Глава 1

Множества и отображения

1.1. Множества

Когда мы даем определение какому-либо понятию, мы связываем его с другими понятиями. Те, в свою очередь, мы можем определить через другие понятия и т. д. Рано или поздно мы придем к таким первоначальным понятиям, которые уже нельзя или не нужно определять через другие. К таковым основным, неопределяемым понятиям в математике относится понятие *множества*.

Можно сказать, что *множество* — это совокупность некоторых объектов. Но это высказывание не следует принимать за точное определение, так как слово «совокупность» ничуть не лучше слова «множество»[1]. С тем же успехом мы могли бы вместо слова «совокупность» использовать другой термин: «класс», «семейство» и т. п. Более того, в некоторых ситуациях мы сами будем использовать эти слова как синонимы понятию «множество».

Примеры множеств: множество натуральных чисел, множество точек на заданной прямой, множество корней заданного уравнения, множество студентов некоторой академической группы и т. д. Можно рассматривать множества, элементами которых также являются множества. Например, элементами множества академических групп некоторого курса заданного факультета являются группы, которые в свою очередь состоят из студентов. Элементами множества всех отрезков на числовой прямой являются отрезки, элементами которых являются точки.

Если x принадлежит множеству A, т. е. x есть элемент множества A, то в этом случае пишут $x \in A$. Если x не принадлежит множеству A, т. е. x не является элементом множества A, то это обозначается $x \notin A$.

Два множества A и B равны, если они имеют одни и те же элементы. В этом случае пишут $A = B$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Оно обозначается $\emptyset$. Все пустые множества считаются равными между собой.

Конечные множества можно задать перечислив все его элементы, при этом список элементов, составляющих множество, заключают в фигурные скобки, например:

[1] Такие высказывания нужны лишь для того, чтобы только пояснить термин, предложив другие синонимы. Впрочем, понятие множества настолько просто, что дополнительными комментариями можно, наоборот, все затуманить. Сравните: «Множество — это совокупность некоторых элементов» и «Множество возникает путем объединения отдельных предметов (вещей) в одно целое. Оно есть множественность, мыслимая как единство» — Ф. Хаусдорф «Теория множеств». Какое «определение» вам больше нравится? Впрочем, сам Хаусдорф пишет, что его высказывания «определяют idem per idem или даже obscurum per obscurius» (определяют то же самое через то же самое или даже темное еще более темным). Если «idem per idem», разумеется, касается и первого «определения», то «obscurum per obscurius», по-видимому, относится в большей степени ко второму.

$\{\,1,\,2,\,3\,\}$ — это множество из трех чисел 1, 2, 3;
$\{\,$а, б, в$\,\}$ — множество из трех букв а, б, в.

Если список элементов слишком длинный или множество *бесконечное*, то некоторые элементы можно заменить точками. При этом должно быть указано или ясно из контекста, какие элементы пропущены, например:

$\{\,1,\,2,\,3,\,\ldots,\,10\,\}$ — множество натуральных чисел от 1 до 10;
$\{\,$а, б, в, $\ldots,$ я$\,\}$ — множество всех букв русского языка;
$\mathbb{N} = \{\,1,\,2,\,3,\,\ldots\,\}$ — множество натуральных чисел;
$\{\,2,\,4,\,6,\,\ldots\,\}$ — множество четных натуральных чисел;
$\mathbb{Z} = \{\,\ldots,-3,-2,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots\,\}$ — множество целых чисел.

Порядок, в котором перечисляются элементы множества не имеет значения. Например, множество $\{1,2,3\}$ можно задать любым из следующих шести способов:

$$\{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{2,1,3\} = \{2,3,1\} = \{3,1,2\} = \{3,2,1\}\,.$$

Кроме того, какой-нибудь элемент может быть повторен несколько раз, но это не означает, что этот элемент входит в это множество *такое количество раз*, т. е., например,

$$\{1,2,3\} = \{1,1,2,2,3,3\} = \{2,1,3,2,1\} \quad \text{и т. п.}$$

Множество можно задать определением его *характеристического свойства*. При этом элемент a принадлежит множеству тогда и только тогда, когда он удовлетворяет характеристическому свойству. Примеры характеристического свойства: быть корнем заданного уравнения, решением заданной системы уравнений, решением заданной системы неравенств и т. д.

Множество элементов, обладающих характеристическим свойством $P(a)$, обозначается $\{a:\ P(a)\}$. Например,

$$\bigl\{x:\ x\in\mathbb{R} \text{ и } x^3-2x+5=0\bigr\}$$

— множество вещественных корней уравнения $x^3-2x+5=0$. Здесь характеристическое свойство состоит из двух условий: $x\in\mathbb{R}$ и $x^3-2x+5=0$, которые должны выполниться одновременно. Альтернативный вариант задания того же множества:

$$\bigl\{x:\ x\in\mathbb{R},\, x^3-2x+5=0\bigr\}\,.$$

Для краткости можно записать также

$$\bigl\{x\in\mathbb{R}:\ x^3-2x+5=0\bigr\}$$

или, например,

$$\bigl\{x:\ x^3-2x+5=0\bigr\}\,,$$

если из контекста ясно, что речь идет именно о вещественных корнях. Другой пример:

$$\mathbb{Q} = \left\{x:\ x=\frac{p}{q},\, p\in\mathbb{Z},\, q\in\mathbb{N}\right\}$$

— множество рациональных чисел.

Важно, что характеристическое свойство должно однозначно определять, какие элементы входят в множество, а какие нет. Оно не должно быть «размытым». Пусть, например, множество A определяется как множество богатых людей. Понятно, что характеристическое

свойство в данном случаен задано очень туманно и нет никакого четкого принципа, по которому можно определить, принадлежит ли некоторый объект множеству A или нет. То, что характеристическое свойство должно четко разграничивать объекты, принадлежащие данному множеству от остальных объектов, не означает, что оно должно легко проверяться. Рассмотрим, например, множество наборов (x, y, z, n), где x, y, z, n — натуральные, $n \geq 3$ и $x^n + y^n = z^n$. Множество точно определено, но более трехста лет был открыт вопрос, пусто оно или нет. В 1995 г. Уайлз доказал, что это множество пустое (большая теорема Ферма).

При задании множеств могут возникать проблемы другого сорта. Рассмотрим известный *парадокс Рассела*. Пусть X — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента, т. е.

$$X = \{Y : \ Y \notin Y\}.$$

Зададим вопрос, принадлежит ли X множеству X. Если $X \in X$, то X не удовлетворяет характеристическому свойству, определяющему множество X, поэтому $X \notin X$. Противоречие. Если, наоборот, предположить, что $X \notin X$, то X удовлетворяет характеристическому свойству и поэтому $X \in X$. Снова противоречие. В каждом из мыслимых случаев получаем противоречие. Таким образом, множество X оказалось внутренне противоречивым[2].

Чтобы не возникало таких и подобных противоречий, вводят систему аксиом, регулирующих правила оперирования с множествами. Мы не будем здесь их рассматривать: это увело бы нас слишком далеко от основного предмета, а ограничимся так называемой «наивной» теорией множеств.

Под *мощностью* конечного множества понимают число элементов в нем. Мощность множества A обозначается $|A|$. Например, $|\emptyset| = 0$, $|\{1, 2, 3\}| = 3$. В дальнейшем мы определим понятие мощности и для бесконечных множеств.

Говорят, что множество B *включено* в множество A и записывают $B \subseteq A$ или $A \supseteq B$, если каждый элемент из B принадлежит также A. В этом случае B называют *подмножеством* множества A. Если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$, то, очевидно, $A = B$. Если $B \subseteq A$ и при этом $B \neq A$, то B называется *собственным подмножеством* множества A и говорят, что B *строго включено* в A. Это обозначается $B \subset A$ или $A \supset B$.

Не следует смешивать обозначения $\in$ и $\subseteq$. Например, $1 \in \mathbb{N}$, $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$, но не верно, что $1 \subseteq \mathbb{N}$, $\{1\} \in \mathbb{N}$. Особенно осторожным надо быть, когда некоторые элементы множества — сами множества. Пусть, например, $A = \{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$, $B = \{1\}$, $C = \{1, 2\}$. Тогда $B \subseteq A$, $C \in A$, но не верно утверждать, что $B \in A$, а $C \subseteq A$.

Рассмотрим некоторые операции над множествами. *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат A или B. Объединение обозначается $A \cup B$. *Пересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат как A, так и B. Пересечением обозначается $A \cap B$. *Разностью* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат как A, но не принадлежат B. Разность обозначается $A \setminus B$. Итак, по определению

$$A \cup B = \{a : \ a \in A \text{ или } a \in B\},$$

$$A \cap B = \{a : \ a \in A \text{ и } a \in B\},$$

$$A \setminus B = \{a : \ a \in A \text{ и } a \notin B\}.$$

[2]Популярный беллетризованный вариант этого парадокса формулируется следующим образом. Деревенский парикмахер бреет тех и только тех жителей деревни (мужского пола), которые не бреются сами. Бреется ли парикмахер сам?

Например,

$$\{1,2,3\} \cup \{1,2,4,5\} = \{1,2,3,4,5\},$$
$$\{1,2,3\} \cap \{1,2,4,5\} = \{1,2\},$$
$$\{1,2,3\} \setminus \{1,2,4,5\} = \{3\}.$$

Приведем некоторые свойства этих операций:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Операции объединения и пересечения можно определить и на произвольные (в том числе бесконечных) совокупности множеств. Под объединением множеств $A, B, C, \ldots$ понимается множество $A \cup B \cup C \cup \ldots$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат по крайней мере одному из этих множеств. Под пересечением множеств $A, B, C, \ldots$ понимается множество $A \cap B \cap C \cap \ldots$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из этих множеств.

Пусть A — некоторое множество. Рассмотрим его *булеан*, т. е. множество всех его подмножеств. Булеан множества A обозначается 2^A. Пусть, например, $A = \{1,2,3\}$, тогда $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ и $\left|2^A\right| = 8$. Докажем, что для любого конечного множества A

$$|2^A| = 2^{|A|}, \tag{1.1}$$

что объясняет целесообразность обозначения 2^A. Действительно, каждый элемент множества A может принадлежать или не принадлежать некоторому подмножеству, причем элемент включается или не включается в подмножество не зависимо, входят или нет в него другие элементы. Итак, для каждого элемента множества A есть 2 варианта. Всего имеем

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{|A| \text{ раз}} = 2^{|A|}$$

вариантов скомпоновать подмножество.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех упорядоченных[3] пар[4] (x, y), таких, что $x \in A$, $y \in B$. Например, если $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, то $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$.

Аналогично вводится декартово произведение n множеств. Декартовым произведением $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество всех упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, таких, что $a_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. *Декартовой n-й степенью* A^n множества A называется

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}.$$

Для конечных множеств A и B

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

[3] Упорядоченных в том смысле, что имеет значение, какой элемент пары первый, а какой — второй. Таким образом, $(x, y) = (x', y')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ и $y = y'$. Например, пары $(1,2)$ и $(2,1)$ раличны.

[4] Стремясь не вводить новых сущностей, мы можем определить пару (x, y), как множество $\{x, \{x, y\}\}$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

Контрольные вопросы

1. Сколько элементов в множестве $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$? 4.
2. Сколько элементов в множестве $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$? 3.
3. Чему равна мощность множества $2^{\emptyset}$? 1.
4. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{3, 4\}$; $A \setminus B = \{1, 2\}$.

1.2. Отображения

Если каждому элементу множества A по некоторому определенному правилу ставится в соответствие единственный элемент из множества B называется *отображением* или *функцией* множества A в множество B. Эти слова лишь поясняют понятие отображения, но не могут служить его определением. Понятие отображения, как и понятие множества, также является неопределяемым[5]. Тот факт, что отображение φ действует из множества A в множество B, обозначают

$$\varphi : \ A \to B.$$

Если отображение φ элементу x из A ставит в соответствие элемент y из B, то y называется *образом* элемента x и обозначается φx или $\varphi(x)$. Также пишут

$$x \xrightarrow{\varphi} y.$$

При этом x называется *прообразом* элемента x. У произвольного y из B может не существовать прообраза, а может быть более одного. Если $A = B$, то отображение называется *преобразованием*.

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим преобразование $\varphi : A \to A$, такое, что $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 3$, $\varphi(3) = 3$. Преобразования конечных множеств удобнее записывать в виде таблицы, состоящей из двух строк. В первой строке записываются все элементы множества. Во второй строке записываются их образы. Для нашего примера:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Элемент 1 не имеет прообраза. У 2 один проообраз: 1. У 3 два прообраза: 2 и 3.

Функция $\sin x$ есть отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. У каждого элемента на отрезке $[-1, 1]$ бесконечно много прообразов. У чисел вне этого отрезка нет ни одного прообраза. Понятно, что данную функцию можно было рассматривать как отображение из $\mathbb{R}$ в любое числовое множество, содержащее отрезок $[-1, 1]$.

Отображение $\varphi : A \to B$ называется *инъективным* или просто *инъекцией*, если образы любых двух отличных друг от друга элементов различны, т. е. для любых x, y из A, таких, что $x \neq y$, выполнено $\varphi x \neq \varphi y$.

Отображение φ называется *сюръективным* или просто *сюръекцией*, если для произвольного элемента из B найдется по крайней мере один прообраз, т. е. для любого y из B найдется

[5]Впрочем, понятие «отображение» также можно определить через понятие «множество»: отображением назовем множество пар вида (x, y) для каждого x из A и некоторых y из B.

такой x из A, что $\varphi x = y$. Сюръекцию также называют *отображением «на»*. В частности, желая подчеркнуть, что φ — сюръекция, говорят «отображение множества A *на* множество B», а не «*в* множество B».

Отображение φ называется *биективным* (*биекцией*) или *взаимно однозначным*, если оно одновременно и инъективно, и сюръективно. Как легко видеть, это условие эквивалентно тому, что любой элемент из B имеет ровно один прообраз.

Множества A и B называются *равномощными* или *эквивалентными*, если существует биекция $A \to B$.

Упражнение 1.1. Докажите, что для существования инъекции $A \to B$ необходимо и достаточно существование сюръекции $B \to A$.

Заметим, что если существуют инъекция $A \to B$ и сюръекция $A \to B$, то существует и биекция $A \to B$. Это интуитивно ясное утверждение, между тем, имеет не совсем простое доказательство.

Лемма 1.2. *Если $A_2 \subset A_1 \subset A$ и $A \sim A_2$, то $A \sim A_1 \sim A_2$.*

Доказательство. Пусть при биекции A на A_2 множество A_1 переходит в A_3, A_2 — в A_4, A_3 — в A_5 и т. д. Тогда

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

Обозначим $C = A \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots$ Тогда

$$A = C \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots$$

$$A_1 = C \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots$$

Ввиду

$$(A \setminus A_1) \sim (A_2 \setminus A_3) \sim (A_4 \setminus A_5) \sim \dots$$

имеем эквивалентность

$$(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots \sim (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup (A_6 \setminus A_7) \cup \dots$$

Если теперь каждому элементу множества C поставим в соответствие его самого, то получим биекцию A на A_1, т. е. $A \sim A_1 \sim A_2$ ∎

Теперь мы можем доказать следующее.

Теорема 1.3 (Бернштейн)**.** *Если существуют инъекция $A \to B$ и сюръекция $A \to B$, то существует и биекция $A \to B$*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что A эквивалентно некоторому подмножеству B_1 множества B, а B эквивалентно некоторому подмножеству A_1 множества A. Биекция B на A_1 отображает B_1 в некоторое подмножество A_2 множества A_1. Имеем $A_2 \subset A_1 \subset A$ и $A \sim B_1 \sim A_2$. Из леммы получаем $A \sim A_1 \sim B$. ∎

Пусть множества A и B конечны. Легко видеть, что тогда

- для существования инъекции $A \to B$ необходимо и достаточно, чтобы $|A| \leq |B|$;
- для существования сюръекции $A \to B$ необходимо и достаточно, чтобы $|A| \geq |B|$;
- для существования биекции $A \to B$ необходимо и достаточно, чтобы $|A| = |B|$.

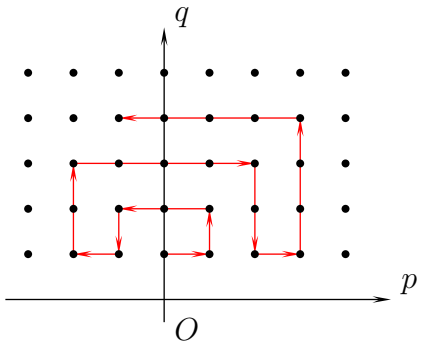

Рис. 1.1

Принимая во внимание эти утверждения, дадим следующие определения. Для произвольных множеств A и B (в том числе бесконечных) будем говорить, что мощность A меньше или равна мощности B, и записывать $|A| \leq |B|$, если существует инъекция $A \to B$. Будем говорить, что мощность A больше или равна мощности B, и записывать $|A| \geq |B|$, если существует сюръекция $A \to B$. И наконец, будем говорить, что мощности множеств A и B равны (множества A и B *равномощны* или *эквивалентны*), и записывать $|A| = |B|$, если $|A| \leq |B|$ и $|A| \geq |B|$. По теореме 1.3 последнее равносильно существованию биекции $A \to B$.

Докажем теперь, что $|\mathbb{Z}| = |2\mathbb{Z}|$, где $2\mathbb{Z}$ — множество четных целых чисел. Действительно, биекция $\varphi : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ задается, например, формулой $\varphi(x) = 2x$. Легко видеть, что любое четное число имеет при этом отображении единственный прообраз. Также нетрудно установить равномощность множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & -2 & -1 & & 0 & & 1 & 2 & \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \ldots & 5 & 3 & & 1 & & 2 & 4 & \ldots \end{array}$$

В первой строке приведен фрагмент ряда целых чисел. Каждому целому числу x поставлено в соответствие натуральное $\psi(x)$, написанное снизу.

Упражнение 1.4. Привести явную формулу для отображения $\psi(x)$.

Для построения биективного отображения $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ рассмотрим кривую, начальный фрагмент которой изображен на рисунке 1.1, а дальнейшее поведение легко угадывается. Кривая будет заметать все точки с координатами (p, q), где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Каждой такой точке поставим в соответствие рациональное число $\dfrac{p}{q}$. Это (вспомогательное) отображение будет сюръективным, но не будет инъективным: например, точкам $(2, 1)$ и $(4, 2)$ будет соответствовать одно и то же число $\dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2}$. Будем двигаться по кривой по направлению, указанному стрелкой, и каждой встретившейся точке (p, q) присваивать порядковый номер $\varphi(p, q)$: $\varphi(0, 1) = 1$, $\varphi(1, 1) = 2$, $\varphi(1, 2) = 3$, $\varphi(0, 2) = 4$, $\varphi(-1, 1) = 5$ и т. д.

Упражнение 1.5. Привести явную формулу для $\varphi(p, q)$.

Для построения биекции $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ осталось лишь чуть-чуть скорректировать отображение φ: при обходе кривой будем нумеровать лишь точки, для которых $\text{НОД}(p, q) = 1$, оставляя без номера все остальные.

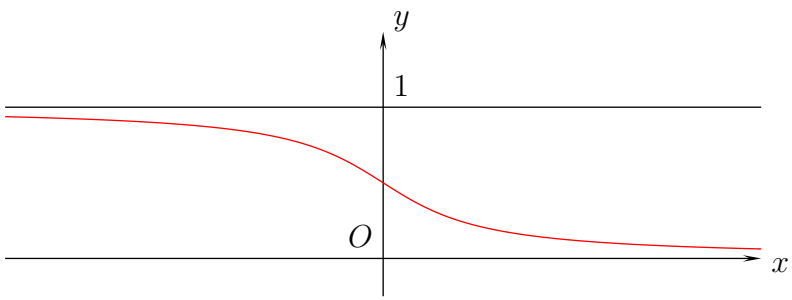

Рис. 1.2

Покажем, что множество $\mathbb{R}$ равномощно множеству точек произвольно выбранного на числовой прямой интервала (a, b), где $a \neq b$. Действительно, равномощность множеств $\mathbb{R}$ и $(0, 1)$ устанавливается, например, взаимно однозначным отображением $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arcctg} x$, а равномощность множеств $(0, 1)$ и (a, b) (а так же $[0, 1]$ и $[a, b]$) — биекцией $\psi(x) = a + (b - a)x$ (см. рис. 1.2). Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — строго монотонные и, следовательно, как известно из математического анализа, — взаимно однозначные.

Упражнение 1.6. Построить биекцию $[0, 1] \to (0, 1)$.

Подведем итог. Мы рассмотрели несколько бесконечных множеств. Оказалось, что $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ и $|\mathbb{R}| = |(a, b)|$, однако пока не решен вопрос "$|\mathbb{N}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{R}|$". Так как $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, то, конечно, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$. Скоро мы увидим, что биекции $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ не существует и, таким образом, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Множества, равномощные множеству натуральных чисел называются *счетными*, или множествами мощности $\aleph_0$ (читается 'алеф-0'). Множества, равномощные множеству действительных чисел называются *континуальными* (мощности континуума), или множествами мощности $\aleph_1$ (читается 'алеф-1').

1.3. Свойства счетных множеств

Теорема 1.7. *Любое бесконечное множество A содержит счетное подмножество B.*

Доказательство. Действительно, выберем из множества A произвольный элемент a_1, так как A бесконечно, то мы можем в A выбрать другой элемент $a_2 \neq a_1$, далее выбираем в A элемент a_3, отличный от a_1 и a_2 и т. д. Пусть $B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Очевидно, B — счетно. ∎

Теорема 1.8. *Всякое бесконечное подмножество B счетного множества A само счетно.*

Доказательство. Так как A счетно, то мы можем считать, что $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Найдем наименьший индекс i_1 (номер в ряду элементов), такой, что $a_{i_1} \in B$, далее выберем наименьший индекс i_2, отличный от i_1, для которого $a_{i_2} \in B$ и т. д. Таким образом, $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots\}$. Очевидно, B — счетно. ∎

Теорема 1.9. *Объединение конечного или счетного множества счетных множеств — счетно.*

Доказательство. Докажем утверждение для случая счетного множества счетных множеств. Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\} \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\} \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

— семейство счетных множеств. Для установления биекции $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \to \mathbb{N}$ необходимо предложить некоторое правило обхода элементов этих множеств, например:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & \to & a_{12} & & a_{13} & \to & a_{14} & \ldots \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\ a_{21} & \leftarrow & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \ldots \\ \downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & \\ a_{31} & \to & a_{32} & \to & a_{33} & & a_{34} & \ldots \\ & & & & & & \downarrow & \\ a_{31} & \leftarrow & a_{32} & \leftarrow & a_{33} & \leftarrow & a_{44} & \ldots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Следуя по стрелке, мы присваиваем элементам множеств A_i порядковые номера и тем самым строим отображение в $\mathbb{N}$. Элементы, встретившиеся неоднократно, конечно, пропускаются (это возможно, так как множества A_i не обязаны не пересекаться). ∎

1.4. Теорема Кантора

Для произвольного конечного множества A из (1.1) следует неравенство $|A| < \left|2^A\right|$. Оказывается, это неравенство справедливо и для произвольного *бесконечного* множества.

Теорема 1.10 (Кантор)**.** *Для произвольного множества A*

$$|A| < \left|2^A\right|.$$

Доказательство. Неравенство $|A| \leq \left|2^A\right|$ устанавливается сюръекцией $\varphi x = \{x\}$.

Чтобы доказать, что $|A| \neq \left|2^A\right|$, покажем, что допущение о существовании биекции $\psi : A \leq 2^A$ приводит к противоречию. Действительно, пусть ψ — биекция из A в 2^A. Рассмотрим множество

$$I = \{x \in A \mid x \notin \psi x\} \tag{1.2}$$

(множество I содержит те и только те элементы, которые не содержатся в своем образе). Так как ψ — биективное отображение, то для любого элемента из 2^A найдется прообраз в A. Пусть для $I \in 2^A$ таким прообразом будет некоторый элемент i: $\psi i = I$. Теперь попробуем решить вопрос '$i \overset{?}{\in} I$'.

1) Если $i \in I$, тогда по (1.2) $i \notin \psi i$. Однако $\psi i = I$, т.е. $i \notin I$.

2) Пусть $i \notin I$, тогда по (1.2) получаем $i \in \psi i$, т.е. $i \in I$.

Оба раза мы приходим к противоречию, следовательно, не верно наше предположение о существовании биекции ψ. ∎

1.5. Несчетность множества действительных чисел

Основная задача данного раздела — доказать, что $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Теорема 1.11 (Несчетность множества $\mathbb{R}$)**.** $\left|2^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$.

Доказательство. Сперва установим равномощность множеств $2^{\mathbb{N}}$ и $[0,1]$. Пусть[6] для любого $A \in 2^{\mathbb{N}}$

$$\varphi(A) = (0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots)_2, \text{ где } \alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in A, \\ 1, & \text{если } i \notin A \end{cases}.$$

В частности, $\varphi(\emptyset) = 0)$, $\varphi(\mathbb{N}) = 1)$. Очевидно, что φ — сюръекция, однако, следующие примеры:

$$\varphi(\{1,3\}) = (0, 101(0))_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8},$$
$$\varphi(\{1,4,5,6,\ldots\}) = (0, 100(1))_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

— показывают, что φ не является инъекцией: двум разным подмножествам множества натуральных чисел соответствует одно и то же число, или, что эквивалентно, существует $\alpha \in [0,1]$, обладающее двумя прообразами. Это возможно, если в двоичной системе счисления α представимо как бесконечная дробь с периодом (1) или (0). Легко видеть, что множество N таких чисел счетно: оно есть объединение счетного числа конечных множеств, состоящих из чисел, период (1) которых начинается с первого, второго и т. д. места после запятой. Счетным является также множество M прообразов всех чисел из N ($M = \left\{x \in 2^{\mathbb{N}} : \varphi(x) \in N\right\}$). Пусть ψ — некоторая биекция из M в N. Скорректируем теперь отображение φ. Для любого $A \in 2^{\mathbb{N}}$ положим

$$\theta(A) = \begin{cases} \psi(A), & \text{если } A \in M, \\ \varphi(A), & \text{если } A \notin M. \end{cases}$$

Легко видеть, что θ — биекция из $2^{\mathbb{N}}$ в $[0,1]$. Так как $|[0,1]| = |\mathbb{R}|$, то $\left|2^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$. ∎

Теперь из теоремы Кантора получаем

Утверждение 1.12. $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

[6] Через

$$(0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots)_2 = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{8} + \ldots + \frac{\alpha_i}{2^i} + \ldots$$

мы обозначили представление действительного числа в двоичной системе счисления.