## I. Линейные векторные пространства..

**Следствия из аксиом .**

1. Единственность нулевого элемента: $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$.
2. Единственность противоположного элемента:$x_1 = x_1 + x + x_2 = x_2$.
3. $\forall\, x \in V \quad 0 \cdot x = \theta: \quad 1 \cdot x = (1+0) \cdot x = x + 0 \cdot x$.
4. $\forall\, x \in V \quad -1 \cdot x = -x: \quad 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = x + (-1) \cdot x$.
5. $\forall\, \alpha \in P \quad \alpha \cdot \theta = \theta: \quad \alpha \cdot \theta = \alpha \cdot (x + (-x)) = x \cdot (1 + (-1)) = 0 \cdot x$.
6. $\alpha \cdot x = \theta \to \alpha = 0$ или $x = \theta$.

Далее нулевой элемент будем обозначать символом $0$.

***Определение.*** Выражение $a_1x_1 + .. + a_kx_k$ называется линейной комбинацией векторов $a_1, .., a_k$.

***Определение.*** Множество всех линейных комбинаций векторов системы $A$ называется линейной оболочкой. Обозначение: $L(A)$.

Говорят, что вектор $b$ линейно выражается через векторы $a_1, .., a_k$, если $b \in L(a_1, .., a_k)$.

***Определение.*** Система векторов $a_1, ..a_k$ называется линейно независимой , если равенство $a_1x_1 + .. + a_kx_k = 0$ возможно только при $x_1 = .. = x_k = 0$.

***Утверждение 1.*** Система векторов $a_1, ..a_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из ее векторов является линейной комбинацией остальных.

***Утверждение 2.*** Подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

***Утверждение 3.*** Если система $A$ линейно независима, а система $A \cup \{b\}$ линейно зависима, то $b \in L(A)$.

***Определение.*** Пусть $A, B$ - две системы векторов. Будем говорить, что $A$ линейно выражается через $B$, если каждый вектор из $A$ линейно выражается через векторы системы $B$. Обозначение: $A \prec B$.

Легко проверить, что $\{A \prec B\}\ \&\ \{B \prec C\} \to A \prec C$.

***Определение.*** Системы $A$ и $B$ называются эквивалентными, если $A \prec B\ \&\ B \prec A$.

***Утверждение 4.*** Если $A = \{a_1, .., a_n\} \prec B = \{b_1, .., b_m\}$ и $A$ - линейно независима, то $n \le m$.

***Доказательство.*** Запишем условие линейной выразимости в виде матричного равенства $(a_1...a_n) = (b_1....b_m)P$, где $P(mxn)$ - числовая матрица. Предположим, что $n > m$ , тогда существует ненулевое решение $x^0$ уравнения $Px = 0$. Далее получаем

$$(a_1...a_n)x^0 = (b_1....b_m)Px^0 = 0,$$

то есть , система $A$ линейно зависима вопреки условию.

***Следствие 4.1.*** Эквивалентные линейно независимые системы векторов содержат одинаковое число векторов.

***Следствие 4.2.*** Любые $n + 1$ векторов из линейной оболочки $n$ векторов линейно зависимы.

***Определение.*** Базой системы векторов $A$ называется эквивалентная ей линейно независимая подсистема. Количество векторов в базе называется рангом системы. Обозначение: $\mathrm{rg}\, A$.

***Утверждение 5.*** Ранги эквивалентных систем векторов равны.

***Определение.*** Пространство, в котором для любого натурального числа $n$ существует система векторов ранга $n$, называется бесконечномерным. Если пространство содержит систему ранга $n$, но любая система из $n + 1$ векторов линейно зависима, то пространство называется $n$ - мерным( и конечномерным).

Мы будем рассматривать лишь конечномерные пространства.

***Определение.*** Базисом $n$ - мерного пространства называется линейно независимая система векторов ранга $n$.

***Пример 1.*** Базисом $P^n$ является, например, система $e_1, ..., e_n$ , где $e_i$ распостраненное обозначение вектора, у которого $i$ - ая компонента равна 1, а остальные равны нулю.

***Определение.*** Система $A = \{a_1, ..., a_m\} \subset V$ называется порождающей, если $V = L(A)$. Если, кроме этого, $V$ не содержит порождающих систем из $(m-1)$- го векторов, то $A$ называется минимальной порождающей системой.

***Утверждение 6.*** Линейно независимая порождающая система является базисом.

***Утверждение 7.*** Минимальная порождающая система является базисом.

***Доказательство.*** Минимальность влечет линейную независимость.

***Утверждение 8.*** Всякий вектор пространства можно единственным способом представить в виде линейной комбинации векторов базиса.

***Утверждение 9.*** Всякую линейно независимую систему $A = \{a_1, ..., a_m\}$, не являющуюся базисом, можно дополнить до базиса пространства.

***Доказательство.*** Если $A$ - не базис, то найдется вектор $b^1$, который не выражается через $A$. Система $A^1 = A \cup \{b^1\}$ - линейно независима, $\mathrm{rg} A^1 = \mathrm{rg} A + 1$. Если $A^1$ не базис, то аналогично можно найти линейно независимую систему $A^2$, содержащую $A^1$, причем $rgA^2 = rgA^1+1$ и т.д. пока не получим систему ранга $n$.

***Определение.*** Коэффициенты разложения вектора по базису , называются координатами вектора в этом базисе.

Установим связь между координатами вектора в разных базисах. Пусть $x_e$- столбец координат вектора в базисе $e_1, ..., e_n$ , $x_f$- столбец координат вектора в базисе $f_1, ..., f_n$ , $S_{ef}$- матрица, j-ый столбец которой состоит из координат вектора $f_j$ базисе $e_1, ..., e_n$ . Тогда $x_e = S_{ef}x_f$. $S_{ef}$ называется матрицей перехода от базиса к базису.

**Изоморфизм линейных пространств.**

***Определение.*** Взаимно-однозначное отображение $\varphi$ линейного пространства $V$ в линейное пространство $W$, заданное над тем же числовым полем $P$, называется изоморфизмом , а сами пространства изоморфными, если $\forall x, y \in V, \ \forall\lambda \in \ P \ \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.

***Утверждение 10.*** Линейное пространство $V$ размерности $n$ над полем $P$ изоморфно арифметическому пространству $P^n$.

Рассмотрим произвольную матрицу $A(mxn)$, столбцы $a_1, ..., a_n$ которой являются векторами пространства $P^n$.

***Утверждение 11.*** $\text{rg}\, A = \text{rg}\{a_1, ..., a_n\}$

***Доказательство.*** Для упрощения обозначений, считаем, что минор наибольшего порядка, расположен в левом верхнем углу матрицы $A$. Величину минора обозначим $d$, кроме того, положим $k = \text{rg}\, A$.

Пусть $S = \{a_1, .., a_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$. Так как $\det(a_1, .., a_k, e_{k+1}, ..., e_n) = d \neq 0$, то система уравнений $a_1x_1 + ... + a_kx_k + e_{k+1}x_{k+1} + ... + e_nx_n = 0$ имеет лишь нулевое решение, следовательно, $S$ линейно независима, значит, линейно независима ее подсистема $a_1, ..., a_k$.

Система $a_1x_1+...+a_kx_k+e_{k+1}x_{k+1}+...+e_nx_n = a_j$ для всякого $j > k$ имеет решение $(x_1^0, ..., x_n^0)$, причем при $i > k \ \ x_i^0 = \dfrac{1}{d}\det(a_1, ...a_k, ...e_{i-1}, a_j, e_{i+1}..) = \pm\dfrac{1}{d}*$минор$(k+1)$-го порядка=0. Таким образом, любой столбец линейно выражается через $a_1, ..., a_k$ поэтому они составляют базу в системе $a_1, ..., a_n$.

***Следствие 11.1.*** $\text{rg}\, AB \leq \min\{\text{rg}\, A, \text{rg}\, B\}$

***Определение.*** Непустое подмножество $L$ пространства $V$ называется подпространством если выполняется два условия.

1. $\forall \ a, b \in L \ \ a + b \in L$
2. $\forall \ a \in L, \lambda \in P \ \ \lambda a \in L$

Проверить, что линейная оболочка любой системы векторов является линейным подпространством.

**Сумма и пересечение подпространств.**

$L_1 + L_2 \overset{\text{def}}{=} \{x|x = x_1 + x_2, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}, \ L_1 \cap L_2 = \{x|x \in L_1, x \in L_2\}$

***Утверждение 12.*** $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$.

***Определение.*** Сумма $V$ подпространств $V_1, ..., V_k$ называется прямой, если любой вектор $x \in V$ однозначно представим в виде $x = x_1 + .... + x_k, \ x_i \in V_i \ (i = 1, .., n)$. Обозначение $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$.

***Утверждение 13.*** Сумма $V$ подпространств $V_1, ..., V_k$ является прямой тогда и только тогда, когда объединение базисов $V_1, ..., V_k$ составляет базис $V$.

***Утверждение 14.*** Сумма двух подпространств является прямой тогда и только тогда , когда их пересечение есть нулевое пространство.

## II. Аффинные пространства.

***Определение.*** Аффинное $n$ - мерное пространство $F$ над полем $P$ есть иножество, состоящее из "точек" и "векторов", относительно которых должны выполняться следующие условия:

1. множество $V$ векторов из $F$ является линейным пространством над $P$,называемое пространством трансляций;
2. всякие две точки $A, B$ , данные в определенном порядке, определяют единственный вектор $u = \vec{AB}$;
3. для всякого $u$ из $V$ и всякой точки $A$ существует единственная точка $B$, такая, что $u = \vec{AB}$;
4. если $u = \vec{AB}, v = \vec{BC}$, то $u + v = \vec{AC}$.

**Следствия из аксиом.**

1. $\vec{AB} = \vec{AC} \to B = C$.
2. $\vec{AA} = \theta$.
3. $u = \vec{AB} \to -u = \vec{BA}$.
4. $\forall u \in V$ и всякой точки $B$ существует точка $A$ такая, что $u = \vec{AB}$.

Система координат в аффинном пространстве по определению состоит из некоторой точки $O$, называемой началом координат, и базиса $v_1, ..., v_n$ пространства трансляций.

Координатами вектора в аффинной системе координат являются его координаты в базисе пространства $V$. Координатами точки $M$ являются координаты вектора $OM$.

Связь между координатами точки в системах $O, v_1, ..., v_n$ и $O', v'_1, ..., v'_n$ устанавливается формулой $x_v = S_{vv'}x_{v'} + b$, где $b$ - столбец координат точки $O'$ в первой системе координат, $S_{vv'}$ - матрица перехода от базиса $v$ к базису $v'$.

***Определение.*** Подмножество $G$ аффинного подпространства называется аффинным подпространством или линейным многообразием , если для всякого $g_0 \in G$ множество $L = \{g - g_0, g \in G\}$ является линейным подпространством.

Как следует из определения, всякое аффинное подпространство описывается параметрической формулой вида $x = x_0 + \lambda_1 v_1 + .... + \lambda_s v_s$

***Определение.*** Аффинной комбинацией точек $x_1, ..., x_s$ называется такая их линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + ...\lambda_s x_s$ , в которой $\lambda_1 + ...\lambda_s = 1$. Множество всех аффинных комбинаций данного множества точек называется его аффинной оболочкой.

***Определение.*** Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = \alpha_0$ называется гиперплоскостью.

***Определение.*** Если $a$ - вектор, $x_0$ - точка, то множество точек вида $x = x_0 + a \cdot t$ - где $t$ - любое число называется прямой. Если значения $t$ ограничить пределами некоторого интервала, то та же формула определяет отрезок.

## Системы линейных уравнений и аффинные пространства.

Рассмотрим систему уравнений в матричной форме $Ax = b$, где $A(mxn)$ - матрица. Набор $x^0$, удовлетворяющий этой системе можно интерпретировать двумя способами.

Во-первых это коэффициенты разложения вектора $b$ по векторам-столбцам матрицы $A$, отсюда легко получается теорема Кронекера-Капелли
условие разрешимости системы уравнений: $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A\, b)$.

Во-вторых, это точка в $n$ - мерном аффинном пространстве, а множество $M$ всех решений является аффинным подпространством, пространством трансляций которого является множество решений однородной системы $Ax = 0$. Пусть $(\bar{A}\bar{b})$ - матрица, строки которой составляют базу в системе строк матрицы $(A\, b)$. Тогда системы $Ax = b$ и $\bar{A}x = \bar{b}$ имеют одинаковые множества решений. Представим $\bar{A}$ в виде $\bar{A} = (B\, N)$, где $B$ составлена из столбцов, образующих базу ( базисная подматрица ), $N$ содержит остальные столбцы матрицы $\bar{A}$ ( небазисная подматрица). Соответственно разобьем множество неизвестных на два подмножества: $x_B$ ( базисные неизвестные ) $x_N$ ( небазисные неизвестные ) . Записав систему уравнений в виде $Bx_B + Nx_N = \bar{b}$, выразим $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$. Для каждого набора значений небазисных неизвестных $x_N = \lambda \in P^{n-\mathrm{rg}\, A}$ по этой формуле вычисляются значения базисных неизвестных. Решение системы можно записать, таким образом, в матричном виде $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ E_{n-\mathrm{rg}\, A} \end{pmatrix} \lambda$. Столбцы матрицы $\begin{pmatrix} B^{-1}N \\ E_{n-\mathrm{rg}\, A} \end{pmatrix}$ линейно независимы, поэтому размерность множества решений равна $n - \mathrm{rg}\, A$.

**Метод столбцовых преобразований.** Пусть $r = \mathrm{rg}\, A$. Преобразуя столбцы матрицы $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ приведем ее к виду $\begin{pmatrix} T & O \\ P & Q \end{pmatrix}$ , где $T(mxr), O(mx(n-r), P(nxr), Q(nx(n-r))$ матрицы, причем матрица $O$ состоит из нулей.

***Утверждение 1.*** Столбцы матрицы $Q$ образуют фундаментальную систему решений.

***Доказательство.*** Столбцовые преобразования эквивалентны умножению исходной матрицы справа на некоторую невырожденную матрицу $H$ , которую представим в виде $H = (H_1\, H_2)$ , где $H_1$ состоит из первых $r$ столбцов матрицы $H$. Умножая, получаем равенства $P = H_1, Q = H_2, AH_1 = T, AH_2 = O$ , то есть столбцы матрицы удовлетворяют системе $Ax = 0$ , а так как они линейно независимы и их число равно $n - r$ , то они образуют фундаментальную систему.

## III. Евклидовы пространства.

***Определение.*** Пространство $V$ над полем $P$ называется евклидовым, если определено правило, по которому всякой паре векторов $x, y \in V$ ставится в соответствие число $(x, y)$, называемое скалярным произведением. При этом должны выполняться следующие условия.

1. $(x, y) = (y, x)$,
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

4. $(x,x) \geq 0, (x,x) = 0 \to x = \theta$.

Скалярное произведение следующим образом выражается через координаты векторов в заданном базисе $\{a_1, ...., a_n\}$: $(x,y) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j (a_i, a_j)$.

***Определение.*** Нормой или длиной вектора x называется число $|x| = \sqrt{(x,x)}$

***Утверждение 1.*** Если $(x,y) = 0$ , то $|x + y| \geq |x|$.

***Определение.*** Система $f_1, ...., f_k$ ненулевых векторов называется ортогональной , если $(f_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортогональная система, состоящая из векторов единичной длины, называется ортонормированной.

***Утверждение 2.*** Ортогональная система линейно независима.

Скалярное произведение в ортонормированном базисе записывается наиболее просто:
$(x,y) = x_1 y_1 + .... + x_n y_n$.

**Процесс ортогонализации.** Применяется для нахождения ортогонального базиса $h_1, ...., h_m$ заданного подпространства $L(a_1, ..., a_k)$.

Примем естественное допущение о том, что $a_1 \neq 0$ и положим $h_1 = a_1$, $r = 2$. Предположим, что уже найдены векторы $h_1, .., h_s$ $(s \geq 1)$. Очередной вектор ищем в виде $h_{s+1} = \lambda_1 h_1 + ... \lambda_s h_s + a_r$, выбирая коэффициенты так, чтобы выполнить условия $(h_i, h_{s+1}) = 0$, $(i = 1, .., s)$, т.е. полагая $\lambda_i = -(a_r, h_i)/(h_i, h_i)$, $(i = 1, .., s)$. Если оказалось, что $h_{s+1} = 0$, и $r < k$, то увеличиваем r на 1 и вновь пытаемся найти ненулевой $h_{s+1}$. Если $h_{s+1} \neq 0$, приступаем к нахождению $h_{s+2}$ и т.д.. Вычисления заканчиваются тогда, когда $r > k$.

***Утверждение 3.*** Евклидовы пространства одинаковой размерности и заданные над одним полем изоморфны.(Скалярные произведения в ортонормированных базисах вычисляются по одинаковым формулам.)

***Определение.*** Матрицей Грама системы векторов $a = \{a_1, ..., a_k\}$ называется матрица
$\Gamma(a) = \Gamma(a_1, ..., a_k) = ((a_i, a_j))$ $\quad k-$го порядка.

Если $x_a, y_a$ - столбцы координат векторов x, y в базисе a, то $(x,y) = x_A^T \Gamma(a) y_A$.

***Утверждение 4.*** 1) $\det \Gamma(a_1, ... a_k) \geq 0$ ,
2) $\det \Gamma(a_1, ... a_k) = 0 \ \leftrightarrow \ rg(a_1, ... a_k) < k$ .

***Доказательство.*** Пусть A - матрица, столбцами которой являются координаты векторов $a_1, ..., a_k$ в каком-нибудь ортонормированном базисе. Тогда $\Gamma(a_1, ..., a_k) = A^T A$ и по формуле Бине-Коши получаем $\det \Gamma(a_1, ... a_k) = \sum\limits_{i_1 ... i_k} \det^2 A \begin{pmatrix} i_1 ... i_k \\ 1 ... k \end{pmatrix} \geq 0$ , причем равенство возможно лишь тогда, когда все миноры k-го порядка равны нулю, то есть $rg\, A < k$.

***Следствие 4.1.*** (Неравенство Коши-Буняковского.) $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$.

***Следствие 4.2.*** (Неравенство треугольника) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

**Ортогонализация с помощью матрицы Грама***  *Дана система векторов $A = \{a_1, ..., a_s\}$. Элементарными преобразованиями строк и столбцов приведем матрицу Грама системы к диагональной матрице $D$ и одновременно найдем матрицу $T$ такую, что $D = T^T\, \Gamma(A)\, T$. Ортогональный базис составляют ненулевые столбцы матрицы $(a_1, ..., a_s)T$.*

**Задача:** *Определить скалярное произведение так, чтобы линейно независимые векторы $a_1, ..., a_n \in P^n$ составляли ортонормированный базис.*

**Решение:** *Пусть $A = (a_1 ... a_n)$ . Матрица $X$ скалярного произведения должна удовлетворять равенствам $a_i^T X a_j = \delta_{ij}\ \forall i, j$, которые можно записать в матричной форме $A^T X A = E$. Следовательно, $X = (AA^T)^{-1}$.*

**Проекция вектора на подпространство.**

Если $X, Y$ - множества в евклидовом пространстве, то выражение $X \perp Y$ будет означать, что $(x,y) = 0\ \forall x \in X, y \in Y$. Множества $X, Y$ называются ортогональными. Если $X$ состоит из единственного вектора x , то используется запись $x \perp Y$.

***Утверждение 5.*** Пусть W - подпространство пространства V, $x \in V$. Существует единственное представление вектора x в виде $x = x_{prW} + x_{ortW}$ , где $x_{prW} \in W, x_{ortW} \perp W$.

***Доказательство.*** Пусть $\{a_1, .., a_k\}$ - ,базис W. Рассмотрим систему уравнений
$(x - \lambda_1 a_1 - .... - \lambda_k a_k, a_i) = 0$, $(i = 1, ..., k)$ относительно $\lambda_1, .., \lambda_k$. Матрицей коэффициентов является матрица Грама, ее определитель не равен нулю, поэтому система имеет единственное решение $\lambda_1^0, .., \lambda_k^0$. Осталось заметить, что $x_{prW} = \lambda_1^0 a_1 + .... + \lambda_k^0 a_k$, $x_{ortW} = x - x_{prW}$.

$x_{prW}$ называется проекцией, а $x_{ortW}$ - ортогональной составляющей.

**Ортогональное дополнение.**

***Определение.*** Ортогональным дополнением к множеству $X \subset V$ называется множество $X^{\perp} = \{y \in V | (x, y) = 0, \forall x \in X\}$.

***Свойство 1.*** $X^{\perp}$ - линейное подпространство.

***Свойство 2.*** $V^{\perp} = \{0\}$, $\{0\}^{\perp} = V$.

***Свойство 3.*** Если L подпространство, то $L \oplus L^{\perp} = V$, $\dim V = \dim L + \dim L^{\perp}$.

***Доказательство.*** См. утверждение 5.

***Следствие 5.1.*** Размерность подпространства $L = \{x | Ax = 0\}$ равна $n - \operatorname{rg} A$.

***Свойство 4.*** Если L линейное подпространство, то $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

***Доказательство.*** $x \in (L^{\perp})^{\perp} \sim x \perp L^{\perp}$. Представим x в виде $x = x_1 + x_2, x_1 \in L, x_2 \in L^{\perp}$. Умножая это равенство на $x_2$, получим $(x_2, x_2) = 0 \to x_2 = \theta \to x \in L$, то есть $(L^{\perp})^{\perp} \subset L$.

Из равенств $\dim V = \dim L + \dim L^{\perp}$ и $\dim V = \dim L^{\perp} + \dim (L^{\perp})^{\perp}$ следует, что $\dim L = \dim (L^{\perp})^{\perp}$, поэтому $(L^{\perp})^{\perp} = L$ что и требовалось.

***Свойство 5.*** $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$, $\quad (L_1 \cup L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.

***Свойство 6.*** $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

***Свойство 7.*** $L_1 \subset L_2 \sim L_2^{\perp} \subset L_1^{\perp}$

**Нормальные решения систем линейных уравнений.**

Рассмотрим систему уравнений $Ax = b$. Обозначим множество ее решений M. Предположим вначале, что M не пусто.

***Утверждение 6.*** В M существует единственный вектор, имеющий наименьшую длину. Он называется нормальным решением.

***Доказательство.*** Если система имеет единственное решение, то доказывать нечего.

Пусть L - подпространство, порожденное строками матрицы A. Пусть $x, y \in M$ , тогда $A(x - y) = 0 \sim x - y \in L^{\perp}$, следовательно, все решения системы имеет одну и ту же проекцию на L. Обозначим ее буквой u. Таким образом, для всякого $x \in M$ справедливо равенство $x = u + h$, где $h \in L^{\perp}$. Теперь получаем

1. $0 = Ax = A(u + h) = Au + Ah = Au \to u \in M$,

2. $|x| = |u + h| \geq |u|$.

Итак, u - нормальное решение.

***Замечание.*** Подчеркнем, что $\{u\} = M \cap L$, то есть u является **единственным** решением системы , которое принадлежит L.

Из доказательства выводится метод нахождения нормального решения: пусть p - любое решение системы $AA^T x = b$ , тогда $A^T p$ - нормальное решение.

***Утверждение 7.*** Если $u^1$ - нормальное решение системы $Ax = b^1$, а $u^2$ - нормальное решение системы $Ax = b^2$, то $u^3 = \lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2$ - нормальное решение системы

$$Ax = \lambda_1 b^1 + \lambda_2 b^2 \tag{1}$$

***Доказательство.*** Вектор $u^3$ удовлетворяет системе (1) и принадлежит L, поэтому является нормальным решением.

Пусть строки матрицы $A(m x n)$ линейно независимы. Обозначим $u^i$ нормальное решение системы $Ax = e_i$ при $i = 1, .., m$. Матрица $A^+ = (u^1 ... u^m)$ называется псевдообратной для A. Из предыдущего утверждения вытекает, что нормальное решение системы $Ax = b$ может быть найдено по формуле $u = A^+ b$.

Рассмотрим теперь случай, когда M - пусто.

Обозначим L - линейную оболочку столбцов матрицы A. Представим b в виде $b = b_1 + b_2$, где $b_1 \in L, b_2 \in L^{\perp}$. $|Ax - b| = |Ax - b_1 - b_2| = |(Ax - b_1) - b_2| = \sqrt{|Ax - b_1|^2 + |b_2|^2}$. Наименьшее значение $|Ax - b|$ достигается при условии

$$Ax = b_1, \tag{2}$$

следовательно, каждое решение системы (2) является псевдорешением исходной системы. Из цепочки соотношений $Ax = b_1 \sim b - Ax = b_2 \in L^{\perp} \sim A^T(b - Ax) = 0 \sim A^T A x = A^T b$ следует, что псевдорешения являются решениями(в обычном смысле) последнего уравнения цепочки. Именно его и следует использовать на практике.

Нормальное решение последнего уравнения называется нормальным псевдорешением системы $Ax = b$.

***Определение.*** *Расстоянием от вектора* x *до подпространства* W *называется величина* $d(x, W) = \inf\limits_{y \in W} |x - y|$.

*Имеет место равенство* $d(x, W) = |x_{\mathrm{ortW}}|$. *Действительно,* $|x - y| = |x_{\mathrm{prW}} + x_{\mathrm{ortW}} - y| \geq |x_{\mathrm{ortW}}|$.

***Утверждение 8.*** $d^2(x,W)=\dfrac{\det\Gamma(a_1,..a_k,x)}{\det\Gamma(a_1,..a_k)}$.

***Доказательство.*** *Пусть* $x=x_1+x_2$, *где* $x_1\in W=L(a_1,..,a_k), x_2\in W^{\perp}$ *и* $x_1=\lambda_1a_1+..+\lambda_ka_k$. *В матрице* $\Gamma(a_1,..a_k,x)$ *вычтем из последнего столбца линейную комбинацию с коэффициентами* $\lambda_1,...,\lambda_k$ *первых* $k$ *столбцов.*

$$\det\Gamma(a_1,..a_k,x)=\det\begin{pmatrix} & (a_1,x_2)\\ \Gamma(a_1,...,a_k) & ..\\ & (a_k,x_2)\\ (a_1,x)...(a_k,x) & (x_2,x)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} & 0\\ \Gamma(a_1,...,a_k) & ..\\ & 0\\ (a_1,x)...(a_k,x) & |x_2|^2\end{pmatrix}=|x_2|^2\det\Gamma(a_1,...a_k)$$

**Расстояние между линейными многообразиями.** *Пусть* $M_1=x_1+L_1, M_2=x_2+L_2$. *Тогда* $d(M_1,M_2)=\inf|u-v|=\inf|x_1+l_1-x_2-l_2|=\inf\limits_{l\in L_1+L_2}|(x_1-x_2)-l|=d(x_1-x_2,L_1+L_2)$.

**Объем системы векторов.** $\mathrm{vol}(a_1)\overset{\mathrm{def}}{=}|a_1|, \mathrm{vol}(a_1,...,a_k)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{vol}(a_1,...,a_{k-1})|\mathrm{ort}_{L_{k-1}}a_k|\to$
$\to\mathrm{vol}(a_1,...,a_k)=|a_1||\mathrm{ort}_{L_1}a_2|....|\mathrm{ort}_{L_{k-1}}a_k|=\sqrt{\det\Gamma(a_1,...,a_k)}$, *где* $L_s=L(a_1,...,a_s)$.

**Неравенство Адамара.** *Рассмотрим квадратную матрицу* $A$, *столбцы которой* $a_1,...,a_n$. *Используя предыдущую формулу получаем* $(\det A)^2=\det A^TA=\det\Gamma(a_1,..,a_n)\le(|a_1|\cdot...\cdot|a_n|)^2\to$ $\mathbf{|\det A|\le|a_1|\cdot...\cdot|a_n|}$.

*Неравенство достигается на матрицах специального вида, называемых матрицами Адамара. Определим индуктивно:* $H_1=(1), H_k=\begin{pmatrix}H_{k-1} & -H_{k-1}\\ H_{k-1} & H_{k-1}\end{pmatrix}$ *при* $k\ge2$. *Учитывая, что число строк в матрице* $H_k$ *равно* $2^{k-1}$, *докажем по индукции формулу* $\det H_k=2^{(k-1)2^{k-2}}$.

$$(\det H_{k+1})^2=\det\begin{pmatrix}0 & -2H_k^2\\ 2H_k^2 & 0\end{pmatrix}=2^{2^k}(\det H_k)^4=2^{2^k}\cdot2^{(k-1)2^k}=2^{k2^k},\ \det H_{k+1}=2^{k2^{k-1}}.$$

## IV. Линейные отображения.

***Определение.*** Пусть $V,W$ два линейных пространства над одним полем $P$. Отображение $V\overset{\varphi}{\to}W$ называется линейным, если $\forall\alpha,\beta\in P$, $\forall x,y\in V$ выполняется равенство $\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi x+\beta\varphi y$. Если $V=W$, вместо термина "отображение" используется термин "оператор".

***Примеры***

1. Дифференцирование в пространстве многочленов и тригонометрических функций.
2. Пусть $V=V_1\oplus V_2$. Любой вектор $x$ можно однозначно представить в виде $x=x_1+x_2$, $x_1\in V_1$, $x_2\in V_2$. Отображение $\varphi x=x_1$ пространства $V$ в себя является линейным и называется проектированием на $V_1$ параллельно $V_2$. Если $V_2=V_1^{\perp}$, то проектирование называется ортогональным.
3. $\varphi x=[a,x]$ , где $a$ - фиксированный вектор трехмерного пространства.

***Определение.*** Образом линейного отображения $V\overset{\varphi}{\to}W$ называется множество $\mathrm{im}\,\varphi=\{\varphi x|x\in V\}$. Размерность образа называется рангом. Обозначение: $\mathrm{rg}\,\varphi$.

***Определение.*** Ядром линейного отображения $V\overset{\varphi}{\to}W$ называется множество $\ker\varphi=\{x\in V||\varphi x=0.\}$ Размерность ядра называется дефектом. Обозначение: $\mathrm{def}\,\varphi$.

***Утверждение 1.*** Ядро и образ отображения являются подпространствами.

Покажем что линейное отображение однозначно определяется своими значениями на базисных векторах пространства $V$.

Пусть $V\overset{\varphi}{\to}W, e=\{e_1,...,e_n\}$ - базис $V$, $f=\{f_1,...,f_m\}$ - базис $W$. Найдем разложения $\varphi e_j=(f_1...f_m)(a_{1j}...a_{mj})^T$, $(j=1,..,n)$ .

***Определение.*** $A_{ef}=(a_{ij})$ называется матрицей отображения $\varphi$ относительно базисов $e,f$.

Пусть $y=\varphi x$, $x_e=(x_1,..,x_n)^T$, $y_f=(y_1,..,y_m)^T$ - координаты векторов $x,y$ в базисах $e,f$ соответственно. Тогда $y=\varphi x=\varphi(x_1e_1+...+x_ne_n)=(\varphi e_1....\varphi e_n)x_e=(f_1...f_m)A_{ef}x_e$. С другой стороны $y=(f_1...f_m)y_f$. Разложение по базису единственно, поэтому $\underline{y_f=A_{ef}x_e}$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

***Утверждение 2.*** Отображения совпадают, если совпадают их значения на базисных векторах.

**Изменение матрицы отображения при изменении базисов.** Выберем в $V,W$ базисы $e',f'$ соответственно. Пусть $P$ - матрица перехода от $e$ к $e'$ $Q$ - матрица перехода от $f$ к $f'$. Тогда $x_e=Px_{e'}$, $y_f=Qy_{f'}$, $y_f=Aefx_e\to Qy_{f'}=A_{ef}Px_{e'}\to y_{f'}=Q^{-1}A_{ef}Px_{e'}\to A_{e'f'}=Q^{-1}A_{ef}P$.

Если $\varphi$ - линейный оператор, то матрица обозначается $A_e$ и изменяется по формуле $A_{e'}=P^{-1}A_eP$.

***Определение.*** Матрицы $A, B$ называются подобными, если для некоторой невырожденной матрицы $P$ выполняется равенство $A = P^{-1}BP$.

Далее, по умолчанию, предполагается, что пространство обозначается символом $V$, оператор - символом $\varphi$, матрица оператора символом $A$, $\dim V = n$ .

***Примеры.*** 1. Матрица дифференцирования в пространстве многочленов степени $\leq n$.

2. Матрица проектирования на плоскость $n^T x = 0$ в $R^3$.

a) в естественном базисе $(A = E - \dfrac{1}{n^T n} nn^T)$.

b) в базисе $n, a, b$, где $a, b$ принадлежат плоскости.

3. Матрица оператора, которое переводит заданные линейно независимые векторы $a_1, a_2, a_3$ в векторы $b_1, b_2, b_3$.

## Инвариантные подпространства.

***Определение.*** Подпространство $L \subset V$ инвариантно относительно $V \xrightarrow{\varphi} V$, если $\varphi L \subseteq V$.

***Утверждение 3.*** Сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами.

Пусть $L$ инвариантное подпространство, $H_1 = \{h_1, h_2, .., h_k\}$ - базис $L$. $H_2 = \{h_{k+1}, .., h_n\}$ - дополнение $H_1$ до базиса пространства. Тогда матрица оператора в базисе $H_1 \cup H_2$ имеет блочный вид $\begin{pmatrix} A & O \\ B & D \end{pmatrix}$, где $A$ - матрица размеров (kxk), $O$ - нулевая матрица размеров ((n-k)xk).

Если $V$ есть прямая сумма инвариантных подпространств $L_1, L_2$ , то в базисе $V$, полученном объединением базисов $L_1, L_2$ матрица оператора имеет блочно-диагональный вид $\begin{pmatrix} A & O \\ O^T & D \end{pmatrix}$.

Более общая формулировка: Если $V$ есть прямая сумма инвариантных подпространств $L_1, L_2, .., L_s$ , то в базисе $V$, полученном объединением базисов $L_1, L_2, .., L_s$ матрица оператора имеет блочно-диагональный вид $\mathrm{diag}(A_1, A_2, .., A_s)$, порядок квадратной матрицы $A_i$ равен $\dim L_i$.

***Определение.*** Ненулевой вектор $a$ называется собственным для оператора $\varphi$ , если $\varphi(a) = \lambda a$ для некоторого числа $\lambda$. Это число называется собственным числом, отвечающим собственному вектору $a$.

***Замечание.*** Собственный вектор оператора является базисом одномерного инвариантного подпространства.

***Утверждение 4.*** Собственные векторы, отвечающие разным собственным числам, линейно независимы.(индукция)

Пусть оператор имеет систему $n$ линейно независимых собственных векторов $H = \{h_1, .., h_n\}$, а $\lambda_1, .., \lambda_n$ - список соответствующих собственных чисел. Тогда в базисе $H$ матрица оператора имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$.

**Нахождение собственных векторов.** Пусть оператор задан своей матрицей $A$. Для нахождения собственного вектора надо решить нелинейную систему уравнений $Ax = \lambda x$, в которой неизвестны $\lambda$ и $x$. Преобразуем систему к виду

$$(A \quad \lambda E)x = 0. \tag{3}$$

Как следует из правила Крамера, эта система имеет ненулевое решение лишь в случае, когда $\det(A - \lambda E) = 0$. Полученное уравнение называется *характеристическим*, а многочлен $\det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом.* Решая характеристическое уравнение, находим собственные числа $\lambda_1, .., \lambda_n$. Подставляя собственное число $\lambda_k$ в уравнение (3) находим соответствующий собственный вектор $h_k$.