставящее в соответствие всякой билинейной функции* $f \in \mathcal{F}(V)$ *ее матрицу* $[f]_{\mathbf{e}}$*, является биекцией из* $\mathcal{F}(V)$ *в* $\mathbb{R}^{n\times n}$*.*

13.2.4. Связь матриц билинейной функции в разных базисах

Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\mathbf{e}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ — два базиса пространства V. Исследуем, как меняется матрица билинейной функции $f \in \mathcal{F}(V)$ при переходе от первого базиса ко второму. Для произвольных векторов x, y из V имеем

$$f(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^\top [f]_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}} = ([\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}'})^\top [f]_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}[y]_{\mathbf{e}'} = [x]_{\mathbf{e}'}^\top ([\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^\top [f]_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}})[y]_{\mathbf{e}'}.$$

Из утверждения 13.8

$$[f]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^\top [f]_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}.$$

Так как $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ — матрица невырожденная, то $\operatorname{rank}[f]_{\mathbf{e}'} = \operatorname{rank}[f]_{\mathbf{e}}$. Таким образом, ранг матрицы билинейной функции не зависит от базиса и называется *рангом билинейной функции.* Обозначение: $\operatorname{rank} f$.

Определение 13.10. Матрицы A и B называются *конгруэнтными*, если существует такая невырожденная матрица Q, что $B = Q^\top AQ$.

Таким образом, матрицы конгруэнтны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одной и той же билинейной функции в разных базисах.

Упражнение 13.11. Докажите, что отношение конгруэнтности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

13.3. Синхронные элементарные преобразования строк и столбцов вещественной матрицы

Пусть E_{ij} — матрица, полученная из единичной перестановкой ее i-й и j-й строк; $E_i(\alpha)$ — матрица, полученная из единичной умножением i-й строки на число α; $E_{ij}(\alpha)$ — матрица, полученная из единичной прибавлением к i-й строке j-й, умноженной на α. Матрицы E_{ij}, $E_i(\alpha)$, $E_{ij}(\alpha)$ называются матрицами *элементарных преобразований.*

Напомним, что три типа элементарных преобразований со строками матрицы A можно осуществить домножая A *слева* на эти матрицы:

- умножение на E_{ij} осуществляет перестановку строк с номерами i и j,

- умножение на $E_i(\alpha)$ — умножение i-й строки на число α,
- умножение на $E_{ij}(\alpha)$ — прибавление к i-й строке j-й, умноженной на α.

Элементарные преобразования со столбцами матрицы A можно осуществить умножая A *справа* на те же матрицы:

- умножение на E_{ij} осуществляет перестановку столбцов с номерами i, j,
- умножение на $E_i(\alpha)$ — умножение i-го столбца на число α,
- умножение на $E_{ij}(\alpha)$ — прибавление к j-му столбцу i-го, умноженного на α.

Так как

$$E_{ij}^\top = E_{ij}, \quad E_i(\alpha)^\top = E_i(\alpha), \quad E_{ij}(\alpha)^\top = E_{ji}(\alpha),$$

то каждое из следующих пар *синхронных* элементарных преобразований переводит матрицу в конгруэнтную ей:

- перестановка строк с номерами i, j вместе с перестановкой столбцов с номерами i, j,
- умножение i-й строки на α, умножение i-го столбца на α,
- прибавление к i-й строке j-й, умноженной на α, прибавление к i-му столбцу j-го, умноженного на α.

13.4. Симметричные билинейные функции

Определение 13.12. Билинейную функцию $f \in \mathcal{F}(V)$ назовем *симметричной*, или *симметрической*, если для любых x, y из V

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Определение 13.13. Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *симметричной*, или *симметрической*, если $A^\top = A$.

Упражнение 13.14. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

1. Билинейная функция f — симметричная.
2. В произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица $[f]_{\mathbf{e}}$ симметрична.
3. Существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица $[f]_{\mathbf{e}}$ симметрична.

Теорема 13.15 (Лагранж). *Любая симметричная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ конгруэнтна некоторой диагональной.*

Доказательство. Опишем алгоритм приведения матрицы $A = (a_{ij})$ к диагональному виду с помощью синхронных элементарных преобразований. Возможны два исчерпывающих случая.

I. $a_{11} \neq 0$. Выполним над матрицей A следующие синхронные элементарные преобразования: для каждого $i \in \{2, \dots, n\}$ вычтем из i-й строки 1-ю строку, умноженную на ${}^{a_{i1}}/_{a_{11}}$, и вычтем из i-го столбца 1-й столбец, умноженный на ${}^{a_{1i}}/_{a_{11}}$. Очевидно, что после этих преобразований матрица A перейдет в конгруэнтную ей матрицу следующего вида

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & B^{(1)} \end{array}\right), \tag{13.4}$$

причем матрица $B^{(1)}$ симметрична.

II. $a_{11} = 0$. Возможны следующие варианты:

1. $\forall i \in \{2, 3 \dots, n\}$ $a_{i1} = a_{1i} = 0$. Матрица A уже имеет вид (13.4). В данном случае никаких действий производить не нужно.
2. $\exists k \in \{2, 3 \dots, n\}$ $a_{k1} = a_{1k} \neq 0$. Выберем такое k.
   1) Если $a_{kk} \neq 0$, то переставляем строки и столбцы с номерами 1 и k и тем самым приходим к случаю I.
   2) Если $a_{kk} = 0$, то прибавляем к 1-ой строке k-ю строку и 1-му столбцу k-й столбец, тем самым снова приходим к случаю I.

После выполнения описанных здесь действий матрица A перейдет в конгруэнтную ей матрицу вида (13.4). Далее достаточно те же действия провести с матрицей $B^{(1)}$ и т. д. ∎

Следствие 13.16. *Любая симметричная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ конгруэнтна некоторой диагональной матрице с диагональными элементами 0, ± 1.*

Доказательство. Можем считать, что матрица A уже имеет диагональный вид:

$$A = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, если $d_i \neq 0$, поделим i-ю строчку и i-й столбец на $\sqrt{|d_i|}$. При этом исходная матрица переходит в конгруэнтную матрицу, обладающую требуемым свойствам. ∎

Определение 13.17. Базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется *каноническим* для симметричной билинейной функции f, если

$$f(e_i, e_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n;\ i \neq j),$$

иными словами, если матрица $[f]_{\mathbf{e}}$, называемая в данном случае *каноническим представлением* функции f, диагональна.

Заметим, что если базис $e_1, \dots, e_n$ — канонический для симметричной функции f и $[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots, x_n)^\top$, $[y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \dots, y_n)^\top$, то

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_j,$$

где $d_j = f(e_j, e_j)$ $(j = 1, \dots, n)$.

Следствие 13.18. *Для любой симметричной билинейной функции f существует канонический базис.*

Доказательство. Для матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ построим конгруэнтную ей диагональную матрицу B такую, что $B = Q^\top [f]_{\mathbf{e}} Q$ для некоторой невырожденной матрицы Q. Осталось рассмотреть Q как матрицу перехода к новому базису $\mathbf{e}'$, тогда $[f]_{\mathbf{e}'} = B$, следовательно, базис $\mathbf{e}'$ — канонический. ∎

Определение 13.19. Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *нормальным* для симметричной билинейной функции f, если

$$f(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \pm 1 \text{ или } 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

В данном случае матрица $[f]_{\mathbf{e}}$ называется *нормальным представлением* функции f.

Следствие 13.20. *Для любой симметричной билинейной функции f существует нормальный базис.*

Определение 13.21. Билинейная форма $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_j$ называется *канонической*. Если при этом коэффициенты d_j канонической билинейной формы равны ± 1 или 0, то она называется *нормальной*.

Итак, базис является каноническим (соответственно нормальным) для симметричной билинейной функции f тогда и только тогда, когда в этом базисе функция f представляется канонической (соответственно нормальной) билинейной формой.

Пример 13.22. Найдем нормальный базис $\mathbf{e}'$ для симметричной билинейной функции f, заданной в базисе $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ матрицей

$$[f]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 9 & 12 \\ 4 & 10 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

Припишем к $[f]_{\mathbf{e}}$ справа единичную матрицу. С полученной матрицей будем делать преобразования строк одновременно с преобразованиями столбцов.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 12 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Имеет место случай I: $a_{11} \neq 0$. Выполним соответствующие этому случаю преобразования.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Для подматрицы, расположенной в строках и столбцах с номерами $2, 3, 4$ имеет место случай II-2. Прибавим ко второй строке третью и такое же преобразование проделаем с соответствующими столбцами.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь для подматрицы, расположенной в строках со 2-й по 4-ю и в столбцах с теми же номерами, имеем случай I. Из третьей строки вычтем вторую, умноженную на $1/2$, из четвертой вычтем вторую и такие же преобразования проделаем с соответствующими столбцами.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Для подматрицы, расположенной в строках 3-й и 4-й и в столбцах с теми же номерами, имеем случай I. Из четвертой строки вычтем удвоенную третью и такое же преобразование проделаем с соответствующими столбцами.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Приведение матрицы билинейной функции к каноническому виду закончено. Для приведения матрицы к нормальному виду поделим вторую строчку и второй столбец на $\sqrt{2}$, третью строчку и третий столбец умножим на $\sqrt{2}$, четвертую строчку и четвертый столбец поделим на 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Матрицу перехода получаем, транспонируя матрицу, стоящую справа:

$$[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -5\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получен нормальный базис

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1, \\ e_2' &= -\ 5\sqrt{2}/2\ e_1 + \sqrt{2}/2\ e_2 + \sqrt{2}/2\ e_3, \\ e_3' &= -\ \sqrt{2}/2\ e_1 - \sqrt{2}/2\ e_2 + \sqrt{2}/2\ e_3, \\ e_4' &= e_1 - e_3 + 1/2\ e_4. \end{aligned}$$

По матрице билинейной функции в найденном нормальном базисе легко определяется соответствующая нормальная форма: $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$, где $[x]_{\mathbf{e}'} = (x_1', \ldots, x_4')^\top$. $[y]_{\mathbf{e}'} = (y_1', \ldots, y_4')^\top$. По матрице перехода к нормальному базису определяются формулы, связывающие координаты в старом и новом базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ соответственно:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 - {}^{5\sqrt{2}}/_2\ x'_2 - {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_3 + \quad x'_4, \\ x_2 = \qquad {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_2 - {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_3 \\ x_3 = \qquad {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_2 + {}^{\sqrt{2}}/_2\ x'_3 \\ x_4 = \qquad\qquad - \qquad x'_3 + {}^{1}/_2\ x'_4. \end{cases}$$

Упражнение 13.23. Построить канонический вид и канонический базис для билинейной функции, действующей в пространстве $\mathbb{R}_2[t]$, из примера 13.6.

Упражнение 13.24. Построить канонический вид и канонический базис для билинейной функции, действующей в пространстве $\mathbb{R}_3[t]$, из примера б/н на стр. 3.

В разделе 13.6 будет описан другой алгоритм нахождения нормального базиса билинейной функции (метод выделения полного квадрата).

Определение 13.25. Минор Δ_k, расположенный в первых k строках и первых k столбцах матрицы A называется *угловым* минором порядка k.

Теорема 13.26 (Якоби)**.** *Пусть матрица $A = [f]_{\mathbf{e}}$ симметричной билинейной функции ранга r имеет отличные от нуля угловые миноры $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ (при $r < n$ угловые миноры большего порядка, очевидно, равны 0). Тогда существует канонический базис $e'_1, \ldots, e'_n$, для которого*

$$f(e'_i, e'_i) = \begin{cases} \Delta_1, & \text{если } i = 1, \\ {}^{\Delta_i}/_{\Delta_{i-1}}, & \text{если } i = 2, \ldots, r, \\ 0, & \text{если } i = r+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем индукцией по количеству шагов, что в условиях теоремы алгоритм, приведенный в доказательстве теоремы Лагранжа, не изменяет угловых миноров матрицы A. Так как $a_{11} = \Delta_1 \neq 0$, то на первом шаге имеем случай I. Выполняемые при этом преобразования (строка вычитается из строк, расположенных ниже; столбец вычитается из столбцов, расположенных правее) не изменяют угловых миноров матрицы A. По окончании преобразований первого шага матрица A переходит в матрицу вида (13.4), в которой $\Delta_2 = a_{11}b'_{11} \neq 0$, откуда $b'_{11} \neq 0$.

На k-м шаге ($k \leq r$) матрица приобретает вид $\operatorname{diag}(a'_{11}, \ldots, a'_{kk}, B_k)$. По предположению индукции угловые миноры этой матрицы совпадают с Δ_i. Так как $\Delta_{k+1} = a'_{11} \cdot \ldots \cdot a'_{kk} \cdot b'_{11} \neq 0$, то $b'_{11} \neq 0$ и снова имеем случай I. Выполняемые при этом преобразования не меняют угловых миноров.

После r шагов получаем матрицу $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$, в которой $\Delta_i = d_1 \cdot \ldots \cdot d_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), откуда получаем доказываемое. ∎

Упражнение 13.27. Докажите, что для любой билинейной функции f ранга r найдется базис $\mathbf{e}$, такой, что все угловые миноры матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ порядка не большего r не равны 0.

Теорема 13.28 (Закон инерции)**.** *Нормальное представление симметричной билинейной функции определено однозначно с точностью до перестановок диагональных элементов.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ — два нормальных базиса пространства V для функции f, такие, что

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{t} x_j y_j - \sum_{j=t+1}^{r} x_j y_j, \tag{13.5}$$

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{t'} x'_j y'_j - \sum_{j=t'+1}^{r'} x'_j y'_j, \tag{13.6}$$

где

$$[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \ldots, x_n)^\top, \quad [x]_{\mathbf{e}'} = (x'_1, \ldots, x'_n)^\top,$$
$$[y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \ldots, y_n)^\top, \quad [y]_{\mathbf{e}'} = (y'_1, \ldots, y'_n)^\top.$$

Имеем $\operatorname{rank} f = r = r'$. Предположим, что $t > t'$. Обозначим

$$L_1 = L(e_1, \ldots, e_t), \quad L_2 = L(e'_{t'+1}, \ldots, e'_n).$$

Имеем

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \underbrace{\dim L_1}_{=t} + \underbrace{\dim L_2}_{=n-t'} - \underbrace{\dim(L_1 + L_2)}_{\leq n} \geq t - t' > 0,$$

поэтому найдется $x \neq 0$ такой, что $x \in L_1 \cap L_2$. Так как $x \in L_1$, то $x_j = 0$ ($j = t+1, \ldots, n$), поэтому из (13.5) получаем

$$f(x,x) = \sum_{j=1}^{t} x_j x_j = \sum_{j=1}^{t} x_j^2 > 0.$$

Однако, так как $x \in L_2$, то $x'_j = 0$ ($j = 1, \ldots, t'$), поэтому из (13.6) получаем

$$f(x,x) = -\sum_{j=t'+1}^{r} x'_j x'_j = -\sum_{j=t'+1}^{r} {x'_j}^2 \leq 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ∎

Определение 13.29. *Положительным индексом* $s_+(f)$ (соответственно *отрицательным индексом* $s_-(f)$) симметричной билинейной функции f называется число положительных (соответственно отрицательных) диагональных элементов в каноническом виде. *Сигнатурой* функции называется величина $\sigma(f) = s_+(f) - s_-(f)$.

Замечание 13.30. Из теоремы инерции следует, что положительный и отрицательный индексы инерции, и, следовательно, сигнатура, есть величины, не зависящие от базиса.

13.5. Знакоопределенные симметричные функции

Определение 13.31. Пусть f — симметричная билинейная функция.

Функция f называется *положительно определенной* (обозначение $f > 0$), если для любого $x \neq 0$ выполнено $f(x,x) > 0$.

Функция f называется *отрицательно определенной* (обозначение $f < 0$), если для любого $x \neq 0$ выполнено $f(x,x) < 0$.

Функция f называется *неотрицательно определенной* (обозначение $f \geq 0$), если для любого x выполнено $f(x,x) \geq 0$.

Функция f называется *неположительно определенной* (обозначение $f \leq 0$), если для любого x выполнено $f(x,x) \leq 0$.

В остальных случаях f называется *знакопеременной*.

Упражнение 13.32. Пусть $f \in \mathcal{F}(V)$, $\dim V = n$. Докажите следующие утверждения:

$$\begin{aligned} f > 0 \;&\Leftrightarrow\; s_+(f) = n, \qquad & f \geq 0 \;&\Leftrightarrow\; s_-(f) = 0, \\ f < 0 \;&\Leftrightarrow\; s_-(f) = n, \qquad & f \leq 0 \;&\Leftrightarrow\; s_+(f) = 0. \end{aligned}$$

Упражнение 13.33. Докажите, что для положительной определенности симметричной билинейной функции необходима, но не достаточна положительность всех диагональных элементов ее матрицы в любом базисе.

Теорема 13.34 (Критерий Сильвестра)**.** *Пусть f — симметричная билинейная функция. Следующие три условия эквивалентны:*

1) *f положительно определена;*

2) *для любого базиса $e_1, \dots, e_n$ все угловые миноры матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ положительны;*

3) *существует базис $e_1, \dots, e_n$, в котором все угловые миноры матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ положительны.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $f > 0$, тогда в любом базисе диагональные элементы матрицы этой функции положительны. Следовательно, во время приведения алгоритмом, описанным при доказательстве теоремы Лагранжа, матрицы к каноническому виду никогда не возникает случая II, поэтому угловые миноры Δ_i не изменяются. Имеем $\Delta_i = d_1 \cdot \ldots \cdot d_i > 0$.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) тривиальна, а импликация 3) $\Rightarrow$ 1) немедленно следует из теоремы Якоби. ∎

Определение 13.35. Пусть A — симметричная матрица, а $\mathbf{e}$ — некоторый базис пространства. По матрице A определим билинейную функцию f, такую, что $A = [f]_{\mathbf{e}}$. Матрица A называется *положительно определенной*, если функция f положительно определена. Аналогично вводятся определения отрицательно, неположительно и неотрицательно определенной симметричной матрицы, а также ее положительного и отрицательного индексов и сигнатуры. Легко видеть, что эти определения не зависят от выбранного базиса $\mathbf{e}$.

Упражнение 13.36. Говорят, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеет *диагональное преобладание*, если $a_{ii} > |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}|$. Докажите, что симметричная матрица с диагональным преобладанием положительно определена. *Указание:* Воспользоваться неравенством $2|a_{ij}| \cdot |x_i| \cdot |x_j| \leq |a_{ij}| \cdot x_i^2 + |a_{ij}| \cdot x_j^2$.

Упражнение 13.37. Докажите, что для того, чтобы $f < 0$, необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^i \Delta_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Упражнение 13.38. Докажите, что для того, чтобы $f \geq 0$, необходимо, но не достаточно, чтобы $\Delta_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Аналогично, для $f \leq 0$ необходимо, но не достаточно, чтобы $(-1)^i \Delta_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Упражнение 13.39. Минор матрицы A называется *диагональным* (или *главным*), если в нем с каждой строкой участвует столбец матрицы A с таким же номером. Докажите, что для того, чтобы $f \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ были неотрицательны. Докажите, что для того, чтобы $f \leq 0$, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка матрицы $[f]_{\mathbf{e}}$ были неотрицательны. а все главные миноры нечетного порядка — неположительны.

Упражнение 13.40. Доказать, что билинейные функции из упражнений 13.5, 13.6 являются положительно определенными.

Упражнение 13.41. Доказать, что в линейной пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ отображение $f(X, Y) = \operatorname{tr}(X^\top Y)$ является симметричной положительно определенной билинейной функцией.

Упражнение 13.42. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ отображение $f(X,Y) = \operatorname{tr} X^2$ является симметричной билинейной функцией. Найти ее ранг и сигнатуру. *Ответ:* n^2 и n.

Упражнение 13.43. [Разложение Холецкого] Пусть $A = (a_{ij})$ — симметричная положительно определенная матрица. Доказать, что найдется единственная нижнетреугольная матрица L с положительными диагональными элементами, такая, что

$$A = LL^\top. \tag{13.7}$$

Разложение (13.7) называется *разложением Холецкого*, или *треугольным разложением* матрицы A.

Пусть все угловые миноры матрицы A не равны нулю. Доказать, что тогда найдется единственная нижнетреугольная матрица L с единичными диагональными элементами и диагональная матрица D, такие, что

$$A = LDL^\top. \tag{13.8}$$

Разложение (13.8) называется $LDL^\top$*-разложением* матрицы A.

Упражнение 13.44. Показать, что элементы матрицы $L = (\ell_{ij})$ в разложении (13.7) можно вычислить последовательно в порядке

$$\ell_{11},\ \ell_{21},\ \dots,\ \ell_{n1},\ \ell_{22},\ \ell_{32},\ \dots,\ \ell_{n2},\ \ell_{33},\ \dots,\ \ell_{nn}$$

по формулам:

$$\ell_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2}, \qquad \ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\ell_{jk}}{\ell_{jj}} \quad (i > j).$$

Далее показать, что

$$\max_{i,\ j} |\ell_{ij}| \le \max_i \sqrt{a_{ii}}.$$

Таким образом, при вычислении разложения Холецкого непроисходит (в указанном смысле) роста элеметов.

Упражнение 13.45. [(Метод квадратных корней)] Пусть A — положительно определенная симметричная матрица из $\mathbb{R}^{n\times n}$, а b — столбец высоты n. Если разложение Холецкого $A = LL^\top$ известно, то для решения системы $Ax = b$ достаточно решить последовательно две треугольные системы $Ly = b$ и $L^\top x = y$. На этой основе предложить метод решения систем линейных уравнений с положительно определенной матрицей (*метод квадратных корней*). Сравнить суммарное число ариметических операций в этом методе с числом арифметических операций, используемых в методе Гаусса. *Ответ:* Метод Гаусса требует $(2/3)n^3 + O(n^2)$ арифметических операций, в то время как метод квадратных корней — $(1/3)n^3 + O(n^2)$ арифметических операций. Таким образом, метод квадратных корней примерно вдвое экономичнее метода Гаусса.

13.6. Квадратичные вещественные функции

Определение 13.46. Пусть $f \in \mathcal{F}(V)$, тогда функция $g : V \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $g(x) = f(x,x)$, называется *квадратичной.*

Пример 13.47. Функция $g(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ в $\mathbb{R}^2$ является квадратичной. Действительно, функция $f(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ — билинейная и $g(x) = f(x,x)$. Заметим, что по квадратичной функции соответствующая ей билинейная восстанавливается неоднозначно. Например, функции g соответствует также билинейная функция $f_1(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 2x_2y_2$ и бесконечно много других.

Утверждение 13.48. *Пусть g — квадратичная функция, тогда билинейная симметричная функция f, для которой $g(x) = f(x,x)$, существует и единственна.*

Доказательство. Предположим, что билинейная функция f с указанными в утверждении свойствами существует. Докажем ее *единственность.* Имеем

$$g(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y),$$
$$g(x-y) = f(x-y, x-y) = f(x,x) - 2f(x,y) + f(y,y).$$

Вычитая из первого равенства второе, после очевидных преобразований получаем

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(g(x+y) - g(x-y)\right). \tag{13.9}$$

Таким образом, f по g восстанавливается однозначно.
Существование. Легко проверить, что f, определяемая формулой (13.9), симметрична и $g(x) = f(x,x)$. ∎

В силу доказанного утверждения на квадратичные функции переносятся основные определения и теоремы теории симметричных билинейных функций. Так, *матрицей квадратичной функции* называется матрица соответствующей билинейной симметрической функции. Вводятся понятия *канонического* и *нормального* базиса, *знакопостоянной* и *знакопеременной* квадратичной функции, переносятся теорема Якоби, закон инерции и критерий Сильвестра.

Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — произвольный базис пространства V. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^\top = A$, то, легко проверить, что

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = [x]_\mathbf{e}^\top A [x]_\mathbf{e} \tag{13.10}$$

является квадратичной функцией, причем $A = [f]_\mathbf{e}$. Таким образом, формула (13.10) задает общий вид квадратичной функции. Выражения вида $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ называются *квадратичными формами.* Квадратичная форма $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j^2$ называется *канонической.* Если коэффициенты d_j канонической квадратичной формы равны ± 1 или 0, то она называется *нормальной.*

Для нахождения канонического базиса квадратичной функции мы можем воспользоваться алгоритмом, приведенным в доказательстве теоремы Лагранжа. Можно также воспользоваться другим методом, называемым *методом выделения полного квадрата.* Объясним его на двух примерах.

Пример 13.49. Рассмотрим квадратичную форму

$$g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

которую преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} g(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \\ &= {x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2. \end{aligned}$$

где

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица Q невырождена, поэтому можно положить $[\mathbf{e}']_\mathbf{e} = Q^{-1}$. Базис $\mathbf{e}'$ — нормальный.

Пример 13.50. Форма $g(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ не содержит ни одного квадрата x_j^2, поэтому сначала сделаем замену

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2', \\ x_2 = x_1' - x_2', \\ x_3 = x_3'. \end{cases} \tag{13.11}$$

Тогда получим $g(x) = {x_1'}^2 - {x_2'}^2 + 2x_1'x_3'$ Теперь можно выделить полный квадрат: $g(x) = (x_1' + x_3')^2 - {x_2'}^2 - {x_3'}^2 = {x_1''}^2 - {x_2''}^2 - {x_3''}^2$, где

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' + x_3', \\ x_2'' = x_2', \\ x_3'' = x_3'. \end{cases} \tag{13.12}$$

Объединяя (13.11) и (13.12), получаем следующие формулы, связывающие старые x_j и новые x_j'' координаты:

$$\begin{cases} x_1 = x_1'' + x_2'' - x_3'', \\ x_2 = x_1'' - x_2'' - x_3'', \\ x_3 = x_3'', \end{cases}$$

по которым легко определяется матрица перехода.

Очевидно, метод выделения полного квадрата можно применять также для нахождения канонического (или нормального) базиса симметричной *билинейной* функции.