1. Баланс энергии поверхностных волн. Затухание волн на чистой воде
2. Баланс энергии поверхностных волн. Затухание волн на воде, покрытой нерастяжимой пленкой

## Уравнение баланса энергии волновых возмущений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \qquad \times u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \qquad \times w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Сложим 1-е и 2-е уравнения, проинтегрируем по $z$ от -∞ до ζ и усредним по $x$.

## Уравнение баланса энергии волновых возмущений

$$\left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{w^2}{2}\right)dz \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\rho}\int_{-\infty}^{\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial x}(up)+\frac{\partial}{\partial z}(wp)\right)dz \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{\rho}\int_{-\infty}^{\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx}+w\sigma_{xz})+\frac{\partial}{\partial z}(u\sigma_{xz}+w\sigma_{zz})\right)dz \right\rangle -$$

$$- \left\langle \frac{1}{\rho}\int_{-\infty}^{\zeta}\left(\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}+\sigma_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}+\sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz \right\rangle -$$

$$- \left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} wg\,dz \right\rangle$$

Во 2-м порядке по амплитуде $\zeta \to 0$

$$\left\langle \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial}{\partial x} ...dz \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \int_{-\infty}^{0} ...dz \right\rangle = 0$$

Пренебрегая атмосферными давлением и вязким напряжением

$$w\left(p-\sigma_{zz}\right)\Big|_{-\infty}^{\zeta} = 0$$

$$u\sigma_{xz}\Big|_{-\infty}^{\zeta} = 0$$

Принимая во внимание выражения для $\sigma_{ij}$, имеем для второго слагаемого в ПЧ

$$Vis = -\nu \left\langle \int_{-\infty}^{0} \left[ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] dz \right\rangle < 0$$

Потенциальная энергия

$$\left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} wgdz \right\rangle = \left\langle \int_{0}^{\zeta} wgdz \right\rangle = g\langle w\zeta \rangle = g\left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial t} \zeta \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} g\langle \zeta^2 \rangle$$

Уравнение баланса энергии

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left( \int_{-\infty}^{\zeta} \left( \frac{\langle u^2 \rangle}{2} + \frac{\langle w^2 \rangle}{2} \right) dz + \frac{1}{2} g\langle \zeta^2 \rangle \right) = Vis}$$

**<u>Декремент волн на чистой воде</u>**

Для гармонической волны

$$\zeta = a\cos(\omega t - kx)$$

$$w = -\omega a \exp(kz)\sin(\omega t - kx)$$

$$u = a\omega \exp(kz)\cos(\omega t - kx)$$

$$E = \frac{a^2\omega^2}{2k} = \frac{a^2 g}{2}$$

$$Vis = -2\nu k^2 \frac{a^2\omega^2}{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{a^2\omega^2}{2k} = -2\nu k^2 \frac{a^2\omega^2}{k} \qquad a = a_0\exp(-\gamma t)$$

$$\gamma = 2\nu k^2$$

## <u>Декремент волн на воде, покрытой нерастяжимой пленкой</u>

Основные уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\Delta u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\Delta w - g$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Граничные условия

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w\big|_{z=0}$$

$$p - 2\nu\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{z=0} = p_a$$

$$u\big|_{z=0} = 0$$

$$w\big|_{z=-H} = 0$$

$$u\big|_{z=-H} = 0$$

Основные уравнения в терминах завихренность-функция тока

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}; w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Граничные условия

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \Delta \Omega; \quad \Omega = -\Delta \psi \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \psi|_{z \to \infty} \to 0$$

Вихревая и потенциальная части

$$\psi = \Phi + \Psi$$

$$\Phi = A \exp(kz); \Psi = B \exp(mz); m^2 = -i\omega / \nu; |m| >> k$$

Из ГУ прилипания на поверхности $\left.\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \to B = -Ak / m << A$

Из ГУ непротекания на поверхности $\left.\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{z=0} = 0 \to \Phi = a\omega / k \exp(kz);$

$$\Psi = -a\omega / m \exp(mz)$$

Завихренность $\Omega = -a\omega m \exp(mz)$

Работа вязких сил

$$Vis = -\nu \left\langle \int_{-\infty}^{0} \left[ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\underline{\frac{\partial u}{\partial z}} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] dz \right\rangle \approx$$

$$\approx -\nu \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 dz = -\nu \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} a^2 \omega^2 |m|^2 \exp(2z \operatorname{Re} m) dz = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} a^2 \omega^3$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{1}{4} k\omega \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}}$$

Сравнение с декрементом затухания волн на чистой воде $\gamma_{film} / \gamma_0 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{c}{k\nu}} = \operatorname{Re}^{1/2} >> 1$