Глава 6

Векторная алгебра

6.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Геометрическим вектором, или просто *вектором*, называется *направленный отрезок*, т. е. отрезок, в котором одна из граничных точек названа *началом*, а другая — *концом*. Вектор с началом в точке $\mathcal{A}$ и концом в точке $\mathcal{B}$ обозначается $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$ и изображается с помощью стрелки, идущей из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, см. рис. 6.1. Если начало вектора совпадает с его концом, то вектор называется *нулевым*. Можно определить вектор как упорядоченную пару точек $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Длиной, или *модулем*, вектора $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$ называется расстояние между точками $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Длина обозначается $|\overrightarrow{\mathcal{AB}}|$, или $|\mathcal{AB}|$, или просто $\mathcal{AB}$. Нулевой вектор имеет нулевую длину.

Два или более векторов называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор коллинеарен любому другому вектору. Два или более векторов называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны. Из этого определения сразу следует, что любые два вектора компланарны.

Два ненулевых коллинеарных вектора могут иметь одинаковое направление или разное.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковое направление и одинаковую длину, см. рис. 6.2. Все нулевые векторы равны друг другу. Для обозначения равенства двух векторов используется обычный символ «=». Если точки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ не расположены на одной прямой и никакие две из них не совпадают, то равенство $\overrightarrow{\mathcal{AB}} = \overrightarrow{\mathcal{CD}}$, очевидно, равносильно условию, что четырехугольник $\mathcal{ABDC}$ — параллелограмм.

Из определения равенства векторов следует, что каковы бы ни были вектор $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$ и точка $\mathcal{A}'$ найдется, причем единственная, точка $\mathcal{B}'$, такая, что $\overrightarrow{\mathcal{AB}} = \overrightarrow{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}$. В этом случае говорят, что вектор $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$ *отложен* из точки $\mathcal{A}'$.

Вектор может обозначаться одиночной буквой (как правило, малой латинской), например, $a = \overrightarrow{\mathcal{AB}}$. Нулевой вектор обозначается o.

Два коллинеарных вектора, имеющих одинаковую длину и направленных в разные сторо-

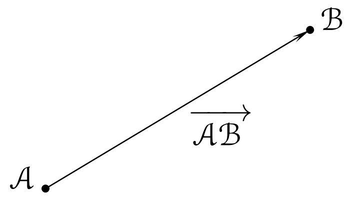

Рис. 6.1. Вектор

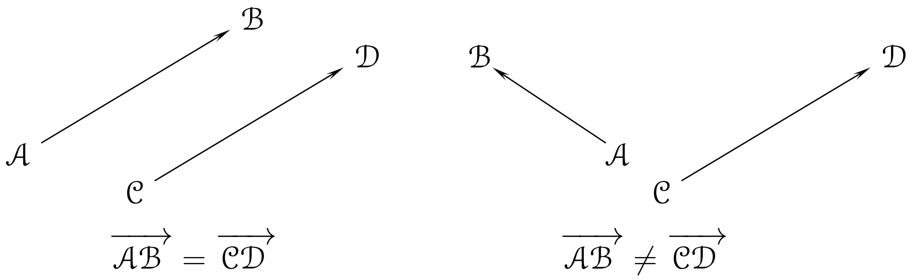

Рис. 6.2. Равные и неравные векторы

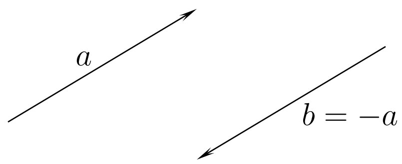

Рис. 6.3. Противоположные векторы

ны называются *противоположными*. Вектор, противоположный a, обозначается $-a$. Таким образом, $\overrightarrow{\mathcal{AB}} = -\overrightarrow{\mathcal{BA}}$. Вектор, противоположный нулевому вектору, — это сам нулевой вектор: $-o = o$.

6.1.1. Линейные операции

Определим операцию *сложения векторов*. *Суммой* векторов $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathcal{BC}}$ называется вектор $\overrightarrow{\mathcal{AC}}$. Таким образом, чтобы получить сумму c векторов a и b, необходимо отложить вектор b из конца вектора a и соединить начало вектора a с концом b (*правило треугольника*); см. рис. 6.4. Сумма векторов a и b обозначается $a + b$.

Другой способ найти сумму — использовать так называемое *правило параллелограмма*: векторы a и b откладываются из одной точки и строится параллелограмм (если векторы a и b неколлинеарны), смежные стороны которого суть a и b. Диагональ параллелограмма, начинающаяся из начальной точки векторов a и b очевидно есть сумма векторов a и b.

Определим операцию *умножения вектора на скаляр*. Пусть a — вектор, а α — вещественное число (скаляр). *Произведением вектора a на скаляр α* называется вектор, коллинеарный вектору a, длина которого равна $|\alpha| \cdot |a|$, а направление совпадает с направлением вектора a, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$. Произведение вектора a на скаляр α обозначается

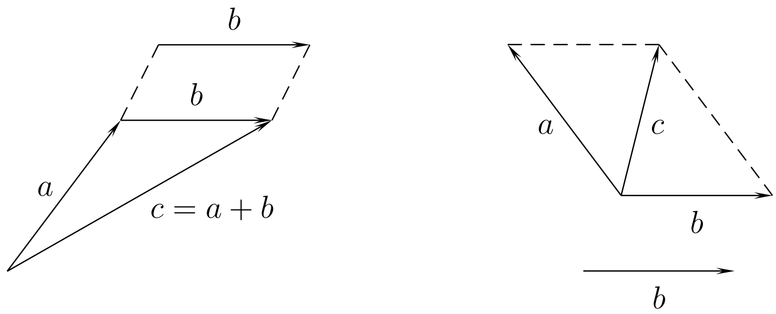

Рис. 6.4. Сумма векторов. Правило треугольника и правило параллелограмма.

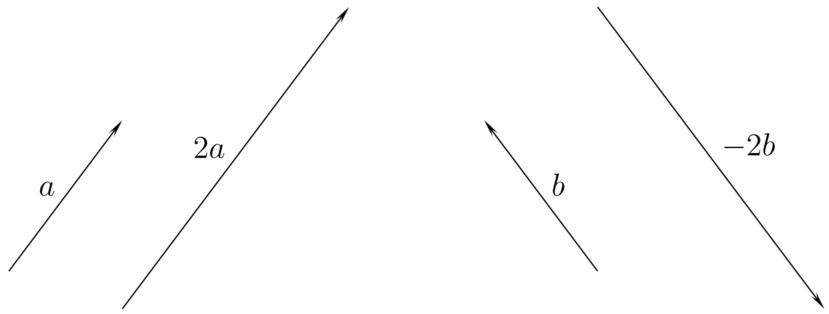

Рис. 6.5

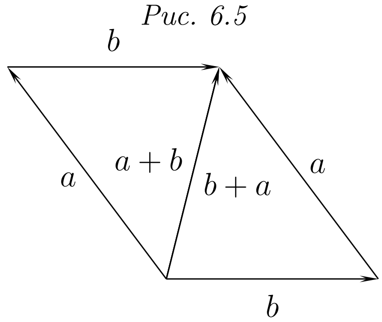

Рис. 6.6. Доказательство коммутативности сложения геометрических векторов

$\alpha \cdot a$ или просто αa. Если $a = o$ или $\alpha = 0$, то считают, что $\alpha a = o$. Иногда вектор a необходимо *разделить* на некоторое ненулевое вещественное число α. Под результатом такой операции, разумеется, понимается домножение вектора a на $1/\alpha$:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot a.$$

Операции сложение векторов и умножения вектора на скаляр называются *линейными операциями*. Рассмотрим некоторые свойства этих операций.

Утверждение 6.1 (Свойства линейных операций)**.** *Для произвольных векторов a, b, c и произвольных скаляров α, β справедливо*

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $a + o = a$
4. $a + (-a) = o$
5. $1a = a$
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Доказательство. Доказательства свойств 1, 2 понятно из рис. 6.7, 6.6. Остальные свойства очевидны. ∎

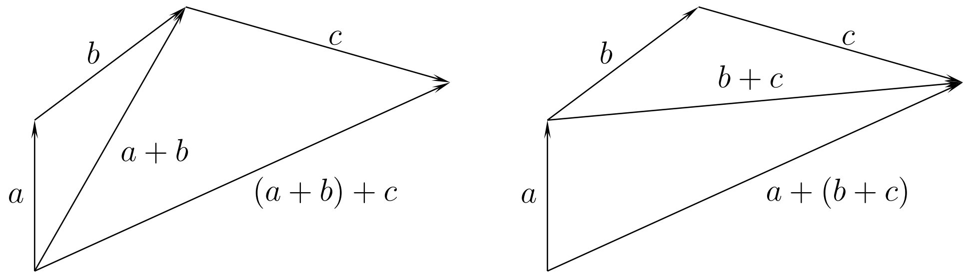

Рис. 6.7. Доказательство ассоциативности сложения геометрических векторов

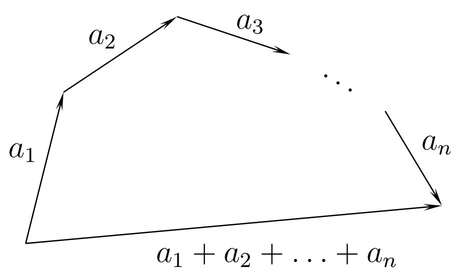

Рис. 6.8

Свойство 2 (ассоциативность) позволяет распространить правило сложения векторов на произвольное число слагаемых: чтобы найти сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, достаточно отложить вектор a_2 из конца вектора a_1, затем отложить вектор a_3 из конца вектора a_2 и т. д. вплоть до вектора a_n и затем соединить начало вектора a_1 с концом вектора a_n; см. рис. 6.8.

Разумеется, здесь можно было бы упомянуть и о других легко доказываемых свойствах линейных операций геометрических векторов, например, $(-1) \cdot a = -a$, $0 \cdot a = o$ и др. Почему мы выделили отдельно упомянутые выше 8 свойств, будет ясно из дальнейшего.

Введем операцию *вычитания векторов. Разностью* векторов a и b называется такой вектор c, что $c+b = a$. Непосредственно можно проверить, что вектор $c = a+(-b)$ удовлетворяет этому определению $(c + b = a + (-b) + b = a + o = a)$ и, следовательно, является разностью. Также легко видеть, что по векторам a и b их разность определяется единственным образом. Действительно, пусть векторы c и c' — оба удовлетворяют определению разности. Тогда $c + b = c' + b$. Прибавляя к обеим частям этого равенства вектор $-b$, получим $c = c'$.

Разность векторов a и b обозначается $a - b$. Итак,

$$a - b = a + (-b),$$

см. рис. 6.9. Если a и b отложены из одной начальной точки, то из рисунка видно, что $a - b$ можно изобразить как вектор, соединяющий конец вектора b с концом вектора a.

Часто удобно все векторы откладывать из одной точки $\mathcal{O}$, называемой в этом случае *полюсом*. Такие векторы называются *радиус-векторами*.

Если $\mathcal{A}$ — некоторая точка, то вектор $\overrightarrow{\mathcal{OA}}$ называется *радиус-вектором точки* $\mathcal{A}$. Очевидно, что если полюс фиксирован, то между множеством всех радиус-векторов и множеством всех точек (на плоскости или в пространстве) существует взаимно однозначное соответствие. Этот факт позволяет отождествлять радиус-векторы с соответствующими им точками.

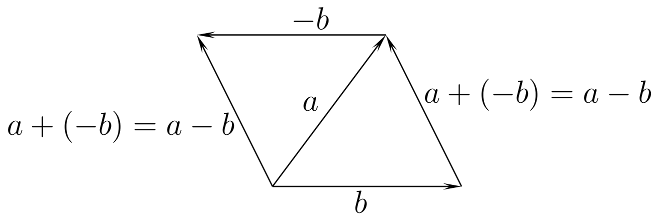

Рис. 6.9. Разность векторов

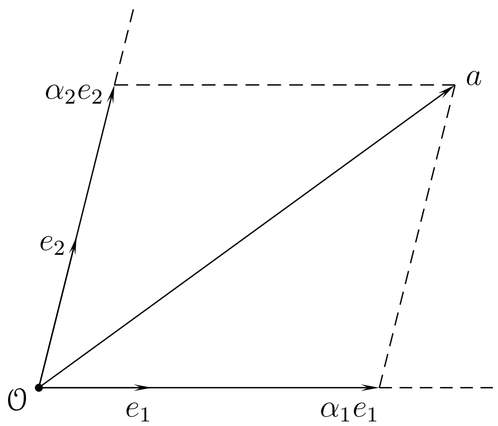

Рис. 6.10. Разложение вектора по базису на плоскости

6.1.2. Базисы и аффинные системы координат

Рассмотрим два некомпланарных вектора на плоскости. Будем говорить, что они образуют *базис* на плоскости.

Теорема 6.2. *Пусть e_1, e_2 образуют базис на плоскости. Тогда для любого вектора a на плоскости существуют, причем единственные, скаляры α_1 и α_2, такие, что*

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2. \tag{6.1}$$

Доказательство. Существование. Отложим векторы из одной точки $\mathcal{O}$, см. рис. 6.10. Через конец вектора a проведем прямую параллельно вектору e_2 до пересечения с прямой, на которой лежит e_1. Аналогично, через конец вектора a проведем прямую параллельно вектору e_1 до пересечения с прямой, на которой лежит e_2. Получаем, что $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ для некоторых чисел α_1, α_2.
Единственность. Предположим, что имеется два разложения:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,$$

откуда $(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 = o$. Если $\alpha_1 \neq \beta_1$, то

$$e_1 = -\frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} e_2,$$

т. е. векторы e_1 и e_2 коллинеарны, что невозможно, так как они образуют базис. К аналогичному выводу приходим, предположив, что $\alpha_2 \neq \beta_2$. Следовательно, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, т. е. разложение по базису единственно. ∎

Равенство (6.1) называется *разложением вектора a по базису* e_1, e_2, а скаляры α_1 и α_2 — *координатами вектора a в базисе* e_1, e_2.

Тот факт, что координаты вектора a в базисе e_1, e_2 суть α_1 и α_2, будем записывать следующим образом:

$$a(\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{или} \quad [a] = (\alpha_1, \alpha_2)$$

или (чтобы уточнить, в каком базисе заданы координаты)

$$[a]_{e_1,e_2} = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Теорема 6.3. *Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат: если $[a] = (\alpha_1, \alpha_2)$, $[b] = (\beta_1, \beta_2)$, то $[a + b] = (\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2)$. Координаты произведения вектора на число равны произведению координат на это число: если $[a] = (\alpha_1, \alpha_2)$, то $[\beta a] = (\beta\alpha_1,\ \beta\alpha_2)$.*

Доказательство. Найдем сумму векторов $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$. Имеем $a + b = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2$. Следовательно, $[a + b] = (\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2)$.

Умножим вектор $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2$ на скаляр β. Получаем $a = \beta\alpha_1 e_1 + \beta\alpha_2 e_2$. Следовательно, $[\beta a] = (\beta\alpha_1,\ \beta\alpha_2)$. ∎

Совокупность некоторой фиксированной точки $\mathcal{O}$ (полюса) и базиса e_1, e_2 на плоскости называется (*аффинной*) *системой координат*. При этом точка $\mathcal{O}$ называется *началом* системы координат, а прямые, проходящие через $\mathcal{O}$ параллельно базисным векторам, — ее *осями*. На каждой из осей задается *направление*, определяемое направлением соответствующего базисного вектора. Оси системы координат на плоскости традиционно называются *осью абсцисс* (или осью $\mathcal{O}x$) и *осью ординат* (или осью $\mathcal{O}y$).

Координатами точки $\mathcal{A}$ в некоторой системе координат $\mathcal{O}$, e_1, e_2 называются координаты ее радиус-вектора:

$$[\mathcal{A}] = [\,\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{A}}\,]$$

Имеем $\overrightarrow{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{A}} - \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{B}}$, поэтому *координаты вектора равны координатам его конца минус координаты начала.*

6.1.3. Ортонормированный базис и декартова система координат

Вектор длины 1 называется *единичным вектором.* Легко видеть, что $\dfrac{a}{|a|}$ есть единичный вектор, коллинеарный вектору a и сонаправленный с ним.

Углом между векторами $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{A}}$, $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{B}}$ называется величина угла $\mathcal{A}\mathcal{O}\mathcal{B}$. Говорят, что векторы a и b *ортогональны*, или *перпендикулярны*, есди угол между a и b равен $\pi/2$. Обозначение для ортогональных векторов: $a \perp b$. Считают, что нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Базис e_1, e_2 называется *ортогональным*, если векторы e_1 и e_2 ортогональны. Базис e_1, e_2 называется *ортонормированным*, если векторы e_1 и e_2 суть ортогональные единичные векторы. Если базис e_1, e_2 ортонормированный, то система координат $\mathcal{O}$, e_1, e_2 называется *прямоугольной*, или *декартовой* системой координат; см. рис. 6.11.

Рассмотрим три некомпланарных вектора e_1, e_2, e_3 в пространстве. Будем говорить, что они образуют *базис* в пространстве.

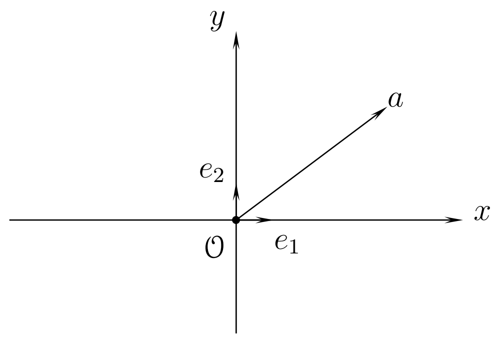

Рис. 6.11. Прямоугольная система координат на плоскости

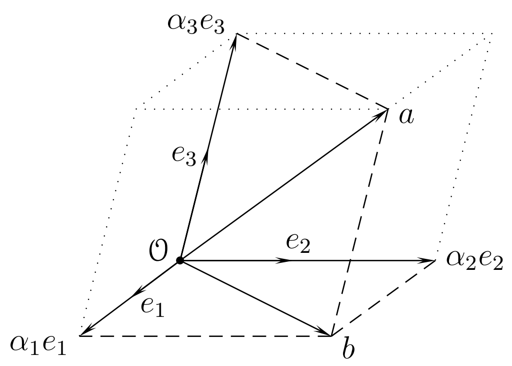

Рис. 6.12. Разложение вектора по базису в пространстве

Теорема 6.4. *Пусть векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис в пространстве. Тогда для любого вектора a найдутся, причем единственные, числа α_1, α_2 и α_3, такие, что*

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3. \tag{6.2}$$

Доказательство. Существование. Отложим векторы e_1, e_2, e_3, a из одной точки $\mathcal{O}$; см. рис. 6.12. Проведем через конец вектора a прямую, параллельную вектору e_3. Прямая пересечет плоскость, в которой лежат векторы e_1 и e_2, в некоторой точке. Пусть b — ее радиус-вектор. Так как векторы e_1 и e_2 образуют базис в этой плоскости, то по теореме 6.2 вектор b выражается через них, т. е. $b = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ для некоторых чисел α_1, α_2. Далее, проведем через конец вектора a плоскость параллельную векторам e_1 и e_2. Эта плоскость пересечет прямую, на которой лежит вектор e_3 в некоторой точке. Ее радиус-вектор, очевидно, коллинеарен вектору e_3 и поэтому равен $\alpha_3 e_3$ для некоторого α_3. Теперь имеем

$$a = b + \alpha_3 e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Единственность доказыватся аналогично доказательству единственности из теоремы 6.2 и вытекает из некопланарности базисных векторов. ∎

Представление (6.2) называется *разложением вектора a по базису* e_1, e_2, e_3. Числа α_1, α_2 и α_3 в равенстве $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ называются *координатами вектора a в базисе* e_1, e_2, e_3.

Для координат вектора a в базисе e_1, e_2, e_3 будем использовать следующее обозначение:

$$a(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{или} \quad [a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

или (когда нужно явно указать базис)

$$[a]_{e_1,e_2,e_3} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Совокупность точки $\mathcal{O}$ и базиса e_1, e_2, e_3 называется *(аффинной) системой координат.* В этом случае $\mathcal{O}$ называется *началом системы координат*, а прямые, проходящие через $\mathcal{O}$ параллельно базисным векторам, — ее *осями.* Оси системы координат в пространстве традиционно называются *осью абсцисс* (или осью $\mathcal{O}x$), *осью ординат* (или осью $\mathcal{O}y$), и *осью аппликат* (или осью $\mathcal{O}z$) соответственно. На осях выбирается направление согласно направлению базисных векторов. Плоскости, проходящие через оси координат, обозначаются $\mathcal{O}xy$, $\mathcal{O}xz$, $\mathcal{O}yz$.

Координатами точки $\mathcal{A}$ в некоторой системе координат $\mathcal{O}$, e_1, e_2, e_3 называются координаты ее радиус-вектора:

$$[\mathcal{A}] = [\,\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{A}}\,]$$

Как и для векторов на плоскости, доказывается следующее утверждение.

Теорема 6.5. *Если* $[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $[b] = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *то* $[a+b] = (\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \alpha_3+\beta_3)$ *и* $[\beta a] = (\beta\alpha_1,\ \beta\alpha_2,\ \beta\alpha_3)$.

Базис e_1, e_2, e_3 называется *ортогональным*, если $e_1 \perp e_2$, $e_1 \perp e_3$, $e_2 \perp e_3$. Ортогональный базис e_1, e_2, e_3 называется *ортонормированным*, если векторы e_1, e_2, e_3 имеют единичную длину. Если базис ортонормированный, то соответствующая система координат называется *прямоугольной* (или *декартовой*).

6.1.4. Деление отрезка в заданном отношении

Утверждение 6.6. *Пусть* r_1, r_2 *— радиус-векторы точек* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *соответственно (на плоскости или в пространстве). Для того, чтобы точка* $\mathcal{R}$ *с радиус-вектором* r *лежала на прямой* $\mathcal{AB}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое вещественное число* α, *что*

$$r = (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2.$$

По точке $\mathcal{R}$ *число* α *определяется единственным образом. Для того, чтобы точка* $\mathcal{R}$ *с радиус-вектором* r *лежала на отрезке* $[\mathcal{AB}]$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое вещественное число* α, *что*

$$r = (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2, \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

В последнем случае $\mathcal{R}$ *делит отрезок* $[\mathcal{AB}]$ *в отношении* $\alpha/(1-\alpha)$.

Доказательство. Точка $\mathcal{R}$ лежит на прямой $\mathcal{AB}$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathcal{AR}}$ коллинеарны, т. е.

$$\overrightarrow{\mathcal{AR}} = \alpha \cdot \overrightarrow{\mathcal{AB}}, \tag{6.3}$$

где α — некоторое вещественное число. Очевидно, что разным значениям α соответсвуют разные точки $\mathcal{R}$, получаемые по формуле (6.3). При этом $\mathcal{R}$ лежит на отрезке $[\mathcal{AB}]$ тогда и только тогда, когда $0 \le \alpha \le 1$. Равенство (6.3), очевидно, эквивалентно $r - r_1 = \alpha(r_2 - r_1)$, или, что равносильно, $r = (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2$.

Из (6.3) следует, что $\mathcal{R}$ делит отрезок $[\mathcal{AB}]$ в отношении

$$\frac{|\mathcal{AR}|}{|\mathcal{RB}|} = \frac{\alpha \cdot |\mathcal{AB}|}{(1-\alpha)\cdot|\mathcal{AB}|} = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

∎

6.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения

6.2.1. Скалярное произведение

Определим понятие угла между двумя векторами. Отложим их из одной точки, скажем $\mathcal{A}$. Получим векторы $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathcal{AC}}$. *Углом* ϑ между векторами $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathcal{AC}}$ называется $\angle\mathcal{BAC}$. Заметим, что $0 \le \vartheta \le \pi$. Если один из векторов нулевой, то угол не определен.

Скалярным (или *внутренним*) *произведением* векторов a и b называется число, обозначаемое (a, b), которое равно

$$(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\vartheta,$$

где ϑ — угол между a и b. Если один из векторов нулевой, то величина ϑ не определена, и тогда $(a, b) = 0$. Иногда скалярное произведение обозначается просто ab.

Теорема 6.7. *Для любых векторов a, b, c на плоскости или в пространстве и любого скаляра α справедливо*

1. $(a, b) = (b, a)$ *(симметричность),*
2. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$*,*
3. $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$*,*

4a. $(a, a) \ge 0$*,*

4b. $(a, a) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $a = o$*,*

5a. $(a, b) = 0$ *тогда и только тогда, когда a и b ортогональны,*

5b. $(a, b) > 0$ *тогда и только тогда, когда угол между a и b острый,*

5c. $(a, b) < 0$ *тогда и только тогда, когда угол между a и b тупой.*

Доказательство. Свойства 1, 3–5 очевидны.

Докажем свойство 2. Будем предполагать, что все три вектора расположены в одной плоскости. Доказательство легко модифицируется для случая векторов в пространстве. В левой части доказываемого равенства имеем $(a + b, c) = |a + b| \cdot |c| \cdot \cos\vartheta$, где ϑ — угол между $a + b$ и c. В правой части — $(a, c) + (b, c) = |a| \cdot |c| \cdot \cos\varphi + |b| \cdot |c| \cdot \cos\psi = (|a| \cos\varphi + |b| \cos\psi)|c|$, где φ — угол между a и c, а ψ — угол между b и c. Таким образом, обе части содержат одинаковый множитель $|c|$. Сравним оставшиеся множители. Из рис. 6.13, на котором углы φ и ψ изображены острыми, видно, что

$$|a| \cos\varphi + |b| \cos\psi = |a + b| \cos\vartheta$$

Аналогично рассматриваются случаи, когда один из углов, φ или ψ, тупой и когда оба угла тупые. ∎

Свойства 2 и 3 называются *свойствами линейности* скалярного произведения (по первому аргументу). Из свойства 1 (симметричность) следует также линейность по второму аргументу:

$$(a, b + c) = (a, b) + (a, c), \qquad (a, \alpha b) = \alpha(a, b).$$

Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис, тогда, легко видеть,

$$(e_1, e_1) = (e_2, e_2) = (e_3, e_3) = 1, \qquad (e_1, e_2) = (e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0. \tag{6.4}$$

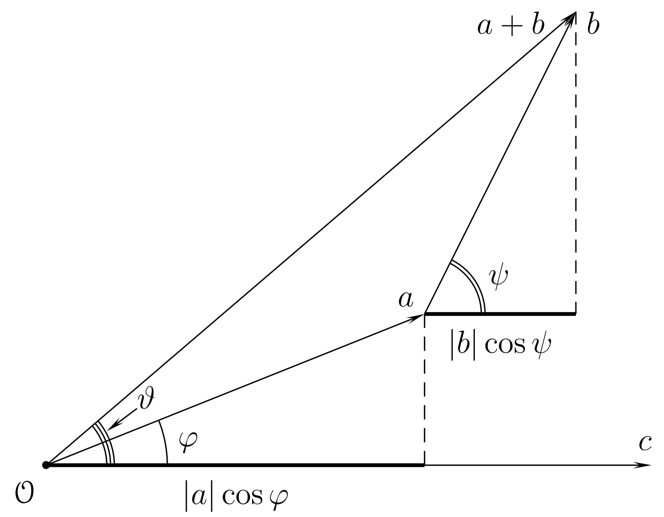

Рис. 6.13

Теорема 6.8. *Пусть e_1, e_2 — ортонормированный базис на плоскости и $[a] = (\alpha_1, \alpha_2)$, $[b] = (\beta_1, \beta_2)$, тогда*

$$(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2.$$

Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в пространстве и $[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $[b] = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, тогда

$$(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Доказательство. Имеем $(a, b) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)$, откуда, пользуясь свойствами линейности скалярного произведения и формулами (6.4), получаем

$$(a, b) = \alpha_1\beta_1(e_1, e_1) + \alpha_1\beta_2(e_1, e_2) + \alpha_2\beta_1(e_2, e_1) + \alpha_2\beta_2(e_2, e_2) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

Доказательство для случая векторов в пространстве аналогично. ∎

Следствие 6.9. *Пусть e_1, e_2 — ортонормированный базис на плоскости и $[a] = (\alpha_1, \alpha_2)$ тогда*

$$|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в пространстве и $[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ тогда

$$|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Следствие 6.10. *Пусть e_1, e_2 — ортонормированный базис на плоскости и $[A] = (\alpha_1, \alpha_2)$, $[B] = (\beta_1, \beta_2)$, тогда*

$$|AB| = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2}.$$

Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в пространстве и $[A] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $[B] = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, тогда

$$|AB| = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + (\alpha_3 - \beta_3)^2}.$$

Скалярное произведение удобно использовать для вычисления углов между векторами. Так как $(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\vartheta$, где ϑ — угол между a и b, то

$$\cos\vartheta = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|}.$$

Отсюда, в частности, получаем

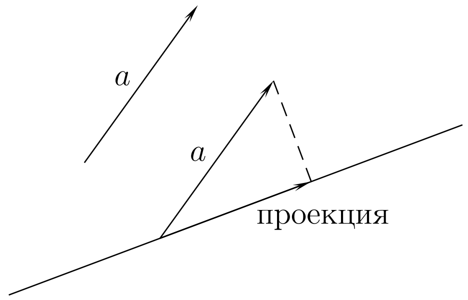

Рис. 6.14. Ортогональная проекция вектора на прямую

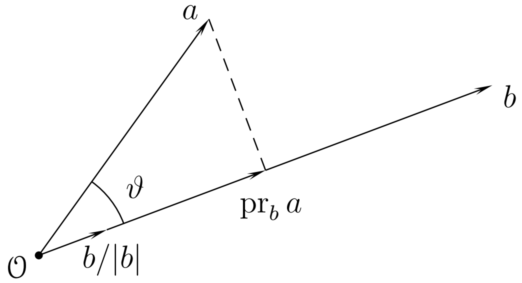

Рис. 6.15. Ортогональная проекция вектора на прямую

Следствие 6.11. *Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в пространстве, $[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $[b] = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и ϑ — угол между a и b, тогда*

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

Аналогичное утверждение про векторы на плоскости.

6.2.2. Ортогональная проекция

Ортогональной проекцией вектора a на прямую называется вектор, который можно получить следующим образом. Через начало и конец вектора a опускаются перпендикуляры на прямую. Точки пересечения этих перпендикуляров с прямой являются соответственно началом и концом проекции. Разумеется, вектор a можно сразу расположить так, чтобы его начало лежало на прямой. Тогда достаточно провести перпендикуляр лишь через его конец; см. рис. 6.14.

Пусть b — некоторый ненулевой вектор, параллельный прямой (*направляющий вектор прямой*). Тогда проекция вектора a на прямую, определяемую направлением b, равна (см. рис. 6.15)

$$\operatorname{pr}_v a = |a| \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{b}{|b|} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{b}{|b|^2} = \frac{(a,b)}{(b,b)} b.$$

Утверждение 6.12. *Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис, a — вектор, причем $[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, тогда*

$$\alpha_1 = (a, e_1), \quad \alpha_2 = (a, e_2), \quad \alpha_3 = (a, e_3).$$

Аналогичное утверждение для векторов на плоскости.

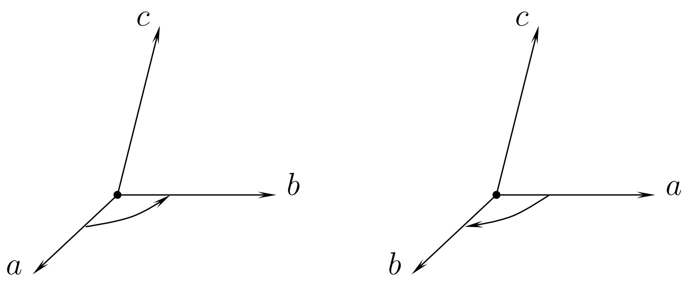

Рис. 6.16. Правая и левая тройки векторов a, b, c

Доказательство. В ортонормированном базисе координаты, очевидно, равны $\alpha_j = |a|\cos\varphi_j$, где φ_j — угол между векторами a и e_j, откуда $\alpha_j = (a, e_j)$ $(j = 1, 2, 3)$.

Можно дать другое доказательство. Имеем

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Домножая обе части этого равенства скалярно на e_j и пользуясь линейностью скалярного произведения, получаем

$$(a, e_j) = \alpha_1(e_1, e_j) + \alpha_2(e_2, e_j) + \alpha_3(e_3, e_j).$$

Так как $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(e_j, e_j) = 1$, то из трех слагаемых в правой части остается только одно: $(a, e_j) = \alpha_j$. ∎

Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис и, как и в доказательстве теоремы, φ_j — угол между векторами a и e_j $(j = 1, 2, 3)$. Величины $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$ называются *направляющими косинусами.*

Упражнение 6.13. Доказать, что направляющие косинусы удовлетворяют равенству

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1.$$

Аналогичное утверждение для векторов на плоскости.

6.2.3. Ориентация векторов в пространстве

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов a, b, c называется *правой*, если после того, как отложить все три вектора из одной точки, кратчайший поворот от a к b при наблюдении из конца вектора c происходит в направлении против часовой стрелки; см. рис. 6.16. В противном случае тройка некомпланарных векторов называется *левой.* Если две тройки векторов являются либо обе правыми, либо обе левыми, то говорят, что они имеют *одинаковую ориентацию.* Если одна из троек левая, а другая правая, то рассматриваемые тройки имеют *противоположную ориентацию.*

Легко видеть, что тройка некомпланарных векторов a, b, c имеет ту же ориентацию, что и тройки b, c, a, c, a, b и противоположную ориентацию с тройками b, a, c, a, c, b, c, b, a.

Базис e_1, e_2, e_3 называется *правым*, если тройка e_1, e_2, e_3 правая, и *левым* в противном случае.

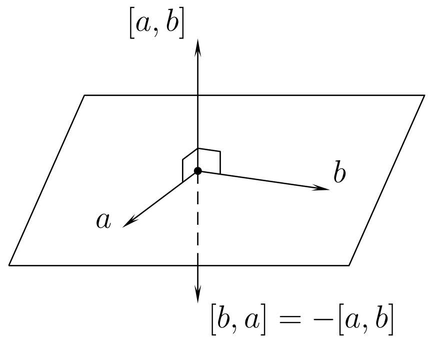

Рис. 6.17. Векторное произведение

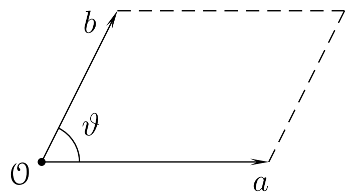

Рис. 6.18. Параллелограмм, построенный на векторах a, b

6.2.4. Векторное и смешанное произведения

Пусть a и b — неколлинеарные векторы в пространстве. Построим вектор c, такой, что

1. $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\vartheta$, где ϑ — угол между a и b;
2. $c \perp a$, $c \perp b$;
3. тройка a, b, c — правая.

Правила 1, 2 определяют вектор c с точностью до двух противоположных направлений. Правило 3 уточнет, какое из направлений следует выбрать. Если a и b коллинеарны, то пусть $c = o$. Вектор c называется *векторным* (или *внешним*) произведением векторов a и b; см. рис. 6.17. Обозначение: $c = [a, b]$. Иногда для векторного произведения используется обозначение $a \times b$.

Из определения сразу следует, что модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, если их отложить из одной точки; см. рис. 6.18.

Смешанным произведением трех векторов a, b, c в пространстве называется число, обозначаемое (a, b, c), равное

$$(a, b, c) = ([a, b], c).$$

Иногда смешанное произведение обозначается abc.

Теорема 6.14. *Пусть a, b, c — некомпланарные векторы в пространстве. Абсолютное значение их смешанного произведения равно объему параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c, если их отложить из одной точки.*

Доказательство. Объем параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c равен $V = Sh$, где S — площадь основания, h — высота; см. рис. 6.19. Основанием является параллелограмм, построенный на векторах a, b, поэтому $S = |[a, b]|$. Высоту можно представить как проекцию

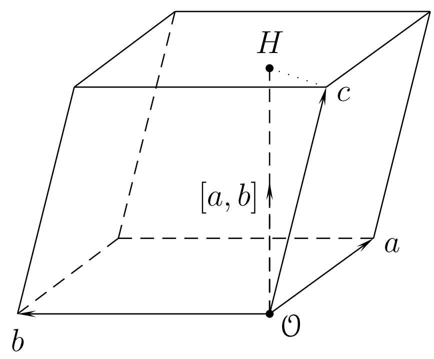

Рис. 6.19. Абсолютное значение смешанного произведения есть объем параллелепипеда, построенного на заданных векторах.

вектора c на прямую, перпендикулярную плоскости, в которой лежат векторы a и b. Эта прямая коллинеарна вектору $[a,b]$, поэтому $h = OH = |\mathrm{pr}_{[a,b]}\, a|$. Теперь имеем

$$V = S \cdot h = |[a,b]| \cdot OH = |[a,b]| \cdot |c| \cdot |\cos\vartheta| = |([a,b],\ c)|,$$

где ϑ — угол между векторами $[a,b]$ и c. ∎

Теорема 6.15 (Свойства смешанного произведения)**.** *Для любых векторов a, b, c, c' и любого скаляра α справедливо*

1. $(a,b,c) = (b,c,a) = (c,a,b) = -(a,c,b) = -(b,a,c) = -(c,b,a)$
2. $(a,b,c+c') = (a,b,c) + (a,b,c')$
3. $(a,b,\alpha c) = \alpha(a,b,c)$

4a. $(a,b,c) = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы a, b, c компланарны*

4b. $(a,b,c) > 0$ *тогда и только тогда, когда тройка a, b, c правая*

4c. $(a,b,c) < 0$ *тогда и только тогда, когда тройка a, b, c левая*

Доказательство. Докажем свойство 1. Оно очевидно, если векторы a, b, c компланарны. Пусть теперь векторы a, b, c не компланарны. Параллелепипед, построенный на этих векторах, не изменится, если векторы рассматривать в другом порядке. Следовательно, не изменится и абсолютная величина смешанного произведения, однако может измениться знак. Однако знак зависит от ориентации рассматриваемой тройки векторов.

Свойства 2, 3 следуют из соответсвующих свойств скалярного произведения:

$$(a,b,c+c') = ([a,b],c+c') = ([a,b],c) + ([a,b],c') = (a,b,c) + (a,b,c'),$$

$$(a,b,\alpha c) = ([a,b],\alpha c]) = \alpha([a,b],c) = \alpha(a,b,c).$$

Свойства 4a, 4b, 4c сразу вытекают из определения. ∎

Свойства 2 и 3 называются свойствами *линейности* смешанного произведения (по третьему аргументу). Из свойства 1 очевидным образом вытекает линейность по первому и второму аргументам.

Теорема 6.16 (Свойства векторного произведения)**.** *Для любых векторов a, b, c в пространстве и любого скаляра α*

1. $[a, b] = -[b, a]$ *(антикоммутативность)*
2. $[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$
3. $[\alpha a, b] = \alpha[a, b]$
4. $[a, b] = o$ *тогда и только тогда, когда a и b коллинеарны*

Доказательство. Свойства 1, 3–5 элементарным образом следуют из определения. Докажем свойство 2. Для этого рассмотрим вектор

$$d = [a + b, c] - [a, c] - [b, c]$$

и покажем, что он нулевой. Действительно, используя линейность скалярного и смешанного произведений, получаем

$$(d, d) = (d, [a + b, c] - [a, c] - [b, c]) = (d, a + b, c) - (d, a, c) - (d, b, c) = 0,$$

откуда $d = o$. ∎

6.2.5. Выражение векторного и смешанного произведений через координаты сомножителей

Пусть векторы e_1, e_2, e_3 образуют правый ортонормированный базис. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_2] = e_3, && [e_2, e_3] = e_1, && [e_3, e_1] = e_2,\\
&[e_2, e_1] = -e_3, && [e_3, e_2] = -e_1, && [e_1, e_3] = -e_2,\\
&[e_1, e_1] = o, && [e_2, e_2] = o, && [e_3, e_3] = o.
\end{aligned}$$

Теорема 6.17. *Пусть e_1, e_2, e_3 — правый ортонормированный базис, в котором $[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $[b] = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, тогда*

$$[a, b] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3.$$

Доказательство. Так как $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$, то

$$[a, b] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3] =$$

$$\begin{aligned}
&= [\alpha_1 e_1, \beta_1 e_1] + [\alpha_1 e_1, \beta_2 e_2] + [\alpha_1 e_1, \beta_3 e_3] +\\
&+ [\alpha_2 e_2, \beta_1 e_1] + [\alpha_2 e_2, \beta_2 e_2] + [\alpha_2 e_2, \beta_3 e_3] +\\
&+ [\alpha_3 e_3, \beta_1 e_1] + [\alpha_3 e_3, \beta_2 e_2] + [\alpha_3 e_3, \beta_3 e_3] =
\end{aligned}$$

$$= 0 + \alpha_1\beta_2 e_3 - \alpha_1\beta_3 e_2 - \alpha_2\beta_1 e_3 + 0 + \alpha_2\beta_3 e_1 + \alpha_3\beta_1 e_2 - \alpha_3\beta_2 e_1 + 0 =$$
$$= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3.$$

∎

Теорема 6.18. *Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве*

$$[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad [b] = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad [c] = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

тогда

$$(a, b, c) = (\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2) \cdot (e_1, e_2, e_3).$$

Если базис правый ортонормированный, то

$$(a, b, c) = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы для выражения скалярного произведения через координаты векторов. ∎

6.2.6. Определители второго и третьего порядка

Рассмотрим 4 числа α_1, α_2, β_1, β_2. Из них можно составить таблицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

называемую *матрицей второго порядка*. По этой матрице можно вычислить число $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, называемое *определителем*, или *детерминантом*, второго порядка. Определитель обозначается

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

Матрицей третьего порядка называется таблица

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Ее определителем называется число

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3.$$

Обратим внимание, что обе формулы: для определителя второго порядка и для определителя третьего порядка — представляют собой алгебраические суммы произведений элементов матриц, причем каждое произведение составлено из элементов матрицы, которые берутся из разных строк и разных столбцов. Для определения знака, с которым входят члены определителя третьего порядка удобно использовать следующие диаграммы:

Легко проверить, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Используя определители, можно компактно записать формулы для выражения векторного и смешанного произведений через координаты векторов.

Следствие 6.19. *Пусть e_1, e_2, e_3 — правый ортонормированный базис и*

$$[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad [b] = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

тогда

$$[a, b] = e_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие 6.20. *Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве и*

$$[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad [b] = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad [c] = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

тогда

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot (e_1, e_2, e_3).$$

В частности, если базис правый ортонормированный, то смешанное произведение равно определителю, составленному из координат векторов.

Следствие 6.21 (Геометрический смысл определителя третьего порядка)**.** *Абсолютная величина определителя, составленного из координат трех векторов в ортонормированном базисе, равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.*

Следствие 6.22 (Критерий компланарности векторов)**.** *Векторы a, b, c компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат (в любом базисе), равен нулю.*

Оказывается, аналогичные утверждения можно доказать и для определителей второго порядка.

Утверждение 6.23 (Геометрический смысл определителя второго порядка)**.** *Абсолютная величина определителя, составленного из координат двух векторов на плоскости в ортонормированном базисе, равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.*

Доказательство. Пусть e_1, e_2 — ортонормированный базис, в котором векторы a и b имеют координаты (α_1, α_2), (β_1, β_2) соответственно. Можно считать, что плоскость, в которой располагаются векторы, находится в пространстве и e_3 — единичный вектор, ортогональный этой плоскости. Тогда e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в пространстве. В нем векторы a и b имеют координаты $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$, $(\beta_1, \beta_2, 0)$ соответственно. Имеем

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = e_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах a, b, равна модулю этого векторного произведения, т. е. абсолютному значению определителя

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что можно дать простое «планиметрическое» доказательство, не использующее понятие векторного произведения и не выводящее за пределы плоскости, в которой расположены векторы a, b. ∎

Утверждение 6.24 (Критерий коллинеарности векторов)**.** *Векторы a, b на плоскости коллинеарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат (в любом базисе), равен нулю.*

Доказательство. Равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0,$$

очевидно, эквивалентно равенству

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

(случаи, когда в знаменателях стоят нули, рассматриваются отдельно), которое, в свою очередь, эквивалентно коллинеарности векторов $a(\alpha_1, \alpha_2)$, $b(\beta_1, \beta_2)$. ∎

Пример 6.25. Найдем векторное произведение $[a, b]$, если $a(1, 2, 3)$, $b(3, 4, 2)$ (в правом ортонормированном базисе)

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (2 \cdot 2 - 3 \cdot 4)e_1 - (1 \cdot 2 - 3 \cdot 3)e_2 + (1 \cdot 4 - 3 \cdot 2)e_3 = -8e_1 + 7e_2 - 2e_3.$$

Таким образом, координаты $[a, b]$ суть $(-8, 7, -2)$.

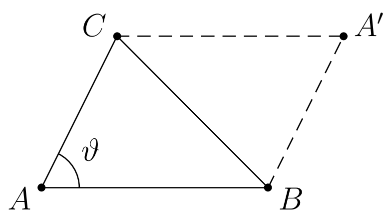

Рис. 6.20

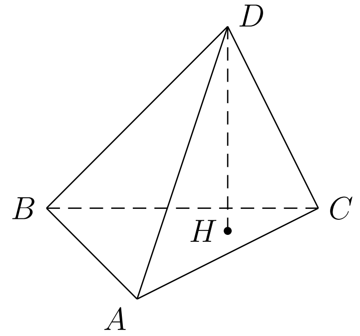

Рис. 6.21

Пример 6.26. Найдем площадь S треугольника ABC, если $A(0,1,2)$, $B(2,4,3)$, $C(-1,3,0)$ (в прямоугольной системе координат); см. рис. 6.20.

Треугольники ABC и $A'BC$ равны. Следовательно, площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABA'C$:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\vartheta = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|.$$

Так как $[\overrightarrow{AB}] = (2,3,1)$, $[\overrightarrow{AC}] = (-1,2,-2)$, то

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8e_1 + 3e_2 + 7e_3.$$

Таким образом, координаты произведения $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ суть $(-8,3,7)$. Его модуль равен $\sqrt{(-8)^2+3^2+7^2} = \sqrt{122}$. Итак, $S = \dfrac{\sqrt{122}}{2}$.

Пример 6.27. Найдем смешанное произведение векторов $a(1,2,3)$, $c(4,5,7)$, $b(-2,-3,-4)$ (базис правый ортонормированный)

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-4) + 2\cdot 7\cdot(-2) + 3\cdot 4\cdot(-3) - 3\cdot 5\cdot(-2) - 2\cdot 4\cdot(-4) - 1\cdot 7\cdot(-3) = -1.$$

Пример 6.28. Найдем объем V тетраэдра $ABCD$, если $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$, $C(0,2,1)$, $D(3,2,1)$ (система координат прямоугольная); см. рис. 6.21. Объем равен $V = \frac{1}{3}Sh$, где $S = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$ — площадь треугольника ABC, $h = DH = \left|\mathrm{pr}_{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}\overrightarrow{AD}\right|$ — высота тетраэдра. Следовательно,

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$$

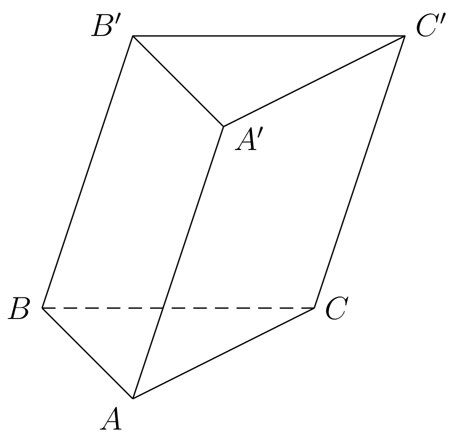

Рис. 6.22

Так как $\overrightarrow{AB}\ (0,1,2)$, $\overrightarrow{AC}\ (-1,1,0)$, $\overrightarrow{AD}\ (2,1,0)$, то

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Следовательно, $V = 1$.

Пример 6.29. Найдем объем V призмы $ABCA'B'C'$, если $A(1,1,1)$, $B(2,4,3)$, $C(3,-2,2)$, $A'(3,4,2)$ (система координат прямоугольная); см. рис. 6.22. Так как

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left| \left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AA'} \right) \right|,$$

$\overrightarrow{AB}\ (1,3,2)$, $\overrightarrow{AC}\ (2,-3,1)$, $\overrightarrow{AA'}\ (2,3,1)$, то

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 18.$$

Поэтому $V = 9$.

Выражение $[[a,b],c]$ называется *двойным векторным произведением.*

Утверждение 6.30. $[[a,b],c] = (a,c)b - (b,c)a.$

Доказательство. Простой, но длинный способ доказательства утверждения — ввести произвольный правый ортонормированный базис, перейти к координатам векторов и воспользоваться формулами для выражения скалярного и векторного произведений через координаты. Можно сократить такое доказательство, если выбрать базис специальным образом. Пусть e_1, e_2, e_3 — правый ортонормированный базис, такой, что e_1 коллинеарен вектору v, а e_2 компланарен векторам b и c. Имеем

$$a = \alpha_1 e_1, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \quad c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3.$$

Откуда $[a,b] = \alpha_1\beta_2 e_3$ и, следовательно,

$$[[a,b],c] = [\alpha_1\beta_2 e_3, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3] = \alpha_1\beta_2\gamma_1 e_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_2 e_1.$$

С другой стороны,

$$(a,c)b-(b,c)a=\alpha_1\gamma_1(\beta_1 e_1+\beta_2 e_2)-(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)\alpha_1 e_1=\alpha_1\beta_2\gamma_1 e_2-\alpha_1\beta_2\gamma_2 e_1.$$

Мы видим, что левая и правая части доказываемого равенства совпадают. ∎

Упражнение 6.31. Доказать, что

$$|[a,b]|^2=\begin{vmatrix}(a,a) & (a,b)\\ (b,a) & (b,b)\end{vmatrix}.$$

Упражнение 6.32. Доказать, что

$$(a,b,c)^2=\begin{vmatrix}(a,a) & (a,b) & (a,c)\\ (b,a) & (b,b) & (b,c)\\ (c,a) & (c,b) & (c,c)\end{vmatrix}.$$

Пример 6.33. Найдем объем параллелепипеда $\mathcal{ABCDA'B'C'D'}$, если $\mathcal{AB}=1$, $\mathcal{AD}=2$, $\mathcal{AA'}=\sqrt{3}$, $\angle\mathcal{BAD}=\pi/4$, $\angle\mathcal{A'AB}=\pi/6$, $\angle\mathcal{A'AD}=\pi/3$.

Обозначим $a=\overrightarrow{\mathcal{AB}}$, $v=\overrightarrow{\mathcal{AD}}$, $c=\overrightarrow{\mathcal{AA'}}$ Легко вычисляются попарные скалярные произведения этих векторов, так как известны их длины и углы между ними: $(a,a)=1$, $(b,b)=4$, $(c,c)=3$, $(a,b)=\sqrt{2}$, $(a,c)=3/2$, $(b,c)=\sqrt{3}$. Осюда, воспользовавшись результатом упражнения 6.32, находим квадрат смешанного произведения:

$$(a,b,c)^2=\begin{vmatrix}1 & \sqrt{2} & 3/2\\ \sqrt{2} & 4 & \sqrt{3}\\ 3/2 & \sqrt{3} & 3\end{vmatrix}=3\sqrt{6}-6.$$

Таким образом, объем параллелепипеда равен $\sqrt{3\sqrt{6}-6}$.