Новый способ сведения ЗЦЛП к задаче о рюкзаке.

С.И. Веселов

г.Нижний Новгород

1. Введение. Агрегацией систем линейных уравнений с целыми коэффициентами называется процесс нахождения уравнения с целыми неотрицательными коэффициентами, эквивалентного исходной системе в том смысле, что множества неотрицательных целых решений уравнения и системы совпадают. Обзор методов нахождения агрегирующего уравнения приведен в книге [1]. В работах [2],[3] изложены методы, не вошедшие в эту книгу. Агрегация позволяет сводить общую задачу целочисленного линейного программирования к задаче о рюкзаке. Принципиальным недостатком агрегации является экспоненциальная зависисмость коэффициентов агрегирующего уравнения от числа уравнений системы [4]. В связи с этим можно поставить вопрос о нахождении способа сведения общей задачи к задаче о рюкзаке с возможно меньшим свободным членом. Предлагаемый здесь подход, насколько мне известно, в литературе не описан и основан на том простом соображении, что поскольку оптимум в задачах ЦЛП достигается на крайних точках, то достаточно найти уравнение, среди крайних точек множества неотрицательных целых решений которого содержатся все крайние точки множества неотрицательных целых решений системы. Такое уравнение будем называть К-агрегирующим. Хотя в новом способе не удалось устранить упомянутый недостаток, он приводит к уравнению с меньшими значением свободного члена, чем у любого способа агрегации.

2. Нахождение К-агрегирующего уравнения. Пусть A матрица размеров $m \times n$ с неотрицательными целыми элементами, $b = (b_1, .., b_m)^T$ - целый вектор, $f = (1, b_1 + 1, .., \prod_{i=1}^{m-1}(b_i + 1))$, M - множество неотрицательных целых решений системы уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

Лемма 1 *Точка b является крайней в множестве N неотрицательных целых решений уравнения*

$$ft = fb \tag{2}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\min_{t \in N}(t_1 + .. + t_m)$$

достигается только при $t = b$, следовательно b - крайняя.

Теорема 1 *Если $M \neq \emptyset$, то уравнение*

$$fAx = fb \tag{3}$$

является К-агрегирующим для системы (1).

Доказательство. Пусть M' - множество неотрицательных целых решений уравнения (3). Очевидно, что достаточно показать, что точка $x^0 \in M$ не крайняя для M' будет не крайней для M. Пусть $x^1, ..x^r$ точки из M' отличные от x^0 и

$$x^0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i,\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\,(i = 1, .., r) \tag{4}$$

Тогда

$$Ax^0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Ax^i,\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\,(i = 1, .., r) \tag{5}$$

Так как каждый из векторов $Ax^i (i = 1, .., r)$ является неотрицательным целым решением уравнения (2) и $Ax^0 = b$, то из леммы и соотношений (5) следует, что $Ax^i = b$, то есть $x_i \in M(i = 1, .., r)$. Соотношения (4) означают, что x^0 не крайняя для M.

3. Сведение к задаче орюкзаке. Рассмотрим задачу

$$\text{Найти} \min_{x \in M} cx \tag{6}$$

Пусть L - целое число превышающее значение целевой функции; e - строка из m единиц; k - целое число, удовлетворяющее неравенству $c + keA \geq 0$; $H = L + keb + 1$.

Теорема 2 *Если $M \neq \emptyset$, то решением задачи (6) является решение задачи*

$$\begin{gathered} \text{Найти} \quad \min(cx + HeAx) \\ \text{при} \quad \text{условии} \quad fAx = fb \\ x - \quad \text{целый неотрицательный.} \end{gathered} \tag{7}$$

Доказательство. Пусть x^0 такой вектор, что $Ax^) \neq b$. Тогда из леммы следует, что

$$c^T x^0 + He^T Ax^0 \geq (H - k)(e^T b + 1) = k(e^T b)^2 + (L + k + 1)e^T b + L + 1.$$

С другой стороны, существует x' такой, что $c^T x' \leq L$ и $Ax' = b$, следовательно,

$$c^T x' + He^T Ax' \leq L + He^T b = k(e^T b)^2 + (L + k + 1)e^T b + L.$$

Таким образом, решение задачи (7) удовлетворяет системе (1) и, следовательно, является решением задачи (6).

4. Нижняя оценка величины свободного члена. Рассмотрим К-агрегирующее уравнение

$$a^T x = a_0, \tag{8}$$

где $a \geq 0$, для системы (1). Пусть $x^0 = (x_1^0, .., x_n^0)$ - крайняя точка в множестве M.

Теорема 3 $a_0 \geq \prod_{i=1}^{n} (x_i^0 + 1) - 1$

Доказательство.Предположим, что нашлись t^1, t^2 такие, что

$$t^1 \neq t^2, 0 \leq t^1 \leq x^0, 0 \leq t^2 \leq x^0, a^T t^1 = a^T t^2,$$

тогда точки

$$x^1 = x^0 - t^1 + t^2, x^2 = x^0 + t^1 - t^2$$

являются неотрицательными целыми решениями уравнения (8) и

$$x^0 = \frac{1}{2}(x^1 + x^2).$$

Но это равенство противоречит тому, что x^0 крайняя точка. Следовательно, $a^T t$ при $0 \leq t \leq x^0$ принимает $\prod_{i=1}^{n} (x_i^0 + 1)$ различных целых неотрицательных значений, не превышающих a_0, откуда и следует утверждение.

Список литературы

[1] *Ковалев М.М.* Дискретная оптимизация.-Минск, БГУ, 1977.

[2] *Князев П.М.* Метод агрегации систем целочисленных уравнений.-Рук.деп. в ВИНИТИ. №2305-80

[3] *D.A.Babayev, F.Glover.* Aggregation of nonnegative integer-valued equations. Management Science/ Information Science Report Series, Report No. 80-2, July,1980.

[4] *Веселов С.И., Шевченко В.Н.* Об экспоненциальном росте коэффициентов агрегирующего уравнения.- Кибернетика, 1978, № 4.