Глава 7

Матрицы и системы линейных уравнений

7.1. Матричные операции

Пусть K — произвольное кольцо. Таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

в которой $a_{ij} \in K$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), называется *матрицей* из m строк и n столбцов, или, кратко, матрицей размера $m \times n$ (а также $(m \times n)$-матрицей). Числа a_{ij} называются *элементами* матрицы, первый индекс, i, элемента a_{ij} указывает номер строки, второй индекс, j, указывает номер столбца. Сокращенное обозначение матрицы, указывающее общий вид ее элементов: $A = (a_{ij})$, где, разумеется, вместо i, j можно использовать другие буквы.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 1 & 2/3 \end{pmatrix},$$

— матрица размера 2×4 с вещественными элементами.

Матрица размера $m \times 1$ называется *столбцом* высоты m. Матрица размера $1 \times n$ называется *строкой* длины n.

Если $m = n$, матрица называется *квадратной* матрицей порядка n. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют *главную диагональ*, или просто *диагональ*, матрицы. Элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ образуют *побочную диагональ*.

Множество всех матриц с элементами из K обозначим $K^{m \times n}$. Например, $\mathbb{R}^{2 \times 4}$ — множество всех матриц размера 2×4 с вещественными элементами; $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ — множество всех квадратных матриц 2-го порядка с целыми элементами. Множество $K^{n \times 1}$ всех столбцов высоты n также будем обозначать просто K^n[1].

Матрицы из $K^{m \times n}$ можно складывать и умножать на числа из K. При этом получаются матрицы из $K^{m \times n}$.

Под *суммой* $A + B$ матриц $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in K^{m \times n}$ понимается матрица $C = (c_{ij}) \in K^{m \times n}$, в которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Обратим внимание, что складывать можно только матрицы одинаковых размеров. В этом случае говорят, что их размеры согласованы для операции сложения.

[1] Заметим, что иногда под K^n понимают множество *строк* длины n, а не столбцов высоты n.

Под *произведением* αK матрицы $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ на число $\alpha \in K$ понимается матрица $C = (c_{ij}) \in K^{m\times n}$, в которой $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Пример 7.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(-3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 6 & 15 & -12 \end{pmatrix}$$

Легко доказываются следующие свойства этих операций.

Утверждение 7.2. *Пусть A, B, C — матрицы из $K^{m\times n}$, а α, β — числа из K. Тогда*

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

2) $A + B = B + C$;

3) $A + O = A$, *где O —* нулевая *матрица размера $m \times n$, т. е. матрица, в которой все элементы равны* 0;

4) для любой матрицы A найдется матрица B, называемая противоположной *и обозначаемая $-A$, такая, что $A + B = O$; элементы противоположной матрицы равны $b_{ij} = -a_{ij}$.*

5) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

6) $1 \cdot A = A$;

7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

8) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Следствие 7.3. *Относительно операции сложения матриц множество $K^{m\times n}$ является абелевой группой.*

Так как $K^{m\times n}$ — относительно сложения абелева группа, то все результаты, полученные для абелевых групп относятся и к $K^{m\times n}$. В частности, в $K^{m\times n}$ вводится операция вычитания $A - B$ и т. д.

Матрицу с n столбцами можно умножать на матрицу с n строками. Пусть $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$, $B = (b_{jk}) \in K^{n\times p}$. Под *произведением* матрицы A на матрицу B понимается матрица $C = (c_{ik}) \in K^{m\times p}$, в которой

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}. \tag{7.1}$$

Обозначение для произведения матриц: $A \cdot B$ или просто AB. Иногда говорят, что матрицы умножаются «строка на столбец», имея в виду, что, согласно формуле (7.1), для того, чтобы найти элемент i-й строки и k-го столбца произведения AB, нужно умножить элементы i-й *строки* матрицы A на соответствующие элементы k-го *столбца* матрицы B и найденные произведения сложить.

Обратим внимание, что умножить одну матрицу на другую можно лишь тогда и только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. В этом случае говорят, что размеры матриц *согласованы для операции умножения*.

Пример 7.4. Произведение строки на столбец с тем же числом компонент, т. е. матрицы размера $1 \times n$ на матрицу размера $n \times 1$, есть матрица размера 1×1, т. е. число. Согласно (7.1) имеем:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Произведение строки на столбец иногда называют *внутренним* или *скалярным* произведением.

Произведение столбца высоты m на строку длины n есть матрица размера $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \ldots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \ldots & a_2 b_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \ldots & a_m b_n \end{pmatrix}.$$

Произведение столбца на строку иногда называют *внешним* произведением.

Пример 7.5. Произведение двух 2×2 матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример 7.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -11 \\ 22 & -17 \end{pmatrix}.$$

Пусть кольцо K содержит единицу 1. Квадратная матрица, в которой все диагональные элементы равны 1, а внедиагональные равны 0, называется *единичной* матрицей. Единичная матрица порядка n обозначается E_n или (если из контекста ясен ее порядок) просто E. Итак,

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые свойства матричного умножения.

Утверждение 7.7.

1) *Если $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$, $C \in K^{p \times q}$ и кольцо K ассоциативно, то $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность);*

2) *Если $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$, $C \in K^{n \times p}$, то $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность I);*

3) *Если $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{m \times n}$, $C \in K^{n \times p}$, то $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивность II);*

4) *Если $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$ и $\alpha \in K$, то $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.*

5) *Если* $A \in K^{m\times n}$, *то* $AE_n = A$ *и* $E_m A = A$.

Доказательство. Все свойства проверяются непосредственно. Докажем, например, 1-е свойство. Во-первых, все действия, которые необходимо выполнить при вычислении левой и правой частей доказываемого равенства, осуществимы (размеры матриц согласованы для вычисления всех произведений). Далее, размеры матриц, получающиеся в левой части, совпадают с размерами матрицы, получающейся в правой части, и равны $m \times q$. Докажем теперь, что соответствующие элементы совпадают. Пусть

$$A = (a_{ij}), \qquad B = (b_{jk}), \qquad C = (c_{kl}).$$

Обозначим

$$G = AB = (g_{ik}), \quad H = BC = (h_{jl}), \quad S = (AB)C = (s_{il}), \quad T = A(BC) = (t_{il}).$$

По определению матричного произведения имеем

$$g_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу для s_{il}, получаем:

$$s_{il} = \sum_{k=1}^{p} g_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

По определению матричного произведения имеем

$$h_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу для t_{il}, получаем:

$$t_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Имеем $s_{il} = t_{il}$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ l = 1, 2, \ldots, q)$, откуда $S = T$. ∎

Утверждение 7.8. *[Три взгляда на матричное произведение] Пусть* $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$.

1) j*-й столбец произведения* AB *есть линейная комбинация столбцов матрицы* A *с коэффициентами, взятыми из* j*-го столбца матрицы* B.

2) i*-я строка произведения* AB *есть линейная комбинация строк матрицы* B *с коэффициентами, взятыми из* i*-й строки матрицы* A.

3) *Для того, чтобы найти произведение* AB *достаточно каждый столбец матрицы* A *умножить на каждую строку матрицы* B *и полученные произведения сложить, т. е.*

$$AB = \sum_{j=1}^{n} a_j \widetilde{b}_j, \tag{7.2}$$

где a_j, $\widetilde{b}_j$ — j*-й столбец и* j*-я строка матриц* A *и* B *соответственно. Запись* (7.2) *называется представлением матричного произведения в виде суммы внешних произведений.*

Доказательство. Следует непосредственно из определения матричного произведения. ∎

Пример 7.9. Проиллюстрируем на частных случаях утверждение 7.8. Произведение $m \times n$ матрицы на столбец высоты n есть линейная комбинация ее столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + b_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведение строки длины m на матрицу размера $m \times n$ есть линейная комбинация ее строк:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$
$$= a_1 \cdot (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}) + a_2 \cdot (b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n}) + \ldots + a_m \cdot (b_{m1}, b_{m2}, \ldots, b_{mn}).$$

Представление произведения двух матриц 2-го порядка в виде суммы внешних произведений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Следствие 7.10. *Если $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$, то*

$$\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} B.$$

Очевидно, что для того, чтобы оба произведения AB и BA были определены, необходимо и достаточно, чтобы число столбцов n матрицы A совпадало с числом строк матрицы B и, наоборот, число строк m матрицы A совпадало с числом столбцов матрицы B, т. е. $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times m}$. Отсюда получаем, что для того, чтобы размеры AB и BA совпадали необходимо и достаточно, чтобы $m = n$, т. е. матрицы были квадратными одного порядка. При этом легко привести пример, когда $AB \neq BA$. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, множество $K^{n\times n}$ квадратных матриц замкнуто относительно умножения, однако в общем случае *матричное умножение не обладает свойством коммутативности.*

Следствие 7.11. *Если K — кольцо, то множество $K^{n\times n}$ квадратных матриц порядка n также образует кольцо. Если кольцо K — ассоциативное, то $K^{n\times n}$ также является ассоциативным кольцом. Если кольцо K содержит единицу, то $K^{n\times n}$ также содержит единицу (единичную матрицу).*

Действия с матрицами, разбитыми на клетки. Матрицы, составленные из других матриц называются *блочными* матрицами, или матрицами, *разбитыми на блоки (клетки)*. Пусть $A \in K^{m\times n_1}$, $B \in K^{m\times n_2}$. Матрицу, полученную приписыванием к A справа матрицы B обозначим $(A\ B)$. Пусть теперь $A \in K^{m_1\times n}$, $B \in K^{m_2\times n}$. Матрицу, полученную приписыванием к A снизу матрицы B обозначим

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Можно строить матрицы из бо́льшего числа блоков, например, из блоков $A_{ij} \in K^{m_i\times n_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, q;\ j = 1, 2, \ldots, r)$ можно составить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2r} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{q1} & A_{q2} & \ldots & A_{qr} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}, \tag{7.3}$$

где $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_q$, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Оказывается, что операции над блочными матрицами формально вычисляются по тем же правилам, что и с обыкновенными. Действительно, очевидно, что

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \ldots & \alpha A_{1r} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \ldots & \alpha A_{2r} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha A_{q1} & \alpha A_{q2} & \ldots & \alpha A_{qr} \end{pmatrix},$$

т. е. для того чтобы умножить блочную матрицу на скаляр, нужно каждый блок умножить на этот скаляр. Аналогично для суммы блочных матриц. Пусть матрицы A и B разбиты на одинаковое число блоков и соответствующие блоки матриц A и B имеют соответственно равные числа строк и столбцов. Тогда сумму $A+B$ можно составить из сумм соответствующих блоков:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1r} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ A_{q1} & \ldots & A_{qr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1r} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ B_{q1} & \ldots & B_{qr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \ldots & A_{1r}+B_{1r} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ A_{q1}+B_{q1} & \ldots & A_{qr}+B_{qr} \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим умножение блочных матриц. Пусть $B_{jk} \in K^{n_j\times p_k}$ $(j = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, s)$ и

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2s} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ B_{r1} & B_{r2} & \ldots & B_{rs} \end{pmatrix} \in K^{n\times p}, \tag{7.4}$$

где $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_s$.

Утверждение 7.12. *Пусть матрицы A и B построены из блоков согласно* (7.3) *и* (7.4), *тогда*

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1s} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qs} \end{pmatrix} \in K^{m\times p},$$

где

$$C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \ldots + A_{ir}B_{rk} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, s).$$

Таким образом, блоки произведения двух матриц равны сумме произведений блоков «блочной строки» на соответствующие блоки «блочного столбца».

Доказательство. Пусть $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$, $C = (c_{ij})$. Согласно определению произведения матриц

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} a_{ik}b_{kj} + \ldots + \sum_{k=n_1+\ldots+n_{r-1}+1}^{n_1+\ldots+n_r} a_{ik}b_{kj}.$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что каждая сумма в правой части этого равенства есть элемент матрицы $A_{ir}B_{rk}$. ∎

Пример 7.13.

$$A \cdot (B_1,\ B_2) = (AB_1,\ AB_2)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \end{pmatrix}$$

$$(A_1,\ A_2) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Транспонирование матриц. Пусть $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$. Матрица $B = (b_{ji}) \in K^{n\times m}$, в которой $b_{ji} = a_{ij}$, называется *транспонированной к A* матрицей и обозначается $A^\top$. Таким образом, притранспонировании матрицы ее строчки превращаются в столбцы, а столбцы — в строчки.

Пример 7.14.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 7.15.

1) *Если $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{m\times n}$, то $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.*

2) *Если $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times p}$, то $(AB)^\top = B^\top A^\top$.*

3) $(A^\top)^\top = A$.

Доказательство. Первое и третье свойства очевидны. Докажем второе свойство. Во-первых, заметим, что размеры матриц, получающихся в левой и правой частях доказываемого равенства, совпадают. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = AB = (c_{ik})$, $D = (AB)^\top = (d_{ki})$, тогда

$$d_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

$F = A^\top = (f_{ji})$, $G = B^\top = (g_{kj})$, $H = B^\top A^\top = (h_{ki})$, тогда

$$f_{ji} = a_{ij}, \quad g_{kj} = b_{jk}, \quad h_{ki} = \sum_{j=1}^{n} g_{kj} f_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij}.$$

Получаем, что $d_{ki} = h_{ki}$ $(k = 1, 2, \ldots, k;\ i = 1, 2, \ldots, m)$. ∎

7.2.* Трудоемкость матричного умножения

Рассмотрим алгоритмический аспект задачи нахождения произведения матриц. Пусть $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$, $B = (b_{jk}) \in K^{n\times p}$. Требуется найти $C = AB = (c_{ik}) \in K^{m\times p}$. Вот классический алгоритм, вычисляющий по формулам (7.1):

```
procedure MATRIX–MULTIPLICATION(A, B, var C)
  for i := 1, . . . , m do
    for k := 1, . . . , p do
      c_ik := 0
      for j := 1, . . . , n do
        c_ik := c_ik + a_ij b_jk
      end
    end
  end
end
```

Легко видеть, что он требует mnk сложений и mnk умножений чисел из F. Таким образом, трудоемкость алгоритма умножения равна $2mnk$ операций над числами из F. В частности, при умножении квадратных матриц порядка n требуется $2n^3$ операций. Оказывается существуют более быстрые (при достаточно больших размеров перемножаемых матриц) алгоритмы. Рассмотрим *алгоритм Штрассена*, который для умножения квадратных матриц использует только $O(m^{\log_2 7}) = O(m^{2.81})$ операций сложения, вычитания и умножения чисел из F.

Рассмотрим вначале умножение матриц второго порядка. Найдем 7 произведений:

$$\begin{aligned}
d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}),\\
d_2 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}),\\
d_3 &= (a_{11} - a_{21})(b_{11} + b_{12}),\\
d_4 &= (a_{11} + a_{12})b_{22},\\
d_5 &= (a_{21} + a_{22})b_{11},\\
d_6 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}),\\
d_7 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Легко проверить, что элементы c_{ij} произведения AB могут быть выражены через d_k следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= d_1 + d_2 - d_4 + d_7,\\
c_{12} &= d_4 + d_6,\\
c_{21} &= d_5 + d_7,\\
c_{22} &= d_1 - d_3 - d_5 + d_6.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

В (7.5) и (7.6) используется 7 умножений и 18 сложений и вычитаний, тогда как в обычной схеме — 8 умножений и 4 сложения.

В случае умножения двух $n \times n$ матриц, где $n = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}$, каждую матрицу можно разбить на четыре подматрицы порядка $n/2$ и использовать приведенные выше формулы рекурсивно. Если n не есть степень 2, то к матрицам можно дописать строки и столбцы из нулей.

Пусть $T(n)$ — число операций сложения, вычитания и умножения в алгоритме Штрассена для перемножения двух $m \times m$ матриц. Получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 18 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad \text{для } n \geq 2,$$

откуда по индукции можно получить

$$T(n) \leq 7n^{\log_2 7}.$$

Заметим, что при $n = 512$ справедливо $7n^{\log_2 7} < 2n^3$, но уже при $n = 1024$ выполнено $7n^{\log_2 7} \geq 2n^3$.

Известны еще более быстрые (асимптотически) алгоритмы умножения матриц. Например, Виноградом предложен алгоритм с трудоемкостью $O(n^{2.376})$, однако мультипликативная константа здесь настолько велика, что для встречающихся на практике значений n алгоритм уступает классическому. Каково минимальное значение показателя степени, не известно. Понятно лишь, что не существует алгоритма со сложностью меньше $O(n^2)$.

7.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим произвольную *систему m линейных уравнений* с n неизвестными над полем F:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{7.7}$$

где $a_{ij} \in F$, $b_i \in F$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$. *Решением* (или, более точно, *частным решением*) системы (7.7) называется набор $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in K^n$ значений неизвестных x_j, при подстановке которых в систему получаем m верных тождеств. Множество всех частных решений системы будем называть *общим решением*. Если множество решений пусто, то система называется *несовместной*. Две системы назовем *эквивалентными*, если они имеют одинаковое число неизвестных и их множества решений совпадают.

Коэффициенты левой части системы (7.7) запишем в матрицу A, коэффициенты правой части системы — в столбец b:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрицу A будем называть *основной матрицей* системы. Блочную матрицу (A, b) будем называть *расширенной матрицей системы*. Итак, систему (7.7) можно записать в матричном виде: $Ax = b$.

Основная идея метода Гаусса решения системы линейных уравнений — ее упрощение с помощью серии преобразований строк расширенной матрицы, переводящих систему уравнений в эквивалентную.

Пример 7.16. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1; \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases} \tag{7.8}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Из второй строки вычтем первую, умноженную на 3. Из третьей строки вычтем первую, умноженную на 4. Из четвертой строки вычтем первую. Легко видеть, что данные преобразования соответствуют процедуре исключения неизвестной x_1: из первого уравнения мы выражаем x_1 и полученное выражение подставляем в остальные уравнения. Матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Вторую строку прибавим к первой м вычтем из третьей. Затем поделим вторую строку на -2. Матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Из первой строки вычтем четвертую, умноженную на 2. Ко второй строке прибавим четвертую. Переставим третью и четвертую строки. Матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{7.9}$$

Таким образом, исходная система уравнений эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 3x_5 = 1; \\ x_2 - x_3 + 2x_5 = 0; \\ x_4 = -1; \\ 0 = 0. \end{cases} \tag{7.10}$$

Выразим x_1, x_2, x_4 через x_3, x_5:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_3 + 3x_5; \\ x_2 &= 0 + x_3 - 2x_5; \\ x_4 &= -1 \end{aligned} \tag{7.11}$$

— легко видеть, что какие бы значения не принимали *свободные неизвестные* x_3, x_5 всегда найдутся значения *связанных неизвестных*, при которых все уравнения системы (7.8), и, следоветельно, системы (7.10), превращаются в верные равенства. С другой стороны, любое решение исходной системы (7.8) удовлетворяет также и системе (7.11). Таким образом, общее решение системы (7.8) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - t_1 + 3t_2; \\ x_2 &= t_1 - 2t_2; \\ x_3 &= t_1; \\ x_4 &= -1 \\ x_5 &= t_2, \end{aligned} \tag{7.12}$$

где t_1, t_2 — произвольные числа[2]. Решение (7.12) можно записать в «столбцовой» форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следующие преобразования строк матрицы будем называть *элементарными преобразованими*:

1) перестановка (транспозиция) i-й и j-й строк ($i \neq j$),

2) домножение i-й строки на число $\alpha \in F$ ($\alpha \neq 0$),

3) прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на α.

Лемма 7.17. *Элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы линейных уравнений не меняют множества решений.*

Доказательство. Докажем, что преобразование 3-го типа не меняет множества решений. Запишем систему, получающуюся из (7.7) преобразованием 3-го типа: Система, полученная из (7.7) преобразованием 3-го типа, будет отличаться от (7.7) только i-м уравнением, которое примет вид:

$$(a_{i1} + \alpha a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})x_2 + \ldots + (a_{i1} + \alpha a_{j1})x_n = b_i + \alpha b_j. \tag{7.13}$$

Пусть $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)^\top$ — частное решение системы (7.7). Оно удовлетворяет всем уравнениям системы (7.7) и, следовательно, всем уравнениям новой системы, в том числе уравнению (7.13). Последнее справедливо, так как тождество

$$(a_{i1} + \alpha a_{j1})x'_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})x'_2 + \ldots + (a_{i1} + \alpha a_{j1})x'_n = b_i + \alpha b_j. \tag{7.14}$$

получается прибавлением к равенству

$$a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + \ldots + a_{i1}x'_n = b_i \tag{7.15}$$

равенства

$$a_{j1}x'_1 + a_{j2}x'_2 + \ldots + a_{j1}x'_n = b_j, \tag{7.16}$$

[2]Форма записи ответа, в общем случае не единственна

умноженного на α. Итак, любое частное решение системы (7.7) является частным решением новой системы. Пусть теперь $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)^\top$ — частное решение новой системы. Оно удовлетворяет всем уравнениям системы (7.7), в том числе i-му уравнению. Последнее справедливо, так как тождество (7.15) получается вычитанием из равенства (7.14) равенства (7.16), умноженного на α. Таким образом, любое решение новой системы является решением системы (7.7). ∎

Обозначим через e_j столбец, у которого все, кроме j-й компоненты равны нулю, а j-ая компонента равна 1. Будем говорить, что матрица $A \in F^{m\times n}$ имеет *простейший*, или *упрощенный, вид*, если ее столбцы с номерами $j_1, \ldots, j_r$ суть столбцы $e_1, \ldots, e_r$ соответственно и (при $m > r$) последние $m - r$ строк — нулевые:

$$A = \begin{pmatrix} * & \ldots & * & 1 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * \\ * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & 1 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * \\ \hdotsfor{15} \\ * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & 1 & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{15} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

(знаком «$*$» обозначены произвольные элементы; столбцы $e_1, e_2, \ldots, e_r$ могут занимать произвольные места и не обязательно стоят в таком порядке, что $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$). Например, матрица (7.9) имеет простейший вид. Матрицу простейшего вида, которую можно получить из A элементарными преобразованиями ее строк назовем *простейшим видом* матрицы A. Заметим, что в общем случае простейший вид определяется неоднозначно.

Лемма 7.18. *С помощью элементарных преобразований строк произвольную матрицу можно привести к простейшему виду.*

Доказательство. На вход следующей процедуры (*алгоритм Гаусса–Жордана*) подается матрица $A \in F^{m\times n}$.

procedure Gauss–Jordan(var A)
  $i := 1$
  for $j := 1, \ldots, n$ **do**
    найти $k \in \{i, i+1, \ldots, m\}$, такое, что $a_{kj} \neq 0$
    если такого k не существует, то **continue**
    переставить k-ю и i-ю строки
    разделить i-ю строку на a_{ij} (*ведущий*, или *главный*, элемент)
    for $l := 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$ **do**
      из l-й строки вычесть i-ю, умноженную на a_{lj}
    end
    $i := i + 1$
  end
end

Именно этот алгоритм мы использовали в примере 7.16 для приведения расширенной матрицы системы к простейшему виду. Легко видеть, что описанный алгоритм корректно работает и всегда приводит матрицу A к простейшему виду. ∎

В алгоритме Гаусса–Жордана строка i и элемент a_{ij} называются *главными*, или *ведущими*.

Для решения системы линейных уравнений приведем *расширенную* матрицу (A, b) к простейшему виду (A', b'). Пусть столбцы $j_1, \ldots, j_r$ матрицы A суть $e_1, \ldots e_r$. По матрице (A', b') построим систему уравнений, эквивалентную исходной. Если полученная система содержит уравнения вида

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = a'_j,$$

где $a'_j \neq 0$ (т. е. в (A', b') есть строка $(0, 0, \ldots, 0, \alpha)$ с $\alpha \neq 0$), то система, очевидно, несовместна. В противном случае выразим неизвестные $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ через оставшиеся неизвестные:

$$\begin{aligned}
x_{j_1} &= c_{10} + c_{11}x_{k_1} + \ldots + c_{1n-r}x_{k_{n-r}},\\
x_{j_2} &= c_{20} + c_{21}x_{k_1} + \ldots + c_{2n-r}x_{k_{n-r}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{j_r} &= c_{r0} + c_{r1}x_{k_1} + \ldots + c_{1n-r}x_{k_{n-r}},
\end{aligned} \tag{7.17}$$

где $\{j_1, \ldots, j_r\} \cup \{k_1, \ldots, k_{n-r}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Неизвестные $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n-r}}$ назовем *свободными*, а $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ — *связанными*. Легко видеть, что какие бы значения не принимали свободные неизвестные всегда по формулам (7.17) найдутся значения связанных неизвестных, при которых все уравнения системы превращаются в верные равенства. С другой стороны, любое решение исходной системы линейных уравнений удовлетворяет также и системе (7.17). Таким образом, общее решение системы можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
x_{j_1} &= c_{10} + c_{11}t_1 + \ldots + c_{1n-r}t_{n-r},\\
x_{j_2} &= c_{20} + c_{21}t_1 + \ldots + c_{2n-r}t_{n-r},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{j_r} &= c_{r0} + c_{r1}t_1 + \ldots + c_{1n-r}t_{n-r},\\
x_{k_1} &= \qquad\quad t_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{k_{n-r}} &= \qquad\qquad\qquad\qquad t_{n-r},
\end{aligned} \tag{7.18}$$

где $t_1, \ldots, t_{n-r}$ — произвольные числа из F. В частности, если $n = r$, то решение системы единственно. Формулы (7.18) можно записать в «столбцовой» форме. Для простоты обозначений предположим, что $j_1 = 1, \ldots, j_r = r$ (этого всегда можно добиться перенумерацией неизвестных), тогда имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\\ x_{r+1}\\ x_{r+2}\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{10}\\ c_{20}\\ \vdots\\ c_{r0}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} c_{11}\\ c_{21}\\ \vdots\\ c_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + t_{n-r} \cdot \begin{pmatrix} c_{1n-r}\\ c_{2n-r}\\ \vdots\\ c_{rn-r}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

Мы доказали следующие утверждения:

Теорема 7.19. *Система с расширенной матрицей (A, b) несовместна тогда и только тогда, когда в некотором (любом) простейшем виде этой матрицы есть строка $(0, 0, \ldots, 0, \alpha)$, где $\alpha \neq 0$.*

Теорема 7.20. *Если система линейных уравнений с раширенной матрицей (A, b) совместна, то найдется такой вектор c_0 и такие линейно независимые векторы $c_1, \ldots, c_{n-r}$, что*

$$M(A, b) = \{x = c_0 + t_1 c_1 + \ldots + t_{n-r} c_{n-r} : t_1, \ldots, t_{n-r} \in F\},$$

где r — число строк в некотором простейшем виде матрицы A. В частности, если $n = r$, то решение c_0 единственное.

Говорят, что матрица $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$ имеет *ступенчатый* вид, если найдутся $j_1, j_2, \ldots, j_r$, такие, что $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$, $a_{ik} = 0$, $a_{ij_i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, r$, $k = 1, 2, \ldots, j_i - 1$) и $a_{ij} = 0$ ($i = m - r + 1, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1j_1} & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2j_2} & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * \\ \multicolumn{15}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{rj_r} & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{15}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.20}$$

Элементы $a_{1j_1}, a_{1j_2}, \ldots, a_{1j_r}$ называются *ведущими*, или *главными*. Если $r = m$ и $j_i = i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), то ступенчатая матрица называется *верхней треугольной*. Легко видеть, что следующая процедура (*прямой ход метода Гаусса*) приводит матрицу A к ступенчатому виду.

```
procedure Gauss(var A)
    i := 1
    for j := 1, ..., n do
        найти k ∈ {i, i + 1, ..., m}, такое, что a_kj ≠ 0
        если такого k не существует, то continue
        переставить k-ю и i-ю строки
        for l := i + 1, ..., m do
            из l-й строки вычесть i-ю, умноженную на a_lj/a_ij
        end
        i := i + 1
    end
end
```

Один из методов решения системы линейных уравнений основан на приведении расширенной матрицы (A, b) элементарными преобразованиями строк к ступенчатому виду (A', b'). Пусть $j_1, \ldots, j_r$ — номера столбцов ведущих элементов. Как и раньше, неизвестные $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ назовем *связанными*, а остальные переменные свободными. По матрице (A', b') запишем соответствующую ей систему линейных уравнений. Если полученная система содержит уравнения вида

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b'_j,$$

где $b'_j \neq 0$, то она, очевидно, несовместна. В противном случае выполняем следующую процедуру, называемую *обратным ходом* метода Гаусса. Из r-го уравнения выразим неизвестную x_{j_r} через свободные неизвестные $x_{j_r+1}, \ldots, x_n$. Полученное выражение подставим в $(r - 1)$-е уравнение и выразим оттуда неизвестную $x_{j_{r-1}}$. Полученное выражение подставим в $(r - 2)$-е уравнение и т. д. до тех пор, пока не выразим все связанные неизвестные через свободные и не получим формулы вида (7.17). Описанная процедура особенно удобна в том случае, когда решение единственно, т. е. свободные переменные отсутствуют.

В заключение заметим, что ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк легко привести к виду

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ \multicolumn{15}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. к матрице, которая является и простейшей, и ступенчатой. Впрочем, алгоритм из доказательства леммы 7.18 сразу приводит произвольную матрицу именно к такому виду.

Элементарные преобразования как умножение матриц. Пусть E_{ij} — матрица, полученная из единичной перестановкой ее i-й и j-й строк:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix};$$

$E_i(\alpha)$ — матрица, полученная из единичной умножением i-й строки на число α:

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix};$$

$E_{ij}(\alpha)$ — матрица, полученная из единичной прибавлением к i-й строке j-й, умноженной на α:

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы E_{ij}, $E_i(\alpha)$, $E_{ij}(\alpha)$ называются матрицами *элементарных преобразований.*

Утверждение 7.21. *Элементарные преобразования* со строками *матрицы* $A \in K^{m\times n}$ *можно осуществить домножая* A слева *на матрицы элементарных преобразований:*

- *умножение на* E_{ij} *осуществляет перестановку строк с номерами* i *и* j*,*
- *умножение на* $E_i(\alpha)$ *— умножение* i*-й строки на число* α*,*
- *умножение на* $E_{ij}(\alpha)$ *— прибавление к* i*-й строке* j*-й, умноженной на* α*.*

Элементарные преобразования со столбцами *матрицы* $A \in K^{m\times n}$ *можно осуществить умножая* A справа *на матрицы элементарных преобразований:*

- *умножение на* E_{ij} *осуществляет перестановку столбцов с номерами* i*,* j*,*
- *умножение на* $E_i(\alpha)$ *— умножение* i*-го столбца на число* α*,*
- *умножение на* $E_{ij}(\alpha)$ *— прибавление к* j*-му столбцу* i*-го, умноженного на* α*.*

Таким образом, элементарное преобразование над строками матрицы A *эквивалентно домножению* A *слева на матрицу, которую можно получить из единичной с помощью одноименного элементарного преобразования. Аналогично для преобразований со столбцами, но умножать нужно справа.*

Пример 7.22.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} & a_{13}+\alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+\alpha a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\alpha a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+\alpha a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}.$$