Методические указания к решению задач в евклидовых пространствах.

Веселов С.И.,Ильичев А.П., Чирков А.Ю.

Нижегородский Государственный Университет.

Линейное пространство V над полем P называется евклидовым, если определено правило, по которому всякой паре векторов $x, y \in V$ ставится в соответствие число $(x, y) \in P$, называемое скалярным произведением. При этом должны выполняться следующие условия.

1. $(x, y) = (y, x)$,
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
4. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \to x = \theta$.

1. Если $x_a = (x_1, ..., x_n)^T$, $y_a = (y_1, ..., y_n)^T$ - наборы координат векторов x, y в заданном базисе $\{a_1, ..., a_n\}$, то

$$(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j (a_i, a_j).$$

Это равенство можно представить в матричной форме $(x, y) = x_a^T \Gamma_a y_a$, где

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & .. & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & .. & (a_2, a_n) \\ .... & .... & .. & .... \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & .. & (a_n, a_n) \end{pmatrix} \text{ - матрица Грама.}$$

2. Нормой или длиной вектора x называется число $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

3. Система $a_1, ..., a_k$ ненулевых векторов называется ортогональной , если $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортогональная система, состоящая из векторов единичной длины, называется ортонормированной. Скалярное произведение в ортонормированном базисе записывается наиболее просто:

$$(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Для нахождения ортогонального базиса $h_1, ..., h_m$ заданного подпространства $L(a_1, ..., a_k)$ применяется процесс ортогонализации, который представлен далее в двух формах.

4. Первая форма процесса ортогонализации. Примем естественное допущение о том, что $a_1 \neq 0$ и положим $h_1 = a_1,\ r = 2$. Предположим, что уже найдены векторы $h_1, .., h_s$ $(s \geq 1)$. Очередной вектор ищем в виде

$$h_{s+1} = \lambda_1 h_1 + ...\lambda_s h_s + a_r,$$

выбирая коэффициенты так, чтобы выполнить условия

$$(h_i, h_{s+1}) = 0,\ (i = 1, .., s),$$

т.е., полагая

$$\lambda_i = -(a_r, h_i)/(h_i, h_i),\ (i = 1, .., s).$$

Если оказалось, что $h_{s+1} = 0$, и $r < k$, то увеличиваем r на 1 и вновь пытаемся найти ненулевой h_{s+1}. Если $h_{s+1} \neq 0$, приступаем к нахождению h_{s+2} и т.д.. Вычисления заканчиваются как только $r > k$.

5. Вторая форма процесса ортогонализации. Согласованными элементарными преобразованиями строк и столбцов (т.е. всякое преобразование строк должно сопровождаться точно таким же преобразованием столбцов и наоборот) приведем матрицу Грама системы $a_1, ..., a_s$ к диагональной матрице D и одновременно найдем матрицу T такую, что $D = T^T\ \Gamma_a\ T$. Ортогональный базис составляют ненулевые столбцы матрицы $(a_1, ..., a_s)T$.

6. Для произвольной линейно независимой системы векторов
$a_1, ..., a_n \in P^n$ можно определить скалярное произведение так, чтобы эти векторы составляли ортонормированный базис. Матрица Грама Γ_a должна удовлетворять равенствам $a_i^T \Gamma_a a_j = \begin{cases} 1 & \text{i = j} \\ 0 & \text{i} \neq \text{j} \end{cases}$, которые можно записать в матричной форме $A^T \Gamma_a A = E$, где A - матрица, по столбцам которой расположены векторы $a_1 ... a_n$ . . Следовательно, $\Gamma_a = (AA^T)^{-1}$.

7. Если X, Y - множества в евклидовом пространстве, то выражение $X \perp Y$ означает, что $(x, y) = 0\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y$. Множества X, Y называются ортогональными. Если X состоит из единственного вектора x, то используется запись $x \perp Y$. Если W - подпространство пространства V, то для любого $x \in V$ существует единственное представление вида $x = x_{prW} + x_{ortW}$, где $x_{prW} \in W, x_{ortW} \perp W$. x_{prW} называется проекцией, а x_{ortW} - ортогональной составляющей вектора x.

8. Пусть M множество решений системы уравнений $Ax = b$. Если M не пусто, то в M существует единственный вектор, имеющий наименьшую длину. Он называется нормальным решением. Для нахождения нормального решения достаточно найти любое решение p системы $AA^T x = b$, тогда $A^T p$ - нормальное решение.

9. Пусть строки матрицы $A(mxn)$ линейно независимы. Обозначим u^i нормальное решение системы $Ax = e_i$ при $i = 1, .., m$. Матрица $A^+ = (u^1 ... u^m)$ называется псевдообратной для A и играет роль обратной матрицы при решении систем с прямоугольной матрицей коэффициентов, а именно: нормальное решение системы $Ax = b$ может быть найдено по формуле $u = A^+ b$. **10.** Коэффициенты

систем линейных уравнений, возникающих в практических приложениях являются результатами измерений, которые не всегда можно выполнить точно, поэтому система может оказаться несовместной. В этом случае находят ***псевдорешение*** - такой набор x' неизвестных , для которого выполняется равенство $|Ax' - b| = \min\limits_x |Ax - b|$. Заметим, что если система совместна, то каждое ее решение является псевдорешением и наоборот. Поиск псевдорешений основан на следующих предложениях.

1 . Пусть L - линейная оболочка столбцов матрицы A, решение системы $Ax = b_{prL}$ является псевдорешением системы $Ax = b$.

2. Системы уравнений

$$Ax = b_{prL} \text{ и } A^T Ax = A^T b$$

имеют одинаковые множества решений.

11. Нормальное решение системы $A^TAx = A^Tb$ называется нормальным псевдорешением несовместной системы $Ax = b$.

Пример 1. Найти ортогональный базис подпространства, порожденного векторами $a_1 = (2, 1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 2, 0, 1)$, $a_3 = (4, 3, 1, 0)$, $a_4 = (3, 1, 1, -1)$.

Решение. 1. Полагаем $h_1 = a_1$.

2. Ищем λ такое, чтобы вектор $h_2 = \lambda h_1 + a_2$ был ортогонален вектору h_1.
$0 = (h_2, h_1) = \lambda(h_1, h_1) + (h_1, a_2) = 7\lambda + 7$. Отсюда $\lambda = -1$ и $h_2 = -h_1 + a_2 = (0, -1, 1, 0)^T$.

3. Ищем λ_1, λ_2 такие, чтобы вектор $h_3 = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + a_3$ был ортогонален векторам h_1 и h_2.

$$0 = (h_3, h_1) = \lambda_1(h_1, h_1) + (h_1, a_3) = 7\lambda_1 + 14,\ \lambda_1 = -2.$$

$$0 = (h_3, h_2) = \lambda_2(h_2, h_2) + (h_2, a_3) = 2\lambda_2 + 2,\ \lambda_2 = -1.$$

$$h_3 = -2h_1 - h_2 + a_3 = (0, 0, 0, 0)^T.$$

Нулевой вектор, разумеется, не может быть базисным. Эта ситуация возникла потому, что вектор a_3 линейно выражается через a_1, a_2. Следует повторить попытку нахождения вектора h_3.

4. Ищем λ_1, λ_2 такие, чтобы вектор $h_3 = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + a_4$ был ортогонален векторам h_1 и h_2.

$$0 = (h_3, h_1) = \lambda_1(h_1, h_1) + (h_1, a_4) = 7\lambda_1 + 7,\ \lambda_1 = -1.$$

$$0 = (h_3, h_2) = \lambda_2(h_2, h_2) + (h_2, a_4) = 2\lambda_2,\ \lambda_2 = 0.$$

$$h_3 = -h_1 + a_4 = (1, 0, 0, -2)^T.$$

Пример 2. Найти псевдорешение системы

$$\begin{cases} 2\mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 = 0 \\ 11\mathrm{x}_1 + 17\mathrm{x}_2 = 0 \\ 11\mathrm{x}_1 + 17\mathrm{x}_2 = 4 \\ 13\mathrm{x}_1 + 20\mathrm{x}_2 = 3 \end{cases}.$$

Решение. Чтобы избежать вычислений с большими числами, найдем подходящую замену неизвестных с тем, чтобы получить систему уравнений с небольшими коэффициентами. Для этого выполним несколько элементарных столбцов матрицы коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 17 \\ 11 & 17 \\ 13 & 20 \\ - & - \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{[2]-[1]}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 11 & 6 \\ 12 & 6 \\ 13 & 7 \\ - & - \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{[1]-2*[2]}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \\ -1 & 6 \\ -1 & 7 \\ - & - \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{-1*[1] \\ [2]+6*[1]}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ - & - \\ -3 & 17 \\ 2 & -11 \end{pmatrix}$$

Делая замену

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 17 \\ 2 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

сводим исходную задачу к задаче нахождения псевдорешения системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Домножаем обе части этого матричного равенства на транспонированную матрицу коэффициентов при неизвестных. Полученная в результате система

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

имеет решение $y_1 = y_2 = 1$. Вычисляем псевдорешение исходной системы

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 17 \\ 2 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти нормальное псевдорешение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Решение. Коэффициенты при неизвестных собираем в матрицу A, а из правых частей составляем вектор b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } A^T b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Теперь надо найти нормальное решение системы $A^T Ax = A^T b$. Так как первые два уравнения совпадают, то одно из них можно вычеркнуть. Получается система

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix},$$

которая сводится элементарными преобразованиями уравнений к системе

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Делаем замену неизвестных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ y_1 = 2, \ y_2 = 0.$$

Наконец, находим нормальное псевдорешение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В примерах $1 - 35$ надо найти:

a) псевдорешение системы $ax_1 + bx_2 = c$;
b) псевдообратную для матрицы $A^T = (a, b)$;
c) проекцию вектора $a + c$ *на* $L(a, b)$;
d) ортогональную составляющую вектора $b + c$ относительно $L(a, b)$.

1. $a^T = (2, -9, 24, 2),\ b^T = (3, -14, 37, 3),\ c^T = (-1, 1, 6, 0)$.
2. $a^T = (15, 2, 11, -9),\ b^T = (8, 1, 6, -5),\ c^T = (0, 10, 0, 1)$.
3. $a^T = (5, 13, 5, 8),\ b^T = (3, 10, 3, 7),\ c^T = (1, 3, 0, 0)$.
4. $a^T = (2, 13, 24, 11),\ b^T = (3, 20, 37, 17),\ c^T = (2, 2, 2, 3)$.
5. $a^T = (14, 5, 5, 19),\ b^T = (11, 4, 4, 15),\ c^T = (11, 4, 7, 19)$.
6. $a^T = (3, 2, 5, 3),\ b^T = (11, 7, 19, 11),\ c^T = (10, 8, 25, 11)$.
7. $a^T = (7, 3, 1, 2),\ b^T = (26, 11, 4, 7),\ c^T = (7, 13, 1, 3)$.
8. $a^T = (4, 19, 14, 5),\ b^T = (1, 15, 11, 4),\ c^T = (2, 18, 11, 4)$.
9. $a^T = (3, 4, 5, 1),\ b^T = (11, 15, 19, 4),\ c^T = (13, 17, 21, 7)$.
10. $a^T = (9, 11, 11, 20),\ b^T = (4, 5, 5, 9),\ c^T = (4, 5, 8, 13)$.
11. $a^T = (5, -1, 17, 5),\ b^T = (4, -1, 14, 4),\ c^T = (-1, 1, 6, 0)$.
12. $a^T = (16, 5, 6, -1),\ b^T = (13, 4, 5, -1),\ c^T = (0, 10, 0, 1)$.
13. $a^T = (5, 11, 5, 6),\ b^T = (4, 9, 4, 5),\ c^T = (6, 14, 5, 6)$.
14. $a^T = (5, 11, 17, 6),\ b^T = (4, 9, 14, 5),\ c^T = (2, 2, 2, 3)$.
15. $a^T = (2, 11, 11, 13),\ b^T = (-2, -16, -16, -19),\ c^T = (0, 0, 3, 4)$.
16. $a^T = (5, -23, 61, 5),\ b^T = (3, -14, 37, 3),\ c^T = (2, -13, 43, 3)$.
17. $a^T = (15, 2, 11, -9),\ b^T = (23, 3, 17, -14),\ c^T = (15, 12, 11, -8)$.
18. $a^T = (5, 13, 5, 8),\ b^T = (8, 23, 8, 15),\ c^T = (-7, -20, -8, -15)$.
19. $a^T = (-1, -7, -13, -6),\ b^T = (3, 20, 37, 17),\ c^T = (4, 15, 26, 14)$.
20. $a^T = (14, 5, 5, 19),\ b^T = (-11, -4, -4, -15),\ c^T = (-3, -1, 2, 0)$.
21. $a^T = (-8, -5, -14, -8),\ b^T = (11, 7, 19, 11),\ c^T = (2, 3, 11, 3)$.

22. $a^T=(7,3,1,2),\ b^T=(19,8,3,5),\ c^T=(7,13,1,3).$
23. $a^T=(4,19,14,5),\ b^T=(5,34,25,9),\ c^T=(2,18,11,4).$
24. $a^T=(14,19,24,5),\ b^T=(11,15,19,4),\ c^T=(13,17,21,7).$
25. $a^T=(9,11,11,20),\ b^T=(13,16,16,29),\ c^T=(-5,-6,-6,-7).$
26. $a^T=(14,-3,48,14),\ b^T=(9,-2,31,9),\ c^T=(8,-1,37,9).$
27. $a^T=(16,5,6,-1),\ b^T=(29,9,11,-2),\ c^T=(16,15,6,0).$
28. $a^T=(13,29,13,16),\ b^T=(4,9,4,5),\ c^T=(6,14,5,6).$
29. $a^T=(5,11,17,6),\ b^T=(9,20,31,11),\ c^T=(7,13,19,9).$
30. $a^T=(22,9,22,9),\ b^T=(-10,3,-10,3),\ c^T=(16,3,6,6).$
31. $a^T=(36,25,36,25),\ b^T=(-22,-11,-22,-11),\ c^T=(29,18,7,7).$
32. $a^T=(19,20,19,20),\ b^T=(-3,-4,-3,-4),\ c^T=(11,12,8,8).$
33. $a^T=(33,17,33,17),\ b^T=(-15,1,-15,1),\ c^T=(24,8,9,9).$
34. $a^T=(17,16,17,16),\ b^T=(-3,-4,-3,-4),\ c^T=(6,6,10,10).$
35. $a^T=(30,17,30,17),\ b^T=(-8,5,-8,5),\ c^T=(19,6,11,11).$

В примерах $36-62$ найти ортогональный базис подпространства, порожденного перечисленными векторами.

36. $a_1=(1,1,0,0)^T, a_2=(2,2,1,1)^T, a_3=(2,0,3,1)^T.$
37. $a_1=(1,0,1,0)^T, a_2=(1,1,3,1)^T, a_3=(-1,1,3,3)^T.$
38. $a_1=(1,1,1,1)^T, a_2=(3,4,2,-1)^T, a_3=(1,6,2,-5)^T.$
39. $a_1=(1,0,0,1)^T, a_2=(0,1,-1,4)^T, a_3=(-3,3,-1,5)^T.$
40. $a_1=(1,1,1,0)^T, a_2=(4,0,2,1)^T, a_3=(6,-4,1,-2)^T.$
41. $a_1=(1,1,0,0)^T, a_2=(1,1,1,1)^T, a_3=(3,1,2,0)^T.$
42. $a_1=(1,-1,1,2)^T, a_2=(3,-1,4,3)^T, a_3=(3,6,4,3)^T.$
43. $a_1=(1,0,1,0)^T, a_2=(0,1,2,1)^T, a_3=(1,0,3,2)^T.$
44. $a_1=(1,1,1,1)^T, a_2=(2,3,1,-2)^T, a_3=(1,5,3,-1)^T.$
45. $a_1=(1,0,0,1)^T, a_2=(-1,1,-1,3)^T, a_3=(0,2,0,4)^T.$
46. $a_1=(1,1,1,0)^T, a_2=(3,-1,1,1)^T, a_3=(5,-1,2,-3)^T.$
47. $a_1=(1,-1,1,2)^T, a_2=(2,0,3,1)^T, a_3=(3,4,3,6)^T.$
48. $a_1=(1,-1,1,1)^T, a_2=(3,-1,2,2)^T, a_3=(3,1,2,0)^T,$
$a_4=(9,-1,6,4)^T.$
49. $a_1=(1,1,-1,1)^T, a_2=(3,3,0,2)^T, a_3=(4,2,3,1)^T,$
$a_4=(0,-1,2,-1)^T.$
50. $a_1=(1,1,1,-1)^T, a_2=(2,1,3,-2)^T, a_3=(5,3,7,-5)^T,$
$a_4=(2,1,3,0)^T.$
51. $a_1=(2,1,1,-1)^T, a_2=(4,4,1,1)^T, a_3=(0,1,0,1)^T,$
$a_4=(2,5,0,-2)^T.$
52. $a_1=(1,1,0,0)^T, a_2=(3,3,1,1)^T, a_3=(3,1,2,0)^T,$
$a_4=(1,3,-1,1)^T.$
53. $a_1=(1,1,1,1)^T, a_2=(4,5,3,0)^T, a_3=(1,5,3,-1)^T,$
$a_4=(3,0,0,1)^T.$
54. $a_1=(1,0,1,0)^T, a_2=(2,1,4,1)^T, a_3=(3,1,5,1)^T,$
$a_4=(1,0,3,2)^T.$
55. $a_1=(1,0,0,1)^T, a_2=(1,1,-1,5)^T, a_3=(0,2,0,4)^T,$
$a_4=(3,1,-1,7)^T.$
56. $a_1=(1,1,1,0)^T, a_2=(5,1,3,1)^T, a_3=(5,-1,2,-3)^T,$
$a_4=(0,2,1,4)^T.$
57. $a_1=(1,-1,1,2)^T, a_2=(4,-2,5,5)^T, a_3=(3,4,3,6)^T,$
$a_4=(2,5,2,4)^T.$

58. $a_1 = (1,-1,1,1)^T, a_2 = (4,-2,3,3)^T, a_3 = (3,-1,2,0)^T$,
$a_4 = (4,-2,3,1)^T$.
59. $a_1 = (1,1,-1,1)^T, a_2 = (4,4,-1,3)^T, a_3 = (4,2,0,2)^T$,
$a_4 = (1,-1,-2,2)^T$.
60. $a_1 = (1,1,1,-1)^T, a_2 = (3,2,4,-3)^T, a_3 = (1,0,2,-1)^T$,
$a_4 = (3,1,3,-1)^T$.
61. $a_1 = (2,1,1,1)^T, a_2 = (6,5,2,2)^T, a_3 = (4,4,2,0)^T$,
$a_4 = (4,2,1,3)^T$.
62. $a_1 = (2,1,1,2)^T, a_2 = (2,0,2,2)^T, a_3 = (3,1,1,1)^T$,
$a_4 = (1,0,2,3)^T$.

В примерах $63-91$ определить скалярное произведение так, чтобы векторы a_1, a_2, a_3 составляли ортонормированную систему

63. $a_1 = (1,0,0)^T, a_2 = (1,1,0)^T, a_3 = (1,1,1)^T$.
64. $a_1 = (2,1,0)^T, a_2 = (1,1,0)^T, a_3 = (1,1,1)^T$.
65. $a_1 = (2,1,1)^T, a_2 = (3,2,1)^T, a_3 = (1,1,1)^T$.
66. $a_1 = (2,1,1)^T, a_2 = (2,1,0)^T, a_3 = (1,1,1)^T$.
67. $a_1 = (2,1,3)^T, a_2 = (2,1,2)^T, a_3 = (1,1,2)^T$.
68. $a_1 = (1,0,1)^T, a_2 = (2,1,2)^T, a_3 = (1,1,2)^T$.
69. $a_1 = (1,1,1)^T, a_2 = (2,3,2)^T, a_3 = (1,2,2)^T$.
70. $a_1 = (1,1,1)^T, a_2 = (-1,0,-1)^T, a_3 = (1,2,2)^T$.
71. $a_1 = (1,2,1)^T, a_2 = (-1,-1,-1)^T, a_3 = (1,4,2)^T$.
72. $a_1 = (3,2,1)^T, a_2 = (-2,-1,-1)^T, a_3 = (5,4,2)^T$.
73. $a_1 = (3,2,1)^T, a_2 = (-2,-1,-1)^T, a_3 = (3,3,1)^T$.
74. $a_1 = (0,-1,0)^T, a_2 = (2,1,1)^T, a_3 = (3,3,1)^T$.
75. $a_1 = (2,0,1)^T, a_2 = (2,1,1)^T, a_3 = (1,2,0)^T$.
76. $a_1 = (2,0,1)^T, a_2 = (2,1,2)^T, a_3 = (1,2,2)^T$.
77. $a_1 = (1,-2,-1)^T, a_2 = (2,1,2)^T, a_3 = (1,2,2)^T$.
78. $a_1 = (3,4,5)^T, a_2 = (1,-1,0)^T, a_3 = (2,1,2)^T$.
79. $a_1 = (3,4,5)^T, a_2 = (4,3,5)^T, a_3 = (1,2,2)^T$.
80. $a_1 = (3,4,5)^T, a_2 = (3,1,3)^T, a_3 = (-2,1,-1)^T$.
81. $a_1 = (1,5,4)^T, a_2 = (3,1,3)^T, a_3 = (-2,1,-1)^T$.
82. $a_1 = (0,3,2)^T, a_2 = (1,2,2)^T, a_3 = (-2,1,-1)^T$.
83. $a_1 = (2,3,2)^T, a_2 = (3,2,2)^T, a_3 = (-3,1,-1)^T$.
84. $a_1 = (-1,4,1)^T, a_2 = (3,2,2)^T, a_3 = (-3,1,-1)^T$.
85. $a_1 = (-1,4,1)^T, a_2 = (2,6,3)^T, a_3 = (-3,1,-1)^T$.
86. $a_1 = (0,4,1)^T, a_2 = (5,6,3)^T, a_3 = (-4,1,-1)^T$.
87. $a_1 = (0,4,1)^T, a_2 = (5,-2,1)^T, a_3 = (-4,1,-1)^T$.
88. $a_1 = (-4,5,0)^T, a_2 = (6,-2,1)^T, a_3 = (-5,1,-1)^T$.
89. $a_1 = (1,4,1)^T, a_2 = (6,-2,1)^T, a_3 = (-5,1,-1)^T$.
90. $a_1 = (1,4,5)^T, a_2 = (6,-2,-1)^T, a_3 = (-5,1,0)^T$.
91. $a_1 = (1,4,5)^T, a_2 = (6,-2,-1)^T, a_3 = (1,-1,-1)^T$.

В примерах 92-120 найти расстояние между линейными многообразиями.

92. $(1,-1,0,1)^T + t(7,8,-19,-8)^T$ и $(-7,13,-33,-7)^T + t(-19,1,8,10)^T$.
93. $(1,-1,0,1)^T + t(6,7,-16,-7)^T$ и $(-6,11,-28,-7)^T + t(-16,1,7,8)^T$.
94. $(1,-1,0,1)^T + t(5,6,-13,-6)^T$ и $(-5,9,-23,-7)^T + t(-13,1,6,6)^T$.
95. $(1,-1,0,1)^T + t(4,5,-10,-5)^T$ и $(-4,7,-18,-7)^T + t(-10,1,5,4)^T$.
96. $(1,-1,0,1)^T + t(3,4,-7,-4)^T$ и $(-3,5,-13,-7)^T + t(-7,1,4,2)^T$.
97. $(1,-1,0,1)^T + t(2,3,-4,-3)^T$ и $(-2,3,-8,-7)^T + t(-4,1,3,0)^T$.
98. $(1,-1,0,1)^T + t(1,2,-1,-2)^T$ и $(-1,1,-3,-7)^T + t(-1,1,2,-2)^T$.

99. $(1,-1,0,1)^T+t(0,1,2,-1)^T$ и $(0,-1,2,-7)^T+t(2,1,1,-4)^T$.
100. $(1,-1,0,1)^T+t(-1,0,5,0)^T$ и $(1,-3,7,-7)^T+t(5,1,0,-6)^T$.
101. $(1,-1,0,1)^T+t(-2,-1,8,1)^T$ и $(2,-5,12,-7)^T+t(8,1,-1,-8)^T$.
102. $(1,-1,0,1)^T+t(-3,-2,11,2)^T$ и $(3,-7,17,-7)^T+t(11,1,-2,-10)^T$.
103. $(1,-1,0,1)^T+t(-4,-3,14,3)^T$ и $(4,-9,22,-7)^T+t(14,1,-3,-12)^T$.
104. $(1,-1,0,1)^T+t(7,8,-19,-8)^T$ и $(-6,14,-32,-6)^T+t(-19,1,8,10)^T$.
105. $(1,-1,0,1)^T+t(6,7,-16,-7)^T$ и $(-5,12,-27,-6)^T+t(-16,1,7,8)^T$.
106. $(1,-1,0,1)^T+t(5,6,-13,-6)^T$ и $(-4,10,-22,-6)^T+t(-13,1,6,6)^T$.
107. $(1,-1,0,1)^T+t(4,5,-10,-5)^T$ и $(-3,8,-17,-6)^T+t(-10,1,5,4)^T$.
108. $(1,-1,0,1)^T+t(3,4,-7,-4)^T$ и $(-2,6,-12,-6)^T+t(-7,1,4,2)^T$.
109. $(1,-1,0,1)^T+t(2,3,-4,-3)^T$ и $(-1,4,-7,-6)^T+t(-4,1,3,0)^T$.
110. $(1,-1,0,1)^T+t(1,2,-1,-2)^T$ и $(0,2,-2,-6)^T+t(-1,1,2,-2)^T$.
111. $(1,-1,0,1)^T+t(0,1,2,-1)^T$ и $(1,0,3,-6)^T+t(2,1,1,-4)^T$.
112. $(1,-1,0,1)^T+t(-1,0,5,0)^T$ и $(2,-2,8,-6)^T+t(5,1,0,-6)^T$.
113. $(1,-1,0,1)^T+t(-2,-1,8,1)^T$ и $(3,-4,13,-6)^T+t(8,1,-1,-8)^T$.
114. $(1,-1,0,1)^T+t(-3,-2,11,2)^T$ и $(4,-6,18,-6)^T+t(11,1,-2,-10)^T$.
115. $(1,-1,0,1)^T+t(-4,-3,14,3)^T$ и $(5,-8,23,-6)^T+t(14,1,-3,-12)^T$.
116. $(1,-1,0,1)^T+t(7,8,-19,-8)^T$ и $(-5,15,-31,-5)^T+t(-19,1,8,10)^T$.
117. $(1,-1,0,1)^T+t(6,7,-16,-7)^T$ и $(-4,13,-26,-5)^T+t(-16,1,7,8)^T$.
118. $(1,-1,0,1)^T+t(5,6,-13,-6)^T$ и $(-3,11,-21,-5)^T+t(-13,1,6,6)^T$.
119. $(1,-1,0,1)^T+t(4,5,-10,-5)^T$ и $(-2,9,-16,-5)^T+t(-10,1,5,4)^T$.
120. $(1,-1,0,1)^T+t(3,4,-7,-4)^T$ и $(-1,7,-11,-5)^T+t(-7,1,4,2)^T$.