I. Матрицы и определители.

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Равенство (1) задает матрицу $A = (a_{ij})$ размеров mxn . Элемент a_{ij} матрицы расположен в i строке и j столбце. Обычно матрицы обозначаются заглавными буквами, а их элементы - строчными.

Определение. Если $m = n$, то матрица называется квадратной, число n называется ее порядком.

Определение. Квадратная матрица называется треугольной, если для ее элементов выполняется одно из условий:

$$a_{ij} = 0, \text{при} \quad i > j; \tag{2}$$

$$a_{ij} = 0, \text{при} \quad i < j; \tag{3}$$

$$a_{ij} = 0, \text{при} \quad i < n - j + 1; \tag{4}$$

$$a_{ij} = 0, \text{при} \quad i > n - j + 1. \tag{5}$$

Определение. Диагональной называется матрица $A = (a_{ij})$, в которой $a_{ij} = 0$, при $i \neq j$. Обозначение диагональной матрицы: $\mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$, где в скобках указаны диагональные элементы.

Определение. Квадратная диагональная матрица, ненулевые элементы которой равны 1, называется единичной и обозначается символом E.

Если α- число, а C - матрица, то $\alpha C \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha c_{ij})$.

Матрицы одинаковых размеров можно складывать: $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

Если A и B матрицы размеров mxk и kxm соответственно (число строк в B равно числу столбцов в A), то можно вычислить их произведение - матрицу $C = (c_{ij})$ размеров mxn, элементы которой находятся по формуле $c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$. При вычислениях удобно формировать матрицу C либо последовательно вычисляя ее столбцы, как произведения A на столбцы B , либо последовательно вычисляя ее строки, как произведения строк A на матрицу B.

Если $A - (mxn)$ матрица, то A' обозначает (nxm) матрицу, строки которой являются столбцами матрицы A. A' называется транспонированной к A . Элементы этих матриц связаны равенствами $a_{ij} = a'_{ji}$ $(\forall i, j)$

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
4. $\alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C$
5. $(AB)' = B'A'$

Определение. Элементарными преобразованиями строк(столбцов) называются следующие операции:

1. умножение строки(столбца)на ненулевое число;
2. перестановка строк(столбцов);
3. прибавление(вычитание) к одной строке(столбцу), другой строки(столбца) умноженного на число.

Утверждение 1. Каждое из элементарных преобразований строк заданной матрицы A можно осуществить посредством умножения слева на некоторую матрицу P , полученную из единичной в результате этих же преобразований.

Определение. Перестановкой конечного множества $N = \{1, 2, .., n\}$ называют расположение его элементов в определенном порядке.

Утверждение 2. Число различных перестановок равно $n!$.

Говорят, что два элемента i и j перестановки образуют инверсию, если $i > j$, но i расположен левее j.

Перестановка называется четной, если число инверсий четно и нечетной в противном случае.

Утверждение 3. Перестановки $p_1 = (i_1, i_2, .., i_s, ..., i_k, .., i_n)$ и $p_2 = (i_1, i_2, .., i_k, ..., i_s, .., i_n)$ имеют разную четность.

Определение. Подстановкой степени n называется взаимно-однозначное отображение множества N на себя.

Подстановки записываются в виде (2xn)-матрицы, каждая из строк которой содержит полный список элементов множества N. Подстановки, состоящие из одинаковых столбцов, считаются равными, поэтому любую подстановку можно записать так, чтобы элементы верхней строки были упорядочены по возрастанию.

Если π - некоторая подстановка, то через $\mathrm{inv}(\pi)$ будем обозначать суммарное число инверсий в ее строках.

Если $\mathrm{inv}(\pi)$ - четное число, то π называется четной подстановкой.

Определение. Определителем квадратной матрицы A порядка n называется следующая функция от ее элементов

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^{\mathrm{inv}(\pi)} a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} ... a_{i_n j_n},$$

где суммирование осуществляется по всем подстановкам $\pi = \begin{pmatrix} i_1 ... i_n \\ j_1 ... j_n \end{pmatrix}$, которые образованы индексами элементов произведения.

Замечание 1. Каждый из $n!$ членов суммы содержит ровно один элемент любого столбца и любой строки.

Замечание 2. Определение детерминанта можно придать следующую форму

$$\det A = \sum_{p} (-1)^{\mathrm{inv}(p)} a_{1 j_1} \cdot a_{2 j_2} ... a_{n j_n},$$

где суммирование осуществляется по всем перестановкам $p = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & ... & j_n \end{pmatrix}$

Пример 1. Вычисление определителей матриц треугольного вида:

Для матриц (2),(3) определитель равен $a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$, а для матриц (4),(5) опредилитель равен $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$

Свойства определителей.

Свойство 1. $\det A = \det A'$

Доказательство.

$$\det A' = \sum (-1)^{\mathrm{inv}\begin{pmatrix} i_1 ... i_n \\ j_1 ... j_n \end{pmatrix}} a'_{i_1 j_1} \cdot a'_{i_2 j_2} ... a'_{i_n j_n} =$$

$$\sum (-1)^{\mathrm{inv}\begin{pmatrix} j_1 ... j_n \\ i_1 ... i_n \end{pmatrix}} a_{j_1 i_1} \cdot a_{j_2 i_2} ... a_{j_n i_n} = \det A$$

Свойство 2. Если матрица содержит нулевую строку, то ее определитель равен нулю.

Свойство 3. Если матрица B получена из матрицы A перестановкой k и m строк, то $\det B = -\det A$.

Доказательство. $\det B = \sum (-1)^{\mathrm{inv}(j_1 .. j_k .. j_m .. j_n)} b_{1 j_1} \cdot b_{2 j_2} .. b_{k j_k} .. b_{m j_m} .. b_{n j_n} =$

$$\sum (-1)^{\mathrm{inv}(j_1 .. j_k .. j_m .. j_n)} a_{1 j_1} \cdot a_{2 j_2} .. a_{m j_k} .. a_{k j_m} .. a_{n j_n} =$$

$$-\sum (-1)^{\mathrm{inv}(j_1 .. j_m .. j_k .. j_n)} a_{1 j_1} \cdot a_{2 j_2} .. a_{k j_m} .. a_{m j_k} .. a_{n j_n} = -\det A$$

Свойство 4. Определитель матрицы, две строки которой равны, равен нулю.

Свойство 5. Если матрица B получена из матрицы A умножением строки на число α, то $\det B = \alpha \det A$.

Свойство 6. Определитель матрицы, две строки которой пропорциональны, равен нулю.

Свойство 7.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{i1}^1+a_{i1}^2 & ... & a_{in}^1+a_{in}^2 \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{i1}^1 & ... & a_{in}^1 \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{i1}^2 & ... & a_{in}^2 \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Свойство 8. Если матрица B получена из матрицы A в результате прибавления к одной из строк другой строки, умноженной на число, то $\det B = \det A$.

Свойство 9. Если одна из строк матрицы равна линейной комбинации других, то определитель матрицы равен нулю.

Вычисление определителей методом приведения к треугольному виду.

Для вычисления определителя некоторой матрицы A с числовыми элементами применим к матрице следущую процедуру.

0. Если все элементы первого столбца равны нулю, то определитель равен нулю.

1. Найти ненулевой элемент и перестановкой строк поместить его в левый верхний угол.

2. for i:=2 to n do $(i) := (i) - \left[\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right](1)$;

В результате получится матрица вида

$$A_1\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & .... & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & .... & a_{2n}^1 \\ ...... & & & & \\ 0 & a_{n2}^1 & a_{n3}^1 & .... & a_{nn}^1 \end{pmatrix}.$$

Если перестановка строк выполнялась, то $\det A = -\det B$, в противном случае $\det A = \det B$.

Далее следует применить аналогичные операции к подматрице матрицы B, полученной вычеркиванием первой строки и первого столбца и т.д.. до тех пор, пока не получится треугольная матрица, определитель которой равен произведению диагональных элементов.

Теорема Лапласа.

Пусть задана матрица A , $N_1 = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ и $N_2 = \{\beta_1, ..., \beta_k\}$ - упорядоченные подмножества множества $N = \{1, 2, .., n\}$. Подматрицу, расположенную на пересечении строк с номерами из N_1 и столбцов с номерами из N_2, обозначим $A\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}$. Подматрицу, составленную из элементов, индексы которых не принадлежат N_1, N_2 обозначим $\bar{A}\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}$.

$\det A\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}$ называется минором к-го порядка матрицы A. $\det \bar{A}\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}$ называется дополнительным минором, а $(-1)^{\alpha_1+...+\beta_k}\det \bar{A}\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}$ - алгебраическим дополнением к M .

Утверждение 4. Каждый член суммы, полученной при раскрытии произведения

$$(-1)^{\alpha_1+..+\alpha_k+\beta_1+..+\beta_k}\det A\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix} \cdot \det \bar{A}\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix} \tag{6}$$

является членом $\det A$.

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай, когда $N_1 = N_2 = \{1, .., k\}$. Произвольный член выражения (6) имеет вид

$$(-1)^{1+..+k+1+..+k}(-1)^{\mathrm{inv}(i_1...i_k)}a_{1i_1}...a_{ki_k}(-1)^{\mathrm{inv}(i_{k+1}...i_n)}a_{k+1i_{k+1}}...a_{ni_n} =$$

$$(-1)^{inv(i_1 \dots i_k)+inv(i_{k+1}\dots i_n)} a_{1i_1}\dots a_{ki_k} a_{k+1 i_{k+1}} \dots a_{ni_n} =$$

$$(-1)^{inv(i_1 \dots i_k\, i_{k+1}\dots i_n)} a_{1i_1}\dots a_{ki_k} a_{k+1 i_{k+1}} \dots a_{ni_n},$$

поэтому действительно является членом $\det A$.

2) В общем случае подвергнем матрицу A следующему преобразованию: для любого s строку α_s переставим со строкой $\alpha_s - 1$, затем с $\alpha_s - 2$ и т.д. пока α_s не окажется на месте s строки. Аналогичные преобразования выполним над столбцами. Матрицу, полученную в итоге обозначим B. Общее число перестановок равно $\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 2 + \dots \alpha_k - k + \beta_1 - 1 + \beta_2 - 2 + \dots \beta_k - k = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \dots \beta_k - k(k-1)$. Так как $k(k-1)$ четное число, то $\det A = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_k+\beta_1+\beta_2+\dots\beta_k} \det B$,а так как $A\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_k\\ \beta_1\dots\beta_k\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}1\dots k\\ 1\dots k\end{pmatrix}$ и $\bar{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_k\\ \beta_1\dots\beta_k\end{pmatrix} = \bar{B}\begin{pmatrix}1\dots k\\ 1\dots k\end{pmatrix}$, то завершают доказательство рассуждения пункта 1).

Теорема Лапласа. Пусть в матрице A выбраны строки $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Тогда $\det A$ равен сумме S всех произведений миноров k - го порядка расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.

Доказательство. Заметим, что произвольный член определителя входит в единственное произведение указанного вида. Так как число элементов в $|S| = C_n^k \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$, то S не содержит ничего лишнего.

Обозначим A_{ij} - алгебраическое дополнение к a_{ij} .

Определение. Присоединенной к A называется матрица A^*, элементы которой находятся по формуле $a^*_{ij} = A_{ji}$.

Утверждение 5. $a_{k1}A_{m1} + \dots + a_{kn}A_{mn} = \begin{cases} \det A \text{ при } k = m \\ 0 \text{ при } k \neq m \end{cases}$.

Следствие 5.1. $AA^* = A^*A = (\det A)\, E$.

<u>Формула Бине-Коши.</u>

Утверждение 6. Пусть $C = AB$, где A, B - матрицы размеров $(mxn), (nxm)$ соответственно, тогда

1. $\det C = 0$, при $m > n$;
2. $\det C = \sum\limits_{(} j_1 \dots j_m) \det A \begin{pmatrix}1\dots k\\ j_1\dots j_k\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1\dots j_k\\ 1\dots k\end{pmatrix}$, при $m \leq n$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $D = \begin{pmatrix} E & B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$. Вычислим ее определитель двумя способами.

1 способ. Используя теорему Лапласа разложим определитель по последним m столбцам. Так как миноры, содержащие хотя бы одну строку, номер которой больше m, равны нулю, то получится сумма, произвольный элемент которой имеет вид

$$(-1)^{j_1+..+j_m+n+1+..+n+m} \det B \begin{pmatrix}j_1\dots j_k\\ 1\dots k\end{pmatrix} \det \begin{pmatrix}\bar{E}\\ -A\end{pmatrix},$$

где $\bar{E}$ - матрица, полученная из E вычеркиванием строк с номерами из множества $N_1 = \{j_1 \dots j_m\}$. $\bar{E}$ содержит лишь один ненулевой минор $n - m$ - го порядка, он включает столбцы с номерами из множества $N \setminus N_1$. По теореме Лапласа

$$\det \begin{pmatrix}\bar{E}\\ -A\end{pmatrix} = (-1)^{1+..+n-m+1+..+n-i_1-..-i_m} (-1)^m \det A \begin{pmatrix}1\dots k\\ j_1\dots j_k\end{pmatrix}.$$

Сворачивая выражение в показателе, получим выражение $n(n+1) + m(m+1)$, которое принимает четные значения при любых m, n.

Таким образом $\det D = \sum\limits_{(j_1\dots j_m)} \det A \begin{pmatrix}1\dots k\\ j_1\dots j_k\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1\dots j_k\\ 1\dots k\end{pmatrix}$,

2 способ. Элементарными преобразованиями строк преобразуем D к матрице $F = \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, имеющей такой же определитель. Раскладывая $\det F$ по первым n столбцам, получаем $\det F = \det AB = \det C$.

Следствие 6.1. Если A, B - квадратные матрицы, то $\det AB = \det A \det B$.

*** * ***

Определение. Матрица X называется обратной к квадратной матрице A , если $AX = E$. Обратная матрица обозначается A^{-1}.

Утверждение 7. Для существования обратной матрицы к A необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.

Доказательство. Достаточность: $A^{-1} = A^*/\det A$.

Необходимость: $AA^{-1} = E \to \det A \det A^{-1} = 1 \to \det A^{-1} = 1/\det A \neq 0$.

Следствие 7.1. Если обратная матрица существует, то она единственна.

Доказательство. $AX = E \to A^*AX = A^* \to X = A^*/\det A$.

Следствие 7.2. $A^{-1}A = E$.

II. Системы линейных уравнений.

Определение. Уравнения вида $a_1x_1 + ... + a_nx_n = a_0$ относительно неизвестных $x_1, ..., x_n$ с коэффициентами $a_1, ..., a_n$ называются линейными. Решением уравнения называется такой набор значений неизвестных $(x_1^0, ..., x_n^0)$, который обращает уравнение в тождество.

Систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

можно записать в матричном виде $Ax = b$.

Если правая часть каждого уравнения системы равна нулю, то система называется однородной, в противном случае - неоднородной. Основной метод решения систем линейных уравнений это метод Гаусса или или метод исключения неизвестных. Если не вникать в подробности, то метод состоит в следующем: выражаем из первого уравнения x_1 и подставляем во все остальные уравнения, затем из второго уравнения выражаем x_2, подставляем во все уравнения и т.д.. Можно проверить, что процесс исключения неизвестных сопровождается таким изменением матрицы коэффициентов системы которое достигается применением к матрице элементарных преобразований ее строк. Поэтому необходимые вычисления целесообразно выполнять именно с матрицей коэффициентов.

Пример 1. Решить систему $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим систему уравнений, число уравнений в которой равно числу неизвестных и определитель матрицы коэффициентов не равен нулю. Обозначим A_j матрицу, полученную заменой j - го столбца матрицы A на b. Единственное решение системы можно записать тогда в следующем виде: $x = A^{-1}b = A^*b/\det A = (\det A_1, ...\det A_n)/\det A$. (Этот факт известен как правило Крамера.)

Утверждение 1. Однородная система уравнений, число неизвестных в которой больше числа уравнений имеет ненулевое решение.

Доказательство. Индукция по числу уравнений.