Глава 9

Линейные пространства

9.1. Аксиоматическое определение линейного пространства

Пусть V — непустое множество, F — поле. V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством* над полем F, если

I. задано *правило сложения*, ставящее в соответствие любым двум элементам a, b из V единственный элемент c из V, называемый *суммой* и обозначаемый $c = a + b$;

II. задано *правило умножения на число*, ставящее в соответствие каждому a из V и каждому α из F единственный элемент d из V, обозначаемый $d = \alpha \cdot a$ или $d = a \cdot \alpha$; знак операции «$\cdot$» часто опускают;

III. выполняются следующие свойства (*аксиомы линейного пространства*):

   (1) $\forall a, b, c \in V \ a + (b + c) = (a + b) + c$ (*ассоциативность*[1]),
   (2) $\forall a, b \in V \ a + b = b + a$ (*коммутативность*),
   (3) $\exists o \ \forall a \in V \ a + o = a$ (o называется *нулевым* элементом[2]),
   (4) $\forall a \in V \ \exists b \in V \ a + b = o$ (b называется элементом, *противоположным* к a и обозначается $-a$),
   (5) $\forall a \in V \ 1 \cdot a = a$,
   (6) $\forall a \in V \ \forall \alpha, \beta \in F \ \alpha(\beta a) = (\alpha\beta a)$,
   (7) $\forall a, b \in V \ \forall \alpha \in F \ \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (*дистрибутивность* I),
   (8) $\forall a \in V \ \forall \alpha, \beta \in F \ (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (*дистрибутивность* II).

Аксиомы (1)–(4) означают, что множество V относительно операции $+$ образует абелеву группу.

Элементы множества V называются *векторами*, элементы множества F называются *скалярами* (или, просто, числами). Далее, как правило, векторы мы будем обозначать латинскими буквами, скаляры — греческими.

Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется *вещественным*. Линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ называется *комплексным*.

---

[1]Скобки в выражениях $a + (b + c)$, $(a + b) + c$ указывают на порядок выполнения операции сложения. Как следует из аксиомы (3) в выражении вида $a + b + c$ их можно опустить.

[2]Нулевой вектор $o \in V$ следует отличать от числа $0 \in F$.

Если указана природа элементов множества V и определены операции над этими элементами, то пространство будем называть *конкретным.* Рассмотрим важные типы конкретных линейных пространств.

9.2. Примеры линейных пространств

Нулевое пространство $\{o\}$. В этом случае $V = \{o\}$. В качестве F можно рассматривать любое поле. Операции определяются тривиальным образом: $o + o = o$, $\alpha o = o$. Легко проверить, что указанное множество с такими операциями является линейным пространством над полем F.

Геометрические пространства $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ $\mathbf{V}_3$. Элементами этого пространства являются геометрические векторы, т. е. направленные отрезки, в пространстве. Геометрический вектор, начало которого находится в точке $\mathcal{A}$, а конец — в точке $\mathcal{B}$ обозначается $\overrightarrow{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. Два вектора считаются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Ввиду этого удобно считать, что все векторы закреплены в одной точке $\mathcal{O}$, называемой *полюсом* или *началом отсчета.* Такое рассмотрение также удобно тем, что с каждым вектором ассоциируется некоторая точка пространства — его конец, и, наоборот, с каждой точкой пространства связан единственный вектор, называемый *радиус-вектором точки*, начало которого закреплено в полюсе, а конец указывает на эту точку. Векторы складываются по правилу параллелограмма: суммой двух радиус-векторов называется диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах. Векторы можно умножать на вещественные числа. Под произведением радиус-вектора на число α понимается вектор, длина которого равна длине исходного вектора, умноженной на $|\alpha|$, а направление совпадает с направлением исходного вектора, если $\alpha > 0$, и заменяется на противоположное, если $\alpha < 0$. Легко проверяются аксиомы (1)–(8). Таким образом, $\mathbf{V}_3$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$. Аналогичные совокупности векторов на плоскости и на прямой обозначим $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_1$ соответственно. Эти совокупности также являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.

Арифметическое пространство F^n. Элементами этого пространства являются столбцы высоты n, составленные из чисел. Два столбца

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

назовем равными, если $\alpha_j = \beta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Числа α_j и β_j называются *компонентами* векторов a и b соответственно.

Операции сложения столбцов и умножения их на числа из F определены по следующим правилам:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \alpha\alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что аксиомы (1)–(8) выполнены и поэтому F^n образует линейное пространство над полем F, называемое *арифметическим n-мерным пространством.* В частности, нулевым вектором в пространстве F^n является

$$o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство многочленов $F[x]$. Элементами этого пространства являются многочлены с коэффициентами из поля F. Легко видеть, что относительно обычных операций сложения и умножения многочленов на числа из F множество $V = F[x]$ образует линейное пространство над полем F. В частности, нулевым вектором в этом пространстве является нулевой многочлен.

Пространство матриц $F^{m\times n}$. Элементами этого пространства являются матрицы заданных размеров $m \times n$ с элементами из поля F. Легко видеть, что относительно операций матричного сложения и умножения матриц на числа из F множество $V = F^{m\times n}$ образует линейное пространство над полем F. В частности, нулевым вектором в этом пространстве является нулевая $m \times n$ матрица.

9.3. Простейшие следствия из аксиом

Утверждение 9.1. *В любом линейном пространстве нулевой вектор единственен.*

Доказательство. Предположим, что существует два нулевых элемента $o_1, o_2 \in V$, тогда положив в аксиоме (3) $a = o_1$, $o = o_2$, получаем $o_1 + o_2 = o_1$. С другой стороны, положив $a = o_2$, $o = o_1$ и воспользовавшись аксиомой (1), получаем $o_1 + o_2 = o$. Приравнивая правые части полученных равенств, получаем, $o_1 = o_2$. ∎

Нулевой вектор o часто называется нулем, однако его следует отличать от числа 0 из поля F.

Утверждение 9.2. *Для любого вектора $a \in V$ существует единственный противоположный элемент.*

Доказательство. Пусть b_1, b_2 — элементы пространства V, противоположные вектору a. По аксиоме (4)

$$b_1 + (a + b_2) = b_1 + o = b_1.$$

Аналогично,

$$(b_1 + a) + b_2 = o + b_2 = b_2.$$

По аксиоме (4) правые части приведенных равенств совпадают, поэтому $b_1 = b_2$. ∎

Утверждение 9.3. *Для любых a, b из V уравнение $a+x = b$ имеет и единственное решение.*

Доказательство. Подстановкой легко убеждаемся, что $x = (-a)+b$ является решением уравнения. Для доказательства единственности предположим, что имеется два решения x_1, x_2. Тогда $a+x_1 = a+x_2 = b$. Прибавляя ко всем частям равенства $(-a)$, получаем $(-a)+a+x_1 = (-a)+a+x_2$, откуда $x_1 = x_2$. ∎

Назовем *разностью* векторов b и a решение уравнения $a+x = b$. Разность обозначим $b-a$. Мы установили, что $b-a = (-a)+b = b+(-a)$.

Утверждение 9.4. *$0a = o$ для любого $a \in V$.*

Доказательство. Имеем $a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = 1a = a$. Таким образом, $a + 0a = a$, откуда $0a = a - a = o$. ∎

Утверждение 9.5. *$\alpha o = o$ для любого $\alpha \in F$.*

Доказательство. Пусть $a \in V$. Имеем $\alpha a+\alpha o = \alpha(a+o) = \alpha a$. Таким образом, $\alpha a+\alpha o = \alpha a$, откуда $\alpha o = \alpha a - \alpha a = o$. ∎

Утверждение 9.6. *Для любых векторов a, b из V и любых чисел α, β из F справедливы равенства:*

1) $(-\alpha)a = -(\alpha a)$;

2) $(-1)a = -a$;

3) $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a$;

4) $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$.

Доказательство. 1) Покажем, что вектор $(-\alpha)a$ является противоположным к αa. Действительно, $\alpha a + (-\alpha)a = (\alpha - \alpha)a = 0a = o$. Пункты 2)–4) вытекают из 1). ∎

Утверждение 9.7. *Пусть $a \in V$ и $\alpha \in F$. Если $\alpha a = 0$, то $\alpha = 0$ или $a = 0$.*

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то утверждение справедливо. Пусть $\alpha \neq 0$, тогда $a = \dfrac{1}{\alpha}(\alpha a) = \dfrac{1}{\alpha}o = o$. ∎

9.4. Линейные подпространства

Пусть V — линейное пространство над полем F. Множество $W \subseteq V$ называется (линейным) *подпространством*, если оно само является пространством над F относительно операций сложения векторов и умножения их на числа, определенных в V.

Теорема 9.8 (Критерий линейного подпространства)**.** *Для того, чтобы непустое подмножество W линейного пространства V являлось подпространством необходимо и достаточно, чтобы*

1. *$a + b \in W$ для любых a, b из W (замкнутость относительно сложения векторов),*
2. *$\alpha a \in W$ для любого α из F и любого a из W (замкнутость относительно умножения векторов на числа).*

Доказательство. *Необходимость.* Условия 1–2 включены в определение линейного пространства.
Достаточность. Проверим, что все 8 аксиом линейного пространства в условиях теоремы выполнены. Проверка аксиом (1)–(2), (5)–(8) тривиальна.

Проверим аксиому (3). Покажем, что $o \in W$. Пусть $\alpha = 0$, $a \in W$, тогда $o = 0a = \alpha a \in W$ по условию 2.

Проверим аксиому (4). Покажем, что $-a \in W$ для любого $a \in W$. Пусть $\alpha = -1$, тогда $-a = (-1)a = \alpha a \in W$ по условию 2. ∎

Легко проверить, что согласно приведенному критерию подпространствами являются, например, множество радиус-векторов, концы которых лежат на прямой, проходящей через полюс, в пространстве $\mathbf{V}_3$; множество арифметических векторов с нулевой первой (и, вообще, любой фиксированной) компонентой в пространстве F^n; множество четных (нечетных) многочленов в пространстве $F[x]$; множество многочленов степени не выше n в пространстве $F[x]$.

9.5. Линейные комбинации и линейные оболочки

Пусть V — линейное пространство над полем F. *Системой векторов* назовем произвольную конечную последовательность векторов $a_1, \ldots, a_n$ из V (возможно с повторениями). Тот факт, что систему $\mathbf{a}$ образуют векторы $a_1, \ldots, a_n$ будем записывать следующим образом:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle.$$

Иногда нам будет нужна пустая система, т. е. система $\langle\,\rangle$, не содержащая ни одного вектора.

Линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_n$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называется выражение $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$.

Множество всех линейных комбинаций векторов $a_1, \ldots, a_n$ называется *линейной оболочкой* этих векторов и обозначается $L(a_1, \ldots, a_n)$. Формально:

$$L(a_1, \ldots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}.$$

Теорема 9.9. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные векторы из V. Тогда $L(a_1, \ldots, a_n)$ — подпространство в V и для любого другого подпространства W, содержащего векторы $a_1, \ldots, a_n$, справедливо $L(a_1, \ldots, a_n) \subseteq W$.*

Доказательство. Докажем сперва, что $L(a_1, \ldots, a_n)$ — подпространство в V. Действительно, если $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ и $b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n$, то $a + b = (\alpha_1 + \beta_1)a_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)a_n$. Таким образом, $a + b \in L(a_1, \ldots, a_n)$. Если $\alpha \in F$, то $\alpha a = (\alpha\alpha_1)a_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n)a_n$. Таким образом, $\alpha a \in F$. Достаточные условия в теореме 9.8 выполнены.

Пусть теперь W — произвольное подпространство, содержащее векторы $a_1, \ldots, a_n$. Тогда для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из F справедливо $\alpha_j a_j \in W$ $(j = 1, \ldots, n)$ (замкнутость относительно операции умножения на число) и $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \in W$ (замкнутость относительно операции сложения), т. е. $b \in W$ для произвольного $b \in L(a_1, \ldots, a_n)$. ∎

Говорят, что вектор b *линейно выражается* через систему $a_1, \ldots, a_n$, если $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, иными словами, $b \in L(a_1, \ldots, a_n)$. Говорят, что система $b_1, \ldots, b_m$ *линейно выражается* через систему $a_1, \ldots, a_n$, если для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ вектор b_i линейно выражается через систему $a_1, \ldots, a_n$.

Утверждение 9.10. *Система $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через систему $a_1, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда $L(b_1, \ldots, b_m) \subseteq L(a_1, \ldots, a_n)$.*

Доказательство. Необходимость. Если система $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через систему $a_1, \ldots, a_n$, т. е. $b_i \in L(a_1, \ldots, a_n)$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$, то по замкнутости $\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_m b_m \in L(a_1, \ldots, a_n)$ для любых $\beta_1, \ldots, \beta_m$ из F.
Достаточность. Пусть $L(b_1, \ldots, b_m) \subseteq L(a_1, \ldots, a_n)$. Так как $b_i \in L(b_1, \ldots, b_m)$, то $b_i \in L(a_1, \ldots, a_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Т. е. система $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через систему $a_1, \ldots, a_n$. ∎

Очевидно следующее

Утверждение 9.11. *Отношение линейной выразимости является рефлексивным и транзитивным, но, в общем случае, не симметричным.*

Системы $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ называются *эквивалентными*, если $a_1, \ldots, a_n$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_m$, а $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через $a_1, \ldots, a_n$.

Следствие 9.12. *Системы $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $L(a_1, \ldots, a_n) = L(b_1, \ldots, b_m)$.*

Очевидно следующее

Утверждение 9.13. *Отношение эквивалентности линейных систем является рефлексивным, симметричным и транзитивным.*

9.6. Линейная зависимость векторов

Линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ векторов $a_1, \ldots, a_n \in V$ называется *тривиальной*, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Очевидно, тривиальная комбинация равна нулевому вектору. Говорят, что (непустая) система векторов $a_1, \ldots, a_n$ *линейно зависима*, если существует нетривиальная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, иными словами, если найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, такие, что $\alpha_j \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$ и

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = o. \tag{9.1}$$

В противном случае (непустая) система называется *линейно независимой.* В силу важности вводимых терминов переформулируем определение линейной независимости. Система $a_1, \ldots, a_n$ называется линейно независимой, если равенство (9.1) возможно лишь в случае $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Утверждение 9.14 (Система из одного вектора)**.** *Система, состоящая из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда вектор нулевой.*

Доказательство. Для системы, состоящей лишь из одного вектора a, равенство (9.1) примет вид $\alpha a = 0$, откуда $\alpha = 0$, но тогда комбинация тривиальная, или $a = 0$, что и утверждается. ∎

Утверждение 9.15 (Система из двух векторов)**.** *Система, состоящая из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы пропорциональны.*

Доказательство. Равенство (9.1) принимает вид $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$, причем $\alpha_1 \neq 0$ или(и) $\alpha_2 \neq 0$. В первом случае имеем $a_1 = (-\alpha_2/\alpha_1)a_2$, во втором имеем $a_2 = (-\alpha_1/\alpha_2)a_1$. ∎

Следствие 9.16. *Два вектора геометрического пространства* $\mathbf{V}_2$ *или* $\mathbf{V}_3$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Утверждение 9.17. *Если подсистема некоторой системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, \alpha_n$ — исходная система, $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ — линейно зависимая подсистема ($1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n$). По определению линейной зависимости найдутся такие $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_m}$, не все равные нулю, что

$$\alpha_{j_1} a_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_m} a_{j_m} = o.$$

В последнем равенстве добавим к левой части тривиальную комбинацию векторов, не вошедших в подсистему:

$$0a_{i_1} + \ldots + 0a_{i_{n-m}},$$

где

$$\{i_1, \ldots, i_{n-m}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_m\}.$$

Полученная комбинация будет нулевой, но не тривиальной. ∎

Следствие 9.18. *Любая подсистема линейно независимой системы линейно независима.*

Теорема 9.19 (Критерий линейной зависимости)**.** *Система* $a_1, \ldots, a_n$*, где* $n \geq 2$*, линейно зависима тогда и только тогда, когда*

$$a_j = L(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$*.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависима, тогда $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$, причем $\alpha_j \neq 0$ для некоторого j, откуда

$$a_j = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\right) a_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\right) a_{j-1} + \left(-\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}\right) a_{j+1} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_j}\right) a_n.$$

Достаточность. Пусть

$$a_j = \alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \ldots + \alpha_n a_n$$

для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n$. Тогда

$$\alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_j a_j + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \ldots + \alpha_n a_n = 0,$$

где $\alpha_j = -1$. Получили нулевую нетривиальную (так как $\alpha_j = -1 \neq 0$) комбинацию. ∎

Следствие 9.20. *Любые три вектора геометрического пространства* $\mathbf{V}_2$ *линейно зависимы. Три вектора геометрического пространства* $\mathbf{V}_3$ *динейно зависимы тогда и только тогда, когда векторы компланарны.*

Теорема 9.21 (Усиленный критерий линейной зависимости)**.** *Система* $a_1, \ldots, a_n$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда* $a_1 = o$ *или* $a_j = L(a_1, \ldots, a_{j-1})$ *для некоторого* $j \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots n\}$.

Доказательство. Необходимость Пусть система $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимая, тогда $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$. Пусть j — максимальный индекс, такой, что $\alpha_j \neq 0$, тогда $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_j a_j = 0$, откуда

$$a_j = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\right) a_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\right) a_{j-1}.$$

Достаточность Если $n \geq 2$, то воспользуемся предыдущим критерием. Если $n = 1$, то $a_1 = 0$. ∎

Следствие 9.22. *Если система* $a_1, \ldots, a_n$ *линейно независима, а система* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ *— линейно зависима, то найдется такое* $j \in 1, \ldots, m$, *что*

$$b_j = L(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Лемма 9.23 (Теорема о замене)**.** *Если система* $a_1, \ldots, a_n$ *линейно выражается через систему* $b_1, \ldots, b_m$, *причем* $n \geq m$, *то первая система линейно зависимая.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть в условиях теоремы первая система линейно независима.

Так как a_1 линейно выражается через $b_1, \ldots, b_m$, то объединенная система $a_1, b_1, \ldots, b_m$ линейно зависима и эквивалентна $b_1, \ldots, b_m$. По следствию 9.22 в новой системе найдется

$$b_{i_1} \in L(a_1, b_1, \ldots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \ldots, b_m),$$

поэтому система $b_1, \ldots, b_m$ эквивалентна $a_1, b_1, \ldots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \ldots, b_m$.

Так как a_2 линейно выражается через систему $b_1, \ldots, b_m$, эквивалентную $a_1, b_1, \ldots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \ldots, b$ то объединенная система $a_1, a_2, b_1, \ldots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \ldots, b_m$ линейно зависима и эквивалентна $b_1, \ldots, b_m$. По следствию 9.22 в этой новой системе найдется

$$b_{i_2} \in L(a_1, a_2, b_1, \ldots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \ldots, b_{i_2-1}, b_{i_2+1}, \ldots, b_m),$$

поэтому $b_1, \ldots, b_m$ эквивалентна $a_1, a_2, b_1, \ldots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \ldots, b_{i_2-1}, b_{i_2+1}, \ldots, b_m$.

Продолжая эти рассуждения далее (можно провести индукцию), мы получим цепочку эквивалентных систем

$$\begin{aligned} &b_1, \ldots, b_m \sim \\ &\quad \sim a_1, b_1, \ldots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \ldots, b_m \sim \\ &\quad\quad \sim a_1, a_2, b_1, \ldots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \ldots, b_{i_2-1}, b_{i_2+1}, \ldots, b_m \sim \ldots \\ &\quad\quad\quad \ldots \sim a_1, \ldots, a_m. \end{aligned}$$

Поэтому система $b_1, \ldots, b_m$ эквивалентна системе $a_1, \ldots, a_m$. Следовательно, система $a_1, \ldots, a_n$, выражающаяся через $b_1, \ldots, b_m$, выражается через свою подсистему $a_1, \ldots, a_m$, следовательно, она линейно зависима, что противоречит предположению. ∎

Следствие 9.24. *Эквивалентные линейно независимые системы содержат одинаковое число векторов.*

Базой системы векторов называется ее любая линейно независимая подсистема, эквивалентная исходной системе.

Следствие 9.25. *Любая ненулевая система векторов $a_1, \ldots, a_m$ имеет базу.*

Доказательство. Пусть a_{i_1} — некоторый ненулевой вектор из V. Система, состоящая из одного вектора a_{i_1}, линейно независима. Поэтому, если она эквивалентна исходной системе, то является ее базой. В противном случае найдется вектор $a_{i_2} \notin L(a_{i_1})$. По усиленному критерию линейной зависимости система a_{i_1}, a_{i_2} — независимая. Если она эквивалентна исходной системе, то является ее базой. В противном случае найдется вектор $a_{i_3} \notin L(a_{i_1}, a_{i_2})$ и т. д. Описанный процесс оборвется, так как исходная система конечна. ∎

Следствие 9.26. *Для любой системы число векторов в произвольной базе одинаково.*

Число векторов в базе называется *рангом* системы.

Упражнение 9.27. Докажите, что база — это наибольшая (по числу векторов) линейно независимая подсистема данной системы.

Упражнение 9.28. Докажите, что база — это наименьшая (по числу векторов) подсистема данной системы, эквивалентная всей системе.

9.7. Базис линейного пространства

Система векторов $a_1, \ldots, a_n$ линейного пространства V называется *полной*, если $V = L(a_1, \ldots, a_n)$. Линейное пространство, в котором существует полная система, называется *конечномерным*. В противном случае пространство называется *бесконечномерным*.

Замечание 9.29. В настоящих лекциях мы будем изучать конечномерные пространства. Поэтому везде, где не оговорено противное, под линейным пространством понимается конечномерное линейное пространство.

Базисом пространства V называется полная линейно независимая система.

Утверждение 9.30. *В любом ненулевом конечномерном пространстве V существует базис.*

Доказательство. Пространство V конечномерное, поэтому $V = L(a_1, \ldots, a_n)$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n$. В качестве базиса пространства возьмем базу системы $a_1, \ldots, a_n$. ∎

Утверждение 9.31. *Для любого пространства число векторов в любом базисе одинаково.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ — два базиса пространства V. Системы $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ эквивалентны и линейно независимы, поэтому $n = m$. ∎

Число векторов в базисе конечномерного пространства V называется *размерностью пространства V* и обозначается $\dim V$. Размерность нулевого пространства считается равной нулю.

Утверждение 9.32. *Для того, чтобы линейно независимая система была базисом, необходимо и достаточно, чтобы любая система из большего числа векторов этого пространства была линейно зависимой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система $a_1, \dots, a_n$ является базисом. Система векторов $b_1, \dots, b_m$ выражается через линейно независимую систему $a_1, \dots, a_n$ и если $m > n$, то по теореме о замене $b_1, \dots, b_m$ линейно зависима.
Достаточность. Пусть b — произвольный вектор из V. Рассмотрим систему $a_1, \dots, a_n, b$. По условию она линейно зависима. Теперь из усиленного критерия линейной зависимости следует, что $b \in L(a_1, \dots, a_n)$, т. е. система $a_1, \dots, a_n$ — полная. ∎

Замечание 9.33. Утверждение 9.32 позволяет дать следующее определение базиса, эквивалентное исходному: базис — это наибольшая (по мощности) линейно независимая система. Заметим, что такое определение не означает, что базис пространства определен единственным образом.

Утверждение 9.34. *Для того, чтобы полная система $a_1, \dots, a_n$ была базисом, необходимо и достаточно, чтобы либо $n = 1$ и $a_1 \neq o$, либо любая система из меньшего числа векторов не была бы полной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система $b_1, \dots, b_m$ полная, тогда линейно независимая система $a_1, \dots, a_n$ выражается через $b_1, \dots, b_m$, откуда из теоремы о замене $m \geq n$.
Достаточность. Ни для какого $j = \{1, \dots, n\}$ система $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$ не является базисом, поэтому $a_j \notin L(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$. Линейная независимость системы векторов $a_1, \dots, a_n$ следует теперь из критерия линейной независимости. ∎

Замечание 9.35. Утверждение 9.34 позволяет дать следующее определение базиса, эквивалентное исходному: базис — это любая наименьшая (по мощности) полная система векторов. Заметим, что такое определение не означает, что базис пространства определен единственным образом.

Утверждение 9.36. *Пусть $\dim V = n$ и система $a_1, \dots, a_n$ — линейно независима, тогда она полна и, следовательно, является базисом.*

Доказательство. Так как $\dim V = n$, то любая система из большего числа векторов вектора линейно зависима. Поэтому $a_1, \dots, a_n$ полная по утверждению 9.32. ∎

Утверждение 9.37. *Пусть $\dim V = n$ и система $a_1, \dots, a_n$ — полная, тогда она линейно независима и, следовательно, является базисом.*

Доказательство. Так как $\dim V = n$, то любая система из меньшего числа векторов не является полной. Поэтому система $a_1, \dots, a_n$ линейно независима по утверждению 9.34. ∎

Размерность и базис арифметического пространства. Рассмотрим систему векторов арифметического пространства F^n:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

где j-я компонента вектора e_j равна 1, а все остальные компоненты вектора e_j равны 0 ($j = 1, 2, \dots, n$). Покажем, что система $e_1, e_2, \dots, e_n$ образует базис пространства F^n и, следовательно, $\dim F^n = n$.

Действительно, система (9.2) линейно независима, так как, приравнивая все компоненты в левой и правой части равенства

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = o, \tag{9.3}$$

получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, т. е. нулевая комбинация (9.3) — тривиальная.

Система (9.2) — полная, так как для произвольного вектора

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n$$

имеем

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n. \tag{9.4}$$

Систему (9.2) будем называть *стандартным базисом арифметического n-мерного пространства*. Равенство (9.4) показывает, что в стандартном базисе *координаты* вектора из F^n совпадают с его *компонентами*.

Размерность и базис пространства геометрических векторов.

Утверждение 9.38.

1. $\dim \mathbf{V}_1 = 1$*. Система из одного вектора пространства* $\mathbf{V}_1$ *образует базис этого пространства тогда и только тогда, когда вектор ненулевой.*

2. $\dim \mathbf{V}_2 = 2$*. Система из двух векторов пространства* $\mathbf{V}_2$ *образует базис этого пространства тогда и только тогда, когда векторы неколлинеарны.*

3. $\dim \mathbf{V}_3 = 3$*. Система из трех векторов пространства* $\mathbf{V}_3$ *образует базис этого пространства тогда и только тогда, когда векторы некомпланарны.*

Доказательство.

1. Утверждение очевидно.

2. Уже было показано, что любые два вектора пространства $\mathbf{V}_2$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Покажем, что любые два неколлинеарных вектора a, b образуют полную систему в пространстве $\mathbf{V}_2$ и, следовательно, образуют базис этого пространства. Пусть c — произвольный вектор пространства $\mathbf{V}_2$. Как обычно, все векторы отложены из полюса O. Проведем через конец вектора c прямую, параллельную вектору b. Эта прямая пересечет прямую, на которой лежит вектор a в некоторой точке A. Затем проведем через конец вектора c прямую, параллельную вектору a. Эта прямая пересечет прямую, на которой лежит вектор b в некоторой точке B. Будем иметь $c = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = \alpha a$, $\overrightarrow{OB} = \beta b$ для некоторых α и β, откуда откуда $c = \alpha a + \beta b$. Итак, любой вектор пространства $\mathbf{V}_2$ может быть выражен в виде линейной комбинации векторов a, b, и, следовательно, a, b — полная система.

3. Доказывается аналогично. ∎

Размерность пространства многочленов. Покажем, что пространство $F[x]$ не является конечномерным. Действительно, предположим, что $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ — некоторая полная система в пространстве $F[x]$, а m — максимум степеней многочленов из этой системы. Очевидно, что никакая их линейная комбинация не дает ни одного многочлена степени выше m. Таким образом, система $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ полной не является.

Рассмотрим пространство многочленов степени не выше n. Очевидно, что система $1, x, x^2, \dots, x^n$ образует базис этого пространства, называемый стандартным. Таким образом, пространство многочленов степени не выше n имеет конечную размерность, равную $n + 1$.

9.8. Координаты векторов

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V над полем F. Тогда для произвольного вектора a из V найдутся такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из F, что $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ разложения вектора по базису называются *координатами вектора.*

Утверждение 9.39. *В произвольном базисе координаты вектора определены единственным образом.*

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V. Предположим, что для вектора a нашлось два разложения по базису

$$a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n.$$

Откуда получаем

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = o.$$

Так как система $e_1, \dots, e_n$ — линейно независимая, то все коэффициенты в полученнной линейной комбинации равны 0, откуда $\alpha_j = \beta_j$ $(j = 1, \dots, n)$. ∎

Замечание 9.40. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — стандартный базис пространства F^n. В этом базисе

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

т. е. координаты вектора совпадают с его компонентами.

Координаты удобно записывать в столбец, который мы будем называть *координатным столбцом* и обозначать $[a]_e$. Таким образом, если $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, то

$$[a]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Координатный столбец можно рассматривать как вектор арифметического пространства F^n. Имея в виду эту интерпретацию, получаем

Утверждение 9.41. *Для произвольных векторов a, b из V и произвольного α из F справедливо*

$$[a+b]_e = [a]_e + [b]_e,$$
$$[\alpha a]_e = \alpha [a]_e.$$

Таким образом, при сложении векторов соответствующие координаты складываются, при умножении на число умножаются на это число.

Доказательство. Пусть

$$a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,$$
$$b = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n.$$

Тогда

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)e_n,$$

т. е. $[a+b]_e = [a]_e + [b]_e$. Второе равенство доказывается аналогично. ∎

9.9. Изоморфизм линейных пространств

Пусть пространства V и V' заданы над одним и тем же полем F. Биекция $\varphi : V \to V'$ называется *изоморфизмом*, если для любых векторов a, b из V и любого α из F справедливо

1. $\varphi(a+b) = \varphi a + \varphi b$,
2. $\varphi(\alpha a) = \alpha(\varphi a)$.

Замечание 9.42. Пусть $\dim V = n$. Из утверждения 9.41 следует, что отображение $\varphi : V \to F^n$, ставящее в соответствие вектору из V столбец его координат в некотором фиксированном базисе, является изоморфизмом.

Свойство 9.43. *Отображение, обратное к изоморфизму, является изоморфизмом.*

Доказательство. Отображение $\varphi^{-1} : V' \to V$, обратное к изоморфизму $\varphi : V \to V'$, является биекцией. Осталось показать выполнение свойств $1, 2$ для отображения φ^{-1}. Пусть a', b' — произвольные векторы из V', тогда $\varphi^{-1}a' \in V$ и $\varphi^{-1}b' \in V$. Из определения изоморфизма φ имеем

$$\varphi(\varphi^{-1}a' + \varphi^{-1}b') = \varphi\varphi^{-1}a' + \varphi\varphi^{-1}b',$$
$$\varphi(\varphi^{-1}a' + \varphi^{-1}b') = a' + b'.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства отображение φ^{-1}, получаем

$$\varphi^{-1}a' + \varphi^{-1}b' = \varphi^{-1}a' + \varphi^{-1}b'.$$

Равенство $\varphi^{-1}(\alpha a) = \alpha(\varphi^{-1}a)$ доказывается аналогично. ∎

Свойство 9.44. *Образом нулевого вектора пространства V при изоморфизме φ является нулевой вектор пространства V', т. е.*[3] $\varphi o = o$.

[3] Заметим, что в следующем равенстве o в левой части — вектор пространства V, тогда как o в правой части — вектор пространства V'.

Доказательство. Из определения изоморфизма
$$\varphi o = \varphi(0a) = 0\varphi a = o.$$
∎

Свойство 9.45. *При изоморфизме линейно зависимая система отображается в линейно зависимую систему.*

Доказательство. Пусть система $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимая, тогда найдутся такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что
$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = o, \tag{9.5}$$
причем $\alpha_j \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$. Применим отображение φ к обеим частям равенства (9.5). Из определения изоморфизма получаем
$$\alpha_1(\varphi a_1) + \ldots + \alpha_n(\varphi a_n) = o.$$
Нами получена нетривиальная нулевая комбинация векторов $\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n$, значит векторы линейно зависимые. ∎

Свойство 9.46. *При изоморфизме линейно независимая система отображается в линейно независимую систему.*

Доказательство. Утверждение является следствием свойств 9.43, 9.45. ∎

Свойство 9.47. *При изоморфизме $\varphi : V \to V'$ базис пространства V отображается в базис пространства V'.*

Доказательство. По свойству 9.45 базис отображается в линейно независимую систему. При этом по свойству 9.46 любая линейно зависимая система отображается в линейно зависимую. Таким образом, базис отображается в наибольшую линейно независимую систему, т. е. в базис.
∎

Пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : V \to V'$. Если V и V' изоморфны, то пишут $V \cong V'$.

Пример 9.48. Пусть $\dim V = n$, тогда, как следует из предыдущего примера, $V \cong F^n$.

Утверждение 9.49. *Отношение изоморфности пространств является отношением эквивалентности.*

Доказательство. *Рефлексивность.* Очевидно, что тождественное преобразование $\varepsilon : V \to V'$, определяемое формулой $\varepsilon a = a$ является изоморфизмом. Таким образом, $V \cong V$.
Симметричность. Если $V \cong V'$, то $V' \cong V$ по свойству 1.
Транзитивность. Докажем, что если $V \cong V'$ и $V' \cong V''$, то $V \cong V''$. Действительно, если φ и φ' — изоморфизмы из V в V' и из V' в V'', то произведение изоморфизмов $\psi = \varphi\varphi'$, определяемой формулой $\psi a = \varphi(\varphi' a)$ есть изоморфизм V в V''. ∎

Теорема 9.50 (Критерий изоморфности пространств)**.** *Для того, чтобы пространства V и V', заданные над одним и тем же полем F, были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы* $\dim V = \dim V'$.

Доказательство. *Необходимость* Необходимость следует из свойства 5.
Достаточность Так как $V \cong F^n$ и $V' \cong F^n$, то, в силу симметричности и транзитивности отношения эквивалентности, имеем $V \cong V'$. ∎

9.10. Размерность подпространства

Утверждение 9.51. *Любое подпространство V_1 конечномерного линейного пространства V является конечномерным.*

Доказательство. Если $V_1 = \{o\}$, то утверждение доказано. Пусть a_1 — некоторый ненулевой вектор из V_1. Система, состоящая из одного вектора a_1, линейно независима. Поэтому, если $V_1 = L(a_1)$, то система образует базис пространства V_1. В противном случае в V_1 найдется вектор $a_2 \notin L(a_1)$. По усиленному критерию линейной зависимости система a_1, a_2 — независимая. Поэтому, если $V_1 = L(a_1, a_2)$, то система образует базис пространства V_1. В противном случае в V_1 найдется вектор $a_3 \notin L(a_1, a_2)$ и т. д. Описанный процесс оборвется по крайней мере через n шагов, где $n = \dim V$, так как любая система из $n+1$ вектора линейно зависима. ∎

Утверждение 9.52. *Пусть V_1, V_2 — конечномерные подпространства, причем $V_1 \subseteq V_2$, тогда* $\dim V_1 \leq \dim V_2$.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m$ — базисы подпространств V_1 и V_2 соответственно. Так как $V_1 \subseteq V_2$, то первая система линейно выражается через вторую и поэтому по лемме о замене $l \leq m$. ∎

Утверждение 9.53. *Пусть V_1, V_2 — конечномерные подпространства, причем $V_1 \subseteq V_2$ и* $\dim V_1 = \dim V_2$, *тогда* $V_1 = V_2$.

Доказательство. Базис $a_1, \ldots, a_l$ подпространства V_1 является линейно независимой системой векторов из V_2. Так как $l = \dim V_1 = \dim V_2$, то $a_1, \ldots, a_l$ является базисом подпространства V_2 и, следовательно, $V_1 = L(a_1, \ldots, a_l) = V_2$. ∎

9.11. Сумма и пересечение подпространств

Суммой подпространств V_1 и V_2 пространства V называется множество

$$V_1 + V_2 = \{x = y + z : y \in V_1, z \in V_2\}.$$

Пересечение подпространств понимается в обычном смысле:

$$V_1 \cap V_2 = \{x : x \in V_1, x \in V_2\}.$$

Утверждение 9.54. *Сумма подпространств одного и того же пространства является подпространством.*

Доказательство. Так как $o \in V_1$, $o \in V_2$, то $o+o \in V_1+V_2$ и $V_1+V_2 \neq \emptyset$. Докажем замкнутость относительно сложения векторов и умножения их на числа. Пусть $x \in V_1 + V_2$ и $x' \in V_1 + V_2$, тогда найдутся такие векторы y, y' из V_1 и z, z' из V_2, что $x = y + z$, $x' = y' + z'$. Так как $y + y' \in V_1$ и $z + z' \in V_2$, то $x + x' = (y + y') + (z + z') \in V_1 + V_2$. Так как $\alpha y \in V_1$ и $\alpha z \in V_2$, то $\alpha x = \alpha y + \alpha z \in V_1 + V_2$. ∎

Утверждение 9.55. *Пересечение подпространств одного и того же пространства является подпространством.*

Доказательство. Так как $o \in V_1$, $o \in V_2$, то $o \in V_1 \cap V_2$ и $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Докажем замкнутость относительно сложения векторов и умножения их на числа. Пусть $x \in V_1 \cap V_2$ и $x' \in V_1 \cap V_2$. Так как $x+x' \in V_1$ и $x+x' \in V_2$, то $x+x' \in V_1 \cap V_2$. Так как $\alpha x \in V_1$ и $\alpha x \in V_2$, то $\alpha x \in V_1 \cap V_2$. ∎

Лемма 9.56. *Любую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса конечномерного пространства.*

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично доказательству утверждения 9.51. ∎

Теорема 9.57 (Размерность суммы подпространств)**.** *Если V_1, V_2 — конечномерные подпространства пространства V, то*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

(формула Грассмана).

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — базис подпространства $V_1 \cap V_2$. Векторами $b_1, \ldots, b_l$ дополним систему $a_1, \ldots, a_k$ до базиса пространства V_1. Векторами $c_1, \ldots, c_m$ дополним систему $a_1, \ldots, a_m$ до базиса пространства V_2. Для доказательства теоремы покажем, что система

$$a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_m$$

образует базис пространства $V_1 + V_2$.

Легко проверить полноту системы. Для доказательства ее линейной независимости рассмотрим нулевую линейную комбинацию:

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_l b_l}_{-c \in V_1} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_m c_m}_{c \in V_2} = 0. \tag{9.6}$$

Пусть

$$c = \gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_m c_m. \tag{9.7}$$

Очевидно, что $c \in V_2$ и тогда по (9.6) имеем $c \in V_1$. Следовательно, $c \in V_1 \cap V_2$ и поэтому найдутся такие $\delta_1, \ldots, \delta_k$, что

$$c = \delta_1 a_1 + \ldots + \delta_k a_k. \tag{9.8}$$

Из (9.7, 9.8) получаем два разложения вектора c по базису пространства V_2:

$$\begin{aligned} c &= 0a_1 + \ldots + 0a_k + \gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_m c_m, \\ c &= \delta_1 a_1 + \ldots + \delta_k a_k + 0c_1 + \ldots + 0c_m. \end{aligned}$$

Так как разложение по базису единственно, то все коэффициенты в этих разложениях нулевые, поэтому $c = 0$ и, следовательно, нулевая линейная комбинация (9.6) — тривиальная. ∎

Понятие суммы и пересечения подпространств распространяется на произвольное конечное их число. А именно, под *суммой* $V_1 + V_2 + \ldots + V_s$ подпространств $V_1, V_2, \ldots, V_s$ понимается

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_s = \{a_1 + a_2 + \ldots + a_s : \ a_i \in V_i \ (i = 1, 2, \ldots, s)\}.$$

Под *пересечением* $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_s$ понимается

$$V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_s = \{a : \ a \in V_i \ (i = 1, 2, \ldots, s)\}.$$

Легко проверить справедливость утверждений 9.54 и 9.55 для таких сумм и пересечений соответственно.

9.12. Прямая сумма подпространств

Сумма подпространств $V_1 + \ldots + V_s$ называется *прямой*, если для произвольного вектора $x \in V_1 + \ldots + V_s$ векторы $x_1, \ldots, x_s$, такие, что

$$x = x_1 + \ldots + x_s, \tag{9.9}$$

где $x_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, определены единственным образом. Для прямой суммы будем использовать обозначение $V_1 \dot{+} \ldots \dot{+} V_s$. Представление вектора x в виде (9.9) называют его *разложением по подпространствам.* Таким образом, в случае прямой суммы это разложение определено единственным образом.

Лемма 9.58 (Единственность разложения o)**.** *Для того, чтобы сумма $V_1 + \ldots + V_s$ являлась прямой, необходимо и достаточно, чтобы из условий $o = x_1 + \ldots + x_s$, $x_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ следовало $x_i = o$ $(i = 1, \ldots, s)$.*

Доказательство. Необходимость следует из определения прямой суммы.
Достаточность. Пусть для некоторого x нашлось два разложения:

$$x = x_1 + \ldots + x_s = y_1 + \ldots + y_s,$$

где $x_i \in V_i$, $y_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда

$$o = \underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in V_1} + \ldots + \underbrace{(x_s - y_s)}_{\in V_s}$$

Из единственности разложения вектора o теперь следует, что $x_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. ∎

Теорема 9.59 (Критерий прямой суммы)**.** *Для того, чтобы сумма $V_1 + \ldots + V_s$ конечномерных подпространств была прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\dim(V_1 + \ldots + V_s) = \dim V_1 + \ldots + \dim V_s.$$

Доказательство. Рассмотрим систему, состоящую из базисов пространств V_i:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{базис } V_1: & a_{11}, \ldots, a_{1n_1}; \\ \text{базис } V_2: & a_{21}, \ldots, a_{2n_2}; \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \text{базис } V_s: & a_{s1}, \ldots, a_{sn_2} \end{array}\right\} \text{система } A.$$

Для доказательства теоремы покажем, что для того, чтобы сумма $V_1 + \ldots + V_s$ была прямой, необходимо и достаточно, чтобы совокупная система A образует базис этой суммы.
Необходимость. Легко видеть, что A — полная система. Докажем ее линейную независимость. Пусть

$$\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{1j} a_{1j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_{sj} a_{sj} = o. \tag{9.10}$$

Проинтерпретируем приведенное равенство как разложение o по подпространствам V_i. Так как сумма подпространств прямая, то данное разложение единственно, и поэтому

$$\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{1j} a_{1j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_{sj} a_{sj} = o.$$

Векторы в каждой из приведенных линейных комбинаций образуют базис, поэтому все коэффициенты равны нулю. Итак, линейная комбинация (9.10) тривиальная.
Достаточность. Для доказательства достаточности воспользуемся леммой. Для этого покажем, что если система A линейно независима, то разложение o по подпространствам V_i определяется единственным образом. Действительно, в противном случае найдутся такие векторы a_i, что

$$o = a_1 + \ldots + a_s,$$

где $a_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ и $a_{i'} \neq 0$ для некоторого i'. Каждый вектор a_i разложим по базису $a_{i1}, \ldots, a_{in_i}$:

$$o = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{1j} a_{1j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_{sj} a_{sj}.$$

В приведенной линейной комбинации найдутся ненулевые коэффициенты (среди чисел $\alpha_{i'1}, \ldots, \alpha_{i'n_{i'}}$), поэтому система A — линейно зависима, что противоречит условию. ∎

Следствие 9.60. *Сумма $V_1 + V_2$ прямая тогда и только тогда, когда $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.*

Доказательство. Утверждение следует из доказанного критерия и теоремы о размерности суммы подпространств. ∎

Пусть линейное пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств: $V = V_1 \dot{+} V_2$. Тогда для произвольного $x \in V$ определяются единственным образом векторы $y \in V_1$, $z \in V_2$, такие, что $x = y + z$. Вектор y называется *проекцией* вектора x на подпространство V_1 параллельно V_2.

9.13. Линейное многообразие

Рассмотрим линейное пространство V над полем F. Пусть a_0 — произвольный вектор, L — подпространство в V. Под записью $a_0 + L$ будем понимать множество всевозможных векторов вида $a_0 + x$, где x — произвольный вектор из L. Множество $a_0 + L$ называется *линейным многообразием*, порожденным вектором a_0 и подпространством L. Подпространство L называется также *несущим* подпространством для многообразия $a_0 + L$.

Утверждение 9.61. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1. $a_0 + L = b_0 + L$,
2. $b_0 \in a_0 + L$,
3. $b_0 - a_0 \in L$.

Доказательство. Импликации $1 \to 2$, $2 \to 3$ очевидны. Докажем импликацию $3 \to 1$ Пусть $b_0 - a_0 \in L$, тогда $b_0 = a_0 + l$ для некоторого $l \in L$. Рассмотрим произвольный вектор $a = a_0 + x$ из $a_0 + L$, $x \in L$. Имеем $a = b_0 + (x - l)$, поэтому $a \in b_0 + L$, откуда $a_0 + L \subseteq b_0 + L$. Аналогично можно показать, что $b_0 + L \subseteq a_0 + L$. ∎

Замечание 9.62. Импликация $2 \to 1$ означает, что многообразие порождается любым своим представителем. Эквивалентность $1 \sim 3$ дает критерий совпадения двух линейных многообразий с одинаковым несущим подпространством.

Утверждение 9.63. *Пусть a_0, b_0 — векторы, L, L' — подпространства. Тогда, если $a_0 + L = b_0 + L'$, то $L = L'$. Таким образом, несущее подпространство линейного многообразия определяется единственным образом.*

Доказательство. Из предыдущего утверждения следует, что, если $a_0+L = b_0+L'$, то $a_0+L = a_0 + L'$, поэтому для любого x из L найдется такой y из L', что $a_0 + x = a_0 + y$, откуда $x = y$, т. е. $x \in L'$, а, следовательно, $L \subseteq L'$. Аналогично можно показать, что $L' \subseteq L$. ∎

Из доказанного утверждения следует корректность следующего определения. *Размерностью* линейного многообразия $a_0 + L$ называется размерность его несущего подпространства L: $\dim(a_0 + L) = \dim L$.

Линейное многообразие размерности 1 называется *прямой*, размерности 2 — *плоскостью*[4], размерности $n-1$ — *гиперплоскостью*.

9.14. Изменение координат вектора при замене базиса

Пусть $\mathbf{e} = \langle e_1, \dots, e_n\rangle$ и $\mathbf{e}' = \langle e'_1, \dots, e'_n\rangle$ — два базиса пространства V. Каждый вектор второго («нового») базиса разложим по первому («старому») базису:

$$e'_j = \alpha_{1j}e_1 + \ldots + \alpha_{nj}e_n \quad \text{т. е.} \quad [e'_j]_e = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, n). \tag{9.11}$$

Найдем связь координат произвольного вектора x в этих базисах. Пусть

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \ldots + x'_ne'_n,$$

т. е.

$$[x]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad [x]_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$x = \sum_{j=1}^n x'_je'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}e_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x'_j\right)}_{x_i} e_i.$$

Так как координаты вектора в любом фиксированном базисе определяются единственным образом, то

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x'_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{9.12}$$

(формула, связывающая координаты одного и того же вектора в разных базисах).

[4] Иногда плоскостью называют линейное многообразие произвольной размерности

Матрица $[\mathbf{e}]_{\mathbf{e}'} = (\alpha_{ij})$ называется *матрицей перехода* от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, \ldots, e'_n$. Столбцы этой матрицы суть столбцы координат векторов нового базиса в старом базисе. Теперь формулы (9.12) можно записать в матричном виде:

$$[x]_{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}[x]_{\mathbf{e}'}. \tag{9.13}$$

Утверждение 9.64. *Пусть $Q \in F^{n\times n}$ причем для любого вектора $x \in V$*

$$[x]_{\mathbf{e}} = Q[x]_{\mathbf{e}'}, \tag{9.14}$$

тогда $Q = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$.

Доказательство. В (9.14) положим $x = e'_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Все компоненты столбца $[e'_j]_{\mathbf{e}'}$ равны 0, а j-я равна 1, поэтому $Q[e'_j]_{\mathbf{e}'}$ есть j-й столбец матрицы Q. Ввиду (9.14) этот столбец равен $[e'_j]_{\mathbf{e}}$. Следовательно, по определению Q есть матрица перехода $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$. ∎

Утверждение 9.65. *Матрица $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ невырождена.*

Доказательство. Столбцы матрицы $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ суть координатные столбцы векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базисе $\mathbf{e}$. Так как векторы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ линейно независимы, то линейно независимы и их координатные столбцы, следовательно, $\operatorname{rank}[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = n$ и матрица $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ невырождена. ∎

Утверждение 9.66. *Матрица перехода от «нового» базиса к «старому» обратна к матрице перехода от «старого» базиса к «новому», т. е.*

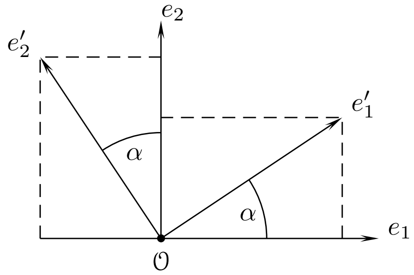
$$[\mathbf{e}]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}.$$

Доказательство. Домножая обе части равенства (9.13) слева на $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}$, получаем

$$[x]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}[x]_{\mathbf{e}}.$$

Теперь требуемое вытекает из утверждения 9.64. ∎

Пример 9.67. Пусть в $\mathbf{V}_2$ выбрано два правых ортонормированных базиса: $\mathbf{e} = \langle e_1, e_2\rangle$ и $\mathbf{e}' = \langle e'_1, e'_2\rangle$, причем векторы e'_1 и e'_2 получены из e_1, e_2 соответсвенно поворотом вокруг полюса на угол α. Найдем матрицу перехода.



$$e'_1 = \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha \cdot e_2, \qquad e'_2 = -\sin\alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_2,$$

поэтому

$$[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Связь координат одного и того же вектора в разных базисах задается равенствами

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \cos\alpha - x_2' \sin\alpha, \\ x_2 = x_1' \sin\alpha + x_2' \cos\alpha. \end{cases}$$

Заметим, что

$$[\mathbf{e}]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha, \\ x_2' = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha. \end{cases}$$

9.15. Системы координат

В этом разделе векторы любых линейных пространств иногда будут называться точками. Такое изменение в названии аппелирует к геометрическим представлениям: как уже отмечалось, вектор пространства $\mathbf{V}_3$, закрепленный в полюсе, можно ассоциировать с точкой, являющейся его концом.

Системой координат линейного пространства V назовем совокупность точки $\mathcal{O}$ из V и базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ этого пространства. *Координатами точки* $\mathcal{A} \in V$ в этой системе координат назовем координаты вектора $\mathcal{A} - \mathcal{O}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Столбец координат точки $\mathcal{A}$ обозначим $[\mathcal{A}]_{\mathcal{O},e}$, т. е. по определению

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O},e} = [\mathcal{A} - \mathcal{O}]_e.$$

Исследуем как меняются координаты точки при изменении системы координат.

Пусть «старая» система координат $\mathcal{O}, e_1, \ldots, e_n$ заменена на «новую» $\mathcal{O}', e_1', \ldots, e_n'$, причем справедливы формулы (9.11) и

$$\mathcal{O}' - \mathcal{O} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j, \quad \text{т. е.} \quad [\mathcal{O}']_{\mathcal{O},e} = [\mathcal{O}' - \mathcal{O}]_e = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная точка пространства V, причем

$$\mathcal{A} - \mathcal{O}' = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x_1' e_1' + \ldots + x_n' e_n',$$

т. е.

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O},e} = [\mathcal{A} - \mathcal{O}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad [\mathcal{A}]_{\mathcal{O}',e'} = [\mathcal{A} - \mathcal{O}']_{e'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathcal{A} - \mathcal{O} = (\mathcal{O}' - \mathcal{O}) + (\mathcal{A} - \mathcal{O}')$, то

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O},\mathbf{e}} = [\mathcal{A} - \mathcal{O}]_{\mathbf{e}} = [\mathcal{O}' - \mathcal{O}]_{\mathbf{e}} + [\mathcal{A} - \mathcal{O}']_{\mathbf{e}} = [\mathcal{O}']_{\mathcal{O},\mathbf{e}} + [\mathcal{A} - \mathcal{O}']_{\mathbf{e}} = [\mathcal{O}']_{\mathcal{O},\mathbf{e}} + [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} [\mathcal{A} - \mathcal{O}']_{\mathbf{e}'}.$$

Итак,

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O},\mathbf{e}} = [\mathcal{O}']_{\mathcal{O},\mathbf{e}} + [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}[\mathcal{A}]_{\mathcal{O}',\mathbf{e}'}, \tag{9.15}$$

или, в координатах,

$$x_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

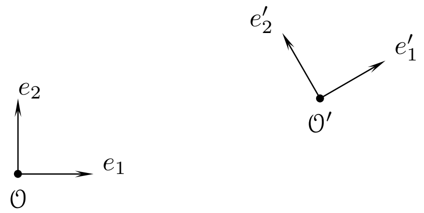
(формула, связывающая координаты одной и той же точки в разных системах координат).

Заметим, что домножая обе части равенства (9.15) слева на $[\mathbf{e}]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}$, можно получить

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O}',\mathbf{e}'} = -[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}[\mathcal{O}']_{\mathcal{O},\mathbf{e}} + [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}[\mathcal{A}]_{\mathcal{O},\mathbf{e}}. \tag{9.16}$$

Очевидно, что $[\mathcal{O}]_{\mathcal{O}',\mathbf{e}'} = -[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}[\mathcal{O}']_{\mathcal{O},\mathbf{e}}$ — столбец координат начала «старой» системы координат в «новой» системе.

Пример 9.68. Пусть O, e_1, e_2 и O', e'_1, e'_2 — две системы координат в пространстве $\mathbf{V}_2$. Координаты точки O' в старой системе координат — $(4,1)^\top$. Векторы e'_1, e'_2 получены из e_1, e_2 соответсвенно поворотом на угол $\pi/6$.



Найдем связь координат точки в этих системах координат:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1 + x'_1 \cos\alpha - x'_2 \sin\alpha = 4 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} x'_1 - \dfrac{1}{2} x'_2, \\ x_2 = \gamma_2 + x'_1 \sin\alpha + x'_2 \cos\alpha = 1 + \dfrac{1}{2} x'_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} x'_2. \end{cases}$$

Согласно (9.16) имеем

$$\begin{cases} x'_1 = -\dfrac{4\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} x_1 + \dfrac{1}{2} x_2, \\ x'_2 = -\dfrac{\sqrt{3}-4}{2} - \dfrac{1}{2} x_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} x_2. \end{cases}$$