Об агрегации линейных целочисленных уравнений.

С.И. Веселов

1. Обозначения и формулировка основного результата. Числа, рассматриваемые в этой работе, предполагаются целыми, векторы целочисленными, термин "решение", если это не оговорено особо, заменяет термин "неотрицательное целочисленное решение".

Уравнение $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j = d_0$ называется агрегирующим для системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

если оно имеет такое же множество решений, что и система (1).

Некоторые способы агрегации приведены в [1], другие, полученные позднее, в [2-4]. В [5-7] приведены нижние оценки коэффициентов агрегирующего уравнения. Из них вытекает основной результат Л.Г. Бабата, полученный при более сильных предположениях [8,9].

В настоящей статье приведены новые способы агрегации и новые оценки.

2. Способы агрегирования. Агрегируем систему, составляя подходящую линейную комбинацию ее уравнений. При этом предполагается неотрицательность аргументов системы, в связи с чем необходимо отметить, что систему, допускающую агрегирование, можно заменить эквивалентной системой с неотрицательными коэффициентами [10]. Рассматриваемую задачу сводим теперь к нахождению чисел $r_1, r_2, \ldots, r_m$ таких, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} r_i y_i = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i \tag{2}$$

имеет единственное решение. Как отмечалось выше, эта задача может быть решена многими способами, однако величина свободного члена агрегирующего уравнения растет весьма быстро с увеличением m, поэтому возникает задача построения наиболее экономного способа агрегирования. Первые известные способы находили агрегирующее уравнение путем последовательного "склеивания"двух уравнений [1]. В [2-4] предложено более экономное агрегирование, основанное на одновременном "склеивание"всех уравнений системы. Здесь сделан еще один шаг в этом направлении.

Обозначим: L - решетка, состоящая из неограниченных по знаку решений уравнения $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i y_i = 0$, $h_1, \ldots, h_{m-1}$ - базис L, H - матрица со строками $h_1, \ldots, h_{m-1}$, и полагаем $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Тогда решения уравнения (2) определяются по формуле $y = \sum\limits_{i=1}^{m-1} h_i t_i + b$ и, следовательно, (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда система неравенств

$$\sum_{i=1}^{m-1} h_i t_i \geqslant -b \tag{3}$$

обладает лишь тривиальным решением. Значит для нахождения $r = (r_1, \ldots, r_m)$ достаточно выбрать $h_1, \ldots, h_{m-1}$ так, чтобы:

а) эти векторы составляли бы базис решетки решений(в том числе неположительных) некоторого однородного уравнения,

б) система (3) имела бы единственное решение.

После этого определяем r, решая систему $Hr^T = 0$. Отметим, что для выполнения пункта а) необходимо и достаточно, чтобы миноры $(m-1)$-го порядка матрицы H были просты в совокупности [11]. Ниже приведены способы агрегации, полученные таким образом.

Теорема 1. *Если $b_1 + 1, \ldots, b_m + 1$ попарно просты и $r_i = \prod\limits_{k \neq i} (b_k + 1)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то* (2) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Покажем, что векторы $h_1 = (b_1 + 1, -b_2 - 1, 0, \ldots, 0)$, $h_2 = (0, b_2 + 1, -b_3 - 1, 0, \ldots, 0)$, …, $h_{m-1} = (0, \ldots, 0, b_{m-1} + 1, -b_m - 1)$ образуют базис L.

Во-первых, эти векторы принадлежат L, во-вторых, абсолютные значения миноров $(m-1)$-го порядка матрицы H равны $r_1, r_2, \ldots, r_m$ и, следовательно, просты в совокупности.

Теорема 2. *Если каждое из чисел $b_i + 1, \ldots, b_m + 1$ есть степень натурального s и $r_i = \prod\limits_{k<i} (b_k + 2) \prod\limits_{k>i} (b_k + 1)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то уравнение* (2) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Утверждение становиться очевидным, если заметить, что векторы $h_1 = (-b_1 - 2, b_2 + 1, 0, \ldots, 0)$, $h_2 = (0, -b_2 - 2, b_3 + 1, 0, \ldots, 0)$, …, $h_{m-1} = (0, \ldots, 0, -b_{m-1} - 2, b_m + 1)$ образуют базис L.

Теорема 3. *Пусть $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_m$, $r_1 = \prod\limits_{k \geqslant 2} (b_k + 1)$, $r_2 = r_1 + \dfrac{r_1}{b_2 + 1}$, $r_3 = r_2 + \dfrac{r_2 - r_1}{b_3 + 1}$, …, $r_{m-1} = r_{m-2} + \dfrac{r_{m-2} - r_{m-3}}{b_{m-1} + 1}$, $r_m = r_{m-1} + 1$. Тогда уравнение* (2) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Докажем, что векторы $h_1 = (-b_2 - 2, b_2 + 1, 0, \ldots, 0)$, $h_2 = (1, -b_3 - 2, b_3 + 1, 0, \ldots, 0)$, …, $h_{m-1} = (0, \ldots, 0, -b_m - 2, b_m + 1)$ образуют базис L. Из формул для $r_1, \ldots, r_m$ следует, что эти векторы принадлежат решетке. С другой стороны, известно (см., например, [12]), что найдется такое s при котором абсолютные значения миноров $(m-1)$-го порядка матрицы H равны $sr_1, sr_2, \ldots, sr_m$. Так как минор, расположенный в столбцах с номерами $2, 3, \ldots, m$, равен r_1, то $s = 1$. Следовательно наибольший общий делитель d миноров $(m-1)$-го порядка матрица H совпадает с наибольшим общим делителем чисел $r_1, \ldots, r_m$, но r_{m-1} и r_m взаимно просты, следовательно, $d = 1$ и значит, векторы $h_1, h_2, \ldots, h_{m-1}$ составляют базис L.

Покажем теперь, что система неравенств

$$-(b_2+2)t_1 + t_2 \geqslant -b_1$$

$$(b_2+1)t_1 - (b_3+2)t_2 + t_3 \geqslant -b_2$$

$$\ldots$$

$$(b_{m-1}+1)t_{m-2} - (b_m+2)t_{m-1} \geqslant -b_{m-1}$$

$$(b_m+1)t_{m-1} \geqslant -b_m$$

имеет единственное решение. Из последнего неравенства системы имеем $t_{m-1} \geqslant 0$. Отсюда и из $(m-1)$-го неравенства, учитывая упорядоченность $b_1, \ldots, b_m$, получаем $t_{m-2} \geqslant t_{t-1}$. Индукцией по k нетрудно убедиться в справедливости неравенства $t_k \geqslant t_{k+1}$ при любом k. Из неравенства $t_1 \geqslant t_2$ и первого неравенства системы следует, что $t_1 = 0$, значит равны нулю и остальные компоненты решения. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если уравнение $\sum_{i=1}^{m} r_i y_i = \sum_{i=1}^{m} r_i b'_i$ имеет единственное решение и $0 \leqslant b_i \leqslant b'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, то уравнение $\sum_{i=1}^{m} r_i y_i = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i$ также имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть найдутся $p_1, \ldots, p_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} r_i p_i = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i$ и $p_l \neq b_l$ по крайней мере для одного l. Тогда вектор $(p_1 + b'_1 - b_1, \ldots, p_m + b'_m - b_m)$ является решением уравнения $\sum_{i=1}^{m} r_i y_i = \sum_{i=1}^{m} r_i b'_i$, причем $b'_l \neq p_l + b'_l - b_l$. Последнее потиворечит условию теоремы, что доказывает ее справедливость.

Для использования теоремы 2 в случае произвольных $b_1, b_2, \ldots, b_m$ можно положить $b'_i = s^{]\log_s(b_i+1)[} - 1$, где $]c[$ - ближайшее сверху целое к числу c, и применить теорему 4, причем s следует выбирать так, чтобы получить уравнение с возможно меньшими коэффициентами.

Для широкого применения теоремы 1 необходим алгоритм нахождения попарно простых $n_1, n_2, \ldots, n_m$, удовлетворяющих неравенствам $n_i \geqslant b_i + 1$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Автору не удалось получить достаточно удовлетворительного решения этой задачи при

$m \geqslant 3$. Нетрудно, однако, привести примеры систем линейных уравнений,которые лучше агрегировать по теореме 1. Аналогичные примеры существуют и для теоремы 2. По-видимому, в этом смысле теорема 3 имеет наиболее широкую область применения. При агрегации конкретной системы часто удается улучшить результат этой теоремы, используя построения, аналогичные тем, которые использовались при ее доказательстве. В качестве иллюстрации найдем уравнение, имеющее единственное решение $y_1 = 9$, $y_2 = 5$, $y_3 = 3$, $y_4 = 1$. Согласно методу, изложенному в теореме 3, достаточно найти k_1, k_2, k_3, k_4 такие, что:

a) наибольший общий делитель миноров третьего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} -k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ 1 & -k_2-1 & k_3 & 0 \\ 0 & 1 & -k_3-1 & k_4 \end{pmatrix}$$

равняется 1,

b) система неравенств

$$-k_1 t_1 + t_2 \geqslant -9$$
$$k_2 t_1 - (k_2+1)t_2 + t_3 \geqslant -5$$
$$k_3 t_2 - (k_3+1)t_3 \geqslant -3$$
$$k_4 t_3 \geqslant -1$$

имеет лишь тривиальное решение.

Условие b) будет выполнено, если выбрать $k_4 \geqslant 2$, $k_3 \geqslant 4$, $k_2 \geqslant 6$, $k_1 1 \geqslant 11$. Выберем попарно простые $k_1 = 11$, $k_2 = 6$. Найдем k_3 такое, чтобы наибольший общий делитель миноров вторго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} -11 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & k_3 \end{pmatrix}$$

равнялся 1. Полагаем $k_3 = 4$. Миноры третьего порядка

$$\begin{pmatrix} -11 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & k_4 \end{pmatrix}$$

равны $24k_4$, $44k_4$, $71k_4$, 311. Для выполнения условия a) достаточно выбрать $k_4 = 2$. Искомое уравнение $48y_1 + 88y_2 + 142y_3 + 311y_4 = 1609$.

Сравним теорему 3 с аналогичными результатами, полученными в [3] и [4].

Т е о р е м а 5. [3] *Пусть* $b = \max_i b_i$ *и* $r_i = \dfrac{(b+1)^m - (b+1)^{i-1}}{b}$. *Тогда уравнение имеет единственное решение.*

Докажем, что агрегирование по этому способу хуже агрегирования по теореме 3, например, в случае, когда $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{m-1} < b_m$. Действительно,

$$(b+1)^{m-1} \geqslant \prod_{i=2}^{m-1}(b_i+2)(b_m+1) = \prod_{i\geqslant 2}(b_i+1) + s(b_m+1),$$

где s - сумма всевозможных произведений чисел $(b_1+1), \ldots, (b_{m-1}+1)$, содержащих k сомножителей $(0 \leqslant k \leqslant m-2)$. Отсюда получаем, что минимальный коэффициент из теоремы 5 больше максимального коэффициента из теоремы 3. Следовательно, теорема 3 дает более экономный способ агрегирования. Заметим также, что теорема 5 вытекает из теорем 3 и 4.

Теорема 6. [4] *Пусть* $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{m-1} < b_m$ *и* $r_i = \prod_k (b_k+1) - \prod_{k\geqslant i+1}(b_k+1)$. *Тогда уравнение* (2) *имеет единственное решение.*

Обозначим через d наибольший общий делитель чисел $r_1, r_2, \ldots, r_m$, определенных в теореме 6, и положим $r'_i = r_i/d$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Теорема 7. *Пусть* c_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *такие же, как в условии теоремы 3. Тогда* $c_i \leqslant r'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Доказательство. Докажем вначале, что $d \leqslant b_1$. Рассмотрим $r_1 = b_1 \prod_{k\geqslant 2}(b_k+1)$ и $\prod_k (b_k+1) - 1$. Общим делителем этих чисел может быть только делитель b_1, откуда вытекает требуемое. Далее имеем $r'_1 = \frac{r_1}{d} \geqslant \prod_{k\geqslant 2}(b_k+1) = c_1$. Предположим, что $r'_i \geqslant c_i$ при $i \leqslant k-1$. Докажем, что $r'_k \geqslant c_k$. Нетрудно проверить, что при $k \geqslant 2$ $r_k \geqslant r_{k-1} + r_1/\prod_{j\leqslant k-1}(b_j+1)$. Сокращая это неравенство на d, получаем $r'_k \geqslant r'_{k-1} + r'_1/\prod_{j\leqslant k-1}(b_j+1)$. Согласно предположению индукции, выводим $r'_k \geqslant c_{k-1} + c_1/\prod_{j\leqslant k-1}(b_j+1) \geqslant c_k$.

В заключении этого раздела укажем способ нахождения простых n_1 и n_2, которые удовлетворяют неравенствам $n_1 \geqslant b_1$ и $n_2 \geqslant b_2$. Этот способ часто более приемлем, чем выбор последовательных натуральных чисел из множества $\{c-1, c, c+1\}$, где $c = max\{b_1, b_2\}$. Основан он на следующем утверждении.

Теорема 8. *Пусть* $d = (b_1, b_2)$, b_1 *и* b_2 *таковы, что* $b'_1 b_1 - b'_2 b_2 = 1$. *Тогда* $(b_1 + b'_2, b_2 + b'_1) = 1$.

Доказательство. Очевидно, что компоненты любого решения уравнения $b_1 x - b_2 y = d$ взаимно просты. Осталось заметить, что $x = b_2 + b'_1$, $y = b_1 + b'_2$ - одно из решений.

3. Оценки.

Т е о р е м а 9. *Пусть уравнение* (2) *имеет единственное решение* $y = b$*, принадлежащее множеству* $K = \{(y_1, \ldots, y_m)|0 \leqslant y_i \leqslant d_i(1 \leqslant i \leqslant n)y_i \geqslant 0(n+1 \leqslant i \leqslant m)\}$*. Пусть* $d_i' = min\{b_i, d_i - b_i\}$*. Тогда справедливо:*

a) если $n < m$*, то*

$$r_j \geqslant \prod_{i \leqslant n}^{i}(d_1' + 1) \prod_{i>n, i\neq j}(b_i + 1),$$

b) если $n = m$*, то* $\sum\limits_i r_i b_i \geqslant \prod\limits_i (d_i' + 1) - 1$.

Доказательство. a) Обозначим через H_j матрицу, полученную из H отбрасыванием j-го столбца $(n+1 \leqslant j \leqslant m)$. Так как $|detH_j| = r_i$, то из неравенства

$$r_j < \prod_{i \leqslant n}^{i}(d_1' + 1) \prod_{i>n, i\neq j}(b_i + 1),$$

и теоремы Минковского о выпуклом теле [11], следует, что система

$$|xH_j| \leqslant (d_1', \ldots, d_n', b_{n+1}, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_m)$$

имеет ненулевое решение $x = a$ с неограниченными по знаку компонентами. В этом случае один из векторов $b + aH$, $b - aH$ отличное от b решением уравнения (2). Это противоречит условию теоремы, следовательно,

$$r_j \geqslant \prod_{i \leqslant n}^{i}(d_1' + 1) \prod_{i>n, i\neq j}(b_i + 1).$$

b) Утверждение следует из теоремы 4.

С л е д с т в и е 1. *Если уравнение* (2) *имеет единственное решение, то* $r_j \geqslant \prod\limits_{i\neq j}(b_i+1)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

Из теоремы 1 вытекает, что последняя оценка неулучшаема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация. Минск: Белорус. госун-т, 1977.-192с.

2. Бабаев Дж. А., Мамедов К.Ш. Агрегации одного класса систем целочисленных уравнений. - Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1978, 18,;3, с. 29-34.

3. Князев П.М. Метод агрегации систем целочисленных уравнений. - М. : 1980. - 12 с. - (Препринт/ ВИНИТИ; 2305-80).

4. Aggregation of nonnegative integer - valued equatios: Rep./Univ. of Colorado; D.A. Babayev, F. Clover. - №80-2.-Colorado, 1980.

5. Веселов С.И., Шевченко В.Н. Об экспотенциальном росте коэффициентов агрегирующего уравнения. - В кню: Тез. докл. 4 Всесоюзн. конф. по пробл. теорет. кибернетики. - Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. - 53 с.

6. Веселов С.И., Шевченко В.Н. Об экспотенциальном росте коэффициентов агрегирующего уравнения. - Кибернетика, 1978, №4, с. 78-79.

7. Веселов С.И., Шевченко В.Н. Некоторые следствия теоремы Минковского о выпуклом теле и агрегации линейных диофантовых уравнений. - В кн.: Тез. докл. 5 Всесоюзн. конф. по пробл. теорет. кибернетики. - Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. - 47с.

8. Бабат Л.Г. О целочисленном линейном агрегировании. - Экономика и мат. методы, 1977, 13, №3, с. 599-601.

9. Бабат Л.Г. О росте коэффициентов при целочисленном линейном программировании. Мат. методы реш. экон. задач, 1979, №8, с. 34-43.

10. Шевченко В.Н. Дискретный аналог теоремы. Фаркаша и проблема агрегации систем линейных целочисленных уравнений. - Кибернетика, 1976, №2, с. 99-101.

11. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. - М: Мир, 1965. - 416с.

12. Веселов С.И. Шевченко В.Н. Оценки минимального расстояния между точками некоторых целочисленных решеток. - В кн.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1980, с. 26-33.