Глава 11

Определители

11.1. Определители второго и третьего порядков

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{11.1}$$

Вычитая из первого уравнения, умноженного на a_{22}, второе, умноженное на a_{12}, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \tag{11.2}$$

откуда при $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{11.3}$$

Вычитая из второго уравнения системы (11.1), умноженного на a_{11}, первое, умноженное на a_{21}, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_1a_{11} - b_2a_{21}, \tag{11.4}$$

откуда при $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

$$x_2 = \frac{b_1a_{11} - b_2a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{11.5}$$

Легко проверить, что условие $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ эквивалентно тому, что ранг основной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

системы (11.1) равен 2, откуда следует, что ранг расширенной матрицы системы тоже равен 2 — система совместна и имеет единственное решение. Так как уравнения (11.2), (11.4) являются следствиями системы (11.1), то ее единственное решение можно найти по формулам (11.3), (11.5).

Заметим, что общий знаменатель значений неизвестных просто выражается через элементы матрицы (11.6): он равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали. Это число называется *определителем* (второго порядка) матрицы (11.6). Определитель матрицы A обозначается либо $\det A$, либо заменой круглых скобок, заключающих элементы матрицы, прямыми чертами. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Теперь формулы (11.3), (11.5) можно записать следующим образом:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{11.7}$$

Эти формулы называются *формулами Крамера*.

Пример 11.1. Решим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Определитель из коэффициентов есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -5.$$

Он отличен от нуля, поэтому применимы формулы Крамера. Числителями для значений неизвестных будут

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = -1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -8.$$

Таким образом, решением системы является набор

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{5}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{5}.$$

Теперь рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{11.8}$$

с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{11.9}$$

Если умножить первое уравнение системы (11.8) на $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, второе уравнение — на $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, третье уравнение — на $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$, а затем сложить три полученных уравнения, то легко проверить, что коэффициенты при x_2, x_3 окажутся равными 0, и мы получим равенство

$$\begin{multline} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = \\ = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}. \end{multline} \tag{11.10}$$

Коэффициент при x_1 в этом равенстве называется *определителем* (третьего порядка) матрицы (11.9). Для определителей третьего порядка используется такая же символика, что и для определителей второго порядка. Таким образом,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правая часть равенства (11.10) также представляет из себя определитель третьего порядка, а именно определитель матрицы, получающейся из (11.9) заменой элементов первого столбца коэффициентами из правой части:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то из (11.10) выводим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}. \tag{11.11}$$

Аналогично можно получить

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{11.12}$$

где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Условие $\Delta \neq 0$ равносильно тому, что решение системы (11.8) существует и единственно, однако этого не так проста как в случае систем двух уравнений с двумя неизвестными. Далее мы докажем более общее утверждение. Впрочем, проверить, что формулы (11.11), (11.12) дают решение системы (11.8) можно простой подстановкой этих формул в систему. Формулы (11.11), (11.12), как и (11.7), называются *формулами Крамера.*

Пример 11.2. Решим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = 3, \end{cases}$$

Определитель из коэффициентов есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (-4) + 1 \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 1 - \\ -2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot 1 = 33.$$

Он отличен от нуля, поэтому применимы формулы Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 5, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 72,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

откуда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{33}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{11}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{8}{33}.$$

11.2. Перестановки и подстановки

Здесь мы напоминаем необходимые сведения о подстановках и перестановках.

Перестановкой попарно различных элементов $k_1, \dots, k_n$ называется упорядоченный набор $\pi = (i_1, \dots, i_n)$, в котором $i_p \neq i_s$ при $p \neq s$ и для каждого p найдется t, такое, что $i_p = k_t$. Например, (b, a, c, f, e, d) — перестановка элементов (букв) a, b, c, d, e, f.

Далее, если не оговорено противное, рассматриваются перестановки элементов $1, \dots, n$.

Имеется только одна перестановка из 1 элемента, две перестановки из 2 элементов: $(1, 2)$ и $(2, 1)$, 6 перестановок из 3 элементов: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Утверждение 11.3. *Число перестановок из n элементов равно*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Доказательство. В качестве i_1 в перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ можно выбрать любое из чисел $1, 2, \dots, n$ — всего n возможностей. Если i_1 уже выбрано, то в качестве i_2 можно выбрать одно из $n-1$ чисел, таким образом, число различных способов выбрать i_1 и i_2 равно $n(n-1)$ и т. д. ∎

Транспозицией элементов i_p и i_s $(p \neq s)$ в перестановке $(i_1, \dots, i_p, \dots, i_s, \dots, i_n)$ называется ее преобразование, при котором перестановка переходит в перестановку $(i_1, \dots, i_s, \dots, i_p, \dots, i_n)$ (элементы i_p и i_s поменялись местами, остальные элементы остались на прежних местах).

Утверждение 11.4. *Все $n!$ перестановок из n элементов можно расположить в таком порядке, что каждая следующая перестановка получается из предыдущей одной транспозицией, причем начинать можно с любой перестановки.*

Доказательство. Докажем теорему методом математической индукции по параметру n. Основание индукции очевидно. Теперь предположим, что все $(n-1)!$ перестановок из n элементов можно получить с помощью транспозиций. Вначале в качестве исходной рассмотрим перестановку $1, 2, \dots, n$. По предположению индукции с помощью только транспозиций можно получить все перестановки элементов $2, \dots, n$. В начало каждой такой перестановки припишем 1. В результате получим все $(n-1)!$ перестановок из n элементов с первым элементом 1. В последней из выписанных перестановок совершим транспозицию элементов 1 и 2. Выпишем все перестановки элементов, стоящих на 2-м, 3-м, …, n-м местах. В начало каждой такой перестановки припишем 2. В результате получим все $(n-1)!$ перестановок из n элементов с первым элементом 2. В последней из выписанных перестановок совершим транспозицию элементов 2 и 3 и т. д.

Общее количество выписанных перестановок равно $n(n-1)! = n!$, причем все эти перестановки попарно различны (на первом месте стояли по очереди все n элементов).

Нам осталось показать, что для того, чтобы получить все перестановки с помощью одних транспозиций, можно начинать с любой перестановки. Для доказательства рассмотрим исходную перестановку и перенумеруем ее элементы. ∎

Будем говорить, что элементы i_p и i_s, где $p < s$, образуют *инверсию* в перестановке $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$, если $i_p > i_s$. Общее число инверсий в перестановке обозначим $\sigma(\pi) = \sigma(i_1, \ldots, i_n)$. В случае $n = 1$ примем $\sigma(\pi) = 1$. Перестановка π называется *четной*, если $\sigma(\pi)$ — четно, перестановка π называется *нечетной*, если $\sigma(\pi)$ — нечетно.

Например, в перестановке $\pi = (2, 3, 1)$ имеется две инверсии: их образуют пары $2, 1$ и $3, 1$, таким образом, $\sigma(\pi) = 2$, перестановка четная.

Утверждение 11.5. *Транспозиция меняет четность перестановки.*

Доказательство. Вначале рассмотрим транспозицию соседних элементов i_p и i_{p+1}:

$$(i_1, \ldots, i_{p-1}, i_p, i_{p+1}, i_{p+2}, \ldots, i_n) \to (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_p, i_{p+2}, \ldots, i_n).$$

Легко видеть, что если $i_p < i_{p+1}$, то число инверсий увеличивается на 1 (появляется новая инверсия элементов i_p, i_{p+1}); если $i_p > i_{p+1}$, то число инверсий уменьшается на 1 (исчезает инверсия элементов i_p, i_{p+1}). Итак, транспозиция соседних элементов меняет четность.

Теперь рассмотрим транспозицию элементов i_p и i_s, где $s > p + 1$. Покажем, что такую инверсию можно осуществить с помощью серии транспозиций соседних элементов. Сначала передвигаем i_p вправо на место элемента i_s:

$$\begin{array}{rll}
& (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_p, i_{p+1}, i_{p+2}, \ldots, i_{s-2}, i_{s-1}, i_s, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_p, i_{p+2}, \ldots, i_{s-2}, i_{s-1}, i_s, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_{p+2}, i_p, \ldots, i_{s-2}, i_{s-1}, i_s, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_{p+2}, i_{p+3}, \ldots, i_p, i_{s-1}, i_s, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_{p+2}, i_{p+3}, \ldots, i_{s-1}, i_p, i_s, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_{p+2}, i_{p+3}, \ldots, i_{s-1}, i_s, i_p, i_{s+1}, \ldots i_n) &
\end{array}$$

Затем передвигаем элемент i_s влево:

$$\begin{array}{rll}
& (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_{p+2}, i_{p+3}, \ldots, i_{s-1}, i_s, i_p, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_{p+2}, i_{p+3}, \ldots, i_s, i_{s-1}, i_p, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_{p+2}, i_s, \ldots, i_{s-2}, i_{s-1}, i_p, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, i_s, i_{p+2}, \ldots, i_{s-2}, i_{s-1}, i_p, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_s, i_{p+1}, i_{p+2}, \ldots, i_{s-2}, i_{s-1}, i_p, i_{s+1}, \ldots i_n) & \to \\
\to & (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_s, i_{p+1}, i_{p+2}, \ldots, i_{s-2}, i_{s-1}, i_p, i_{s+1}, \ldots i_n). &
\end{array}$$

Мы выполнили нечетное $(2(s - p) - 1)$ число транспозиций соседних элементов. Каждая транспозиция меняет четность перестановки. В результате всей серии четность перестановки изменилась. ∎

Из предыдущих двух утверждений получаем

Следствие 11.6. *При $n \geq 2$ число четных перестановок из n элементов совпадает с числом нечетных перестановок и равно $n!/2$.*

Подстановкой называется биекция φ конечного множества в себя. Чтобы однозначно определить подстановку достаточно указать образ каждого элемента. Это можно сделать, записав таблицу

$$\tau = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \tag{11.13}$$

в которой в первой строке указаны в некотором фиксированном порядке элементы множества, а во втором — произвольная их перестановка. Преобразование определяется правилом $\varphi k_p = i_p$ $(p = 1, \dots, n)$. Если порядок $k_1, k_2, \dots, k_n$ фиксирован, то любой подстановке соответствует единственная таблица вида (11.13). С другой стороны, любой таблице с таким свойством соответствует единственная подстановка.

Рассмотрим подстановки множества $1, 2, \dots, n$. Тогда в таблице (11.13) каждая строка есть перестановка элементов $1, 2, \dots, n$. Обозначим $\sigma(\tau) = \sigma(k_1, k_2, \dots, k_n) + \sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Удобным способом задания подстановок множества $1, 2, \dots, n$ является задание с помощью таблицы с фиксированной верхней строкой:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

Утверждение 11.7. *Четность величины $\sigma(\tau)$ совпадает для всех таблиц τ, определяющих одну и ту же подстановку.*

Доказательство. Для получения всех таблиц, определяющих одну и ту же подстановку, достаточно рассмотреть произвольную перестановку столбцов таблицы τ. Эти перестановки можно получить с помощью лишь одних транспозиций столбцов. Каждая такая транспозиция меняет четность обеих перестановок и, следовательно, сохраняет четность величины $\sigma(\tau)$. ∎

Пример 11.8. Рассмотрим подстановку

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

В первой строке имеем 5 инверсий, во второй строке — 2. Суммарное число инверсий равно 7, подстановка нечетная. Зададим ту же подстановку другой таблицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

В первой строке нет инверсий, во второй строке имеется 5 инверсий. Таким образом, при разных записях одной и той же подстановки сохраняется четность общего чисал инверсий, но не само это число.

11.3. Определитель. Комбинаторное определение

Напомним определения определителей 2-го и 3-го порядков:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Мы видим, что в обоих случаях определитель есть алгебраическая сумма произведений некоторых элементов матрицы. Каждое слагаемое в этих суммах называется *членом* определителя. Каждый член определителя второго порядка есть произведение двух элементов матрицы, стоящих в разных строках и разных столбцах, при этом всевозможные произведения (их всего 2) использованы. Один член участвует в алгебраической сумме со знаком плюс, другой — со знаком минус. Каждый член определителя третьего порядка есть произведение трех элементов матрицы, стоящих в разных строках и разных столбцах, причем всевозможные произведения (их всего 6) использованы. Половина членов участвует в алгебраической сумме со знаком плюс, другая половина со знаком минус.

Пусть имеется квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

с элементами из некоторого поля F. Рассмотрим всевозможные произведения из n элементов этой матрицы, стоящих в разных строках и разных столбцах, т. е. произведения вида

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}, \tag{11.15}$$

где $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Число таких произведений равно числу перестановок, т. е. $n!$. Будем считать все такие произведения членами определителя n-го порядка.

Для определения знака, с каким входит в состав определителя произведение (11.15), рассмотрим четность перестановки $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Заметим, что для определителей 2-го и 3-го порядков если эта перестановка четная, то соответствующий ей член входит со знаком плюс, если перестановка нечетная, то член входит со знаком минус. Естественно сохранить это свойство и для определителей n-го порядка. Вместо четности перестановки можно взять четность подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Мы приходим к следующему определению: *определителем*, или *детерминантом*, матрицы (11.14) называется алгебраическая сумма $n!$ всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем это произведение входит со знаком плюс, если его индексы составляют четную подстановку, и со знаком минус в противоположном случае. Данное определение определителя будем называть *комбинаторным*, или *определением через полное разложение* (1-я точка зрения на определители).

Определитель матрицы A будем обозначать $\det A$. Также для обозначения определителя матрицы будем заменять круглые скобки, обрамляющие элементы матрицы, прямыми полосами, как и для определителей 2-го и 3-го порядков. Таким образом,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi = (j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\sigma(\pi)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

где суммирование идет по всем перестановкам $\pi = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ элементов $1, 2, \dots, n$. Из определения сразу следует

$$\det A = \sum_{\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}} (-1)^{\sigma(\tau)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n},$$

где суммирование идет по всем подстановкам τ из n элементов, и, например,

$$\det A = \sum_{\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\sigma(\pi)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}.$$

Приведенные три формулы называются *формулами полного разложения* определителя.

Определитель матрицы первого порядка — это (единственный) элемент этой матрицы.

На определители распространяется некоторая матричная терминология. В частности, *порядком*, *элементами*, *строкой*, *столбцом* определителя $\det A$ называются соответственно порядок, элементы, строка и столбец матрицы A.

11.4. Свойства определителя

Утверждение 11.9. *Определитель не меняется при транспонировании, т. е.* $\det A = \det A^\top$.

Доказательство. Очевидно, определители $\det A$ и $\det A^\top$ состоят из одинаковых членов. Остается доказать, что эти члены входят с одинаковыми знаками. Рассмотрим член $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ определителя $\det A$. Его знак определяется четностью подстановки

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Знак того же члена в разложении определителя $\det A^\top$ определяется, очевидно, четностью подстановки

$$\tau' = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Подстановки τ и τ' в общем случае различны, но, легко видеть, имеют одинаковую четность. ∎

Из утверждения 11.9 следует, что всякое утверждение о столбцах определителя справедливо и для его строк и наоборот. Далее мы формулируем и доказываем свойства определителя, касающиеся его столбцов. Аналогичные свойства справедливы и для его строк.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — столбцы матрицы $A \in F^{n\times n}$, тогда под $\det(a_1, a_2, \dots, a_n)$ будем понимать $\det A$.

Утверждение 11.10. *Определитель матрицы, содержащей нулевой столбец, равен нулю, т. е.* $\det(a_1, \dots, a_{j-1}, o, a_{j+1}, \dots, a_n) = 0$.

Доказательство. В каждый член определителя входит один элемент j-го столбца. Так как любой элемент этого столбца равен нулю, то определитель равен нулю. ∎

Утверждение 11.11. *Транспозиция столбцов меняет знак определителя:*

$$\det(\dots, a_j, \dots, a_k, \dots) = -\det(\dots, a_k, \dots, a_j, \dots)$$

при $j \neq k$.

Доказательство. Пусть $B = (b_{ij})$ — матрица, получающаяся из A транспозицией j-го и k-го столбцов. Очевидно, определители $\det A$ и $\det B$ состоят из одинаковых членов. Рассмотрим знаки, с которыми эти члены входят в разложение определителей. Общий член определителя $\det B$ есть

$$b_{i_1 1}\dots b_{i_j j}\dots b_{i_k k}\dots b_{i_n n} = a_{i_1 1}\dots a_{i_j k}\dots a_{i_k j}\dots a_{i_n n}.$$

Его знак определяется четностью подстановки

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_j & \dots & i_k & \dots & i_n \\ 1 & \dots & j & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix},$$

в то время как знак того же члена в разложении определителя $\det A$ определяется четностью подстановки

$$\tau' = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_j & \dots & i_k & \dots & i_n \\ 1 & \dots & k & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Подстановка τ' получается одной транспозицией в верхней строке из подстановки τ, следовательно, τ и τ' имеют разные четности. Таким образом, одни и те же члены входят в разложение определителей $\det A$ и $\det B$ с обратными знаками. ∎

Утверждение 11.12. *Определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен нулю, т. е.* $\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots, a_n) = 0$ *при* $a_j = a_k$ *и* $j \neq k$.

Доказательство. Вместе с членом

$$a_{i_1 1} \ldots a_{i_j j} \ldots a_{i_k k} \ldots a_{i_n n}$$

рассматриваемого определителя рассмотрим член

$$a_{i_1 1} \ldots a_{i_k j} \ldots a_{i_j k} \ldots a_{i_n n}.$$

Так как $a_j = a_k$, то эти члены равны, однако знаки, с которыми они входят в состав определителя, различны. Поэтому сумма этих членов равна нулю, следовательно, равен нулю сам определитель. ∎

Утверждение 11.13. *При умножении столбца, определитель умножается на это число, т. е.* $\det(a_1, \ldots, \alpha a_j, \ldots, a_n) = \alpha \det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$.

Доказательство. При умножении j-го столбца на число α каждый член определителя умножается на α, следовательно, весь определитель умножается на α. ∎

Утверждение 11.14. *Если j-й столбец определителя представлен в виде суммы $b + c$, где $b \in F^n$, $c \in F^n$, то определитель равен сумме двух определителей, первый из которых получается заменой j-го столбца исходного определителя столбцом b, а второй — заменой того же столбца столбцом c, т. е.* $\det(a_1, \ldots, b + c, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, b, \ldots, a_n) + \det(a_1, \ldots, c, \ldots, a_n)$.

Доказательство. Следует из равенства

$$a_{i_1 1} \ldots (b_{i_j} + c_{i_j}) \ldots a_{i_n n} \;=\; a_{i_1 1} \ldots a_{i_j} \ldots a_{i_n n} \;+\; a_{i_1 1} \ldots b_{i_j} \ldots a_{i_n n}.$$

∎

Из утверждений 11.13 и 11.14 получаем следующее обобщение:

Следствие 11.15.

$$\det\left(a_1, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \beta_i b_i, \ldots, a_m\right) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \det(a_1, \ldots, b_i, \ldots, a_m),$$

т. е. определитель есть линейная функция по каждому своему столбцу (строке).

Утверждение 11.16. *Определитель с линейно зависимыми столбцами равен нулю.*

Доказательство. Так как столбцы линейно зависимы, то найдется столбец, скажем, j-й, линейно выражающийся через остальные. Используя следствие 11.15 и утверждение 11.12, получаем

$$\det A = \det\left(a_1, \ldots, a_{j-1}, \sum_{i \neq j} \alpha_i a_i, a_{j+1}, \ldots, a_m\right) =$$

$$= \sum_{i \neq j} \alpha_i \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_m) = 0.$$

∎

Утверждение 11.17. *Определитель не меняется, если к одному из его столбцов прибавить другой столбец, умноженный на произвольное число:*

$$\det(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n)=\det(a_1,\dots,a_i+\alpha a_j,\dots,a_j,\dots,a_n).$$

Доказательство. Из утверждений 11.13, 11.14 и 11.12 получаем:

$$\det(a_1,\dots,a_i+\alpha a_j,\dots,a_j,\dots,a_n)=$$

$$=\det(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n)+\alpha\det(a_1,\dots,a_j,\dots,a_j,\dots,a_n)=$$
$$=\det(a_1,\dots,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n).$$

∎

Замечание 11.18. Утверждения 11.11, 11.13, 11.17 устанавливают, как меняется определитель при элементарных преобразованиях его строк и столбцов: при транспозиции строк (столбцов) определитель меняет знак, при умножении строки (столбца) на число определитель умножается на это число, при прибавлении к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженного на число, определитель не изменяется. В частности, если матрица A' получена из A серией элементарных преобразований ее строк (столбцов), то $\det A=0$ тогда и только тогда, когда $\det A'=0$.

Утверждение 11.19. *Определитель верхней треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:*

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Доказательство. Докажем, что все члены определителя, кроме, быть может, $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, равны нулю. Пусть $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_n n}$ — член определителя. Если $i_1\neq 1$, то $a_{i_1 1}=0$ и рассматриваемый член равен нулю. Поэтому будем считать, что $i_1=1$, поэтому $i_2\neq 1$. Если, кроме того, $i_2\neq 2$, то $a_{i_2 2}=0$ и рассматриваемый член снова равен нулю. Поэтому будем считать, что $i_2=2$, поэтому $i_3\neq 1$, $i_3\neq 2$ и т. д. Приходим к выводу, что среди всех членов рассматриваемого определителя лишь $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ может не быть равным нулю. ∎

Очевидно, аналогичное утверждение справедливо и для нижних треугольных матриц.

С помощью элементарных преобразований определитель можно привести к треугольному виду. Согласно замечанию 11.18 при этом определитель будет изменяться известным образом. На этом основан практичный метод вычисления определителей.

Пример 11.20. Вычислим определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -3 & -1\end{vmatrix}.$$

Переставляем первую и вторую строки, при этом определитель сменит знак. Далее вычитаем первую строку из остальных с подходящими множителями (2, 3, 1 соответственно), так, чтобы занулить в первом столбце все элементы ниже диагонали:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{vmatrix}.$$

Вычитаем из третьей строки вторую:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{vmatrix}.$$

Вычитаем из четвертой строки третью, умноженную на $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{4} \end{vmatrix} = -1 \cdot (-5) \cdot (-8) \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) = 110$$

Теорема 11.21. *Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (строки) линейно зависимы.*

Доказательство. Достаточность была доказана в утверждении 11.16. Докажем необходимость. Элементарными преобразованиями строк и/или столбцов матрицы A приведем ее к ступенчатому виду A':

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_2 & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * \\ \multicolumn{15}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_r & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{15}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Заметим, что $\det A = 0$ тогда и только тогда, когда $\det A' = 0$ (см. замечание 11.18). Однако из утверждения 11.19 следует, что $\det A' = 0$ тогда и только тогда $\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A < n$. ∎

Квадратная матрица $A \in F^{n\times n}$ называется *вырожденной*, а также *сингулярной*, или *особенной*, если $\det A = 0$, в противном случае матрица называется *невырожденной*. Из теоремы 11.21 следует, что A вырождена тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} A < n$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$. Говорят, что A имеет *диагональное преобладание*, если

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Утверждение 11.22. *Матрица с диагональным преобладанием невырождена.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $\det A = 0$. Тогда найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{11.16}$$

Пусть α_s — среди этих чисел максимальное по абсолютной величине. Из (11.16) при $i = s$ получаем

$$\alpha_s a_{ss} = -\alpha_1 a_{s1} - \ldots - \alpha_{s-1} a_{s,s-1} - \alpha_{s+1} a_{s,s+1} - \ldots - \alpha_n a_{sn},$$

откуда

$$\begin{gathered} |\alpha_s a_{ss}| \le |\alpha_1 a_{s1}| + \ldots + |\alpha_{s-1} a_{s,s-1}| + |\alpha_{s+1} a_{s,s+1}| + \ldots + |\alpha_n a_{sn}| \le \\ \le |\alpha_s| (|a_{s1}| + \ldots + |a_{s,s-1}| + |a_{s,s+1}| + \ldots + |a_{sn}|) < |\alpha_s| \cdot |a_{ss}|. \end{gathered}$$

Противоречие. ∎

11.5. Миноры. Теорема Лапласа

Пусть $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$. Обозначим

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \ldots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}.$$

Если $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, то

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix}$$

называется *минором k-го порядка* матрицы A. Таким образом, минор — это определитель матрицы, элементы которой стоят на пересечении выбранных строк и столбцов матрицы A. Если $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_k = k$, $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_k = k$, то минор называется *угловым.* Если $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots, i_k = j_k$, то минор называется *главным.* Если

$$m = n, \quad \{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\},$$

$$\{j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$$

и

$$i_{k+1} < i_{k+2} < \ldots < i_n, \quad j_{k+1} < j_{k+2} < \ldots < j_n,$$

то минор

$$A\begin{pmatrix} i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n \\ j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n \end{pmatrix},$$

т. е. определитель матрицы, полученной вычеркиванием из A заданных строк и столбцов, называется *дополнительным* к минору

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{pmatrix};$$

при этом

$$(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k} A\begin{pmatrix} i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n \\ j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n \end{pmatrix}$$

называется *алгебраическим дополнением* к этому минору.

Лемма 11.23. *Произведение минора определителя на его алгебраическое дополнение после умножения членов минора на члены алгебраического дополнения есть алгебраическая сумма, слагаемые которой являются некоторыми членами определителя, причем их знаки совпадают со знаками, с которыми они входят в состав определителя.*

Доказательство. Легко видеть, что все слагаемые алгебраической суммы, получающейся после умножения членов минора на члены алгебраического дополнения, встречаются в разложении исходного определителя. Остается показать, что знаки слагаемых этой суммы совпадают со знаками соответствующих членов исходного определителя.

Вначале рассмотрим случай $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$, $j_1 = 1, \ldots, j_k = k$. Произвольный член $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{kj_k}$ минора $A\begin{pmatrix}1,2,\ldots,k\\1,2,\ldots,k\end{pmatrix}$ имеет в этом члене знак, определяемый четностью подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{pmatrix}, \tag{11.17}$$

в то время как член $a_{k+1,k+l_1}a_{k+2,k+l_2}\ldots a_{n,k+l_k}$ минора $A\begin{pmatrix}k+1,k+2,\ldots,n\\k+1,k+2,\ldots,n\end{pmatrix}$ имеет знак, определяемый четностью подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_{n-k} \end{pmatrix}. \tag{11.18}$$

Произведение этих членов $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{kj_k}a_{k+1,k+l_1}a_{k+2,k+l_2}\ldots a_{n,k+l_{n-k}}$ поэтому имеет знак

$$(-1)^{\sigma(j_1,j_2,\ldots,j_k)} \cdot (-1)^{\sigma(l_1,l_2,\ldots,l_{n-k})}.$$

Однако именно с этим знаком член $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{kj_k}a_{k+1,k+l_1}a_{k+2,k+l_2}\ldots a_{n,k+l_{n-k}}$ входит в разложение исходного определителя, так как число инверсий в подстановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & k+2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k & k+l_1 & k+l_2 & \ldots & k+l_{n-k} \end{pmatrix}.$$

равно сумме инверсий в подстановках (11.17) и (11.18), т. е. $\sigma(j_1+j_2+\ldots+j_k)+\sigma(l_1+l_2+\ldots+l_k)$.

Теперь рассмотрим общий случай. Переставим строки и столбцы определителя так, чтобы рассматриваемый минор стоял в левом верхнем углу. Для этого переставим i_1-ю строку с (i_1-1)-й, затем с (i_1-2)-й и т. д., пока i_1-я строка не займет место первой; затем переставим i_2-ю строку с (i_2-1)-й, затем с (i_2-2)-й и т. д., пока i_2-я строка не займет место второй строки. Аналогичные действия произведем с i_3-й строкой и т. д., пока строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ не займут верхние k мест. Аналогичные действия произведем со столбцами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. В конце всех действий минор $A\begin{pmatrix}i_1,i_2,\ldots,i_k\\j_1,j_2,\ldots,j_k\end{pmatrix}$ окажется в левом верхнем углу, при этом взаимное расположение его строк и столбцов останется неизменным. Дополнительный к нему минор будет стоять в правом нижнем углу, взаимное расположение его строк и столбцов также останется неизменным. Всего будет произведено

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)+(j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+(j_k-k)$$

транспозиций строк и столбцов матрицы A. Легко видеть, что четность этого числа совпадает с четностью $i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k$. ∎

Теорема 11.24 (Разложение определителя по строке)**.** *Определитель матрицы равен сумме произведений элементов выбранной, скажем, i-й, строки на их алгебраические дополнения:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij},$$

где M_{ij} — определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Аналогичное утверждение справедливо и для любого столбца матрицы.

Доказательство. По лемме 11.23 произведение a_{ij} на алгебраическое дополнение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ является суммой части членов, входящих в разложение $\det A$, с теми же знаками, с которыми они встречаются в этом разложении. Очевидно, количество этих членов равно числу членов минора M_{ij}, т. е. $(n-1)!$. С другой стороны, все члены, встречающиеся в произведениях

$$a_{i1}M_{i1}, a_{i2}M_{i2}, \ldots, a_{in}M_{in}$$

попарно различны и общее их число равно $n \cdot (n-1)! = n!$, т. е. совпадает с общим числом членов в $\det A$, откуда получаем требуемое. ∎

Пример 11.25.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(разложение по первой строке).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые числа. *Определителем Вандермонда* называется

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{11.19}$$

Утверждение 11.26.

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i). \tag{11.20}$$

Доказательство. Формулу (11.20) докажем индукцией по n. При $n = 2$ имеем

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Теперь предположим, что формула (11.20) верна для определителей $(n-1)$-го порядка. Докажем ее для определителей n-го порядка. Из n-го столбца определителя (11.19) вычтем $(n-1)$-й, умноженный на x_1, затем из $(n-1)$-го столбца вычтем $(n-2)$-й, умноженный на x_1 и т. д., наконец, из 2-го столбца вычтем 1-й, умноженный на x_1. Получим:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 & \ldots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_n x_1 & \ldots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по первой строке, придем к определителю $(n-1)$-го порядка. Вынесем из каждой строки этого определителя общий множитель:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)\cdot W(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Применяя к $W(x_2, x_3, \dots, x_n)$ предположение индукции:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j - x_i),$$

получаем требуемое. ∎

Следствие 11.27. *Определитель Вандермонда $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равен нулю тогда и только тогда, когда среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть по крайней мере два равных.*

Пример 11.28.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Приведем другой способ вывода формулы (11.20). Снова воспользуемся индукцией по n. Будем считать, что формула справедлива для порядка определителя, меньшего n, и докажем ее для определителя Вандермонда n-го порядка. Предположим, что $x_i \ne x_j$ при $i \ne j$ (в противном случае определитель равен нулю и доказываемая формула верна). Рассмотрим $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ как многочлен относительно x_1. Степень этого многочлена равна $n-1$ и старший коэффициент равен $W(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) \ne 0$ — в этом можно легко убедиться, если разложить $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по первой строке. Заметим однако, что числа $x_2, x_3, \dots, x_n$ являются корнями этого многочлена: при $x_1 = x_i$ $(i = 2, 3, \dots, n)$ определитель равен нулю, поэтому

$$W(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = W(x_2, x_3, \dots, x_{n-1})(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_{n-1}).$$

Применяя теперь к $W(x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$ предположение индукции, получаем требуемое.

Пример 11.29.* Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Рассматриваемый определитель равен взятому со знаком $(-1)^s$ коэффициенту многочлена $W(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$, стоящему при x^s: чтобы убедиться в этом, достаточно разложить $W(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ по первой строке. Однако по утверждению 11.26

$$W(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n}(x_j - x)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

В многочлене, стоящем справа, коэффициент при x^s равен

$$(-1)^s \prod_{1\le <j_1<j_2<\dots<j_{n-s}\le n} x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_{n-s}} \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

Полученное значение без множителя $(-1)^s$ и есть Δ.

Определитель

$$C(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \dots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \dots & \dfrac{1}{a_2+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \dots & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Коши.*

Утверждение 11.30.*

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) = \frac{\prod\limits_{j<i}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod\limits_{i,j}(a_i + b_j)}.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ утверждение справедливо. Теперь предположим, что доказываемая формула верна для определителей $(n-1)$-го порядка. Вычтем в определителе $C = C(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ последний столбец из всех предыдущих:

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) =$$
$$\begin{vmatrix} \frac{b_n - b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n - b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_2+b_{n-1})(a_2+b_n)} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_n - b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_n+b_2)(a_n+b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_n+b_{n-1})(a_n+b_n)} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

Из каждой строки вынесем множитель $\dfrac{1}{a_i + b_n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Из каждого столбца, кроме последнего, вынесем множитель $b_n - b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$:

$$C = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_n)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе вычтем последнюю строку из всех остальных:

$$C = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_n)} \times$$
$$\begin{vmatrix} \frac{a_n - a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n - a_1}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n - a_1}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0 \\ \frac{a_n - a_2}{(a_2+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n - a_2}{(a_2+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n - a_2}{(a_2+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по последнему столбцу и вынесем общие множители:

$$C = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_n)\prod\limits_{j=1}^{n-1}(a_n + b_j)} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Осталось применить к полученному определителю предположение индукции. ∎

Пример 11.31.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} = \frac{(b_1-b_2)(a_1-a_2)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)}.$$

Следствие 11.32 (Определитель Гильберта)**.**

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dots & \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \dots & \dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \dots & \dfrac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n+1} & \dfrac{1}{n+2} & \dots & \dfrac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{\left(1!\,2!\,3!\,\dots\,(n-1)!\right)^3}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!\,\dots\,(2n-1)!}.$$

Теорема 11.24 позволяет дать следующее *индуктивное определение определителя* (2-я точка зрения на определители). Определителем матрицы 1-го порядка называется (единственный) элемент этой матрицы. Определителем матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка, $n \geq 2$, называется

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot M_{1j},$$

где M_{ij} — определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием i-го строки и j-го столбца. В силу теоремы 11.24 это определение эквивалентно комбинаторному определению.

Теорема Лапласа. Обобщением теоремы 11.24 является теорема Лапласа, позволяющая раскладывать определитель по нескольким строкам (столбцам).

Теорема 11.33 (Лаплас)**.** *Сумма произведений миноров, стоящих в фиксированных k строках матрицы A, на их алгебраические дополнения равна определителю матрицы A:*

$$\det A = \sum_{j_1<\ldots<j_k} (-1)^{j_1+\ldots+j_k+i_1+\ldots+i_k} \cdot A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix} \cdot A\begin{pmatrix} i_{k+1}, \dots, i_n \\ j_{k+1}, \dots, j_n \end{pmatrix}. \tag{11.21}$$

Аналогичное утверждение справедливо и для любого набора выбранных столбцов.

Доказательство. По лемме 11.23 произведение минора на алгебраическое дополнение является суммой части членов, входящих в разложение $\det A$, взятых с теми же знаками, с которыми они встречаются в этом разложении. Количество этих членов равно произведению числа членов в миноре на число членов в алгебраическом дополнении: $k!(n-k)!$. Общее число миноров, стоящих в выбранных строках равно $\binom{n}{k}$, поэтому общее число членов, встречающихся в произведениях этих миноров на их алгебраические дополнения, равно

$$\binom{n}{k} k!(n-k)! = n!$$

Легко видеть, что все члены попарно различны и поэтому их сумма равна $\det A$. ∎

Пример 11.34. Разложим определитель 4-го порядка по 1-й и 4-й строкам, применим теорему 11.33 при $i_1 = 1$, $i_2 = 4$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+4+1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+4+2+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+2+4} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+4+3+4} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 11.35. Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Разложим его по 2-й и 4-й строкам с большим количеством нулевых элементов. В этих строках содержится $\binom{5}{2} = 10$ миноров 2-го порядка, однако 7 из них будут содержать по крайней мере один нулевой столбец, поэтому заведомо равны нулю, поэтому в сумме (11.21) останется только 3 члена:

$$\Delta = (-1)^{2+4+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+1+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+4+3+4} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 61 - 13 \cdot 0 - 24 \cdot (-28) = 611.$$

Пример 11.36. Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Из четвертого столбца вычтем первый; из пятого столбца вычтем удвоенный первый:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из пятой строки вычтем четвертую:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по последним двум столбцам:

$$\Delta = (-1)^{3+4+4+5} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10.$$

Пример 11.37. Пусть $A \in F^{n\times n}$, $B \in F^{m\times m}$, $C \in F^{n\times m}$, тогда

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Для доказательства достаточно разложить определитель по первым n столбцам.

11.6.* Полилинейные знакопеременные функции

Рассмотрим функцию $f(a_1, \ldots, a_n)$ от n аргументов $a_1, \ldots, a_n$, где $a_j \in F^n$ $(j = 1, \ldots, n)$. Такая функция называется *линейной по каждому аргументу* (или *полилинейной*), если

$$f(a_1, \ldots, a_j' + a_j'', \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_j', \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_j'', \ldots, a_n),$$
$$f(a_1, \ldots, \alpha a_j, \ldots, a_n) = \alpha f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$$

для любых входящих сюда векторов из F^n, любого α из F и любого $j \in \{1, \ldots, n\}$. Функция f называется *знакопеременной*, если

$$f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = -f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$$

для любых векторов и любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Функция f называется *нормированной*, если

$$f(e_1, \ldots, e_n) = 1,$$

где e_j — столбец, у которого j-я компонента равна 1, а остальные равны 0.

Упражнение 11.38. Пусть $i_1, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка чисел $1, \ldots, n$, а f — полилинейная знакопеременная нормированная функция. Доказать, что $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = (-1)^{\sigma(i_1, \ldots, i_n)}$.

Из доказанных результатов следует, что определитель есть полилинейная знакопеременная нормированная функция от своих столбцов. Верно и обратное утверждение:

Теорема 11.39. *Любая полилинейная знакопеременная нормированная функция $f(a_1, \ldots, a_n)$ есть определитель матрицы, составленной из столбцов $a_1, \ldots, a_n$. Аналогичное утверждение справедливо и для строк матрицы.*

Доказательство. По индукции для полилинейной функции мы можем доказать

$$f\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n). \tag{11.22}$$

Далее, пусть $i_1, \dots, i_n$ — некоторая перестановка чисел $1, \dots, n$. Согласно упражнению 11.38, $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = (-1)^{\sigma(i_1,\dots,i_n)}$.

Докажем теперь, что если $a_i = a_j$, где $i \neq j$, то знакопеременная функция $f(a_1, \dots, a_n)$ равна нулю. Действительно, при транспозиции i-го и j-го аргумента функция не меняется, но по свойству знакопеременности меняет знак, следовательно,

$$f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0. \tag{11.23}$$

Пусть $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^\top$ $(j = 1, \dots, n)$, тогда

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i. \tag{11.24}$$

Из (11.22)–(11.24) получаем

$$f(a_1, \dots, a_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\right) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}, \dots, a_{i_n n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{\sigma(i_1,\dots,i_n)} a_{i_1 1}, \dots, a_{i_n n} = \det A.$$

Теорема доказана. ∎

Мы получаем так называемое *аксиоматическое определение определителя*: определителем матрицы называется полилинейная нормированная знакопеременная функция от столбцов (строк) матрицы (*третья точка зрения на определитель*).

11.7. Минорный ранг матрицы

Назовем *базисным минором* матрицы ненулевой минор наибольшего порядка. Базисный минор матрицы в общем случае определяется неоднозначно, но однозначно определяется его порядок, называемый *минорным рангом* матрицы. В этом разделе мы увидим, что определение минорного ранга эквивалентно другим определениями ранга матрицы и, таким образом,

$$\text{столбцовый ранг} = \text{строчечный ранг} = \text{минорный ранг}.$$

Пусть $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$, $j \notin \{j_1, \dots, j_r\}$. Минор $A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r, i \\ j_1, \dots, j_r, j \end{pmatrix}$ называется *окаймляющим* по отношению к $A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix}$.

Теорема 11.40 (об окаймляющих минорах)**.** *Пусть некоторый минор матрицы не равен нулю, а все окаймляющие его миноры равны нулю, тогда строки и столбцы, на пересечении которых стоит исходный минор, образуют соответственно строчечную и столбцовую базы матрицы.*

Доказательство. Для простоты обозначений будем считать, что рассматривается ненулевой минор, стоящий в первых r строках и r столбцах. Минор $A\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, r, i \\ 1, 2, \dots, r, j \end{pmatrix}$ разло́жим по последней строке:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = a_{i1} c_1 + a_{i2} c_2 + \dots + a_{ir} c_r + a_{ij} c, \tag{11.25}$$

где c_j — соответствующее алгебраическое дополнение $(j = 1, 2, \ldots, r)$ и

$$c = A\begin{pmatrix} 1, \ldots, r \\ 1, \ldots, r \end{pmatrix} \neq 0.$$

Из (11.25) получаем

$$a_{ij} = -\frac{1}{c}(c_1 a_{i1} + c_2 a_{i2} + \ldots + c_r a_{ir}). \tag{11.26}$$

Заметим, что величины c_j не зависят от i, поэтому из (11.26) следует

$$a_j = -\frac{1}{c}(c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_r a_r),$$

где a_j — j-й столбец матрицы A. Итак, произвольный столбец матрицы A линейно выражается через линейно независимую систему столбцов с номерами $1, \ldots, r$, поэтому эта система является столбцовой базой. Утверждение про строки матрицы доказывается аналогично. ∎

Следствие 11.41. *Строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, образуют соответственно строчечную и столбцовую базы матрицы.*

Следствие 11.42. *Если в матрице некоторый минор не равен нулю, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то исходный минор — базисный.*

Следствие 11.43. *Минорный ранг равен столбцовому и строчечному рангам матрицы.*

Теорема 11.44. *Минор, стоящий на пересечении строк строчечной базы и столбцов столбцовой базы матрицы, является базисным.*

Доказательство. Пусть $i_1, \ldots, i_r$, $j_1, \ldots, j_r$ — номера базисных строк и столбцов матрицы A соответственно. Обозначим B подматрицу, образованную элементами, стоящими на пересечении строк $i_1, \ldots, i_r$ и столбцов $j_1, \ldots, j_r$. Обозначим C подматрицу, образованную всеми строками матрицы A и столбцами $j_1, \ldots, j_r$. По условию столбцы матрицы C линейно независимы, поэтому $\operatorname{rank} C = r$. По условию каждая строка матрицы A (и, следовательно, C) линейно выражается через строки $i_1, \ldots, i_r$. Так как $\operatorname{rank} C = r$, то строки $i_1, \ldots, i_r$ линейно независимы, откуда $\operatorname{rank} B = r$, т. е. $\det B \neq 0$. Так как очевидно, что все окаймляющие миноры равны нулю, то исходный минор — базисный. ∎

11.8. Обратная матрица

Матрица $B \in F^{n\times n}$ называется *обратной* к матрице $A \in F^{n\times n}$, если $AB = BA = E$, где E — единичная матрица. Обратная матрица обозначается A^{-1}.

Обозначим A_{ij} алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A. Матрица

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

называется *присоединенной*, или *взаимной*, к матрице A.

Утверждение 11.45.

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = \det A \cdot E.$$

Доказательство. Покажем, что $A\cdot \operatorname{adj} A = \det A\cdot E$. Для этого рассмотрим элемент матрицы $A \cdot \operatorname{adj} A$, стоящий в i-й строке и j-м столбце, и покажем, что он равен $\det A$ при $i = j$ и 0 в остальных случаях, т. е. покажем, что

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{11.27}$$

Действительно, при $i = j$ левая часть равенства (11.27) есть разложение определителя $\det A$ по i-й строке. При $i \neq j$ левая часть этого равенства есть разложение определителя матрицы, получающейся из A заменой j-й строки на i-ю — очевидно, этот определитель равен нулю.

Равенство $\operatorname{adj} A \cdot A = \det A \cdot E$ доказывается аналогично. ∎

Теорема 11.46. *Если матрица $A \in F^{n\times n}$ невырождена, т. е. $\det A \neq 0$, то A^{-1} существует, единственна и равна*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A. \tag{11.28}$$

Если $\det A = 0$, то A^{-1} не существует.

Доказательство. Из утверждения 11.45 следует, что если $\det A \neq 0$, то матрица A^{-1} существует и определяется формулой (11.28). Докажем единственность обратной матрицы. Пусть B_1, B_2 — матрицы, обратные к A. Тогда $B_1AB_2 = B_1$, так как $AB_2 = E$, а с другой стороны, $B_1AB_2 = B_2$, так как $B_1A = E$, поэтому $B_1 = B_2$.

Осталось показать, что если $\det A = 0$, то обратной матрицы не существует. Предположим, что это не так и B — обратная к A матрица, тогда $AB = E$. Но по следствию 7.10 $\operatorname{rank} E \leq \operatorname{rank} A$, что невозможно, так как $\operatorname{rank} A < n$, а $\operatorname{rank} E = n$. ∎

Пример 11.47.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Пример 11.48. Вычислим матрицу, обратную к

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\det A = 41$,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 22,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

Поэтому

$$A^{-1} = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 10 \\ 6 & -9 & -7 \\ -1 & 22 & 8 \end{pmatrix}.$$

Следствие 11.49. *Если $A \in F^{n\times n}$, $B \in F^{n\times n}$ и $AB = E$, то $BA = E$, т. е. $A^{-1} = B$ и $B^{-1} = A$.*

Доказательство. Так как $AB = E$ и $\operatorname{rank} E = n$, то по следствию 7.10 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$, т. е. $\det A \neq 0$ и $\det B \neq 0$. Таким образом, существуют матрицы A^{-1} и B^{-1}.

Домножая обе части равенства $AB = E$ слева на A^{-1}, получаем $A^{-1}AB = A^{-1}$, т. е. $B = A^{-1}$.

Домножая обе части равенства $AB = E$ справа на B^{-1}, получаем $A = B^{-1}$. ∎

Утверждение 11.50. *Пусть $A \in F^{n\times n}$, $B \in F^{n\times n}$, $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, тогда*

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Доказательство. Первое свойство уже доказано в следствии 11.49. Все три свойства выводятся из определения обратной матрицы. Докажем, например, что $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$. Это равенство означает, что матрица $(A^{-1})^\top$ является обратной к $A^\top$. Проверим это: $(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = E$. ∎

Замечание 11.51. Для практического нахождения обратной матрицы формула (11.28) пригодна лишь при небольших значениях порядка матрицы, либо для матриц специального вида. Как правило, для нахождения обратной матрицы используют метод элементарных преобразований. Пусть $\det A \neq 0$, тогда матрицу A элементарными преобразованиями строк можно привести к единичной матрице E. Оказывается, что если над единичной матрицей проделать те же элементарные преобразования, что и над матрицей A, то на месте единичной матрицы получим A^{-1}. Действительно, по утверждению 7.21 каждое элементарное преобразование строк матрицы A эквивалентно домножению слева матрицы A на некоторую матрицу, поэтому последовательность таких преобразований эквивалентна домножению слева на матрицы $S_1, S_2, \ldots, S_t$. Если эта последовательность элементарных преобразований приводит матрицу к единичной, то

$$S_t \cdot (S_{t-1} \cdot \ldots \cdot (S_2 \cdot (S_1 \cdot A)) \ldots) = E. \tag{11.29}$$

Обозначим $B = S_t S_{t-1} \ldots S_2 S_1$, тогда из (11.29) получаем $B = A^{-1}$. Поэтому проделав те же элементарные преобразования над единичной, получим матрицу $S_t \cdot (S_{t-1} \cdot \ldots \cdot (S_2 \cdot (S_1 \cdot E)) \ldots) = B = A^{-1}$.

Как правило, для реализации этого алгоритма записывают блочную матрицу (A, E). С помощью элементарных преобразований строк этой матрицы на месте A получают единичную матрицу, тогда на месте E получим A^{-1}.

Пример 11.52. Найдем обратную матрицу к матрице из примера 11.48. Припишем справа к A единичную матрицу:

$$(A, E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Будем проводить преобразования со строками блочной матрицы (A, E). Переставим вторую строку на первое место и вычтем ее из оставшихся с подходящими множителями, чтобы занулить внедиагональные элементы первого столбца:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Переставим вторую и третью строки и вычтем ее из остальных строк с подходящими множителями так, чтобы занулить внедиагональные элементы второго столбца:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 9 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -41 & 1 & -22 & -8 \end{array}\right).$$

Умножим последнюю строку на $-\dfrac{1}{41}$ и вычтем ее из остальных строк с подходящими множителями, чтобы занулить внедиагональные элементы третьего столбца:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{41} & \frac{7}{41} & \frac{10}{41} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{41} & -\frac{9}{41} & -\frac{7}{41} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{41} & \frac{22}{41} & \frac{8}{41} \end{array}\right).$$

Справа от черты стоит A^{-1}.

Утверждение 11.53.* *Пусть ε — первообразный корень n-й степени из 1, тогда*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{(n-1)2} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \ldots & \varepsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \ldots & \varepsilon^{-2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varepsilon^{-(n-1)} & \varepsilon^{-(n-1)2} & \ldots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце произведения $AB = (c_{ik})$, где $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$, $a_{ik} = \varepsilon^{(i-1)(k-1)}$, $b_{kj} = \dfrac{1}{n}\varepsilon^{-(k-1)(j-1)}$. исходная матрица, B — матрица, стоящая в правой части доказываемого равенства:

$$c_{ik} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{(i-1)(k-1)}\varepsilon^{-(k-1)(j-1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k(i-j)} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ \dfrac{1 - \varepsilon^{n(i-j)}}{1 - \varepsilon^{i-j}} = 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, $AB = E$, откуда $B = A^{-1}$. ∎

Утверждение 11.54 (Формула Фробениуса).* *Пусть* $A \in F^{n\times n}$, $B \in F^{n\times m}$, $C \in F^{m\times n}$, $D \in F^{m\times m}$. *Если матрицы* A *и* $T = D - CA^{-1}B$ *невырождены, то* $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *тоже невырождена и*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BT^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BT^{-1} \\ -T^{-1}CA^{-1} & T^{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Проверяется умножением. ∎

Формулы Фробениуса позволяют свести вычисление обратной матрицы порядка $n+m$ к обращению одной матрицы порядка n и одной матрицы порядка m.

Утверждение 11.55 (Формула Шермана–Моррисона).* *Пусть* $A \in F^{n\times n}$, $U \in F^{n\times m}$, $V \in F^{m\times n}$, $\det A \neq 0$. *Если матрица* $E_m + VA^{-1}U$ *невырождена, то матрица* $A + UV$ *также невырождена и*

$$(A + UV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(E_m + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

Доказательство. Перемножим матрицы:

$$(A + UV)\big(A^{-1} - A^{-1}U(E_m + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}\big) =$$
$$= E_n - U(E_m + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} + UVA^{-1} - UVA^{-1}U(E_m + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} =$$
$$= E_n - U\big(E_m - (E_m + VA^{-1}U) - VA^{-1}U\big)(E_m + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = E_n,$$

что доказывает требуемое. ∎

Пример 11.56. Найдем матрицу, обратную к

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матрица B отличается от матрицы A из примера 11.48 лишь элементом $b_{12} = 3$, в то время как $a_{12} = 4$. Для матрицы A уже была вычислена обратная:

$$A^{-1} = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 10 \\ 6 & -9 & -7 \\ -1 & 22 & 8 \end{pmatrix},$$

поэтому для вычисления B^{-1} воспользуемся утверждением 11.55. Пусть

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V = (0, -1, 0),$$

тогда $B = A + UV$. Последовательно вычисляем:

$$A^{-1}U = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad VA^{-1} = \frac{1}{41} \cdot (-6, 9, 7), \qquad VA^{-1}U = -\frac{6}{41},$$

откуда

$$B^{-1} = A^{-1} - (A^{-1}U)(1 + VA^{-1}U)^{-1}(VA^{-1}) = \frac{1}{35} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 6 & -9 & -7 \\ -1 & 19 & 7 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 11.57. Вычислить

$$\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ b & b & a & \dots & a \end{pmatrix}^{-1}$$

при $a \neq b$ и $a \neq b(1-n)$.

Утверждение 11.58. *Пусть* $A \in F^{n\times n}$, $B \in F^{n\times m}$, $C \in F^{m\times n}$, $\det A \neq 0$. *Тогда каждое из матричных уравнений*

$$AX = B, \qquad YA = C \tag{11.30}$$

имеет единственное решение:

$$X = A^{-1}B, \qquad Y = CA^{-1}. \tag{11.31}$$

Доказательство. Непосредственной подстановкой правых частей равенств (11.31) в (11.30) убеждаемся, что формулы (11.31) задают решения рассматриваемых уравнений. Для доказательства единственности решения уравнения $AX = B$ предположим, что оно имеет два решения X_1, X_2, тогда $AX_1 = AX_2$, откуда, домножая обе части этого равенства слева на A^{-1}, получаем $X_1 = X_2$. Единственность решения уравнения $YA = C$ доказывается аналогично. ∎

Замечание 11.59. Как правило при реальных вычислениях решение $X = A^{-1}B$ матричного уравнения $AX = B$ удобнее находить с помощью элементарных преобразований строк блочной матрицы (A, B), приводящих матрицу A к единичному виду. Легко доказать, что при на месте матрицы B мы получим $A^{-1}B$ (ср. замечание 11.51). Также для решения матричного уравнения $YA = C$ удобно рассмотреть блочную матрицу $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ и элементарными преобразованиями ее столбцов привести верхнюю часть к единичному виду, тогда на месте матрицы C мы получим CA^{-1}.

Пример 11.60. Решим матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Записываем блочную матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Из второй строки вычитаем первую, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & 6 \end{array}\right).$$

Вторую строку умножим на $-\dfrac{1}{5}$ и вычтем ее из первой с множителем 2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}\right),$$

откуда

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Пример 11.61. Решим матричное уравнение

$$Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем блочную матрицу

$$\left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{array}\right).$$

Из второго столбца вычтем первый, умноженный на 2:

$$\left(\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ \hline 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{array}\right).$$

Второй столбец умножим на $-\dfrac{1}{5}$ и вычтем его из первого с множителем 3:

$$\left(\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{9}{5} \end{array}\right),$$

откуда

$$Y = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 12 & -9 \end{pmatrix}.$$

11.9. Формулы Крамера

Система линейных уравнений $Ax = b$, в которой число уравнений равно числу неизвестных, т. е. $A \in F^{n\times n}$, называется *квадратной*. В этом случае $\det A$ называется *определителем* этой системы.

Утверждение 11.62. *Квадратная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица системы невырождена, т. е. ее определитель не равен нулю.*

Доказательство. Следует из теорем 10.16, 10.20. ∎

Квадратная система с ненулевым определителем называется *крамеровской*. В разделе 11.1 были найдены формулы (11.7), (11.11), (11.12), используя которые можно найти (единственное) решение крамеровской системы второго и третьего порядка. Эти формулы могут быть обобщены на случай систем произвольного порядка.

Теорема 11.63 (Формулы Крамера)**.** *Пусть $A \in F^{n\times n}$ и $\det A \neq 0$, тогда система $Ax = b$ имеет единственное решение $x \in F^n$, компоненты которого можно найти по формулам*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.32}$$

где Δ — определитель матрицы A, а Δ_j — определитель матрицы, получающийся из A заменой ее j-го столбца столбцом b.

Доказательство. Так как $\det A \neq 0$, то $\operatorname{rank} A = n$, откуда $\operatorname{rank}(A, b) = n$, следовательно, система $Ax = b$ совместна и имеет единственное решение. Обозначим $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы A, тогда $b = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k a_k$ и

$$\Delta_j = \det(a_1, \ldots, b, \ldots, a_n) = \det\left(a_1, \ldots, \sum_{k=1}^{n} x_k a_k, \ldots, a_n\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \det(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n) = x_j \det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = x_j \Delta,$$

откуда получаем формулу (11.32). ∎

Замечание 11.64. По утверждению 11.58 решение крамеровской системы $Ax = b$ дает формула $x = A^{-1}b$. Формулы Крамера можно получить теперь из этой формулы и формул для определения коэффициентов обратной матрицы через алгебраические дополнения.

Рассмотрим однородную линейную систему, в которой число уравнений на 1 меньше числа неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \; + \; a_{12}x_2 \; + \ldots \; a_{1n}x_n \; = 0; \\ a_{21}x_1 \; + \; a_{22}x_2 \; + \ldots \; a_{2n}x_n \; = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots a_{n-1,n}x_n = 0. \end{cases} \tag{11.33}$$

Утверждение 11.65. *Частное решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ системы (11.33) можно вычислить по формуле*

$$x_j = (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,,j+1} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Если ранг системы равен $n-1$, то $x \neq 0$, и любое решение получается умножением найденного x на некоторое (произвольное) число.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i,n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Раскладывая его по первой строке, получим тождество, показывающее, что вычисленный по доказываемым формулам набор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет i-му уравнению.

Если ранг системы равен $n-1$, то по крайней мере один из миноров $(n-1)$-го порядка не равен нулю, поэтому $x \neq 0$. Размерность пространства решений равна $n-(n-1) = 1$, поэтому x образует фундаментальную систему решений. ∎

11.10. Теорема Бине–Коши

Теорема 11.66 (Бине–Коши)**.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in F^{n\times m}$*. Тогда*

$$\det(AB) = \sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_m\le n} A\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,m \\ k_1,k_2,\ldots,k_m \end{pmatrix} \cdot B\begin{pmatrix} k_1,k_2,\ldots,k_m \\ 1,2,\ldots,m \end{pmatrix}.$$

В частности, если $m > n$*, то* $\det(AB) = 0$*. Если* $m = n$*, то*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

(последнее равенство составляет содержание теоремы об умножении определителей*).*

Доказательство. Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $C = A \cdot B = (c_{ij})$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы A, $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Тогда

$$C = \left(\sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1 1}a_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} b_{i_2 2}a_{i_2}, \ldots, \sum_{i_m=1}^{n} b_{i_m m}a_{i_m}\right).$$

Пользуясь свойством линейности определителя, получаем

$$\det C = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\ldots\sum_{i_m=1}^{n} b_{i_1 1}b_{i_2 1}\ldots b_{i_m m}\det(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

В правой части равенства имеем сумму n^m определителей; сумма берется по всем наборам $(i_1, \ldots, i_m)$, где $1 \le i_j \le n$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Определители с одинаковыми столбцами заведомо равны нулю, поэтому

$$\det C = \sum_{i_1,\ldots,i_m} b_{i_1 1}b_{i_2 2}\ldots b_{i_m m}\det(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}).$$

В правой части равенства имеем сумму $n(n-1)\ldots(n-m+1)$ определителей по всем размещениям $i_1, \ldots, i_m$ элементов $1, \ldots, n$. Каждое такое размещение есть перестановка элементов $k_1, \ldots, k_m$, где $k_1 \le \ldots \le k_m$. Поэтому

$$\det C = \sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_m\le n}\ \sum_{i_1,\ldots,i_m} b_{i_1 1}b_{i_2 2}\ldots b_{i_m m}\det(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}).$$

Внешняя сумма берется по всем сочетаниям $k_1, \ldots, k_m$ элементов $1, \ldots, n$, а внутренняя — по всем перестановкам $i_1, \ldots, i_m$ элементов $k_1, \ldots, k_m$. Переставим столбцы определителей в порядке возрастания $k_1, \ldots, k_m$ их индексов $i_1, \ldots, i_m$:

$$\det C = \sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_m\le n}\ \sum_{i_1,\ldots,i_m} b_{i_1 1}b_{i_2 2}\ldots b_{i_m m}(-1)^{\sigma(i_1,\ldots,i_m)}\det(a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}).$$

Так как

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m} b_{i_1 1}b_{i_2 2}\ldots b_{i_m m}(-1)^{\sigma(i_1,\ldots,i_m)} = \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & \ldots & b_{k_1 m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k_m 1} & \ldots & b_{k_m m} \end{vmatrix},$$

то

$$\det C = \sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_m\le n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & \ldots & a_{1k_m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{mk_1} & \ldots & a_{mk_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & \ldots & a_{k_1 m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ b_{k_m 1} & \ldots & a_{k_m m} \end{vmatrix}.$$

∎

Пример 11.67.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 11.68. Пусть a, b, c, x, y, z — векторы геометрического трехмерного пространства. Далее $(\cdot,\cdot)$, $[\cdot,\cdot]$, $(\cdot,\cdot,\cdot)$ обозначают скалярное, векторное и смешанное произведение векторов соответственно. Справедливы равенства:

$$(a,b,c)(x,y,z) = \begin{vmatrix} (a,x) & (a,y) & (a,z) \\ (b,x) & (b,y) & (b,z) \\ (c,x) & (c,y) & (c,z) \end{vmatrix},$$

$$([a,b],[x,y]) = \begin{vmatrix} (a,x) & (a,y) \\ (b,x) & (b,y) \end{vmatrix},$$

$$(a,b,c)[x,y] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ (a,x) & (b,x) & (c,x) \\ (a,y) & (b,y) & (c,y) \end{vmatrix}.$$

Следствие 11.69. *Если матрица $A \in F^{n\times n}$ невырождена, то*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Доказательство. Из равенства $AA^{-1} = E$ вытекает $\det(AA^{-1}) = 1$, откуда получаем требуемое. ∎

Пример 11.70. Для вычисления определителя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

умножим A на $A^\top$:

$$AA^\top =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix},$$

откуда $\det(AA^\top) = (\det A)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$, поэтому $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Заодно мы показали, что
$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} \cdot A^\top.$$

Циркулянтом называется определитель

$$R(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_0 & \ldots & b_{n-4} & b_{n-3} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b_2 & b_3 & b_4 & \ldots & b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}.$$

Утверждение 11.71. *Пусть ε — первообразный корень n-й степени из 1 и пусть $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$, тогда*
$$R(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) = f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\ldots f(\varepsilon^{n-1}).$$

Доказательство. Для доказательства умножим циркулянт на определитель Вандермонда $W(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1})$. Рассмотрим, например, случай $n = 3$. Пользуясь теоремой об умножении определителей, получаем

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(1) & f(\varepsilon) & f(\varepsilon^2) \\ f(1) & \varepsilon f(\varepsilon) & \varepsilon^2 f(\varepsilon^2) \\ f(1) & \varepsilon^2 f(\varepsilon) & \varepsilon^4 f(\varepsilon^2) \end{vmatrix} =$$
$$= f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \end{vmatrix}.$$

Итак, $R(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})W(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}) = f(1)f(\varepsilon)\ldots f(\varepsilon^{n-1})W(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1})$. Так как $W(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}) \neq 0$, то получаем требуемое. В общем случае рассуждения аналогичные. ∎

Пример 11.72. Рассмотрим циркулянт

$$R = R(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-k}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Согласно утверждению 11.71 имеем $f(x) = 1 + x + \ldots + x^{k-1}$ и

$$R = k(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{k-1})(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \ldots + \varepsilon^{2(k-1)})\ldots(1 + \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{(n-1)2} + \ldots + \varepsilon^{(n-1)(k-1)}) =$$
$$= k \cdot \frac{1-\varepsilon^k}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1-\varepsilon^{2k}}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{1-\varepsilon^{(n-1)k}}{1-\varepsilon^{n-1}}, \tag{11.34}$$

где ε — первообразный корень n-й степени из единицы. Обозначим $d = \text{НОД}(n, k)$. Имеем $\varepsilon^{kn/d} = 1$. При $d > 1$ отсюда следует, что один из множителей в (11.34) равен нулю, поэтому $R = 0$. Если же $d = 1$, то ε^k является первообразным корнем n-й степени и числа $1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{(n-1)k}$ исчерпывают все значения корня n-й степени из 1, поэтому $R = k$.

11.11.* Приложения

Интерполяционный многочлен. Задачу нахождения интерполяционного многочлена можно свести к задаче решения крамеровской системы специального вида. Пусть требуется найти многочлен $f(x)$ степени меньшей n, удовлетворяющий условиям

$$f(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.35}$$

где x_i, y_i — заданные числа, причем $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. По теореме об интерполяционном многочлене решение этой задачи существует и единственно. Дадим другое доказательство этой теоремы.

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

— искомый интерполяционный многочлен, в котором необходимо отыскать значения коэффициентов a_j. Покажем, что эти коэффициенты определяются, причем единственным образом из условий (11.35). Действительно, эти условия приводят к квадратной системе

$$\begin{cases} a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \ldots + x_1^{n-1} a_{n-1} = y_1, \\ a_0 + x_2 a_1 + x_2^2 a_2 + \ldots + x_2^{n-1} a_{n-1} = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + x_n a_1 + x_n^2 a_2 + \ldots + x_n^{n-1} a_{n-1} = y_n, \end{cases} \tag{11.36}$$

рассматриваемой относительно неизвестных $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Определитель этой системы — определитель Вандермонда $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Так как $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, то по следствию 11.27 он не равен нулю, поэтому система (11.36) имеет единственное решение.

Приведенное доказательство дает еще один способ отыскания интерполяционного многочлена.

Пример 11.73. Найдем многочлен $f(x)$ степени не выше 4, удовлетворяющий условиям

$$f(-2) = 41, \quad f(-1) = 8, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 5. \tag{11.37}$$

Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$, где a_j — коэффициенты, которые требуется найти. Полагая в $f(x)$ $x = -2, -1, 0, 1, 2$, получим систему уравнений относительно неизвестных a_j $(j = 0, 1, \ldots, 4)$:

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + 16a_4 = 41, \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 8, \\ a_0 = 3, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 5. \end{cases}$$

Решая эту систему находим $a_0 = 3$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$, $a_4 = 1$. Таким образом, искомый многочлен — это $f(x) = 3 - x + x^2 - 2x^3 + x^4$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа–Эрмита. Рассмотрим одно обобщение задачи об интерполяционном многочлене.

Пример 11.74. Найдем многочлен $f(x)$ степени не выше 4, удовлетворяющий условиям

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 7, \quad f''(1) = 26, \quad f(2) = 35, \quad f'(2) = 75. \tag{11.38}$$

Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, где a_j — коэффициенты, которые требуется найти. Имеем $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$, $f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2$. Подставляя в $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ условия (11.38), приходим к системе уравнений относительно неизвестных a_j $(j = 0, 1, \dots, 4)$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2, \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 7, \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 = 26, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 35, \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 + 32a_4 = 75. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$, $a_4 = 3$. Найден многочлен $f(x) = 1 - x + x^2 - 2x^3 + 3x^4$.

Рассмотрим таблицу чисел

$$\begin{array}{|c|cccc|} x_1 & y_{10} & y_{11} & \dots & y_{1,n_1-1} \\ x_2 & y_{20} & y_{21} & \dots & y_{2,n_2-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_s & y_{s0} & y_{s1} & \dots & y_{s,n_s-1} \end{array}\,, \tag{11.39}$$

в которой $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени меньшей $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$, удовлетворяющий условиям

$$f^{(j)}(x_i) = y_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, s;\ j = 0, 1, \dots, n_i - 1) \tag{11.40}$$

назовем *интерполяционным многочленом Лагранжа–Эрмита*, относящимся к интерполяционной таблице (11.39).

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1}$$

— искомый интерполяционный многочлен. Из условий (11.40) получаем квадратную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_0 + x_1a_1 + x_1^2a_2 + \ldots + x_1^{n-1}a_{n-1} = y_{10}, \\ a_1 + 2x_1a_2 + \ldots + (n-1)x_1^{n-2}a_{n-1} = y_{11}, \\ 2a_2 + \ldots + (n-1)(n-2)x_1^{n-3}a_{n-1} = y_{12}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + x_sa_1 + x_s^2a_2 + \ldots + x_s^{n-1}a_{n-1} = y_{s0}, \\ a_1 + 2x_sa_2 + \ldots + (n-1)x_s^{n-2}a_{n-1} = y_{s1}, \\ 2a_2 + \ldots + (n-1)(n-2)x_s^{n-3}a_{n-1} = y_{s2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{11.41}$$

рассматриваемую относительно неизвестных $a_0, \dots, a_{n-1}$. Покажем, что решение системы (11.41) существует и единственно, что будет означать, что существует и единственен интерполяционный многочлен Лагранжа–Эрмита.

Лемма 11.75. *Для любой таблицы интерполяции (11.39), в которой $y_{ij} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, s;\ j = 0, 1, \dots, n_i - 1)$, интерполяционный многочлен Лагранжа–Эрмита существует и единственен.*

Доказательство. Условия $f^{(j)}(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \dots, s; j = 0, 1, \dots, n_i - 1)$ означают, что x_i является корнем кратности не меньше n_i. Таким образом, многочлен $f(x)$ степени меньше n имеет с учетом кратности $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ корней. Существует лишь один такой многочлен $f(x) = 0$. ∎

Лемма 11.76. *Пусть $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Тогда*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ & 1 & 2x_1 & \ldots & (n-1)x_1^{n-2} \\ & & 2 & \ldots & (n-1)(n-2)x_1^{n-3} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_s & x_s^2 & \ldots & x_s^{n-1} \\ & 1 & 2x_s & \ldots & (n-1)x_s^{n-2} \\ & & 2 & \ldots & (n-1)(n-2)x_s^{n-3} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство. Из леммы (11.75) вытекает, что система (11.41) с нулевой правой частью имеет единственное решение, откуда следует, что определитель этой системы не равен нулю. ∎

Теорема 11.77. *Для любой таблицы интерполяции (11.39) интерполяционный многочлен Лагранжа–Эрмита существует и единственен.*

Доказательство. Так как по лемме (11.11) определитель системы (11.41) не равен нулю, то эта система имеет единственное решение при любой правой части, откуда следует доказываемое. ∎

Замечание 11.78. Определитель из леммы 11.76 может быть вычислен явно. Он равен

$$\prod_{i=1}^{s} 1!\,2!\,\ldots\,(n_i-1)! \prod_{1\le i<j\le s} (x_j-x_i)^{n_i n_j}.$$

Для вычисления из каждого столбца, начиная с последнего, вычтем предшествующий, умноженный на x_1, из строк вынесем множители и применим индукцию.

Линейные рекуррентные соотношения. Пусть члены последовательности комплексных чисел

$$\langle x_k\rangle = \langle x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots\rangle \tag{11.42}$$

удовлетворяют соотношению

$$x_k = d_1 x_{k-1} + d_2 x_{k-2} + \ldots + d_n x_{k-n} \qquad (k = n, n+1, \ldots), \tag{11.43}$$

где $d_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и $d_n \neq 0$, а также удовлетворяют *начальным условиям*

$$x_0 = x_0', \quad x_1 = x_1', \quad \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}'.$$

Равенство (11.43) называется *линейным рекуррентным соотношением* n-го порядка. Рассмотрим задачу получения свернутого выражение для k-го члена последовательности, удовлетворяющей заданному рекуррентному соотношению и начальным условиям.

По соотношению (11.43) построим многочлен

$$f(\lambda) = \lambda^n - d_1\lambda^{n-1} - d_2\lambda^{n-2} - \ldots - d_n, \tag{11.44}$$

называемый *характеристическим.*

Теорема 11.79. *Пусть корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ характеристического многочлена* (11.44) *имеют кратности $n_1, n_2, \ldots, n_s$ соответственно. Тогда общий член последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению* (11.43), *имеет вид*

$$\begin{aligned} x_k = c_{10}\lambda_1^k + c_{11}k\lambda_1^{k-1} + c_{12}k(k-1)\lambda_1^{k-2} + \ldots \\ \ldots + c_{1,n_1-1}k(k-1)\ldots(k-n_1+2)\lambda_1^{k-n_1+1} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots + c_{s0}\lambda_s^k + c_{s1}k\lambda_s^{k-1} + c_{s2}k(k-1)\lambda_s^{k-2} + \ldots \\ \ldots + c_{s,n_s-1}k(k-1)\ldots(k-n_s+2)\lambda_s^{k-n_s+1}, \end{aligned}$$

где c_{ij} — некоторые числа. По начальным условиям эти числа определяются единственным образом.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 11.80. *Множество $\ell(F)$ последовательностей с членами из поля F относительно обычных операций сложения последовательностей и умножения их на числа из F образуют бесконечномерное линейное пространство над полем F.*

Доказательство. Легко проверяются все аксиомы линейного пространства. ∎

Лемма 11.81. *Множество V последовательностей, удовлетворяющих заданному рекуррентному соотношению* (11.43) *(при любых начальных условиях), образует в $\ell(F)$ подпространство размерности n.*

Доказательство. Соотношению (11.43) всегда удовлетворяет нулевая последовательность, поэтому $V \neq \emptyset$. Замкнутость V относительно операций сложения и умножения на число легко проверяется. Итак, V есть подпространство в $\ell(F)$. Докажем, что $\dim V = n$. Для этого проверим, что последовательности

$$\begin{aligned} e^{(0)} &= \langle e_k^{(1)} \rangle = \langle 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ e_n^{(0)},\ e_{n+1}^{(0)},\ \ldots \rangle,\\ e^{(1)} &= \langle e_k^{(2)} \rangle = \langle 0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ e_n^{(1)},\ e_{n+1}^{(1)},\ \ldots \rangle,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e^{(n-1)} &= \langle e_k^{(n-1)} \rangle = \langle 0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ e_n^{(n-1)},\ e_{n+1}^{(n-1)},\ \ldots \rangle, \end{aligned}$$

в которых члены, начиная с n-го, определяются по формуле (11.43), образуют базис пространства V. Действительно, линейная независимость системы $e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(n-1)}$ очевидна. Докажем, что эта система полна в V. Для этого достаточно показать, что любая последовательность, удовлетворяющая соотношению (11.43), может быть представлена в виде линейной комбинации последовательностей $e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(n-1)}$. Действительно, если последовательность (11.42) удовлетворяет (11.43), то

$$x_k = x_0 e_k^{(0)} + x_1 e_k^{(1)} + \ldots + x_{n-1} e_k^{(n-1)} \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{11.45}$$

Докажем это индукцией по k. При $k = 0, 1, \ldots, n-1$ равенство (11.45) очевидно. Пусть $k \geq n$. По предположению индукции

$$x_j = x_0 e_j^{(0)} + x_1 e_j^{(1)} + \ldots + x_{n-1} e_j^{(n-1)} \quad (j = k-n, k-n+1, \ldots, k-1).$$

Умножая обе части этого равенства на d_{k-j} и складывая полученные равенства при $j = k-n, k-n+1, \ldots, k-1$ придем к (11.45). ∎

Лемма 11.82. *Пусть корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ характеристического многочлена* (11.44) *имеют кратности $n_1, n_2, \ldots, n_s$ соответственно. Тогда n последовательностей*

$$\begin{gathered} \lambda_1^k,\ k\lambda_1^{k-1},\ k(k-1)\lambda_1^{k-2},\ \ldots,\ k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k - n_1 + 2) \cdot \lambda_1^{k-n_1+1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_s^k,\ k\lambda_s^{k-1},\ k(k-1)\lambda_s^{k-2},\ \ldots,\ k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k - n_s + 2) \cdot \lambda_s^{k-n_s+1}, \end{gathered}$$

образуют базис пространства V всех последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному соотношению (11.43).

Доказательство. Во-первых докажем, что каждая из указанных последовательностей принадлежит V. Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Так как

$$\lambda_i^n - d_1\lambda_i^{n-1} - d_2\lambda_i^{n-2} - \ldots - d_n = 0, \tag{11.46}$$

то $\lambda_i^k = d_1\lambda_i^{k-1} - d_2\lambda_i^{k-2} - \ldots - d_n\lambda_i^{k-n}$, т. е. λ_i^k удовлетворяет рекуррентному соотношению (11.43). Докажем, что если λ_i — кратный корень, то $k\lambda_i^{k-1}$ также удовлетворяет этому соотношению. Действительно, в этом случае $f'(\lambda_i) = 0$, т. е.

$$n\lambda_i^{n-1} - d_1(n-1)\lambda_i^{n-2} - d_2(n-2)\lambda_i^{n-2} - \ldots - d_{n-1} = 0. \tag{11.47}$$

Умножая (11.46) на $\lambda_i^{k-n-1}(k-n)$ и складывая с (11.47), умноженным на λ_i^{k-n}, получим

$$k\lambda_i^{k-1} - (k-1)d_1\lambda_i^{k-2} - d_2(k-1)\lambda_i^{k-2} - \ldots - d_{n-1}\lambda_i^{k-n}(k-n+1) - d_n(k-n)\lambda_i^{k-n+1} = 0,$$

т. е. $k\lambda_i^{k-1}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (11.43). Остальные последовательности проверяются аналогично.

Во-вторых докажем, что указанные последовательности линейно независимы и, так как $\dim V = n$, образуют базис. Для этого составим из первых n членов этих последовательностей матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ & 1 & 2\lambda_1 & \ldots & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ & & 2 & \ldots & (n-1)(n-2)\lambda_1^{n-3} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & \lambda_s & \lambda_s^2 & \ldots & \lambda_s^{n-1} \\ & 1 & 2\lambda_s & \ldots & (n-1)\lambda_s^{n-2} \\ & & 2 & \ldots & (n-1)(n-2)\lambda_s^{n-3} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

По лемме 11.76 определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, указанные последовательности линейно независимы. ∎

Доказательство теоремы 11.79. Непосредственно следует из леммы 11.82. Числа c_{ij} в формулировке теоремы — это (определяемые единственным образом) координаты произвольной последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению, в базисе из леммы 11.82. ∎

Пример 11.83. Рассмотрим линейное рекуррентное соотношение

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{11.48}$$

с начальными условиями

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \tag{11.49}$$

определяющее последовательность *чисел Фибоначчи*:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Характеристический многочлен имеет вид $\lambda^2 - \lambda - 1$. Его корни равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

поэтому общий член последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (11.48), имеет вид:

$$x_k = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{11.50}$$

Подставляя в (11.50) при $k = 0, 1$ значения (11.49), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2, \\ 1 = c_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

из которой определим

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Получаем, что общий член последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (11.48) и начальным условиям (11.49), имеет вид:

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Пример 11.84. Рассмотрим линейное рекуррентное соотношение

$$x_k = 4x_{k-1} - 4x_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{11.51}$$

с начальными условиями

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = 0. \tag{11.52}$$

Составляем характеристический многочлен $\lambda^2 - 4\lambda + 4$. Многочлен имеет один кратный корень $\lambda_{1,2} = 2$, поэтому общий член последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (11.51), имеет вид:

$$x_k = c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot k \cdot 2^{k-1} \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{11.53}$$

Подставляя в (11.53) при $k = 0, 1$ значения (11.52), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 1 = c_1, \\ 0 = 2c_1 + c_2, \end{cases}$$

из которой определим $c_1 = 1$, $c_2 = -2$. Получаем, что общий член последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (11.51) и начальным условиям (11.52), имеет вид:

$$x_k = 2^k - 2 \cdot k \cdot 2^{k-1} = (1 - k) \cdot 2^k \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Пример 11.85. Рассмотрим линейное рекуррентное соотношение

$$x_k = 5x_{k-1} - 6x_{k-2} - 4x_{k-3} + 8x_{k-4} \qquad (k = 4, 5, \ldots) \tag{11.54}$$

с начальными условиями

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = -1, \qquad x_2 = 3, \qquad x_3 = 11. \tag{11.55}$$

Составляем характеристический многочлен:

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = (x + 1)(x - 2)^3.$$

Многочлен имеет простой корень -1 и трехкратный корень 2, поэтому общий член последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (11.54), имеет вид:

$$x_k = c_1(-1)^k + c_2 2^k + c_3 k 2^{k-1} + c_4 k(k - 1)2^{k-2}. \tag{11.56}$$

Подставляя в (11.56) при $k = 0, 1, 2, 3$ значения (11.55), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2, \\ -1 = -c_1 + 2c_2 + c_3, \\ 3 = c_1 + 4c_2 + 4c_3 + 2c_4, \\ 11 = -c_1 + 8c_2 + 12c_3 + 12c_4, \end{cases}$$

из которой определим $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1$. Получаем, что общий член последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению (11.54) и начальным условиям (11.55), имеет вид:

$$x_k = (-1)^k + k(k - 1)2^{k-2}. \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Пример 11.86. Линейные рекуррентные соотношения появляются, например, при вычислении *трехдиагональных определителей* n-го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a & b \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по первой строке, получаем

$$\Delta_n = b\Delta_{n-1} - c \cdot \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \end{vmatrix}.$$

Далее полученный определитель раскладываем по первому столбцу:

$$\Delta_n = b\Delta_{n-1} - ca \cdot \begin{vmatrix} b & c & \dots & 0 & 0 \\ a & b & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & b & c \\ 0 & 0 & \dots & a & b \end{vmatrix} = b\Delta_{n-1} - ca\Delta_{n-2}.$$

Получили рекуррентное соотношение второго порядка $\Delta_n = b\Delta_{n-1} - ca\Delta_{n-2}$.

Пример 11.87.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6\Delta_{n-1} + 5\Delta_{n-2}.$$

Для решения рекуррентного соотношения составим характеристический многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$. Таким образом, $\Delta_n = c_1 5^n + c_2(-1)^n$. Учитывая начальные условия

$$\Delta_1 = 6, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 41,$$

составляем систему

$$\begin{cases} 6 = 5c_1 - c_2, \\ 41 = 25c_1 + c_2, \end{cases}$$

из которой находим $c_1 = \dfrac{47}{30}$, $c_2 = \dfrac{11}{6}$. Таким образом, $\Delta_n = \dfrac{47}{30} \cdot 5^n + \dfrac{11}{6} \cdot (-1)^n$.