Математическое моделирование и оптимальное управление
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2008, № 1, с. 118–123

УДК 511.843

О ВЕРШИНАХ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ЦЕЛЫХ ПОЛИЭДРОВ

С.И. Веселов, А.Ю. Чирков

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vesi@uic.nnov.ru

Поступила в редакцию 24.01.2008

Приведен обзор результатов о вершинах выпуклой оболочки всех целых точек, содержащихся в полиэдре. Большинство результатов сопровождается краткими доказательствами.

Ключевые слова: полиэдры, вершина выпуклой оболочки, целые точки.

Введение

Целым называется полиэдр, у которого все вершины имеют целые координаты. Множество вершин полиэдра P обозначаем через $V(P)$. Рассматриваются целые полиэдры $P_I = conv \times \times (P \cap Z^d)$ заданные неявно, т.е. известны матрица A и вектор b такие, что $P = \{x: Ax \le b\}$, но неизвестна система линейных ограничений для полиэдра P_I. Число вершин в P_I может быть как угодно большим даже в случае, когда P – треугольник. В [1] приведена геометрическая интерпретация подходящих дробей к числу $(1+\sqrt{5})/2$, из которой следует, что выпуклая оболочка целых решений системы неравенств $-(1+\sqrt{5})x_1 + 2x_2 < 0$, $x_1 \le f_{2s-1}$, $x_2 \ge 0$, имеет $s+2$ вершины $p_0 = (1,0)$, $p_k = p_{k-1} + (f_{2k-2}, f_{2k-1}) = (f_{2k-1}, f_{2k})$ $(1 \le k \le s)$, $p_{s+1} = (f_{2s-1}, 0)$. Числа f_k являются элементами последовательности Фибоначчи: $f_{-1} = 1$, $f_0 = 0$, $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ $(k \ge 1)$. В [2] этот пример немного изменен: полиэдр $\{x: f_{2s}x_1 + f_{2s+1}x_2 \le f_{2s+1}^2 - 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}_I$ имеет вершины $p_0 = (0, f_{2s+1} - 1)$, $p_k = p_{k-1} + (f_{2k-1}, -f_{2k-2}) = (f_{2k}, f_{2s+1} - f_{2k-1})$ $(1 \le k \le s+1)$, $p_{s+2} = (0,0)$.

Обозначим $P_d(A,b) = \{x: Ax \le b\}_I$, где $A \in Z^{d \times d}$, $rank\, A = d$, $b \in Z^d$. В [3] (см. также [4]) изучался вопрос о числе вершин в $P_2(A,b)$.

Найдены последовательности $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_k = 2\beta_{k-1} + \beta_{k-2}$ $(k \ge 3)$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_k = \gamma_{k-2} + \beta_{k-1} + 2\beta_{k-2}$ $(k \ge 3)$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$, $\eta_k = \eta_{k-2} + 2\beta_{k-1} - \beta_{k-2}$ $(k \ge 3)$ такие, что каждый из полиэдров $\{x: \beta_k x_1 + \beta_{k-1}x_2 \le \le \gamma_k,\ x_2 \le 0\}_I$ и $\{x: \beta_k x_1 - \beta_{k-1}x_2 \le \eta_k,\ x_2 \le 0\}_I$ имеет k вершин. Доказано, что если $|\det A| < \beta_k$, то число вершин в полиэдре $P_2(A,b)$ меньше k.

В следующем разделе излагается способ нахождения коллекции полиэдров $P_2(A,b)$ с заданным числом вершин. Он основан на соображениях первого алгоритма нахождения двумерного полиэдра P_I, опубликованного в [5] (см. также [4]). Идею алгоритма поясним на примере полиэдра $\{-\alpha x_1 + \beta x_2 \le \gamma,\ x_2 \ge 0\}_I$ с положительными целыми α, β. Назовем весом произвольного вектора $u = (u_1, u_2)$ величину $w(u) = -\alpha u_1 + \beta u_2$. Направляющие векторы ребер принадлежат последовательности $h_1 = (-1,0)$, $h_2 = (0,1)$, $h_{k+1} = \left\lceil \frac{w(h_{k-1})}{w(h_k)} \right\rceil h_k - h_{k-1}$ $(k = 2,\ldots,n)$, заканчивающейся вектором с нулевым весом. Вершины вычисляются в порядке обхода полиэдра по часовой стрелке, начиная с $T_1 = (\lfloor \gamma/\alpha \rfloor, 0)$. Похожие алгоритмы получены в работах [6, 7]. Верхняя оценка временной сложности всех алгоритмов равна $O(m \log a)$, где m – число неравенств в системе, задающей P, a – наибольший по модулю коэффициент.

Точка с целыми координатами, принадлежащая полиэдру, называется неприводимой, если она не представима полусуммой двух других целых точек этого полиэдра. Всякая вершина целого полиэдра неприводима, но не всякая неприводимая точка – вершина. Например, неприводимая точка (1,0) не является вершиной в полиэдре $conv((0,0),(0,1),(3,-1))$. Известные верхние оценки числа вершин в целых полиэдрах получены в результате оценки числа именно неприводимых точек. В работе [8] введено следующее понятие: $M \subseteq Z_+^d$ обладает свойством *разделенности,* если из условий $x, y \in M$, $2x \ge y$ следует, что $x = y$. Число точек разделенного множества, удовлетворяющих неравенствам $\psi_i \le x_i \le \omega_i \times$ $\times (1 \le i \le d-1)$, не превышает $\prod_{i=1}^{d-1} 1 + \big(\log_2(\omega_i +$ $+2)/(\psi_i+1)\big)$. Этот факт применялся для оценки числа вершин различных целых полиэдров [10, 13]. Впоследствии этот же подход получил развитие в [14, 15]. В разделах 3–5 мы приводим обзор результатов о вершинах.

В разделе 6 приведено описание семейства полиэдров P из работы [14], заданных системами с иррациональными коэффициентами, с известной нижней оценкой для $|V(P_I)|$. При $d > 2$ пока неизвестны последовательности полиэдров $P_d(A,b)$, для которых нижняя оценка числа вершин совпадала бы по порядку с верхней.

Некоторые результаты, не упомянутые в этой статье, можно найти в [21].

2. Построение полиэдров $P_2(A,b)$ с заданным числом вершин

Цепочку векторов $h_1,\dots,h_n = \{\beta,\ \alpha\}$ назовем *правильной*, если первые $k-1$ векторов являются последовательными ребрами полиэдра $\{x : -\alpha x_1 + \beta x_2 \le \gamma,\ x_2 \ge 0\}_I$ с целыми положительными α, β.

Очевидны следующие свойства правильной цепочки.

1. Любая часть правильной цепочки является правильной.
2. Для всякого $k \ge 3$ найдутся такие $\lambda_k > 0,\ \mu_k > 0$, что $h_k = \lambda_k h_{k-1} - \mu_k h_{k-2}$.
3. Для всякого $k \ge 3$ справедливо неравенство

$$h_k > h_1 + \dots + h_{k-1}\,. \qquad (1)$$

Цепочку векторов $h_1,\dots,h_n$ назовем *регулярной,* если $h_k = \lambda_k h_{k-1} - h_{k-2}$, $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \in Z$ $(k \ge 3)$, и *примитивной,* если $\det(h_1, h_2) = -1$.

Нетрудно показать, что регулярная примитивная цепочка, удовлетворяющая неравенству (1), является правильной.

Для построения полиэдра с k вершинами надо сначала выбрать векторы h_1, h_2 с неотрицательными целыми координатами такие, что $h_1 < h_2$ и $\det(h_1,h_2) = -1$. Предположим, что уже найдены $h_1,\dots,h_s (s < k)$. Выберем целое λ_{s+1} такое, что $\lambda_{s+1} h_s - h_{s-1} > h_1 + \dots + h_s$ и положим $h_{s+1} = \lambda_{s+1} h_s - h_{s-1}$. Пусть найден вектор $h_k = (h_{k,1}, h_{k,2})$. Тогда точки $T_1 = (0,0)$, $T_2 = T_1 + h_1, \dots$, $T_k = T_{k-1} + h_{k-1} = (t_1, t_2)$ являются вершинами полиэдра $\{x : -h_{k,2}x_1 + h_{k,1}x_2 \le -h_{k,2}t_1 + h_{k,1}t_2$, $x_2 \ge 0\}_I$.

Сформулируем несколько предложений о свойствах коэффициентов в правильных цепочках.

Предложение 1. Для всякого k выполняется неравенство $\lambda_k \ge 2$.

Предложение 2. Если $h_1,\dots,h_n$ – правильная примитивная цепочка и $h_{n+1} = \lambda h_n - h_{n-1}$, то $h_1,\dots,h_n, h_{n+1}$ будет правильной цепочкой при $\lambda \ge 3$.

Доказательство. $\lambda_{n+1} \ge 3\lambda_n - \lambda_{n-1} > \lambda_n +$ $+ 2(\lambda_{n-1} + \dots + \lambda_1) - \lambda_{n-1} > \lambda_n + \dots + \lambda_1$.

Если выбрать $h_1 = (0,1)$, $h_2 = (1,2)$, то регулярная цепочка с коэффициентами $\lambda_i = 3$ $(3 \le i \le s)$ образует последовательность ребер многоугольника Клейна (см. пример выше).

Предложение 3. Пусть $\lambda_m = \lambda_s = 2$. Тогда найдется l такое, что $m < l < s$ и $\lambda_l \ge 4$.

Доказательство. Из соотношений $\lambda_s =$ $= 2\lambda_{s-1} - \lambda_{s-2}$, $\lambda_s > \lambda_{s-1} + \dots + \lambda_1$ следует, что $\lambda_{s-1} > 2\lambda_{s-2} + \dots + \lambda_1$, поэтому $\lambda_{s-1} \ge 3$. Если $\lambda_{s-1} \ge 4$, то предложение доказано. Если $\lambda_{s-1} = 3$, то $3\lambda_{s-2} - \lambda_{s-3} > 2\lambda_{s-1} + \dots + \lambda_1$, $\lambda_{s-2} > 2\lambda_{s-3} + \dots + \lambda_1$. Таким образом, тройке должен предшествовать коэффициент не меньший 3, а поскольку $\lambda_m = 2$, то между λ_m и λ_s должна встретиться 4.

Следующее предложение означает, что правильная нерегулярная цепочка с рациональными коэффициентами может быть вложена в регулярную цепочку.

Предложение 4. Если целые векторы u, v и w связаны равенством $du = \lambda v - \mu w$, где λ, μ – несократимые целые числа, то существуют целое число d и регулярная цепочка, начинающаяся в w и заканчивающаяся в du.

Доказательство. Применим к числам λ и μ процедуру подобную алгоритму Евклида.

$$\lambda = d_1\mu - r_1,\ 0 \le r_1 < \mu,$$

$$\mu = d_2 r_1 - r_2,\ 0 \le r_2 < r_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_s = d_{s+2} r_{s+1} - r_{s+2},\ r_{s+2} = 1.$$

Искомую цепочку образуют векторы w, $p_1 = d_1 v - w$, $p_2 = d_2 p_1 - v$, $p_3 = d_3 p_2 - p_1$, ..., $p_{s+2} = d_{s+2} p_{s+1} - p_s$, $du = r_{s+1} p_{s+2} - p_{s+1}$.

Предложение 5. Если в регулярной цепочке $h_1,\ldots,h_n$ для некоторых s и m выполняются равенства $\lambda_s = \lambda_{s+1} = \ldots = \lambda_m = 2$, то $h_i = (i-s+2)h_{s-1} - (i-s+1)h_{s-2}$ $(s \le i \le m)$.

3. Оценка числа вершин в задаче групповой минимизации

Пусть $A \in Z^{d\times d}$ – невырожденная матрица. Полиэдр $T = \{t \ge 0 : t = b - Ax\}_I$ называется полиэдром задачи групповой минимизации. Формула $t = b - Ax$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие как между вершинами $P_d(A,b)$ и T, так и между их неприводимыми точками. В [8] показано, что число неприводимых точек в T не превышает $(\log_2 \Delta + 1)^{d-1}$, где $\Delta = \det A$.

В [12] оценивается снизу среднее число неприводимых точек и вершин в целых полиэдров из класса G_a, образованного полиэдрами $P = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{d-1}x_{d-1} + ax_d \le b,$ $x_i \ge 0\,(i = 1,\ldots,d-1)\}_I$, где $0 \le b < a$, $0 \le a_i < a$, при $i \in \{1,\ldots,d-1\}$. Средним числом вершин в G_a называется величина $\sigma_k(a) = \frac{1}{|G_a|}\sum_{P\in G_a}|V(P)|$. Аналогично определяется среднее число $\sigma_n(a)$ неприводимых точек в G_a. Справедливы неравенства $\sigma_n(a) \ge (4(d-1)!)^{-1}\ln^{d-1} a(4d^d)^{-1}$ и $\sigma_k(a) \ge (4(d-1)!d^d)^{-1}\ln^{d-1} a(4d^d)^{-1}$. Таким образом, при фиксированной размерности d нельзя понизить степени полиномов в правых частях неравенств (10) и (11) в [12].

4. Число вершин в целочисленной задаче о рюкзаке

В работе [8] показано, что число неприводимых точек в полиэдре задачи о рюкзаке $P = \{x : ax \le \beta, x \ge 0\}_I$, где $a \in Z^d$, $a > 0$, не превышает $\prod_{i=1}^{d}(1 + \log_2(1 + \beta/a_i))$.

Этот результат получен также в [13]: полиэдр покрывается *ящиками*, т.е. множествами вида $I(u) = \{x : u \le x \le 2u\}$, где компоненты вектора u выбираются из множества $\{0, 1, 2, 4, \ldots, 2^s, \ldots\}$. Поскольку каждый ящик содержит не более одной вершины, то справедливо неравенство $|V(P)| \le (\log_2(4\alpha))^d$, где $\alpha = \max_i\{\beta/a_i\}$.

В [14] сделана попытка усилить эту оценку и опубликовано неравенство

$$|V(P)| \le d\,\log_2(2d)(\log_2(4\alpha))^{d-1}. \qquad (2)$$

Однако, доказательство этого неравенства неверно, поскольку автор предполагал, что вершины P содержатся лишь в ящиках, пересекающих гиперплоскость, проходящую через вершины, расположенные на координатных осях. Контрпримером является полиэдр $P = \{(x,y) : 4x + 7y \le 30, x \ge 0, y \ge 0\}_I$. Ящик $I(4,2)$ содержит вершину $(4,2)$ и не пересекает прямую, проходящую через точки $(7,0)$, $(0,4)$.

Приведем строгое доказательство неравенства (2). Рассмотрим множество $P' = \{(x, x_{d+1}) : a^{\mathrm{T}}x + x_{d+1} = \beta, x \ge 0, x_{d+1} \ge 0\}$. Нетрудно видеть, что $|V(P)| = |V(P')|$. Рассмотрим также множества $T_j = \{x \in V(P') : x_j \ge [\beta/a_j]/d\}$ $j \in [1, d]$. Так как множество $V(P')$ обладает свойством разделенности, то $|T_j| \le \log_2(2d)\times$

$\times\prod_{i=1,i\neq j}^{d}\left(1+[\log_2(2+[\beta/a_i])]\right)\leq \log_2 d\cdot\log_2^{d-1}(4\alpha)$. Если для точки $p\in P$ справедливы неравенства $p_i\leq[\beta/a_i]/d$ при $i\in[1,d]$, то она принадлежит симплексу, образованному началом координат и вершинами полиэдра P на координатных осях. Следовательно, для всякого $p\in V(P)$ найдется j такое, что $p_j>[\beta/a_j]/d$. Отсюда вытекает, что $|V(P)|\leq\sum_{j=1}^{d}|T_j|\leq$ $\leq d\,\log_2(2d)(\log_2(4\alpha))^{d-1}$.

В [12] получены нижние оценки среднего числа неприводимых и крайних точек в одном классе полиэдров. Пусть K_a – класс полиэдров вида $P=\{x\geq 0: a_1x_1+....+a_{d-1}x_{d-1}+ax_d\leq b\}_I$, где $a_i\leq a, (1\leq i\leq d-1), a(a-1)\leq b$. Через $K_a(A)$ обозначим подкласс, образованный полиэдрами, у которых $b\leq A$. Средним числом вершин в $K_a(A)$ назовем величину $\omega_k(a,A)=\frac{1}{|K_a(A)|}\sum_{P\in K_a(A)}|V(P)|$, средним числом вершин в K_a – величину $\omega_k(a)=$ $=\lim_{A\to\infty}\omega_k(a,A)$. Пусть $P'=\{x: a_1x_1+...+$ $+a_{d-1}x_{d-1}+ax_d\leq res_a(b), x_i\geq 0\,(i=1,...,d-1)\}_I$. Известно (см. например, [11]), что $|V(P')|\leq|V(P)|$. Следовательно,

$$\omega_k(a,A)\geq\frac{1}{|K_a(A)|}\frac{A-a(a-1)}{a}\sum_{P'\in G_a}|V(P')|.$$

Отсюда получается неравенство $\omega_k(a)\geq$ $\geq\frac{1}{|G_a|}\sum_{P'\in G_a}|V(P')|=\sigma_k(a)$. Неравенство для среднего числа неприводимых точек выводится аналогично.

5. Верхняя оценка для произвольного полиэдра

Хотя доказательство верхней оценки в работе [14] неверно, идея этого доказательства оказалась продуктивной и была развита в работе [15].

Пусть $A\in Z^{m\times d}$, $\operatorname{rg}A=d$, $b\in Z^m$, $\varphi=\sum_{i=1}^{m}\left(\log_2(1+|b_i|)+\sum_{j=1}^{d}\log_2(1+|a_{ij}|)\right)$ и $P=\{x: Ax\leq b\}$. Для описания множества $V(P_I)=\{v_1,...,v_s\}$ используется измененная система неравенств. Каждое неравенство $a_ix\leq b_i$ заменяется на $b'_i-2^{5n^2\varphi\theta_i}\leq a'_i\,x\leq b_i-\theta_i$, где $a'_i=2a_i$, $b'_i=2b_i+1$ и $0\leq\theta_i\leq 1$ подбираются так, чтобы плоскости $b'_i-2^{j_i}=a'_i\,x$ $(i=1,...,m;$ $j=1,...,5d^2\varphi)$ находились в «общем положении». Полиэдр P' решений измененной системы разбивается на *ячейки* $K(j_1,...,j_m)=$ $=\{x: b'_i-2^{j_i}\theta_i\leq a'_i\,x\leq b'_i-2^{j_i-1}\theta_i\ (i=1,...,m;$ $j=1,...,5d^2\varphi)\}$. Каждая ячейка содержит не более одной точки из $V(P_I)$. Пусть U – множество вершин всех ячеек, $\overline{U}$ – множество точек U, принадлежащих границе P'. Следующая процедура строит инъективное отображение F множества $V(P_I)$ в множество $\overline{U}$.

1. Точки множества $U\setminus P_I$ нумеруются так, чтобы точка u_j была вершиной полиэдра $conv(P_I,u_1,\ldots,u_j)$. Таким образом, для любых $i<j$ справедливо соотношение $u_j\notin conv(P_I,$ $u_1,\ldots,u_i)$.

2. Для всякого $i\in\{1,...,s\}$ ячейка, содержащая целую вершину v_i, получает метку. Помеченные ячейки не содержатся в P_I и каждая из них имеет непустое пересечение с P_I. Каждая метка может принадлежать лишь одной ячейке, следовательно, если одна ячейка получит метку, то ячейка, у которой была эта метка, становится непомеченной. Полагаем $j=0$.

3. Увеличиваем j на единицу. Если найдется помеченная ячейка K_q, что $K_q\subseteq conv(P'_I,$ $u_1,...,u_j)$ и $K_q\not\subseteq conv(P'_I,u_1,...,u_{j-1})$, то продолжаем, иначе возвращаемся к началу пункта 3. Пусть u_p – вершина K_q, для которой верны условия $u_p\in conv(P'_I,u_1,...,u_j)$ и $u_p\notin$ $\notin conv(P'_I,u_1,...,u_{j-1})$. Тогда $j-1<p\leq j$, следовательно, u_j – вершина K_q. Отсюда следует, что ячейка K_q определяется единственным образом. Действительно, если $u_j\in K_q\cap K'$, то найдется отрезок $l\in K_q\cap K'$, содержащий u_j, следовательно, вопреки построению, u_j не будет вершиной в $conv(P'_I,u_1,...,u_j)$. Возможны два случая.

(a) $u_j\in\overline{U}$. Полагаем $F(v_q)=u_j$.

(b) $u_j \notin \overline{U}$. Пусть K' – ячейка, в которой содержатся точки $2u_j - x$, где $x \in K$, и x очень близко к u_j. Поскольку все помеченные ячейки имеют общие точки с множеством $conv(P'_I, u_1, ..., u_j)$, то K' не помечена. Теперь K' получает метку q. Повторяется пункт 3.

Отсюда получается оценка

$$\left|V(P_I)\right| \le \left|\overline{U}\right| \le 2mC_{m-1}^{d-1}\left(5d^2\varphi + 1\right)^{d-1}.$$

6. Примеры полиэдров с известной нижней оценкой числа вершин

В работе [14] описан класс полиэдров в R^3, с известной нижней оценкой числа вершин. При построении примеров используется поле разложения $F = Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ многочлена $f(t) = t^3 + t^2 - 2t - 1$. Корнями $f(t)$ являются числа $\alpha_k = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{7}\right)$ $(k = 1, 2, 3)$, рассмотренные в [16] в связи с изучением экстремальных свойств тернарных форм.

Теорема 1. *Пусть P – множество решений системы*

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 > 0, \\ \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_1 x_3 > 0, \\ \alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 > 0, \end{cases} \tag{3}$$

удовлетворяющих неравенству $x_1 + x_2 + x_3 \ge -L$, тогда число вершин в P_I не меньше $O(\log^2 L)$.

Доказательство основано на следующих предложениях.

Предложение 6. Для любого $x \in P_I$ выполняется неравенство

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\alpha_2 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_3) \times$$
$$\times (\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3) \ge 1.$$

Предложение 7. Любая точка, принадлежащая границе множества $\{x \in R^d : x \ge 0, x_1 \cdots x_d \ge 1\}$, является крайней.

Предложение 8. Любую единицу поля F можно представить в виде $\pm \alpha_1^{s_1} \alpha_2^{s_2}$.

Предложение 9. Решение системы

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1^{s_1} \alpha_2^{s_2} > 0, \\ \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_1 x_3 = \alpha_2^{s_1} \alpha_3^{s_2} > 0, \\ \alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 = \alpha_3^{s_1} \alpha_1^{s_2} > 0, \\ \alpha_1^{s_1} \alpha_2^{s_2} + \alpha_2^{s_1} \alpha_3^{s_2} + \alpha_3^{s_1} \alpha_1^{s_2} \le L \end{cases} \tag{4}$$

является крайней точкой для P_I, следовательно, число вершин в P_I не меньше числа неотрицательных пар (s_1, s_2), удовлетворяющих неравенству $3\alpha_2^{2(s_1+s_2)} \le L$, т.е. не меньше $O(\log^2 L)$.

Полное описание выпуклой оболочки множества целых решений системы (3) получено в [17]. Много интересных результатов о выпуклой оболочке множества целых решений специальных систем неравенств с иррациональными коэффициентами можно найти в работах [17–20].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00552).

Список литературы

1. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. М.: Наука, 1987.
2. Rubin D.S. On the unlimited number of faces in integer hulls of linear programs with a single constraint. // Operations Research. 1970. V.18, № 5. P. 940–945.
3. Веселов С.И., Шевченко В.Н. О числе экстремальных точек квадратной системы линейных неравенств. 10 с. Рук. деп. в ВИНИТИ, № 450-79.
4. Веселов С.И., Чирков А.Ю. Оценки числа вершин целых полиэдров // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2007. Серия 2. Т. 14, № 2. С. 14–31.
5. Веселов С.И. Нахождение выпуклой оболочки целых точек полиэдра на плоскости. Горький: Горьк. ун-т., 1988. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 07.12.88, № 8624-В88.
6. Harvey W. Computing two-dimensional integer hulls // SIAM J. Comput. 1999. V. 28, № 6. P. 2285–2299.
7. Balza-Gomez H., Moreau J-M., Michelucci D. Convex Hull of Grid Points below a Line or a Convex Curve // Source Lecture Notes In Computer Science. Archive Proc. of the 8th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery. 1999. V. 1568. P. 361–374.
8. Шевченко В.Н. О числе крайних точек в целочисленном программировании // Кибернетика. 1981. № 2. С. 133–134.
9. Шевченко В.Н. Алгебраический подход в целочисленном программировании // Кибернетика. 1984. № 4. С. 36–41.
10. Шевченко В.Н. Верхние оценки числа крайних точек в целочисленном программировании //

Математические вопросы кибернетики. 1992. Вып. 4. С. 65–72.

11. Шевченко В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995. 92 с.

12. Веселов С.И. Нижняя оценка среднего числа неприводимых и крайних точек в двух задачах дискретного программирования. Горький: Горьк. ун-т, 1984. 8 с. Деп. в ВИНИТИ 3.06.84, № 619-В84.

13. Hayes A.S., Larman D.C. The vertices of the knapsack polytope // Discrete Applied Mathematics. 1983. N. 6. P. 135–138.

14. Morgan D.A. Upper and lower bound results on the convex hull of integer points in polyhedra // Mathematika. 1991. V. 38. P. 321–328.

15. Cook W., Hartmann M., Kannan R., and McDiarmid C. On integer points in polyhedra // Combinatorica. 1992. 12(1). P. 27–37.

16. Davenport H. On the product of three homogeneous linear forms // Proc. London Math. Soc. 1938. V. 44. P. 412–431.

17. Брюно А.Д., Парусников В.И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Матем. заметки. 1994. 56:4. С. 9–27.

18. Korkina E.I. The simplest 2-dimensional continued fraction // Journal of Mathematical Sciences. 1996. V. 82, N. 5. P. 3680–3685.

19. Karpenkov O.N. On constructing multidimensional periodic continued fractions // arXiv:math/0411031v1 1 Nov 2004.

20. Barany I.,Howe R., Lovasz L. On integer points in polyhedra: a lower bound // Combinatorica. 1992. V. 12, N. 2. P. 135–142.

21. Золотых Н.Ю. On the number of vertices in inte-

ON VERTICES OF IMPLICITLY GIVEN INTEGER POLYHEDRA

S.I. Veselov, A.Yu. Chirkov

A review is given of results of convex hull vertices of all polyhedron integral points. Most of the results are followed by brief proofs.

ger linear programming problems // http://www.uic.nnov.ru/~zny/.