О числе крайних точек главного многогранника задачи групповой минимизации.

С.И. Веселов

1. Пусть $G = \{0, g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ – аддитивная абелева группа, $P(G, g_k)$ – выпуклая оболочка множества целочисленных неотрицательных решений уравнения

$$g_1 t_1 + g_2 t_2 \ldots + g_m t_m = g_k, \tag{1}$$

$\phi(G, g_k)$ – число крайних точек в $P(G, g_k)$.

Изучению многогранников $P(G, g_k)$ (главных многогранников) посвящены работы [1] – [3]. В данной статье приводятся верхняя и нижняя оценки для $\phi(G, g_k)$.

2. Пусть $1 \le j \le m$, $1 \le k \le m$, $P(j, k)$ – выпуклая оболочка множества целочисленных неотрицательных решений сравнения $t_1 + 2t_2 + \ldots + jt_j \equiv k \ (mod(m+1))$, M_k – множество целочисленных неотрицательных решений уравнения

$$t_1 + 2t_2 + \ldots + kt_k = k, \tag{2}$$

$\phi(j, k)$ – число крайних точек в $P(j, k)$, $\psi(k)$ – число крайних точек в M_k, $[a]$ – наибольшее целое число, не превосходящее a. Положим $r(i) = \psi(i)$ при $i = 1, 2, 3$ и $r(i) = r(1) + r(2) + \ldots + r([\frac{i-1}{2}]$ при $i \ge 4$.

Лемма 1 *Если $n \ge 2$, то $r(n) \ge 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 n - \frac{3}{2}\log_2 n + 2}$.*

Доказательство. Очевидно, что при $n \ge 4$ $r(n)$ – монотонно неубывающая функция, поэтому $r(4k) = r(1)+r(2)+\ldots+r(2k-1) \ge r(k)+r(k+1)+\ldots+r(2k-1) \ge kr(k)$. Пусть s – целое число такое, что $4^{s+1} > n \ge 4^s$, тогда $r(n) \ge r(4^s) \ge 4^{s-1} r(4^{s-1}) \ge 4^{s-1} \cdot 4^{s-2} \ldots 4 \cdot 1 = (4^s)^{\frac{s-1}{2}} \ge 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 n - \frac{3}{2}\log_2 n + 2}$. При $n = 2$ и $n = 3$ утверждение проверяется непосредственно.

Лемма 2 *Если* $k \geq 2$, *то* $\phi(m,k) \geq 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 k - \frac{3}{2}\log_2 k + 2}$.

Доказательство. Известно, что гиперплоскость (2) является гранью для $P(k,k)$ [1]. Следовательно, точки, крайние для M_k, будут крайними для $P(k,k)$. Пусть $k \geq 4$, $1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}$, и $p = (p_1, p_2, \ldots, p_j)$ – крайняя точка для M_j. Очевидно, что точка $q = (p_1, p_2, \ldots, p_j, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на месте $k-j$ компоненты, будет крайней для M_k. Тогда

$$\Psi(k) \geq \Psi(1) + \Psi(2) + \ldots + \Psi([\frac{k-1}{2}]),$$

$$\phi(k,k) \geq \Psi(k) \geq r(k) \geq 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 k - \frac{3}{2}\log_2 k - 2}.$$

Так как из крайней точки для $P(k,k)$ приписыванием $(m-k)$ нулевых компонент можно получить крайнюю точку для $P(m,k)$, то

$$\phi(m,k) \geq \phi(k,k) \geq 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 k - \frac{3}{2}\log_2 k + 2}.$$

При $k = 2$ и $k = 3$ утверждение тривиально.

Теорема 1 *Если* G *– прямая сумма циклических групп* $G_!, G_2, \ldots, G_r$, *порядок которых* $m_1 + 1, m_2 + 1, \ldots, m_r + 1$ *соответственно, проекции* $g^1, g^2, \ldots, g^s$ *элемента* g_k *в* $G_1, G_2, \ldots, G_s$ $(1 \leq s \leq r)$ *отличны от нуля и* $m_i \geq 2$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, *то*

$$\phi(G, g_k) \geq 2^{\frac{1}{4}(\log_2^2 \frac{m_1+1}{2} + \log_2^2 \frac{m_2+1}{2} + \ldots + \log_2^2 \frac{m_s+1}{2}) - \frac{3}{2}(\log_2 \frac{m_1+1}{2} + \log_2 \frac{m_2+1}{2} + \ldots + \log_2 \frac{m_s+1}{2}) + 2s}$$

Доказательство. Предположим, что $r = 1$ и $g_i = ig_1$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$. Тогда $P(G, g_k) = P(m,k)$ и, значит, утверждение справедливо при $k \geq \frac{m+1}{2}$. Очевидно, что отображение $g \to mg$ является автоморфизмом группы G. Известно [1], что в этом случае $P(G, g_k)$ и $P(G, g_{m-k+1})$ изоморфны, следовательно, утверждение справедливо при $1 \leq k \leq m$.

Для доказательства теоремы при $r \leq 2$ достаточно заметить, что решение уравнения (1) можно представить в виде

$$t = (t_1, t_2, \ldots, t_{n_1}, t_{n_1+1}, \ldots, t_{n_2}, \ldots, t_{n_s-1}, \ldots, t_{n_s}, \ldots, t_m),$$

где $n_j = \sum_{j=1}^{i} m_j (i = 1, 2, \ldots, s)$, точки

$$t^1 = (t_1, t_2, \ldots, t_{n_1}),\ t^2 = (t_{n_1+1}, \ldots, t_{n_2}),\ \ldots\ , t^s = (t_{n_s-1} + 1, \ldots, t_{n_s})$$

соответственно принадлежат многогранникам

$$P(G_1, g^1),\ P(G_2, g^2)\ , \ldots ,\ P(G_s, g^s),$$

поэтому $\phi(G, g_k) \geq \prod_{i=1}^{s} \phi(G_i, g^i)$.

Теорема 2 $\phi(G, g_k) \leq 2^{\log_2(m+1)\log_2 m + 2\log_2 m + 2}$

Доказательство. Известно, что число ненулевых компонент в крайней точке для $P(G, g_k)$ не превышает $[\log_2(m+1)] = s$ [1]. В [4] доказано, что число крайних точек в множестве целочисленных неотрицательных решений уравнения $g_{i_1}t_{i_1} + g_{i_2}t_{i_2} + \ldots + g_{i_s}t_{i_s} = g_k$ не превышает $(s+1)^s$, следовательно,

$$\phi(G, g_k) \leq C_m^s (s+1)^s \leq \frac{m^s}{s!}(s+1)^s \leq$$

$$\leq \frac{(3m)^s}{s^s}(s+1)^s \leq 3(3m)^s \leq 2^{\log_2(m+1)\log_2 m + 2\log_2 m + 2}.$$

Автор благодарит В.Н. Шевченко за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Gomory R.E. Some polyhedra related to combinatorial problems. – J.Lenear Algebra and Its Appl., 1969, 2, p. 451-558.

[2] Gomory R.E. Integer faces of a polyhedron. – Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1967, 57, N 1, p.n 16-18.

[3] Ху Т.С. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974. 520 с.

[4] Шевченко В.Н. Выпуклые многогранные конусы, системы сравнений и правильные отсечения в целочисленном программировании. – В кн.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький, 1979, с. 109-110.