О задаче целочисленного программирования с бимодулярной матрицей.

С.И. Веселов, А.Ю. Чирков

Предлагается полиномиальный алгоритм нахождения целого решения системы линейных неравенств с матрицей коэффициентов полного ранга, в которой абсолютные значения миноров максимального размера не превышают 2. При некоторых дополнительных предположениях построен алгоритм решения задачи целочисленного линейного программирования.

1. Пусть Z^n - множество n- мерных векторов с целыми координатами, $A(mxn)$ - матрица с целыми элементами и несократимыми строками, $rankA = n$, модули миноров n-го порядка матрицы A не превышают 2, $b \in Z^m$, M - множество решений системы $Ax \leq b$, $M^Z = M \cap Z^n$.

Теорема 1 *Если M телесно, то M^Z не пусто.*

Доказательство. Пусть x^0 - крайняя точка множества M. Переставив, в случае необходимости, неравенства, можно добиться того, чтобы x^0 обращала в равенства первые n неравенств, причем каждое из них является $(n-1)$ - мерной гранью M. Так как строки матрицы A несократимы, то существует унимодулярная матрица S, первая строка которой совпадает с первой строкой матрицы A. Делая замену $y = Sx$ и полагая $y_1 = b_1$ получим систему неравенств с меньшим числом неизвестных и удовлетворяющую условиям теоремы.

Для завершения доказательства заметим, что при $n = 1$ утверждение очевидно.

Приведенное рассуждение содержит эффективный алгоритм поиска точки в M^Z, если для нахождения x^0 использовать алгоритм из [1], а для построения S применить метод из [2].

2. Пусть x^0 крайняя точка M,

$$I_0 = \{i | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = b_i\},$$

$$M_0 = \{x | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \leq b_i, i \in I_0\}.$$

Через A_0 обозначим подматрицу матрицы A, состоящую из строк, номера которых принадлежат I_0, $M_0^Z = M_0 \cap Z^n$.

Теорема 2 *Крайние точки множества M_0^Z лежат на ребрах M.*

Доказательство. Если $x^0 \in Z^n$, то x^0 является крайней для M_0^Z и принадлежит ребру M. Рассмотрим случай, когда $x^0 \notin Z^n$.

Пусть y - крайняя точка из M_0^Z. В конусе, состоящем из решений системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 0, \text{ при } i \in I_0 \cap \{i | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j < b_i\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \text{ при } i \in I_0 \cap \{i | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i\},$$

выберем ребро r так, чтобы координаты r равнялись, с точностью до знака, половинкам соответствующих миноров $(n-1)$- го порядка матрицы A_0. Из бимодулярности матрицы A следует, что

$$|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j| \leq 1, \forall i \in \{1, .., m\} \tag{1}$$

Предположим, что $r \in Z^n$. Из (1) следует, что $y + r \in M_0^Z$ и $y - r \in M_0^Z$, но тогда равенство $y = \frac{1}{2}(y+r) + \frac{1}{2}(y-r)$ противоречит тому, y - крайняя точка.

Таким образом $r \notin Z^n$. Пусть B невырожденная подматрица матрицы A_0, L - решетка, порожденная столбцами матрицы B^{-1}. Так как $\det L = \frac{1}{2}$, то индекс подрешетки Z^n в L равен 2 и, следовательно, L разбивается на два класса Z^n и $x^0 + Z^n$. Так как $r \in x^0 + Z^n$, то $x^0 + r \in Z^n$.

Рассмотрим векторы $p = x^0 + r$ и $q = 2y - p$. Из (1) следует, что $p \in M^Z$, $q \in M_0^Z$. Так как y крайняя точка, то из равенства $y = \frac{1}{2}(p+q)$ следует, что $y = p$. Утверждение доказано.

3. Если x^0 крайняя точка из M, в которой достигается максимум функции $f = \sum_j c_j x_j$, то, согласно теореме 2, $\max_{x \in M^Z} f$ достигается на некоторой точке u из M_0^Z. Если мощность I_0 близка к n, то нетрудно перечислить все ребра конуса $A_0 x \leq$, а затем указать u. Опираясь на это замечание, можно предложить эффективную процедуру нахождения точки u в предположении, что все миноры n - го порядка матрицы A_0 не равны 0. Из доказательства теоремы 2 следует, что u принадлежит одной из гиперплоскостей

$$\pi_1 : \quad \sum_j a_{ij} x_j = b_i,$$

$$\pi_2 : \quad \sum_j a_{ij} x_j = b_i - 1,$$

где $i \in I_0$. Каждая вершина множества $M_0 \cap \pi_2$ обращает в равенства ровно n неравенств, поэтому из каждой вершины исходит ровно n ребер. Просмотрев ребра из той вершины, на которой достигается максимум f, можно определить максимум на $M_0^Z \cap \pi_2$

Задача максимизации f на множестве $M_0^Z \cap \pi_1$ является задачей того же типа, что исходная, но с меньшим числом неизвестных.

Список литературы

[1] *Хачиян Л.Г* Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании. ЖВМиМФ,1980,т.20,№ 1, с.51-68.

[2] *Касселс Д.* Введение в геометрию чисел. Пер. с англ. Под ред. А.В. Малышева. М.:Мир, 1965, 421с.